Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Трушина Ауріка Аурелівна

ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИНИ НЕПОВНИХ СУМ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:

________________ Ю.В. Хворостіна,

кандидат фізико-математичних наук,
доцент

«____» _________________ 2021 року

Виконавець:

________________ А.А. Трушина

«____» _________________ 2021 року

Суми 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Поняття множини неповних сум (підсум) ряду не є звичайно одним з ключових понять класичної (традиційної) теорії рядів. Але попри це воно чудово відображає деякі геометричні властивості ряду і тому його вивчення дозволяє вагомо збагатити теорію рядів. Разом з цим поняття множини неповних сум тісно пов’язане із різними частинами сучасної математики. Наведемо деякі з них.

Множина неповних сум ряду, як об’єкт метричного простору R^1, може бути представлено як лінійний фрактал або множина із фрактальними локальними властивостями. Тому вона може бути об’єктом, цікавим для фрактальної теорії (фрактального аналізу й фрактальної геометрії). У теорії ймовірностей (теорії розподілів випадкових величин) множини підсум розглядають у ролі спектрів і носіїв розподілів. Важливу роль та значення множини підсум рядів мають у теорії так званих згорток Бернуллі (симетричних і несиметричних).

Множини підсум рядів відіграють вагому роль у метричній і ймовірнісній теоріях чисел, що базуються на двосимвольних системах кодування чисел за допомогою рядів. Це далеко не повний список напрямів сучасних досліджень, де фігурують множини підсум рядів. Як окремий об’єкт дослідження множина підсум абсолютно збіжного числового ряду фігурує в дослідженнях ще з 1914 року, коли були опубліковані роботи японського математика С. Какея [4] (“Про підсуми нескінченних рядів”), основним результатом якої була одна з основних теорем (Теорема 1).

Саме неповна досліdженість, відсутність систематизації окремих отриманих науковцями результатів підштовхнула нас до дослідження даних теми.

Не можна не згадати дослідження в цій сфері професора Миколи Вікторовича Працьовитого та ще деяких українських науковців (Торбін Г.М., Савченко І.О, Гетьман Б.І., Хворостіна Ю.В. та інші) [9, 10, 11, 14, 17 та інші].

Не дивлячись на активне дослідження питання множини неповних сум цими науковцями, воно є ще не повністю розглянутим та закритим.

Метою дослідження з даної теми є опис структурних, фрактальних та тополого-метричних властивостей, які пов’язані із фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича, множин підсум деяких класів збіжних числових рядів, що володіють властивістю однорідності, розгляд окремих прикладів знаходження множини неповних сум числових рядів.

Об’єкт дослідження: Множина неповних сум збіжного числового ряду.

Предмет дослідження: Тополого-метричні та фрактальні властивості множин підсум числових рядів.

Завдання дослідження:

- опрацювати науково-методичні джерела та навчальну літературою за напрямками дослідження;
- розкрити сутність поняття множини неповних сум (підсум) числових рядів;
- проаналізувати властивості множин неповних сум абсолютно збіжних числових рядів;
- дослідити тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум знакододатних та знакозмінних рядів Люрота, ряду Енгеля, рядів Остроградського 1-го та 2-го видів;
- описати застосування тополого-метричних та фрактальних властивостей множин неповних сум числових рядів у теорії ймовірностей.

Наукова новизна та практичне значення одержаних результатів: систематизовано теоретичний матеріал з теми, що значно спрощує подальші дослідження з теми; наведено алгоритми та приклади знаходження множини неповних сум окремих числових рядів; продемонстровано обчисленння розмірності Гаусдорфа-Безиковича для деяких класів рядів.

Апробація результатів та публікації. Загалом нами було опубліковано 3 тез та 1 статтю, в яких представлено сновні результати та етапи дослідження:

1. Тулбурі А.А. Множини неповних сум деяких збіжних числових рядів/Ю.В. Хворостіна, А.А. Тулбурі //Наукова діяльність як шлях

формування професійних компетентностей майбутнього фахівця (НПК-2020): матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 4 грудня 2020 р., м.Суми. – Суми: ФОП Цьома С.П.,2020. – С. 149-150.

2. Тулбурі А.А. Ряд Енгеля як засіб представлення дробової частини числа //Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. – Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2021. – Випуск 15. – Том 2 – С. 23-24.
3. Тулбурі А.А. Подання чисел рядами острошрадського 1-го та 2-го виду //Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. – Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2021. – Випуск 15. – Том 1. – С. 45-48.
4. Трушина А.А. Тополого-метричні властивості множини неповних сум деякого збіжного числового ряду/Ю.В. Хворостіна, А.А. Трушина// Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця (НПК-2021): матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 9 грудня 2021 р., м.Суми. – Суми: ФОП Цьома С.П.,2021.

Структура та обсяг роботи. Кваліфікаційна робота складається з 2 розділів, вступу, висновків та списку використаних джерел, що складається з 27 пунктів; обсяг роботи представлено 59 сторінками друкованого тексту.

РОЗДІЛ 1. МНОЖИНИ НЕПОВНИХ СУМ ЗБІЖНИХ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Поняття множини неповних сум (підсум) збіжного числового ряду досліджується науковцями майже століття. З точки зору вивчення математики воно є досить новим та не повністю досліджене. Але не дивлячись на це, поняття множини підсум числового ряду тісно пов’язане з сучасними дослідженнями в різних напрямах математики.

1.1. Неповна сума та множина підсум ряду

Розглянемо числовий ряд, для членів якого виконується умова $a_n \geq a_{n+1} > 0, \forall\, n \in N$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + r_n, \qquad (1)$$

де

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Нехай M – довільна підмножина множини N. Число

$$x(M) = \sum_{n \in M} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \qquad \text{де } \varepsilon_n = \begin{cases} 1, \text{якщо } n \in M, \\ 0, \text{якщо } n \,\overline{\in}\, M, \end{cases}$$

називається підсумою або неповною сумою ряду (1) [10, с. 210]. Множину всіх неповних сум ряду позначають так :

$$E\{a_n\} \equiv \left\{x : x = \sum_{n \in M} a_n, M \in 2^N\right\} = \left\{x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n,\ (\varepsilon_n) \in A^{\infty}, A = \{0,1\}\right\}.$$

Таким чином, всі часткові суми $S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k$ і залишки $r_n \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ ряду (1) є його неповними сумами.

Приклад 1. Знайти множину підсум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Загальний член $a_n = \frac{1}{2^n} = 2^{-n}$. За означенням, множиною неповних сум буде відрізок [0;1], тобто E$\{2^{-n}\}$ = [0, 1].

1.2. Властивості множини неповних сум абсолютно збіжного числового ряду

Розглянемо властивості ряду (1) за умови, що він є абсолютно збіжним, тобто збіжним є і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Тоді множина підсум даного ряду – досконала та може дорівнювати як нуль-множині Лебега, так і множині додатної міри, а тому вона може бути лініним фракталом. Означимо зв'язок між множиною підсум абсолютно збіжного ряду (1) та множиною $E\{|a_n|\}$ неповних сум ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (2).$$

Для цього розглянемо наступну лему.

Лема 1. Якщо ряд (1) – абсолютно збіжний, то множини підсум $E\{a_n\}$ та $E\{|a_n|\}$ є ізоморфними.

Для подальшого аналізу фрактальних та тополого-метричних властивостей множини неповних сум розглянемо теорему, яку було опубліковано в роботі японського математика Соічі Какея в 1914 році (і незалежно Г. Горнич в 1941 р. та П. Кесава Менон в 1948 р.).

*Теорема 1***.** [4] Множина неповних сум $E\{a_n\}$ абсолютно збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є :

1) досконалою множиною;

2) скінченним об’єднанням відрізків тоді і лише тоді, коли

$$a_n \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

для всіх n, починаючи з деякого номеру ($E\{a_n\}$ - відрізок тоді і тільки тоді, коли $a_n \leq r_n$ для всіх $n \in N$);

3) гомеоморфною класичній множині Кантора (ніде не щільна множина), якщо

$$a_n > a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$$

Приклад 2. Знайти множину неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$,

$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$;

$r_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots$;

$r_n = \frac{1}{n+1}$.

Порівняємо a_n і r_n. Для цього знайдемо їх різницю:

$$a_n - r_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1-n}{n(n+1)} \leq 0$$

З цього випливає, що $a_n \leq r_n$, для всіх $n \in N$. Отже, за теоремою Какея, множиною неповних сум даного числового ряду буде відрізок [0;1].

Зауваження 1. Наведену вище теорему не можна застосувати до дослідження тополого-метричних властивостей множин підсум рядів, у яких послідовність членів (a_n) – не монотонно незростаюча, тобто умова

$$a_n > a_{n+1} > 0, \forall n \in N \qquad (3)$$

не виконується для всіх $n \in$ N.

Приклад 3. Знайти множину неповних сум даного числового ряду:

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!} + \cdots$$

Умова $a_n > r_n$ виконується для $\forall n = 2k$, а нерівність $a_n > r_n$ – для $\forall n = 2k+1$. І тому теорема 1 (не враховуючи умову монотонності членів ряду) не дає можливості точну інформації про множину неповних сум даного ряду. Проте, якщо упорядкувати члени даного ряду, нерівність $a_n > r_n$ виконуватиметься для всіх $n \in$ N. Тому множина його неповних сум є гомеоморфною класичній множині Кантора [11, с.27].

Зауваження 2. Оскільки розглянутий числовий ряд (1) є абсолютно збіжним, то від перестановки членів ряду множина його підсум не зміниться.

Тому надалі будемо вважати (без втрати загальності), що для членів ряду (1) умова (3) виконується.

У 1988 р. Дж. Ґатрі і Дж. Німан представили приклад ряду, для якого теорема 1 є не точною. Було розглянуто ряд :

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{2}{4^2}+\cdots \qquad (4)$$

Для даного ряду, нерівностіі $a_n > r_n$ та $a_n \leq r_n$ виконуються для нескінченних множин індексу n, а множина T підсум ряду (4) включає в себе відрізок $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ і не являється скінченним об'єднанням відрізків.

Множину T означимо наступним чином:

$$T \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n}$$

де C – класична множина Кантора, G_k є об'єднанням всіх центральних третин, що були вилучені з відрізка [0, 1] на k-му етапі побудови множини C. Множина гомеоморфна до множини Т називається канторвалом.

У даній роботі автори сформулювали і наступну теорему.

Теорема 2. [2, с. 715] Множиною $E\{a_n\}$ підсум збіжного числового знакододатного ряду (1) буде одна з наступних:

1) відрізок або скінченне об'єднання відрізків;

2) гомеоморфна множині Кантора;

3) гомеоморфна множині Т неповних сум ряду (4), тобто канторвал.

Для подальшого вивчення властивостей множини $E\{a_n\}$ підсум ряду (1), потрібно ще ввести та розглянути поняття циліндра і циліндричного відрізка.

Означення 1. Нехай (c_1, c_2, ..., c_m) є фіксованим впорядкованим набором, що складається з нулів та одиниць. Тоді циліндром із основою $c_1, c_2, \ldots, c_m$ ($c_i \in \{0,1\}$) рангу m називається множина $\Delta'_{c_1,c_2,\ldots,c_m}$, що включає всі підсуми ряду (1) виду

$$\sum_{n=1}^{m} c_n a_n + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n\,, \quad \text{де } \varepsilon_n \in \{0,1\}.$$

Крім того, має місце рівність:

$$\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}1} = a_n \oplus \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0}, \quad \text{для } \forall n \in N.$$

$a_n \oplus \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0}$ – множина, що є арифметичною (векторною) сумою.

Означення 2. Циліндричним відрізком із основою $c_1, c_2, \ldots c_m$ ($c_i \in \{0,1\}$) рангу m називається відрізок

$$\Delta_{c_1\ldots c_m} = \left[\inf \Delta'_{c_1\ldots c_m}, \sup \Delta'_{c_1\ldots c_m}\right] = \left[\sum_{n=1}^{m} c_n a_n, r_n + \sum_{n=1}^{m} c_n a_n\right].$$

Розглянемо деякі *властивості циліндричних множин*, що виходять з даного означення:

1. $\Delta'_{c_1\ldots c_m} \subset \Delta_{c_1\ldots c_m}, \inf \Delta_{c_1\ldots c_m} = \inf \Delta'_{c_1\ldots c_m}, \sup \Delta_{c_1\ldots c_m} = \sup \Delta'_{c_1\ldots c_m}$.

2. $\Delta'_{c_1\ldots c_m} = \Delta'_{c_1\ldots c_m 0} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_m 1}$.

3. Діаметр циліндра залежить тільки від його рангу, а не від основи:

$$\left|\Delta'_{c_1\ldots c_m}\right| = r_m \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

4. Для довільної послідовності (c_m), що складається з нулів та одиниць, справедлива рівність:

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_m} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta_{c_1\ldots c_m\ldots} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m a_m = x \in E\{a_n\} \subset [0, r_n].$$

5. Виконується

$$E\{a_n\} \subset F_{m+1} \subset F_m \text{ для } m \in N, \text{де } F_m = \bigcup_{c_i \in \{0,1\}, i=\overline{1,m}} \Delta'_{c_1\ldots c_m}.$$

6. Має місце рівність

$$E\{a_n\} = \lim_{m\to\infty} F_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m.$$

7. Умова

$$\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0} \cap \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}1} = \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0111} = \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}1000}, n = 1,2,3,\ldots, \qquad (5)$$

рівносильна рівності

$$a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}, \qquad n = 1,2,3,\ldots . \quad (6)$$

8. Множини $\Delta'_{c_1 \dots c_m}$ і $\Delta'_{(1-c_1)\dots(1-c_m)}$ є симетричними відносно середини відрізка $[0, r_0]$, адже з $x' \in \Delta'_{c_1 \dots c_m}$ випливає, що $x' = r_0 - x \in \Delta'_{(1-c_1)\dots(1-c_m)}$.

9. Множини $\Delta'_{c_1 \dots c_m 0}$ $\Delta'_{c_1 \dots c_m 1}$ будуть симетричні відносно середини циліндричного відрізка $\Delta_{c_1 \dots c_m}$ [25, с. 86].

Спираючись на останні дві властивості циліндричних множин, можна сформулювати наступне твердження.

Лема 2. Множина підсум числового ряду (1) – симетрична відносно середини відрізка $[0, r_0]$.

Лема 3. Множина $[0, r_0]$ не містить інтервали $(r_n; a_n)$ і $(r_0 - a_n; r_0 - r_n)$, за умови що для ряду (1) справджується нерівність $a_n > r_n$ для деякого n.

Наслідок 1. Нехай для ряду (1) нерівність $a_n > r_n$ виконується на всій множині значень індексу n, тоді множина $E\{a_n\}$ не буде являтися скінченним об'єднанням відрізків.

Теорема 2. Множена підсум числового ряду (1) є континуальною [24,с.32].

Доведення. Для доведення даної теореми перш за все поставимо кожній підсумі $x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}$ число

$$y = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots \equiv \Delta^2_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}, \quad \alpha_n \in A = \{0,1\}.$$

Таким чином представлене відображення не є бієктивним тому, що дві різні підсуми x та x' можуть набувати одних і тих самих значень. Але бієкцію можна отримати за рахунок прорідження ряду. Оскільки $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то можна виділити підряд даного ряду (1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \tilde{r}_n, \qquad b_1 > b_2 > \dots > b_n > b_{n+1} > \dots,$$

для якого, нерівність $b_n > \tilde{r}_n$ виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Кожній неповній сумі $\tilde{r}$ утвореного ряду можна поставити у відповідність єдину послідовність з $L = A \times A \times \dots = A^{\infty}$:

$$\tilde{x} = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots} \leftrightarrow y = \Delta^2{}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}.$$

Якщо $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$, то і $\left(\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}, \dots, \varepsilon_n^{(1)}\right) \neq \left(\varepsilon_1^{(2)}, \varepsilon_2^{(2)}, \dots, \varepsilon_n^{(2)}\right)$, і навпаки. Нехай j – номер перших відмінних цифр $\varepsilon_j^{(1)}$ і $\varepsilon_j^{(2)}$ послідовностей

$$\left(\varepsilon_n^{(1)}\right) = \left(\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}, \dots, \varepsilon_{j-1}^{(1)}, 1, \varepsilon_{j+1}^{(1)}, \dots\right), \left(\varepsilon_n^{(2)}\right) = \left(\varepsilon_1^{(2)}, \varepsilon_2^{(2)}, \dots, \varepsilon_{j-1}^{(2)}, 1, \varepsilon_{j+1}^{(2)}, \dots\right),$$

де $\varepsilon_n^{(1)} = \varepsilon_n^{(2)}, n = \overline{1, \jmath - 1}$. Різниця

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = \varepsilon_1^{(1)} a_1 + \dots + \varepsilon_{j-1}^{(1)} a_{j-1} - \varepsilon_1^{(2)} a_1 + \dots + \varepsilon_{j-1}^{(2)} a_{j-1} + a_j - \left(\tilde{r}_j\right) > 0.$$

Отже, множина підсум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – континуальна. Враховуючи, що для кожної підсуми $x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}$ ставиться у відповідність одна послідовність нулів та одиниць (ε_n), якій відповідає деяке число $y = \Delta^2{}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$, то множина неповних сум $E\{a_n\}$ не більша ніж континтинуальна.

Із існування континуальної підмножини множини $E\{a_n\}$ випливає, що і сама множина $E\{a_n\}$ є континуальною. Таким чином теорему доведено.

Лема 4. Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$- це розбіжний знакододатний ряд і $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, тоді кожне додатне число ряду можна подати у виді нескінченної кількості різних неповних сум даного ряду.

Теорема 3. Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \; a_n > 0, \qquad a_n \to 0.$$

Тоді для ∀ $K > 0$ існує континуальна множина чисел $x \in (0,1\rangle$ і таких, що $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(x) a_n = K$.

Наведемо теорему, яка демонструє зв'язок між множинами неповних сум та видами відповідних рядів.

Теорема 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є

1) швидко розбіжним рядом тоді і тільки тоді, коли множина $E\{b_n\} = [0; +\infty)$;

2) умовно збіжним тоді і тільки тоді, коли $E\{b_n\} = R$;

3) абсолютно збіжним тоді і тільки тоді, коли $E\{b_n\}$ є обмеженою.

1.3. Тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум деяких знакододатних та знакозмінних рядів

Для більш детальної характеристики множини нульової міри Лебега використаємо теоретичний апарат теорії фракталів (фрактальний аналіз і фрактальна геометрія).

Розглянемо деякі теоретичні основи з теорії фракталів, а саме означення $\mathcal{H}^{\alpha}-$міри Гаусдорфа і розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини $E \subset \mathbb{R}^1$, які дають змогу більш тонко охарактеризувати "масивність" множин підсум у випадках їх нуль-мірності (з точки зору міри Лебега).

Нехай E – це обмежена підмножина метричного простору (X, ρ), $d(E)$ – це діаметр множини E, тобто

$$d(E) \equiv \sup\{\rho(x, y) \colon x, y \ \in \ E\}.$$

Діаметром множини E буде найбільша відстань між точками, що належать множині E.

Зауваження 3. Діаметр лінійної множини E позначимо через $|E|$.

Означення 3. Нехай ε – додатна константа. Тоді скінченне чи зчисленне сімейство $\{E_j\}$ множин називається ε-покриттям множини E, у випадку, якщо $E \subset \bigcup_j E_j$, де

$$d(E_j) \leq \varepsilon, E_j \in X, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Означення 4. Нехай дано α і ε – додатні числа, $\alpha{-}\varepsilon$-мірою Гаусдорфа обмеженої множини Е називають

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}(E) \equiv \inf_{d(E_j) \leq \varepsilon} \left\{ \sum_j d(E_j)^{\alpha} \right\},$$

де інфімум розглядається за всіма не більш ніж зчисленними ε-покриттями $\{E_j\}$ множинами $E_j \in X$ множини E.

Означення 5. Нехай дано α — фіксоване додатне число, тоді α–вимірною мірою ($\mathcal{H}^{\alpha}$-мірою) Гаусдорфа множини E називають значення функції цієї множини, що визначається рівністю

$$\mathcal{H}^{\alpha}(E) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}(E) = \sup_{\varepsilon>0}\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}(E)$$

і в цьому випадку точну нижню грань визначають за всіма можливими покриттями множини M відрізками E_j, в яких діаметри $d(E_i)$ не перевищують числа ε.

Наведемо деякі властивості α-мірної міри Гаусдорфа. Для цього зафіксуємо $\beta > \alpha > 0$.

1. Якщо $\mathcal{H}^{\alpha}(E) < 0$, то $\mathcal{H}^{\beta}(E) = 0$.

2. Якщо, $\mathcal{H}^{\beta}(E) > 0$, то $\mathcal{H}^{\alpha}(E) = \infty$.

3. Якщо $E \subset E'$, то $\mathcal{H}^{\alpha}(E) \leq \mathcal{H}^{\alpha}(E')$.

4. Якщо $E \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$, то $\mathcal{H}^{\alpha}(E) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^{\alpha}(E_j)$

Означення 6. [13, с.43-44] Розмірністю Гаусдорфа-Безиковича множини E називають таке невід'ємне число $\alpha_0(E)$:

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha: \mathcal{H}^{\alpha}(E) = +\infty\} = \inf\{\alpha: \mathcal{H}^{\alpha}(E) = 0\}$$

Розглянемо основні властивості розмірності Гаусдорфа-Безиковича:

1. $\alpha_0(E) \ = \ 0$ для будь-якої не більш ніж зчисленної множини E;

2. якщо $E_1 \subset E_2$, то $\alpha_0(E_1) \leq \alpha_0(E_2)$;

3. якщо E_1 і E_2 – афінно еквівалентні, тобто геометрично подібні, множини, то $\alpha_0(E_1) = \alpha_0(E_2)$;

4. $\alpha_0(\bigcup_n E_n) = \sup_n \alpha_0(E_n)$.

З того, що α-вимірна міра Гаусдорфа, розглянута в просторі R^1, при α = 1 є зовнішньою мірою Лебега, випливає, що розмірність Гаусдорфа-Безиковича множин з додатною мірою Лебега дорівнює 1.

Означення 7. [5, с. 141] Будь-яка континуальна обмежена множина простору R^1, що має тривіальну (тобто дорівнює 0 або ∞) $\mathcal{H}^{\alpha}$-міру Гаусдорфа, в якій порядок α дорівнює топологічній розмірності, називається *фраталом*.

Означення 8. Множини, які є нульової міри Лебега, називають суперфрактальними, якщо розмірність Гаусдорфа-Безиковича дорівнює 1, а ось континуальні множини з нульовою розмірністю Гаусдорфа-Безиковича називають аномально фрактальними.

Самоподібні фрактали – найпростіший клас фракталів.

Означення 9. Перетворенням подібності називають таке відображення g одновимірного метричного простору на себе, при якому відстані між точками змінюються в одному й такому ж самому відношенні $k > 0$, де k – коефіцієнт подібності.

Тоді множина $E \subset R^1$ називається подібною множині $E' \subset R^1$ з коефіцієнтом подібності $k > 0$ тоді і тільки тоді, коли існує відображення $g: E \rightarrow E'$ таке, що

$$\frac{|g(x_2) - g(x_1)|}{|x_2 - x_1|} = k \quad \text{для всіх}\, x_2, x_1 \in E.$$

Символьно позначається так: $E \sim E'$.

Означення 10. Самоподібною називається не порожня обмежена множина E простору R^1, якщо

$$\begin{cases} 1)\ E = E_1 \cup \ldots \cup E_n, n > 1, \\ 2)\ E \sim E_i, i = \overline{1, n}, \\ 3) \alpha_0(E_i \cap E_j) < \alpha_0(E)\ \ \forall i \neq j, \end{cases}$$

тобто, якщо множину можна подати у вигляді скінченного об’єднання підмножин E_i, які подібні Е, то множина E називається самоподібною, причому розмірність Гаусдорфа-Безиковича перетину таких двох довільних підмножин менша, ніж розмірність самої множини E [12, с.101].

Найменше число n називається показником самоподібності, а законом самоподібності (K, n) для $K = \{k_1, \ldots, k_n\}$.

Означення 11. Якщо E – самоподібна множина, для якої виконується закон самоподібності (K,n), $K = \{k_1, \ldots, k_n\}$, то додатне число α, яке є коренем рівняння

$$k_1^x + \cdots + k_n^x = 1, \qquad (7)$$

називають самоподібною розмірністю множини E і позначають $\alpha_s(E)$.

Дане рівняння має єдиний корінь, тому означення є коректним.

Лема 5. Якщо існує таке α, що $0 < \mathcal{H}^{\alpha} < \infty$, то самоподібна розмірність множини E (самоподібна) рівна розмірності Гаусдорфа-Безиковича, тобто $\alpha_s(E) = \alpha_0(E)$.

Теорема 5. Якщо E – замкнена обмежена самоподібна множина простору R^1, то її самоподібна розмірність рівна розмірності Гаусдорфа-Безиковича.

Після розгляду основних понять, перейдемо до фрактальних властивостей множини підсум числового ряду. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$— збіжний знакододатний числовий ряд і нехай $a_n > r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ для всіх $n \in N$. З цього випливає, що$\frac{r_{n+1}}{r_n} < \frac{1}{2}$, $n = 1,2, \dots$.

На проміжку $(0, \alpha]$ розглянемо функцію $f(x)$ так: $f(0) = 0$ і для $0 < x \leq \alpha$ нехай $f(x) = -\log_x 2$.

Теорема 6. Має місце наступна подвійна нерівність:

$$f(l) \leq \alpha_0(E\{a_n\}) \leq f(L),$$

де

$$l = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n}, \qquad L = \overline{\lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n}}$$

і функція $f(x)$ визначена на інтервалі $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Наслідок 2. Якщо існує $l^* = \lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n}$, то $\alpha_0(E\{a_n\}) = f(l^*)$. Отже, для $l^* > 0$ виконується рівність $\alpha_0(E\{a_n\}) = -\log_{l^*} 2$.

За результатами теореми 6 легко отримати співвідношення між $\alpha_0(E\{a_n\})$ та величинами членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ у двох “крайніх” випадках.

Теорема 7. Нехай $\alpha_0(E\{a_n\}) = 0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує нескінченна кількість чисел $n \in N$ таких, що $a_{n+1} < \varepsilon a_n$.

Теорема 8. [21, с.135] Нехай $\alpha_0(E\{a_n\}) = 1$. Тоді для будь-якого $q \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, існує нескінченна кількість чисел $n \in N$ таких, що $a_{n+1} > q a_n$.

Введемо позначення: $\delta_n \equiv \frac{a_n}{r_n}$.

Теорема 9. Якщо для деякого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нерівність $\delta_n \geq 1$ виконується для усіх достатньо великих $n \in N$, тоді розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини підсум $E\{a_n\}$ дорівнює

$$\alpha_0(E\{a_n\}) = \left[\lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log_2(\delta_k + 1)\right)\right]^{-1}.$$

Наслідок 3. Якщо виконуються умови теореми 9 та $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta$, тоді розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум $E\{a_n\}$ дорівнює

$$\alpha_0(E\{a_n\}) = log\,_2^{-1}(\delta + 1).$$

Наслідок 4. Якщо виконуються умови теореми 9 та $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 1$, тоді $\alpha_0(E\{a_n\}) = 1$ а множина $E\{a_n\}$ є суперфрактальною.

Наслідок 5. Якщо виконуються умови теореми 9 та $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \infty$, тоді $\alpha_0(E\{a_n\}) = 0$ а множина $E\{a_n\}$ є аномально фрактальною.

Теорема 10. Для довільної числової послідовності (a_n) розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини підсум $E\{a_n\}$ задовольняє нерівність

$$\alpha_0(E\{a_n\}) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \frac{n \ln 2}{-\ln r_n}.$$

Якщо додатково ще і $a_n \geq r_n$ для всіх достатньо великих k, тоді

$$\alpha_0(E\{a_n\}) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{n \ln 2}{-\ln r_n}.$$

Розглянемо ще декілька прикладів знаходження множини неповних сум числових рядів.

Нехай дано числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

Шляхом деяких перетворень отримаємо, що $S_n = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$, при $n \to \infty$ $S = \frac{3}{4}$. Отже ряд збіжний.

Знайдемо

$$r_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+5)} + \cdots$$

Спробуємо розписати кожен з доданків

$$\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+3)} = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = 2 * \frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

Тоді

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+3)}\right)$$

і так можна розкласти кожен доданок.

$$r_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+3)} + \frac{1}{(n+2)} - \frac{1}{(n+5)} + \frac{1}{(n+3)} - \frac{1}{(n+5)} \dots\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)}\right)$$

Знайдемо різницю a_n та r_n.

$$\frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)}\right) = \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2(n+1)}$$
$$= \frac{1}{n+2} * \frac{2-n}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} =$$
$$= \frac{(n+1)(2-n) - n(n+2)}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{2n+2-n^2-n-n^2-2n}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{-2n^2-n+2}{2n(n+1)(n+2)}$$

Для $n \geq 1$ дана різниця буде відємною, тобто $a_n \leq r_n$. А це вказує на те, що множина $E\{a_n\}$ даного ряду є скінченним об’єднанням відрізків.

1.3.1. Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота

Означення 12. Знакозмінний числовий ряд виду

$$\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}+\cdots,\ \text{ де } a_n\in\mathbb{N} \qquad (8)$$

називається знакозмінним рядом Люрота (надалі ряд Люрота), а число $a_{\text{т}}$ — його n-тим елементом.

Одними з найпростіших прикладів знакозмінних рядів Люрота є ряди:

1)

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a(a+1)a}+\frac{1}{a(a+1)a(a+1)a}-\cdots$$
$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2(a+1)}+\frac{1}{a^3(a+1)^2}-\frac{1}{a^4(a+1)^3}+\cdots=$$
$$=\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a(a+1)}}=\frac{a+1}{a^2+a+1},\quad \text{де } a\in\mathbb{N}.$$

2)

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1(1+1)\cdot 2}+\frac{1}{1(1+1)\cdot 2(2+1)\cdot 3}-\cdots=$$
$$=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2 3^2}-\frac{1}{2^2 3^2 4^2}+\cdots=$$
$$=\frac{1}{(1!)^2}-\frac{1}{(2!)^2}+\frac{1}{(3!)^2}-\cdots(-1)^{n+1}\frac{1}{(n!)^2}+\cdots=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}=1-J_0(2),$$

$$\text{де } J_v(z)=\frac{z^v}{2^v}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{z^{2k}k!\,(v+k+1)} - \text{функція Бессела.}$$

Лема 6. Знакозмінні числові ряди Люрота утворюють саме континуальну множину [22, с. 15].

Доведення. Члени знакозмінного числового ряду Люрота – натуральні числа. Тому послідовність (a_n) проходить всю континуальну множину $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\dots$. Кожна така представлена послідовність задає знакозмінний числовий ряд

Люрота. Отже, множина знакозмінних рядів Люрота буде континуальною множиною.

Теорема 10. Кожний знакозмінний ряд Люрота є абсолютно збіжним і його сума $s \in (0; 1)$.

Доведення. Застосуємо ознаку Даламбера

$$D_n^* = \frac{|d_{n+1}|}{|d_n|},$$

$$D_n^* = \frac{a_1(a_1+1)\cdot\ldots\cdot a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}{a_1(a_1+1)\cdot\ldots\cdot a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n(a_n+1)a_{n+1}} = \frac{1}{(a_n+1)a_{n+1}},$$

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D_n^* = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(a_n+1)a_{n+1}} < 1.$$

Отже, знакозмінний ряд Люрота є абсолютно збіжний, за ознакою Даламбера, для будь-якої послідовності (a_n), $a_n \in \mathbb{N}$. Оскільки, всі члени знакозмінного ряду Люрота монотонно спадають по абсолютній величині й прямують до нуля, то сума s даного ряду задовольняє умову$0 < s < \frac{1}{a_1}$, тобто належить інтервалу (*0;1*).

Лема 7. Різні ряди Люрота мають і різні суми.

Доведення. Доведемо, використовуючи метод від супротивного. Припустимо, що є два різні знакозмінні ряди Люрота, що мають однакову суму s. Нехай, $a_1, a_2, a_3, \ldots$– елементи першого ряду а $a_1', a_2', a_3' \ldots$– елементи другого ряду. Оскільки дані ряди різні, то ∃ такий номер m, що $a_m \neq a_m'$ при $i = m$ і $a_m = a_m'$ і при $i < m$. Не порушуючи загальності міркувань, вважатимемо, що $a_m < a_m'$.

Розглянемо різницю деяких сум цих рядів

$$\left(\frac{1}{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a_1(a_1+1)\cdot\ldots\cdot a_n(a_n+1)a_{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{a_1'} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a_1'(a_1'+1)\ldots a_n'(a_n'+1)a_{n+1}'}\right) =$$

$$= \pm\frac{1}{a_1(a_1+1)\cdot\ldots\cdot a_{m-1}(a_{m-1}+1)}\cdot\alpha, \qquad \text{де}$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{a_m} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a_m(a_m+1)\cdot\ldots\cdot a_{m+n}(a_{m+n}+1)a_{m+n+1}}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{a'_m}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a'_m(a'_m+1)\dots a'_{m+n}(a'_{m+n}+1)a'_{m+n+1}}\right)>$$

$$>\left(\frac{1}{a_m}-\frac{1}{a_m(a_m+1)\cdot a_{m+1}}\right)-\frac{1}{a'_m}\geq\left(\frac{1}{a_m}-\frac{1}{a_m(a_m+1)}\right)-\frac{1}{a_m+1}=$$

$$=\frac{a_m+1-1-a_m}{a_m(a_m+1)}=0$$

Звідси випливає, що $s-s\neq 0$. Отримали суперечність.

Нехай s — сума знакозмінного ряду Люрота (8), s_n — його часткова сума, а r_n — його залишок. Тоді

$$s_n=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1(a_1+1)a_2}+\frac{1}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n},$$

$$r_n=(-1)^n\left(\frac{1}{a_1(a_1+1)\dots a_n(a_n+1)a_{n+1}}-\frac{1}{a_1(a_1+1)\dots a_{n+1}(a_{n+1}+1)a_{n+2}}+\cdots\right),$$

$$s=s_n+r_n=s_n+\frac{(-1)^n}{a_1(a_1+1)\dots a_n(a_n+1)}\cdot x_n,\ \text{де}$$

$$x_n=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1}+1)a_{n+2}}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{a_{n+1}(a_{n+1}+1)\dots a_{n+k-1}(a_{n+k-1}+1)a_{n+k}}+\cdots \quad (9)$$

За означенням 12 ряд (9) є знакозмінним числовим рядом Люрота.

Лема 8. Нехай s — сума знакозмінного ряду Люрота (8), s_n — його часткова сума, то

$$a_1=\left[\frac{1}{s}\right],\ \ a_{n+1}=\left[\frac{1}{x_n}\right]=\left[\frac{(-1)^n}{(s-s_n)a_1(a_1+1)\dots a_n(a_n+1)}\right],\text{де}$$

$$x_n=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1}+1)a_{n+2}}+\cdots+\frac{(-1)^n}{a_{n+1}(a_{n+1}+1)\dots a_{n+k+1}(a_{n+k+1}+1)a_{n+k}}+\cdots$$

Доведення. Оскільки члени знакозмінного числового ряду Люрота монотонно спадають по абсолютній величині й прямують до нуля, то виконується наступна нерівність

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1(a_1+1)a_2}<s<\frac{1}{a_1}.$$

Враховуючи, що елементи ряду Люрота (8) натуральні числа, маємо

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1(a_1+1)}\leq\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1(a_1+1)a_2}.$$

Значить,

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)} = \frac{1}{(a_1+1)} < s < \frac{1}{a_1},$$

$$a_1 < \frac{1}{s} < a_1 + 1,$$

$$a_1 = \left[\frac{1}{s}\right].$$

Таким чином, перша частина леми 8 доведена. Оскільки, x_n є сумою ряду Люрота, то за першою частиною леми 8 маємо

$$a_{\text{т}+1} = \left[\frac{1}{x_n}\right].$$

Враховуючи рівність

$$s = s_n + \frac{(-1)^n}{a_1(a_1+1)\ldots a_n(a_n+1)} \cdot x_n,$$

отримаємо вираз

$$a_{n+1} = \left[\frac{(-1)^n}{(s-s_n)a_1(a_1+1)\ldots a_n(a_n+1)}\right].$$

Лему доведено [22, с.20].

Нехай (a_n) – задана послідовність з натуральних чисел. Введемо наступні спрощення

$$A_1 = a_1, \qquad A_n = a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n$$

Звідси $A_n = A_{n-1} \cdot (a_{n-1}+1)a_n$.

Тому відповідний знакозмінний ряд Люрота має наступний вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{A_n}$$

Зафіксувавши даний знакозмінний ряд Люрота із сумою r

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{A_n} = r \qquad (10)$$

Число r можна подати у вигляді

$$r = d - b, \text{ де } d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2i-1}}, \qquad b = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2i}}.$$

Оскільки знакозмінний ряд Люрота абсолютно збіжний, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{A_n}=d+b.$$

Означення 13. Якщо (10) — заданий знакозмінний ряд Люрота, M - зафіксована підмножина натуральних чисел, тоді число

$$x=x(M)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\varepsilon_n}{A_n},\ \text{де} \quad (11)$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}1, & \text{якщо}\ n\in M,\\ 0, & \text{якщо}\ n\notin M.\end{cases}$$

називається підсумою знакозмінного ряду Люрота.

Вираз (11) і його неповну суму x формально зобразимо у вигляді $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$.

Зрозуміло, що всі залишки ряду Люрота та його часткові суми і є підсумами. Також неповними сумами є d і $-b$. Де d є найбільшою підсумою, а $(-b)$ — найменшою.

Означення 14. Множина

$$C_r=\left\{x: x=\sum_{n\in M\subset N}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{A_n},\ \ M\in\sigma(N)\right\},$$

де $\sigma(N)$ — множина всіх підмножин множини N, називають множиною неповних сум знакозмінного ряду Люрота [22, с.22].

Спираючись на основні поняття, що стосуються циліндрів, розглянемо наступні теореми.

Теорема 11. Множина підсум ряду Люрота C_r є:

1. відрізком $\left[-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$, якщо $a_n=1\ \forall n\in N$;

2. об'єднанням скінченного числа відрізків у випадку, коли $a_n=1$ для всіх n, що більші деякого m;

3. досконалою ніде не щільною множиною 0-міри Лебега, якщо $a_n\neq 1$ для всієї множини значень n.

1.3.2. Множина неповних сум ряду Енгеля

Означення 15. Рядом Енгеля називається вираз виду:

$$\frac{1}{q_1+1}+\frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)}+\frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)(q_3+1)}+\cdots, \quad (12)$$

де q_k – натуральні числа, причому

$$q_{k+1} \geq q_k \qquad (13)$$

Числа q_k називаються елементами ряду Енгеля [20, с.105].

Яскравими прикладами даних рядів є:

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{u_k}}$, де (u_k) – класична послідовність Фібоначі без першого члена.

2. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}p_k\right)^{-1}$, (p_k) – зростаюча послідовність постих чисел.

Якщо суму ряду (12) позначити через r0, то

$$r_0 = s_n + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(q_1+1)\ldots(q_k+1)} = s_n + r_n$$

Тоді

$$r_n \leq \frac{1}{(q_1+1)\ldots(q_k+1)}\cdot\frac{1}{q_{n+1}} \leq \frac{1}{2^n} \to 0 \;\; (n \to \infty).$$

Отже, всі ряди Енгеля є збіжними (до речі, це випливає і із теореми Д'Аламбера). Зрозуміло, що сума ряду (12) належить $\left(\frac{1}{q_{n+1}};1\right]$.

Лема 9. [9] Мають місце рівності

$$q_n = \left[\frac{(q_1+1)\ldots(q_{n-1}+1)}{r_{n-1}}\right] - 1$$

де *[u]* — це ціла частина числа *u*.

Доведення. Нехай *x* сума ряду Енгеля (12), тоді

$$x = \frac{1}{q_1 + 1} + \cdots + \frac{x_n}{(q_1 + 1) \dots (q_n + 1)}$$

де

$$x_n = \frac{1}{q_n + 1} + \frac{1}{(q_n + 1)(q_{n+1} + 1)} + \frac{1}{(q_n + 1)(q_{n+1} + 1)(q_{n+2} + 1)} + \cdots$$

Лему доведено.

Нехай всі $q_k = s - 1$, тоді очевидно, що ряд – це сума всіх членів нескінченної спадної геометричної прогресії, для якої перший член і знаменник дорівнюють $\frac{1}{s}$, а сума цього ряду є раціональним числом.

Лема 10. Всі різні ряди Енгеля мають і різні суми.

Доведення. Використаємо метод від супротивного.

Припустимо, що існують деякі два різні ряди Енгеля, що мають однакову суму s. Тоді нехай $q_1, q_2, q_3 \dots$ — це елементи першого ряду, а $q_1', q_2', q_3' \dots$ — це елементи другого ряду. З того , що ряди різні випливає, що існує таке натуральне число m, що $q_m \neq q_m'$ і $q_m = q_m'$ при $i < m$.

Не порушуючи загальності міркувань, будемо вважати, що $q_m < q_m'$.

Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_n + 1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q_1' + 1)(q_2' + 1) \dots (q_n' + 1)} =$$

$$= \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_{m-1} + 1)} \cdot u,$$

де

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q_m + 1)(q_{m+1} + 1) \dots (q_{m+n} + 1)} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q_m' + 1)(q_{m+1}' + 1) \dots (q_{m+n}' + 1)} >$$

$$> \frac{1}{q_m + 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q_m + 1)^n} = \frac{1}{q_m + 1} - \frac{1}{q_m + 1} = 0,$$

то $s - s \neq 0$. Отримали суперечність.

Таким чином, не існує два різних ряди Енгеля, що мають однакову суму.

Тепер перейдемо до розгляду множини неповних сум ряду Енгеля.

Нехай (q_k) — деяка довільна зафіксована неспадна послідовність натуральних чисел. Розглянемо деякий відповідний ряд Енгеля (12) з сумою r_0.

Нехай дана A = {0, 1} та L — множина нескінченних послідовностей, що складається з 0 та 1, тобто

$$L = A \times A \times \cdots \times A \times \cdots = \{a : a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots), a_k \in A\}.$$

Сума s = s($\{a_k\}$) ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(q_1+1)(q_2+1)\ldots(q_k+1)}, \text{де } (a_k) \in L, \quad (14)$$

називається підсумою ряду (12). Вираз (14) та його суму s формально будемо зображати у виді $\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots}$. Усі часткові суми і залишки ряду (12) будуть підсумами ряду. Тоді множину всіх підсум ряду Енгеля (12) позначимо через C_{r_0} , тобто

$$C_{r_0} = \{x : x = \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots}, (a_n) \in L\}$$

Очевидно, що $C_{r_0} \subset [0, r_0]$.

Якщо $r_0 = 1$, то $C_{r_0} = [0, r_0]$, оскільки ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

є рядом Енгеля, і кожна його підсума буде двійковим зображенням числа з відрізка [0, 1].

Далі ми розглянемо ряди Енгеля, в яких сума менша за 1.

Для доведення наступної теореми пригадаємо наступні властивості циліндрів та циліндричних відрізків.

Лема 11. Циліндри та циліндричні відрізки мають деякі наступні властивості.

1. $$\inf \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \inf \Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_m} = u_m$$

$$\sup \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \sup \Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_m} = r_0 - v_m,$$

$$\Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_m} \subset \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m}$$

2. Для довжини даного відрізка $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$ мають місце наступне співвідношення

$$\left|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}\right| = diam\Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m} = r_m \to 0 \quad (m \to \infty).$$

3. $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m a} \subset \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$

4. $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0} \cap \Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m 1} = \emptyset$, причому

$$K_{m+1} = \left|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} (\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0} \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1})\right| =$$

$$= \frac{1}{(q_1+1)\dots(q_{m+1}+1)} - \sum_{k=m+2}^{\infty} \frac{1}{(q_1+1)\dots(q_k+1)} =$$

$$= \frac{1}{(q_1+1)\dots(q_{m+1}+1)} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q_{m+2}+1)\dots(q_{m+1+k}+1)}\right).$$

Лема 12. Для деякої довільної послідовності $(c_k) \in L$ мають місце наступні рівності:

$$1. \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m} \equiv x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}.$$

$$2. C_{r_0} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{c_i \in A, i=\overline{1,m}} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m},\ A = \{0{,}1\},$$

$$\Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} \cap C_{r_0}.$$

Лема 13 Рівність

$$s(\{a_n\}) \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n} \dots = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_n} \dots \equiv s(\{b_n\})$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $a_i = b_i$ для $\forall i \in N$.

Доведення. Дане твердження випливає з двох попередніх лем (властивості 4 леми 11 і властивості 1 леми 12).

Теорема 14. [20, с.108] Множина C_{r_0} неповних сум деякого довільного ряду Енгеля є

1) континуальною;
2) ніде не щільною;
3) досконалою;
4) множиною 0-міри Лебега λ.

Доведення. 1. Те, що множина C_{r_0} є континуальною, випливає із сюр'єктивності відображення $f\colon C_{r_0} \to [0,1]$, означеного рівністю

$$f\left(\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_n} \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

2. Те, що множина C_{r_0} є нещільною випливає з леми 11 та леми 12 (властивість 4 та 2, властивість 2).

3. Нехай x – деяка гранична точка множини C_{r_0}. Тоді для довільного $k \in N$ буде існувати єдиний циліндричний відрізок $\Delta_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_k(x)} = \Delta_{k(x)}$ рангу k, що містить x. В іншому випадку точка x має належати одному з суміжних з C_{r_0} інтервалів і існувало б $\varepsilon > 0$ таке, що $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap C_{r_0} = \emptyset$. А це суперечить умові, що x — гранична точка C_{r_0}. Тоді переріз $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{k(x)}$ містить єдину точку, що належить C_{r_0} та співпадає з x. Отже, множина C_{r_0} — замкнена множина.

Припустимо, що множина C_{r_0} буде містити ізольовані точки, і нехай $x = \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ – одна з них.

Тоді за означенням ізольованої точки існує таке $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \left[C_{r_0} \setminus \{x\}\right] = \emptyset \qquad (14)$$

Оберемо k таким великим, що $\left|\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_k}\right| < \varepsilon$. Тоді

$$\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_k} \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$

і

$$x \neq x' = \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_k (1-a_{k+1}) a_{k+2} a_{k+3} \ldots} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap C_{r_0}$$

А це суперечить (13). Отже, C_{r_0} – замкнена множина, що не містить ізольованих точок, тобто вона досконала.

4. З леми 11 (властивість 2) і леми 12 (властивість 2) слідує, що

$$\lambda(C_{r_0}) = \lim_{m\to\infty} 2^m \left(\frac{1}{(q_1+1)\ldots(q_m+1)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(q_{m+1}+1)\ldots(q_{m+i}+1)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{2^m}{(q_1+1)\ldots(q_m+1)} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{2}{q_1+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{q_m+1} \right) = 0.$$

Отже, $\lambda\left(C_{r_0}\right) = 0$.

1.3.3. Множина неповних сум рядів Остроградського I-го та II-го виду

Означення 16. Рядом Остроградського 1-го виду називається вираз вигляду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \dots q_n} + \cdots, \quad (15)$$

що скорочено записується у вигляді

$$O_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots)$$

де q_n – натуральні числа і $q_{n+1} > q_n$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Числа q_n називають елементами ряду Остроградського 1-го виду [6, с. 26].

Кількість таких елементів може бути як скінченним, так і нескінченним. Для скінченного числа q_n будемо записувати ряд Остроградського у виді

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \dots q_n}$$

Або скорочено $O^1(q_1 q_2 \dots q_n)$.

Для нескінченної кількості елементів ряд має вигляд : $O^1(q_1 q_2 \dots q_n \dots)$.

Кожний скінченний ряд Остроградського 1-го виду як результат скінченної кількості раціональних дій над цілими числами, є раціональним числом. Нескінченний розклад при накладених умовах на q_k є абсолютно збіжним (що легко перевірити за ознакою Д'Аламбера збіжності додатних рядів), тому також представляє деяке число. Зрозуміло, що його сума лежить між 0 та 1. Крім того, вона є ірраціональним числом.

Справді, припустимо, що сума ряду Остроградського 1-го виду є раціональним числом $\frac{a}{b}$ (a < b). Тоді маємо рівність

$$a = b\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \dots q_n}\right).$$

Візьмемо будь-який такий номер n, що n > b. Помноживши обидві частини останньої рівності на $q_1 q_2 \dots q_n$ і перемістивши перші n доданків з правої частини в ліву, отримаємо

$$c\ =\ \pm b\left(\frac{1}{q_{n+1}}-\frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}}+\cdots\right),$$

де с — ціле число, с ≠ 0. Вираз у дужках менший

$$\frac{1}{q_{n+1}}<\frac{1}{n+1}$$

звідки маємо нерівність

$$|c|<\frac{b}{n+1}$$

Оскільки |с| ≥ 1, то b > n + 1, що суперечить вибору n. Отримана суперечність і доводить ірраціональність суми данного ряду.

Розглянемо довільну фіксовану послідовність $\{q_k\}$ з натуральних чисел за умови, що $q_{k+1}>q_k$ для всіх $k\in N$. Проаналізуємо відповідний їй ряд Остроградського 1-го виду (17) із сумою r. Число r можна подати у виді

$$r=d-b,\text{де } d=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{q_1,q_2,q_3,\dots,q_{2i-1}},b=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{q_1,q_2,q_3,\dots,q_{2i}}.\qquad(16)$$

Оскільки ряд Остроградського абсолютно збіжний, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_1,q_2,q_3,\dots,q_k}=d+b$$

Нехай L – деяка множина нескінченних послідовностей, що складається з 0 та 1, тобто

$$L=A\times A\times\dots\times A\times\dots=\{a\,:\,a\ =\ (a_1,a_2,\dots,a_k,\dots),a_k\in\{0,1\}=A\}.$$

Сума $s\ =\ s(\{a_k\})$ ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a_k}{q_1q_2\cdots q_k},\quad\text{де } \{a_k\}\in L,\quad(17)$$

називається підсумою ряду (15). Вираз (17) та його суму s формально запишемо у вигляді $\Delta_{a_1a_2\dots a_k\dots}$. Усі часткові суми ряду (15) є його підсумами. Ряд Остроградського (15) має континуальну множину підсум [7, с.98].

Тепер розглянемо тополого-метрині та фрактальні властивості C_r всіх підсум ряду Остроградського 1-го виду (15). Очевидно $C_r\subset[-b,d]$.

Теорема 15. [7. с. 100]Множина C_r підсум ряду Остроградського (15) є

1) ніде не щільною;

2) досконалою;

3) множиною 0-міри Лебега λ;

4) множиною, яка має нульову розмірності Хаусдорфа–Безиковича α_0.

Доведення. 1. Властивість 1 – очевидна (за властивостями циліндричних відрізків, наведених в лемі 11).

2. Нехай x – деяка гранична точка множини C_r. Тоді для довільного числа $k \in N$ існує циліндричний відрізок Δ^k рангу k, який має x. У іншому випадку точка x мала б належати одному з суміжних інтервалів з C_r та існувало $\varepsilon > 0$ таке, що $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap C_r = \emptyset$. А це суперечить твердженню, що x – це гранична точка C_r. Тоді переріз, який містить $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta^k$ єдину точку, що належить C_r і збігається з x.

Отже, C_r — замкнена множина.

Тепер припустимо, що C_r має ізольовані точки, і нехай $x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k \dots}$ – одна із них. Тоді за означенням ізольованої точки існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [C_r \backslash \{x\}] = \emptyset. \qquad (17)$$

Оберемо k таким великим, щоб $|\Delta_{a_1 a_2 \dots a_k}| < \varepsilon$.

Тоді $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_k} \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ і $x \neq x' = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k (1-a_{k+1}) a_{k+2} a_{k+3} \dots} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap C_r$, а це суперечить (17). Отже, множина C_r – замкнена та не містить ізольованих точок, тобто досконала.

3. З леми 11 слідує, що

$$\lambda(C_r) = \lim_{m\to\infty} 2^m \left(\frac{1}{q_1 q_2 \dots q_m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{m+1} q_{m+2} \cdots q_{m+i}} \right) \leq$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} \frac{2^m}{q_1 q_2 \dots q_m} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{2}{q_1} \cdot \frac{2}{q_2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{q_m} \right) = 0.$$

Отже, $\lambda(C_r) = 0$.

4. Всі циліндричні відрізки рангу m утворюють покриття множини C_r. А α-об’єм цього покриття рівний

$$l_m^\alpha(C_r) = 2^m \left(\frac{1}{q_1 q_2 \dots q_m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{m+1} q_{m+2} \cdots q_{m+i}} \right)^\alpha \leq$$

$$\leq \frac{2}{q_1^\alpha} \cdot \frac{2}{q_2^\alpha} \cdot \dots \cdot \frac{2}{q_m^\alpha}.$$

Оскільки для $\forall \alpha > 0$ та довільного $\delta > 0$ існує таке m, що $\frac{2}{q_m^\alpha} < \delta$, тоді для будь-яких $\alpha > 0$ та $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число m, що $l_m^\alpha(C_r) < \varepsilon$. Таким чином, α-мірна міра Хаусдорфа $H_\alpha(C_r) = 0$ для будь-якого $\alpha > 0$, іншими словами розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини C_r дорівнює 0.

Перейдемо до рядів Остроградського 2-го виду.

Означення 17. [17, с.128]Числовий ряд виду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n} + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_n}, \quad (18)$$

де q_n – натуральні числа і $q_{n+1} \geq q_n(q_n + 1),$ для $\forall\, n \in N$, називається рядом Остроградського 2-го виду.

Прикладами рядів Остроградського 2-го виду є такі ряди:

1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2*3} + \frac{1}{6*7} - \frac{1}{42*43} + \frac{1}{1806*1807} - \cdots$

2) $\frac{1}{s} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^7} - \frac{1}{s^{15}} + \cdots . = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{s^{m_k}},$

де $s \geq 2, s \in N, m_1 = 1, m_k = 2m_{k-1} + 1$

3) $\frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{59} - \frac{1}{3541} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{p_k},$

де $\{p_k\}$— нескінченна послідовність простих чисел така, що $p_1 = 2$, $p_2 = 7$, $p_3 = 59$, ...,

p_k — найменше просте число таке, що $p_k \geq p_{k-1}(p_{k-1} + 1)$.

Зауваження. Існують ряди Остроградського 1-го виду, які не є рядами Остроградського 2-го виду і навпаки.

Справді, ряд Остроградського 1-го виду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots$$

не є рядом Остроградського 2-го виду, оскільки не виконується, що $q_{n+1}\geq q_n(q_n+1)$.

Прикладом ряду Остроградського 2-го виду, що не є рядом Остроградського 1-го виду, є ряд 3.

Лема 14. [18, с. 178] Ряд Остроградського 1-го виду є рядом Остроградського 2-го виду тоді і тільки тоді, коли для довільного k ∈ N виконується нерівність

$$q_{k+1}\geq q_1\ldots q_k+1. \quad (19)$$

Доведення. Очевидно, що, якщо для ряду Остроградського 1-го виду (15) виконується умова (19), то він є рядом Остроградського 2-го виду відповідно до означення.

У випадку, коли принаймні для одного значення k умова (19) не виконується, тоді порушується вимога означення та ряд не буде рядом Остроградського 2-го виду.

Розглянемо деякі властивості ряду (18).

Лема 15. Для деякого числа $n\in N$ і довільного ряду Остроградського 2-го виду виконуються співвідношення:

1. $q_n\geq n!$,

2. $q_{n+1}\geq q_nq_{n-1}\ldots q_2q_1(q_1+1)+q_n\ldots q_2+\cdots+q_nq_{n-1}+q_n$;

3. $q_{n+2}>q_2^{2^n}>q_1^{2^{n+1}}$;

$q_{n+2}>q_2^{2^n}\geq 2^{2n}$.

4. $\frac{q_n}{q_{n+1}}\leq\frac{1}{q_n+1}\leq\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_n+1}<\frac{1}{q_n}$;

5. $\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_i}\right)<\frac{2}{q_n+1}$;

6. $\frac{q_1\cdots q_n}{q_{n+1}}\leq\frac{1}{q_1+1+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}+\cdots+\frac{1}{q_1\cdots q_{n-1}}}<\frac{1}{q_n+1}$.

Доведення. Перше твердження є очевидним. А ось твердження 2 буде наслідком деяких індуктивних міркувань:

$$\begin{cases} q_2 \geq q_1(q_1+1) = q_1^2 + q_1 \geq q_1^2 + 1 \geq q_1^2; \\ q_3 \geq q_2(q_2+1) = q_2^2 + q_2 \geq q_2 q_1(q_1+1) + q_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{k+1} \geq q_k(q_k+1) \geq q_k q_{k-1} \dots q_2 q_1(q_1+1) + q_k \dots q_2 + \dots + q_k q_{k-1} + q_k. \end{cases}$$

У свою чергу третє співвідношення є наслідком другого. Перша нерівність з пункту 4 випливає із наступних міркувань:

$$\frac{1}{q_n+1} - \frac{q_n}{q_n+1} = \frac{q_{n+1} - q_n^2 - q_n}{q_{n+1}(q_n+1)} \geq 0.$$

Друга з нерівностей 4 отримана з таких співвідношень:

$$\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_n+1} = \frac{q_n - 1 - q_n}{q_n(q_n+1)} = \frac{1}{q_n(q_n+1)} \geq \frac{1}{q_{n+1}};$$

$$\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_{n+1}} \geq \frac{1}{q_n+1}.$$

Доводимо співвідношення 5:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{q_i} \leq \frac{1}{q_{n+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{n+i}(q_{n+i}+1)} < \frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{n+i}+1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{q_{n+1}}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{n+i}}\right) < \frac{1}{q_{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) \leq \frac{1}{q_{n+1}}(e-1) \leq \frac{2}{q_{n+1}}.$$

Для доведення твердження 6 розглянемо наступні міркування:

$$\frac{q_1 \cdots q_n}{q_{n+1}} \leq \frac{q_1 \cdots q_n}{q_n(q_n+1)} = \frac{q_1 \cdots q_{n-1}}{q_n+1} \leq$$

$$\leq \frac{q_1 \cdots q_{n-1}}{q_{n-1}(q_{n-1}+1)+1} = \frac{q_1 \cdots q_{n-2}}{q_{n-1}+1+\frac{1}{q_{n-1}}} \leq$$

$$\leq \frac{q_1 \cdots q_{n-2}}{q_{n-2}(q_{n-2}+1)+1+\frac{1}{q_{n-1}}} = \frac{q_1 \cdots q_{n-3}}{q_{n-2}+1+\frac{1}{q_{n-2}}+\frac{1}{q_{n-2}q_{n-1}}}.$$

Далі, використовуючи метод математичної індукції,за *n – 3* кроки одержуємо першу з нерівностей 6. А друга – очевидна.

Наслідок 6. $\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{q_{n+1}} = 0$.

Зауваження. Всі ряди Остроградського 2-го виду є абсолютно збіжними.

Справді, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$, що складається з модулів членів ряду (18), є збіжним за ознакою Даламбера:

$$\frac{1}{q_{n+1}} : \frac{1}{q_n} = \frac{q_n}{q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n + 1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Деяка сума S ряду Остроградського 2-го виду (18) за теоремою Лейбніца (про збіжність знакозмінних числових рядів) не перевищує $\frac{1}{q_1}$. Крім того, мають місце наступні твердження.

Лема 16. Усі часткові суми

$$S_n = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n}$$

ряду Остроградського (18) будуть додатними, а також:

1) сума S є більшою за часткові суми парного порядку, які утворюють зростаючу послідовність;

2) сума S є меншою ніж часткові суми непарного порядку, які утворюють спадну числову послідовність, тобто

$$0 < S_{2k} < S_{2k+2} < S < S_{2k+1} < S_{2k-1}$$

Доведення. Ряд (20) можна записати у вигляді

$$\frac{q_2 - q_1}{q_1 q_2} + \frac{q_4 - q_3}{q_3 q_4} + \cdots + \frac{q_{2k} - q_{2k-1}}{q_{2k-1} q_{2k}} + \cdots$$

і

$$\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_1 q_2} = \frac{q_{n+1} - q_n}{q_n q_{n+1}} \geq \frac{q_n}{q_{n+1}} > 0, \qquad \forall n \in N,$$

то $S_n > 0$ для $\forall n \in N$. Більше того,

$$S > S_{2k+2} = \frac{q_2 - q_1}{q_1 q_2} + \frac{q_4 - q_3}{q_3 q_4} + \cdots + \frac{q_{2k} - q_{2k-1}}{q_{2k-1} q_{2k}} + \frac{q_{2k+2} - q_{2k+1}}{q_{2k+1} q_{2k+2}} =$$

$$= S_{2k} + \frac{q_{2k+2} - q_{2k+1}}{q_{2k+1} q_{2k+2}} \geq S_{2k} + \frac{q_{2k+1}}{q_{2k+2}} > S_{2k};$$

$$s < S_{2k+1} = S_{2k-1} - \left(\frac{1}{q_{2k}} - \frac{1}{q_{2k+1}}\right) = S_{2k-1} - \frac{q_{2k+1} - q_{2k}}{q_{2k+1} q_{2k}} < S_{2k-1}.$$

Лему доведено.

Лема 17. Якщо S — це сума ряду Остроградського (20), то $q_1 = \left[\frac{1}{S}\right]$ – це ціла частина числа $\frac{1}{S}$.

Наслідок 7. Ціла частина $\left[\frac{1}{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_{k+1}}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{q_n}+\dots}\right] = q_k.$

Нехай M – деяка підмножина множини N. Розглянемо довільний фіксований числовий ряд Остроградського (18).

Означення 18. [19, с. 180]Число

$$x = x(M) = \sum_{k\in M\subset N} \frac{(-1)^{k-1}}{q_k}$$

називається підсумою ряду Остроградського 2-го виду (18).

По іншому, кожне число

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{q_k} \qquad (19)$$

називається підсумою ряду (18). Число x і його вираз (19) формально позначатимемо $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_k \dots}$.

Звідси випливає, що всі часткові суми S_n та залишки

$$\sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k},$$

ряду Остроградського 2-го виду (18) будуть його неповними сумами. Але не тільки вони. Підсумами також є

$$d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{2i-1}} \quad \text{і} \quad b = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{2i}}$$

Очевидно, що d – це найбільша неповна сума, а ось b – найменша.

Означення 19. Множина

$$C = \left\{ x = \sum_{k\in M\subset N} \frac{(-1)^{k-1}}{q_k}, M \in \sigma(N) \right\}$$

де *σ(N)* — множина абсолютно всіх підмножин множини N, називається множиною підсум ряду Остроградського (18).

Теорема 12. [23, с.66]Множина *C* підсум ряду Остроградського 2-го виду є:

1) ніде не щільною;

2) досконалою;

3) нуль-множиною Лебега;

4) множиною 0-міри Хаусдорфа-Безиковича.

Доведення. 1. Перше твердження випливає з властивостей циліндричних множин.

2. Якщо x – це гранична точка множини підсум C, то для деякого довільного k існує циліндричний відрізок $\Delta_{c_1c_2\dots c_k}$, в якій міститься x, оскільки в іншому випадку x входив би до одного із суміжних інтервалів та існувало б $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x-\varepsilon;\ x+\varepsilon) \cap C = 0.$$

А це суперечить умові, що x – гранична точка множини C.

Переріз

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2\dots c_k}$$

містить єдину точку, яка буде належати C та співпадає з x. Отже, C – це замкнена множина.

Припустимо, що C має ізольовані точки, і $x = \Delta_{a_1a_2\dots a_k\dots}$ — одна з них. Тоді, із означення ізольованої точки випливає, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x\ -\ \varepsilon;\ x\ +\ \varepsilon) \cap\ [C \setminus \{x\}] = O. \qquad (20)$$

Оберемо k таким великим, що $\left|\Delta_{a_1a_2\dots a_k}\right| < \varepsilon$. Тоді

$$\Delta_{a_1a_2\dots a_k} \subset (x\ -\ \varepsilon;\ x\ +\ \varepsilon)$$

І

$$x \neq x' = \Delta_{a_1a_2\dots a_k(1-a_{k+1})a_{k+2}a_{k+3}\dots} \in (x\ -\ \varepsilon;\ x\ +\ \varepsilon),$$

що суперечить (20). Отже, C – замкнена множина, що не має ізольованих точок, тобто за означенням є досконалою.

3. З леми 11 (властивостей 6 і 3) маємо, що міра Лебега множини C вираховується за формулою

$$\lambda(C) = \lim_{m\to\infty} 2^m \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{q_i} \right)$$

За лемою 11 (властивості 5 і 3) маємо

$$\lambda(C) = \lim_{m\to\infty} \frac{2^{m+1}}{q_{m+1}} < 2^2 \lim_{m\to\infty} \frac{2^{m-1}}{q_2^{2m-1}} = 0.$$

4. Усі циліндричні відрізки рангу m створюють покриття множини підсум C. Тоді α-об’єм такого покриття виражається наступним чином

$$l_m^{\alpha}(C) = 2^m \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{q_k} \right)^{\alpha}$$

За лемою 11 (властивість 5)

$$l_m^{\alpha}(C) = 2^m \left(\frac{2}{q_{m+1}} \right)^{\alpha}.$$

Зважаючи на порядок росту елементів q_k (лема 11, властивість 3), маємо:

$$l_m^{\alpha}(C) < 2^{\alpha} \frac{2^m}{(q_2^{2m-1})^{\alpha}} = 2^{\alpha+1} \cdot \frac{2^{m-2}}{(q_2^{2\alpha})^{2^{m-2}}}.$$

Оскільки $q_2^{2\alpha}.$ 1 для деякого довільного α і

$$\frac{2^x}{a^{2^x}} \to 0 \quad (x \to 0) \text{ при } a > 1,$$

то

$$\frac{2^{m-2}}{(q_2^{2\alpha})^{2^{m-2}}} \to 0 \quad (m \to \infty),$$

а отже,

$$\lim_{m\to\infty} l_m^{\alpha}(C) = 0$$

для довільного α, а це і треба було довести.

Висновки до розділу I

У цьому розділі ми описати теоретичні та понятійні основи дослідження. Розглянули теорему С.Какея та більш уточнені, що слідують з неї. Наведено декілька конкретних прикладів знаходження множини неповних сум числового ряду.

Досліджуються ряди окремих видів: ряду Люрота, ряду Енгеля та ряду Остроградського I-го та II-го виду. Наведені приклади цих числових рядів. Розглянуті множини підсум рядів Люрота, Енгеля, Остроградського. Для встановлення типів множин підсум цих рядів додатково розглянуто поняття циліндра, циліндричного відрізка та їх властивостей.

Наукові результати цього розділу використані в подальшому дослідженні.

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ МНОЖИН НЕПОВНИХ СУМ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ У ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА ФРАКТАЛЬНОМУ АНАЛІЗІ

2.1. Застосування тополого-метричних властивостей множин неповних сум числових рядів у теорії ймовірності

Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n, \quad (21)$$

де

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + r_n \quad (22)$$

— це збіжний знакододатний числовий ряд, для якого виконується наступна умова однорідності:

$$r_{n+1} = a_{n+1} a_n, \qquad \forall n \in N, \qquad (23)$$

(ξ_n) — це послідовність випадкових незалежних величин із розподілами:

$$P\{\xi_n = 0\} = p_{0n} > 0, \qquad P\{\xi_n = 1\} = p_{1n} > 0, \qquad p_{0n} + p_{1n} = 1.$$

Властивості даного розподілу випадкової величини ξ визначаються однозначно послідовністю (a_n) членів ряду та нескінченною стохастичною матрицею $||p_{in}||$. До речі, розподіл випадкової величини ξ належить до класу нескінченних згорток Бернуллі, властивості яких досліджуються майже століття. Необхідні і достатні умови абсолютної неперервності випадкової величини ξ і досі невідомі навіть для найпростішого симетричного випадку випадкових степеневих рядів, в яких $a_n = \lambda^n$ і $p_{0n} = \frac{1}{2}$. Ймовірнісна міра μ_ξ, що відповідає даній випадковій величині називається нескінченною симетричною згорткою Бернуллі [24, с. 55].

Якщо ж не накладати жодних обмежень на послідовності (a_n) та (p_{0n}), то ймовірнісні міри $\mu = \mu_\xi$ називаюьбся узагальненими згортками Бернуллі.

З теореми Джессена–Вінтнера [3,с. 48] слідує, що випадкова величина ξ має чисто лебегівський тип розподілу, тобто функція розподілу буде або чисто дискретною, або ж суто абсолютно неперервною, або сингулярною (тобто неперервною функцією, в якій похідна майже скрізь дорівнює нулю в розумінні міри Лебега).

Розшлянемо властивості ряду (22), що володіє умовою однорідності (23) [14, с.31].

Лема 18. Нехай a_1, a_2 — додатні дійсні числа, тоді двопараметрична послідовність

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} a_n, \quad n = 1,2,3, \dots \qquad (24)$$

буде нескінченно малою, а відповідний до неї ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ буде збіжним.

Доведення. З рівності (24) маємо

$$q_n \equiv \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} < 1.$$

З цього слідує, що послідовності (a_{2n-1}) та (a_{2n}) будуть спадними. Крім того, оскільки $a_{n+1} > a_{n+3}$ для $\forall\, n \in N$, то

$$q_n - q_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} - \frac{a_{n+3}}{1 + a_{n+3}} = \frac{a_{n+1} - a_{n+3}}{(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+3})} > 0,$$

тобто, спадними є й послідовності (q_{2n-1}) і (q_{2n}).

Тоді

$$a_{2n+1} = a_1 \prod_{k=1}^{n} q_{2k-1}, \quad a_{2n+2} = a_2 \prod_{k=1}^{n} q_{2k}.$$

Тому

$$a_{2n-1} \le a_1 q_1^{n-1} \to 0 \ \text{ і } \ a_{2n} \le a_2 q_2^{n-1} \to 0 \ \text{ при } n \to \infty$$

Отже, послідовності (a_{2n-1}) і (a_{2n}) є нескінченно малими, як і вся послідовність (a_n). Отже, необхідна умова збіжності ряду буде виконуватися. Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \leqslant a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q_1^{n-1} = a_1(1+a_2) \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \leqslant a_2 \sum_{n=1}^{\infty} q_2^{n-1} = a_2(1+a_3),$$

то розглянутий ряд збігається.

Теорема 12. [2] Для того, щоб виконувалася умова однорідності (23) для ряду (22) необхідно і достатньо, щоб для всіх його членів виконувалась рівність (24).

Доведення. Необхідність. Нехай ряд збіжний та задовольняє умову однорідності (23), тоді для $\forall\, n \in N$ має місце система

$$\begin{cases} a_{n+1}a_n = r_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \dots\ , \\ a_{n+2}a_{n+1} = r_{n+2} = a_{n+3} + a_{n+4} + \dots\ . \end{cases}$$

Якщо відняти від першої рівності другу, то отримаємо:

$$a_{n+1}a_n - a_{n+2}a_{n+1} = a_{n+2}, \qquad (25)$$

звідки й випливає рівність (24).

Достатність. Покажемо тепер, що із умови (24) слідує умова (23). Оскільки розглянутий ряд збіжний, то з рівності (24) отримуємо рівність (25) Враховуючи, що $a_{n+2} = r_{n+1} - r_{n+2}$, отримаємо

$$r_{n+1} - r_{n+2} = a_{n+1}a_{\ n} - a_{n+2}a_{n+1},$$

що в свою чергу рівносильне

$$r_{n+1} - a_{n+1}a_{\ n} = r_{n+2} - a_{n+2}a_{n+1}, \quad n = 1,2,3,\dots$$

звідки $r_{n+1} - a_{n+1}a_{\ n} = r_{n+1+l} - a_{n+1+l}a_{n+l} = const$ для всіх $l \in N$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}(r_{n+1} - a_{n+1}a_{\ n}) = \lim_{n\to\infty} r_{n+1} - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}a_{\ n} = 0,$$

то

$$r_{n+1} - a_{n+1}a_n = 0 \Leftrightarrow r_{n+1} = a_{n+1}a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Достатність та і вся теорема доведені.

Лема 19. Ряд (22), який задовольняє умову однорідності (23), матиме суму

$$r_0 = a_1 + a_2 + a_1a_2. \qquad (26)$$

Доведення. З рівності (23) отримаємо рівність

$$a_1a_2 = a_3 + a_4 + a_5 + \dots .$$

Додамо до обох частин попередньої рівності $a_1 + a_2$, отримаємо (26).

Лема 20. Для членів ряду (22), який задовольняє умову однорідності (23), виконуються наступні рівності

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \qquad (27)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{q^n} = 0, \qquad (28)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n n! = 0, \qquad (29)$$

де q — це деяке дійсне число із $(0, 1)$.

Доведення. Якщо врахувати збіжність ряду та рівність (23), будемо мати

$$a_n = \frac{r_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \dots}{a_{n+1}} = \sum_{m=2}^{\infty}\frac{a_{n+m}}{a_{n+1}}.$$

Розглянутий ряд збігається для кожного $n \in N$, а сума та a_n прямує до 0 при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+3}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+4}}{a_{n+1}} + \cdots\right) = 0.$$

А тому і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+m}}{a_{n+1}} = 0, \;\; m = 2,3,4, \dots$$

та рівність (27) доведено.

З цієї рівності (27) випливає існування такого $n_0 \in N$, що для кожного довільного достатньо малого $\varepsilon > 0$ і для всіх $n > n_0$ має місце наступна нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon$ або $a_{n+1} < \varepsilon a_n$. Нехай $a_{n+s} < 1$ для будь-якого $s = 0, 1, 2, \dots$. Тоді маємо нерівності

$$a_{m+s} < \varepsilon a_{m+s+1} < \varepsilon^2 a_{m+s-2} < \cdots < \varepsilon^s a_m < \varepsilon^s.$$

Отже, $a_{m+s} < \varepsilon^s$ або $a_n < \varepsilon^{n-m} = \frac{1}{\varepsilon^m}\varepsilon^n = c\varepsilon^n$, де $s = n - m\,, c = const.$ Взявши $\varepsilon < q$, маємо рівність (28).

З рівності (27) слідує існування деякого номеру m, що для всіх $n \geq m$ виконується $a_{n+1} < a_n < 1$. Оцінимо деякі члени ряду:

$$a_{m+2} = \frac{a_{m+1}a_m}{1+a_{m+1}} < a_m a_{m+1} < a_m^2,$$

$$a_{m+3} = \frac{a_{m+2}a_{m+1}}{1+a_{m+2}} < a_{m+2}a_{m+1} < a_m^2 a_{m+1} < a_m^3,$$

$$a_{m+4} = \frac{a_{m+3}a_{m+2}}{1+a_{m+3}} < a_{m+3}a_{m+2} < a_m^3 a_m^2 = a_m^5,$$

$$a_{m+5} = \frac{a_{m+4}a_{m+3}}{1+a_{m+4}} < a_{m+4}a_{m+3} < a_m^5 a_m^3 = a_m^8,$$

Нескладно помітити, що показники степеня u_{j+1}членів $a_m^{u_{j+1}}$, якими обмежуються члени a_{j+m}, формують класичну послідовність Фібоначчі з загальним членом

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\varphi)^j - (\psi)^j\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1-(\frac{\psi}{\varphi})^j\right)\cdot\varphi^j \to \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^j \quad (j\to\infty),$$

де $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Отже, отримаємо

$$a_n = a_{m+j} < a_m^{u_{n-m+1}} = p^{\varphi^n},$$

де $p = a_m^{\frac{\varphi^{1-m}}{\sqrt{5}}}$, а m — деяке число з (0,1).

Для доведення рівності (29) потрібно показати, що $\lim_{n\to\infty}\left(p^{\varphi^n}\cdot n!\right) = 0$. А це слідує з того, що $n! < n^n$ для кожного $n > 2$ та того, що $\lim_{n\to\infty}\left(p^{\varphi^n}\cdot n^n\right) = 0$. (крім того, ряд з членом $b_n = p^{\varphi^n}\cdot n^n$ буде збіжним).

Наслідок 8. [21, с.136] Для деякого довільного $q \in (0,1)$ існує такий номер n_0, що при всіх $n > n_0$ задовольняє нерівність $a_n < q^n$.

Розглянемо деяку випадкову величину

$$X = \frac{\tau_1}{a_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\tau_k}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)\cdot\ldots\cdot a_{k-1}(a_{k-1}+1)a_k}$$

де (τ_k) — послідовність випадкових незалежних величин, що приймають значення 0 і 1 з ймовірностями p_{0k}, p_{1k} відповідно, і при цьому $p_{0k} + p_{1k} = 1$. За теоремою Джессена-Вінтнера випадкова величина X буде мати або суто дискретний, або суто сингулярний, або ж суто абсолютно неперервний розподіл (відносно міри Лебега).

Теорема 12. Випадкова величина X має дискретний розподіл, тоді і тільки тоді, коли

$$P_{max} = \prod_{k=1}^{\infty} max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$$

Наслідок 9. [8, с. 216]Випадкова величина X має неперервний розподіл, тоді і тільки тоді, коли $P_{max} = 0$.

Означення 20. Множина всіх точок росту функції розподілу випадкової величини називається спектром S_X, тобто спектром є така мінімальна замкнена множина, де зосереджений розподіл X:

$$S_X = \{x : F_X(x+\varepsilon) - F_X(x-\varepsilon) > 0 \ \forall\varepsilon > 0\} =$$
$$= \{x : \mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0 \ \forall\varepsilon > 0\}$$

Якщо $p_{ik} > 0$ при всіх $i \in \{0, 1\}$ і $k \in N$, то спектр S_X збігається з множиною всіх підсум знакозмінного ряду Люрота. У загальному випадку справедливе наступне твердження.

Лема 21. Спектром розподілу випадкової величини X називається замикання множини

$$E = \left\{x : x = \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}, p_{\varepsilon_k k} > 0 \ \forall k \in N\right\}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що $E \subset S_X$. Нехай $\Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots} = x \in E$. Тоді

$$\mathbb{P}\left\{X \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}\right\} = \prod_{i=1}^{k} p_{\varepsilon_i i} > 0 \ \forall k \in N.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує k таке, що

$$\Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots} \subset (x-\varepsilon; x+\varepsilon)$$

Тому

$$\mathbb{P}\left\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon) \geq \mathbb{P}\left\{X \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}\right\} > 0\right\},$$

тобто $x \in S_X$ i $E \subset S_X$.

2. Доведемо тепер, що $S_X \subset E$. Нехай x $\in S_X$, тобто

$\mathbb{P}\{X \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0 \ \forall\varepsilon > 0$ (30)

Припустимо, що існує таке k, що $p_{\varepsilon_k k} = 0$. Тоді

$$\mathbb{P}\{X \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}\} = \prod_{i=1}^{k} p_{\varepsilon_i i} = 0.$$

Розглянемо деяке довільне число x таке, що $x \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}$. Тоді можливі випадки:

1) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \subset \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}$;

2) $(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \notin \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}$ для довільного $\varepsilon > 0$.

У першому пункті

$$\mathbb{P}\{X \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon) \leq \mathbb{P}\{X \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}\} = 0\}$$

що суперечить (12).

У іншому випадку x є односторонньою граничною точкою множини C_r. Для точності, нехай лівосторонньою. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \subset \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}, \mathbb{P}\{X \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}\} = 0$$

І в цьому випадку

$$\mathbb{P}\{X \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon) = \mathbb{P}\{X \in \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k \dots}\} = 0\}$$

А це суперечить умові (12). Отримане протиріччя показує, що $p_{\varepsilon_k k} > 0$ для деякого $k \in N$, тобто $x \in E$.

Отже, $E = S_X$, що й треба було довести.

Теорема 13. [8] Розподіл X буде сингулярним розподілом канторівського типу у випадку, якщо $P_{max} = 0 \; i \; a_n \neq 1$ для будь-якої нескінченної множини значень n.

Доведення. При $P_{max} = 0$ розподіл, відповідно до наслідку з теореми 3, є неперервним. Оскільки міра Лебега $\lambda(C_r) = 0$, якщо $a_n \neq 1$ для деякої нескінченної множини значень n то і $\lambda(S_X) = 0$. Таким чином, X буде мати сингулярний розподіл канторівського типу, а це і треба було довести.

Функцію розподілу F_X деякої випадкової величини X достатньо визначити на точках спектра розподілу S_X, бо в інших точках вона буде довизначатися за неперервністю і монотонністю.

Лема 22. У точці $\Delta_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \ldots} = x \in S_X$ функція розподілу F_X випадкової величини X зображується

$$F_X(x) = \beta_{\varepsilon_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\varepsilon_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\varepsilon_j j} \right], \qquad (31)$$

$$\text{де } \beta_{\varepsilon_k k} = \begin{cases} \varepsilon_k p_{0k}, & \text{при непарному } k, \\ (1-\varepsilon_k) p_{1k}, & \text{при парному } k. \end{cases}$$

Доведення. Нехай подія $\{X < x\}$ має вираз

$$\{X < x\} = \{\tau_1 < \varepsilon_1\} \cup \{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_1 > \varepsilon_1\} \cup \{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \tau_3 < \varepsilon_3\} \cup \ldots$$
$$\cup \{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \ldots, \tau_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \tau_k \vee \varepsilon_k\} \cup \ldots,$$

де символ $\vee$ має наступний зміст:

$$\vee = \begin{cases} >, \text{якщо } k = 2n, & n \in N, \\ <, \text{якщо } k = 2n-1, n \in N. \end{cases}$$

Тоді

$$\mathbb{P}\{X < x\} = \mathbb{P}\{\tau_1 < \varepsilon_1\} + \mathbb{P}\{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_1 > \varepsilon_1\} + \mathbb{P}\{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \tau_3 < \varepsilon_3\} + \cdots +$$
$$+ \mathbb{P}\{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \ldots, \tau_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \tau_k \vee \varepsilon_k\} + \cdots,$$

Оскільки події $\tau_i = \varepsilon_i, \tau_j = \varepsilon_j, \tau_k \vee \varepsilon_k$ є незалежними, то

$$\mathbb{P}\{\tau_1 = \varepsilon_1, \tau_2 = \varepsilon_2, \ldots, \tau_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \tau_k \vee \varepsilon_k\} = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\{\tau_i = \varepsilon_i\} \right) \cdot \mathbb{P}\{\tau_k \vee \varepsilon_k\} =$$
$$= \beta_{\varepsilon_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\varepsilon_j j}$$

Отже, функція розподілу $F_X(x) = \mathbb{P}\{X < x\}$виражається у формі (7).

Теорема 14. [27, с. 312]Функція розподілу F_X деякої випадкової величини X виражається

$$F_X(x) = F_X(\bar{x}),$$

де $x = \sup\{u : u < x, u \in S_X\}$.

Теорема 14 формулюється з леми 6 та означення функції розподілу.

2.2. Використання властивостей множини неповних сум числових рядів у фрактальному аналізі

Далі розглянемо множину E_λ підсум ряду

$$a_1 + a_2 + a_1\lambda + a_2\lambda + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^2 + \ldots = \frac{a_1 + a_2}{1 - \lambda}, (32)$$

де a_1, a_2, λ — це дійсні числа, $a_1 > a_2, \lambda \in (0, 1)$.

Зауваження. Згрупуємо попарно члени ряду (32) і врахувуючи, що коефіцієнти $\varepsilon_{2n-1}a_1 + \varepsilon_{2n}a_2$ при всіх членах λ^{n-1} набувають чотири значення, множину пвдсум ряду (32) запишемо у вигляді

$$E_\lambda = \left\{ x : \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \lambda^{n-1}, \quad \eta_n \in \{0, a_1, a_2, a_1 + a_2\} \right\}.$$

Множина E_λ розглядалася у роботі [96], у якій говориться, що для майже всіх $\lambda > \frac{1}{4}$ вона має додатню міру Лебега. І також було доведено існування такої щільної 0-множини M_0 значень $\lambda > \frac{1}{4}$, що для кожного з них множина E_λ буде мати нульову міру Лебега. Та при цьому не було чітко вказано ці значення.

Зауваження. Множина E_λ підсум ряду (32) є векторною (арифметичною) сумою $E\{a_1 q^{n-1}\} \oplus E\{a_2 q^{n-1}\}$ множин всіх неповних сум рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} a_2 q^{n-1}$, тобто

$$E_q = E\{a_1 q^{n-1}\} \oplus E\{a_2 q^{n-1}\} =$$

$$= \{x : x = a + b, \text{де } a \in E\{a_1 q^{n-1}\}, b \in E\{a_2 q^{n-1}\}\}.$$

З теореми 1.1. роботи [1] слідує, що для майже всіх (стосується міри Лебега) значень $q \in (\frac{1}{4}, 1)$, арифметична сума двох деяких множин неповних сум геометричних рядів з членами $a_1 q^{n-1}$ і $a_2 q^{n-1}$ буде множиною додатньої міри.

Теорема 16. Множина E_λ підсум ряду (32) є

1) ніде не щільною 0-множиною Лебега, при $\lambda \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$;

2) відрізком $\left[0, \frac{a_1 + a_2}{1 - \lambda}\right]$, при $\lambda \in \left[max\left\{\frac{a_1 - a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1 - 2a_2}\right\}; 1\right)$;

3) множиною додатньої міри Лебега при майже всіх $\lambda \in \left(\frac{1}{4}; max\left\{\frac{a_1 - a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1 - 2a_2}\right\}\right)$

При цьому розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини E_λ рівна

$$\alpha_0(E_\lambda) = -\log_\lambda 4$$

при майже всіх (це у розумінні міри Лебега) значень $\lambda \in \left(0;\frac{1}{4}\right)$ (при всіх $\lambda \in \left(\frac{1}{4}; max\left\{\frac{a_1 - a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1 - 2a_2}\right\}\right)$) [12, с. 198].

Тому в даному пункті ми дослідемо врактальні властивості множини неповних сум ряду (32) для фіксованого $\lambda = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \equiv q \in \widetilde{M}$, тобто ряду

$$a_1 + a_2 + a_1 q + a_2 q + a_1 q^2 + a_2 q^2 + \ldots = \frac{(a_1 + a_2)^2}{2a_2}, (32)$$

Представлену множину підсум позначимо через E_q.

Нескладно помітити, що члени ряду (33) задовольняють умову однорідності (по n):

$$a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (34)$$

з якої слідує нерівність $a_{2n-1} < r_{2n-1}$ для всіх $n \in N$. При деяких співвідношеннях чисел a_1 і a_2, для $\forall n \in N$, справедлива одна із двох нерівностей: $a_{2n-1} > r_{2n-1}$ або $a_{2n-1} \leq r_{2n-1}$.

Теорема 17. [26, с.50]Множина E_q підсум ряду (33) є

1) відрізком $\left[0, \frac{(a_1 + a_2)^2}{2a_2}\right]$, при $\frac{a_1}{a_2} \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$;

2) ніде не щільною нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює

$$\alpha_0\left(E_q\right) = \log_{\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}}\left(2 + \sqrt{3}\right),$$

при $\frac{a_2}{a_1} \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$.

Доведення. 1) Очевидно, що $a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} < r_{2n-1}$ при всіх номерах n. Нерівність $a_{2n} \leq r_{2n}$ рівносильна наступній нерівності $a_2 \leq \frac{{a_1}^2 + {a_2}^2}{2a_2}$, яка справедлива для $\frac{a_2}{a_1} \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Таким чином, для всіх $n \in N$ справедлива нерівність $a_n \leq r_n$, що у випадку незростаючої послідовності (a_n) буде необхідною та достатньою для того, щоб E_q була відрізком.

Зазначимо, що у разі немонотонної послідовності (a_n) всіх членів ряду (22), умова $a_n \leq r_n$, $\forall n \in N$, буде достатньою для того, щоб дана множина підсум була відрізком, але вона не є необхідною.

2) Оскільки $a_{2n-1} > a_{2n}$ при всіх n, тоді послідовність (a_n) членів ряду (33) не буде монотонною лише у випадку, якщо $a_{2n} < a_{2n+1} \leftrightarrow a_2 < \frac{a_1(a_1-a_2)}{a_1+a_2}$, що виконується при $\frac{a_2}{a_1} \in (0, \sqrt{2}-1) \subset (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. У разі $\frac{a_2}{a_1} \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$, то послідовність членів ряду (33) буде спадною і тому при всіх $n \in N$ виконуються нерівності:

$$a_{2n} > r_{2n},\ \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}01} < \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}1},\ \max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}10} > \max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}0},$$

з яких слідує:

$$\Delta_{c_1 \dots c_{2n-1}0} \cap \Delta_{c_1 \dots c_{2n-1}1} = \varnothing,$$

$$E_q \cap (\max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}00}; \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}01}) = \varnothing,$$

$$E_q \cap (\max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}10}; \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-2}11}) = \varnothing.$$

Отже, інтервали виду $\delta_{c_1 \dots c_{2n-1} i_{2n}} \equiv (\max \Delta_{c_1 \dots c_{2n-1}0}; \min \Delta_{c_1 \dots c_{2n-1}1})$ не мають точок даної множини. Нас цікавить кількість інтервалів суміжних з множиною E_q , які мають ранг $2n$. Легко помітити, що

$$|\delta_{c_1 \dots c_{2n-1} i_{2n}}| = a_{2n} - r_{2n} \equiv d_{2n} = \frac{3a_2^2 - a_1^2}{2a_2} \cdot \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \dots$$

З ціллю дослідження властивостей такої множини, розглянемо циліндричні множини рангу $2n$ та виокремимо їх два типи.

1) $\Pi'_{c_1 \dots c_{2n-2}ab} \equiv \Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}01} \cup \Delta'_{c_1 \dots c_{2n-2}10}$ — це множина, що є об'єднанням пари циліндрів, які між собою будуть перетинатися. Тоді відповідний множині $\Pi'_{c_1 \dots c_{2n-2}ab}$ даний циліндричний відрізок будемо позначати через

$$\Pi_{c_1\ldots c_{2n-2}ab} \equiv \left[\min \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}01}, \max \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}10}\right].$$

2) $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc}$— це циліндр, який геометрично подібний до всієї множини E_q, $c \in \{0,1\}$.

Множина $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc}$ буде об'єднанням двох множин $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}ccjj}$, при $j \in \{0,1\}$, та однієї множини $\Pi'_{c_1\ldots c_{2n-2}ccab}$:

$$\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc} = \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc00} \cup \Pi'_{c_1\ldots c_{2n-2}ccab} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc11}, \quad (35)$$

при цьому множина $\Pi'_{c_1\ldots c_{2n-2}ab}$ буде об'єднанням трьох множин $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc}$ та двох множин $\Pi'_{c_1\ldots c_{2n}ab}$ парного рангу:

$$\Pi'_{c_1\ldots c_{2n-2}ab} =$$

$$\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}0100} \cup \Pi'_{c_1\ldots c_{2n-2}01ab} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}\bar{c}ccc} \cup \Pi'_{c_1\ldots c_{2n-2}10ab} \cup\cup \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}1011} \quad (36)$$

Множина $\Pi'_{c_1\ldots c_{2n-2}ab}$ матиме чотири суміжні інтервали, які мають вид:

$$(\max \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0100}, \min \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0101}), \ (\max \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0110}, \min \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0111}),$$

$$(\max \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0111}, \min \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}1001}), \ (\max \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}1010}, \min \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}1011}),$$

а множина $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc}$ матиме два суміжні інтервали рангу $2n+2$, які мають вид:

$$\left(\max \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc00}, \min \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc01}\right) \text{ та } \left(\max \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc10}, \min \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc11}\right).$$

Нехай x_n — це кількість циліндричних множин виду $\Pi'_{c_1\ldots c_{2n-2}ab}$, y_n — це кількість множин виду $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc}$, а z_n — це кількість суміжних з множиною E_q інтервалів, що мають ранг рівний $2n$.

З рівностей (35) та (36) випливає, що для всіх $n \in N$ справедливі рівності

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n, \quad (37)$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n \quad (38)$$

З того, що множина $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc}$ матиме два суміжні інтервали з рангом $2n$, а множина $\Pi'_{c_1\ldots c_{2n-2}ab}$ матиме чотири, то

$$z_n = 2x_{n-1} + 4y_{n-1}, \qquad \forall n \in N. \quad (39)$$

Оскільки циліндр другого рангу буде геометрично подібний множині E_q, тоді $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0$..

Знайдемо рекурентні співвідношення, які пов'язують члени послідовностей (x_n), (n), (z_0). З рівностей (37), (38) маємо $x_{n+1} = y_{n+1} + x_n + y_n$, це рівносильно

$$x_{n+1} - x_n = y_{n+1} + y_{n.} \qquad (40)$$

Перетворивши рівність (37), враховуючи (38), отримаємо

$$x_{n+1} = 2x_n + 2y_n + y_n = 2x_n + 2y_n + x_{n-1} + 2y_{n-1} =$$
$$= 2x_n + x_{n-1} + 2(y_n + y_{n-1)}$$

Використаємо рівністю (40) та отримаємо

$$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1} + 2(x_n - x_{n-1}) = 4x_n - x_{n-1}.$$

Аналогічно з рівностей (37), (38) отрмаєм:

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1} + 2y_n = 2x_{n-1} + 4y_{n-1} - 4y_{n-1} + 3y_{n-1} + 2y_n =$$

$$= 2(x_{n-1} + 2y_{n-1}) + 2y_n - y_{n-1} = 4y_n - y_{n-1}.$$

Нескладно помітити, що z_{n+1} також буде виражатися рекурентно:

$$z_{n+1} = 2x_n + 4y_n = 8x_n - 2x_{n-1} + 16y_n - 4y_{n-1} =$$

$$= 4 \cdot (2x_n + 4y_n) - (2x_{n-1} + 4y_{n-1}) = 4z_n - z_{n-1}.$$

Таким чином, маємо зворотні послідовності виду

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \qquad (41)$$

із різними початковими членами u_0 і u_0.

Тепер від рекурентного представлення послідовності $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ перейдемо до аналітичного. Знайдемо формулу загального члена ряду. Рівняння (41) буде лінійним різницевим рівнянням другого порядку, розв'язки якого спробуємо знайти серед показникових функцій виду $u_n = \lambda^n$. Зробимо підстановку та отримаємо

$$\lambda^{n+2} - 4\lambda^{n+1} + \lambda^n = 0,$$

скоротивши на λ^n , матимемо рівняння

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0,$$

яке буде характеристичним для різницевого рівняння (40). Це рівняння має два дійсні корені $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Із теорії різницевих рівнянь знаємо, що загальним розв'язком цього рівняння (40) є функція

$$u_n = C_1(2+\sqrt{3})^n + C_2(2-\sqrt{3})^n, \quad n = 0,1,2,\dots. \qquad (42)$$

Підставимо в останню рівність початкові умови $\begin{cases} u_0 \equiv z_0 = 0, \\ u_1 \equiv z_1 = 2, \end{cases}$ отримаємо коефіцієнти $C_1^z = \frac{1}{\sqrt{3}}, C_2^z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Також, підставимо у рівність (42) умови $\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_1 = 2, \end{cases}$ і $\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = 1, \end{cases}$ та отримаємо $C_1^x = C_2^x = \frac{1}{2}$ і $C_1^y = \frac{1}{2\sqrt{3}}, C_2^y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ відповідно [16, с.196].

Таким чином, шукані функції матимуть вигляд:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right), \qquad (43)$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right), \qquad (44)$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right), \qquad (45)$$

Щоб знайти міру Лебега даної множини, розглянемо міру її доповнення, для цього знайдемо суму довжин усіх суміжних із E_q інтервалів:

$$\lambda(\overline{E_q}) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n d_{2n} =$$

$$= \frac{a_2 - q(a_1 + 2a_2)}{\sqrt{3}(1-q)} \sum_{n=1}^{\infty} \left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right) q^{n-1} =$$

$$= \frac{a_2 - q(a_1 + 2a_2)}{\sqrt{3}(1-q)} \left(\frac{2+\sqrt{3}}{1-2q-\sqrt{3}q} - \frac{2-\sqrt{3}}{1-2q+\sqrt{3}q}\right) =$$

$$= \frac{a_2 - q(a_1 + 2a_2)}{1-q} \left(\frac{2}{1-4q+q^2}\right).$$

Підставивши $q = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}$, отримаємо: $\lambda\left(\overline{E_q}\right) = \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2} = \left|E_q\right|$. Отже, міра доповнення множини рівна її діаметру. Таким чином, $\lambda(E_q) = 0$. Позначимо через A_n сімейство відрізків $\Delta_{c_1\dots c_{2n-2}cc}$ та $\Pi_{c_1\dots c_{2n-2}ab}$, які мають ранг $2n$, тобто,

$$A_n = \left\{\Delta_{c_1\dots c_{2n-2}cc} \ \wedge \ \Pi_{c_1\dots c_{2n-2}ab}, c_j \in \{0,1\}\,, j = 1,2,\dots,2n-2\right\},$$

а через А позначимо сімейство можливих таких відрізків, тобто

$$A_n = \left\{\Delta_{c_1\dots c_{2n-2}cc} \ \wedge \ \Pi_{c_1\dots c_{2n-2}ab}, n \in N, c_j \in \{0,1\}\,, j = 1,2,\dots,2n-2\right\}.$$

Легко помітити, що система A_n вкриває множину E_q скінченною кількістю відрізків, що між собою не перетинаються. Тому для обчислення розмірності Гаусдорфа-Безиковича E_q розглянемо її покриття лише відрізками,що належать сімейству А. Кількість таких відрізків множини A_n обчислюється за формулами (43) і (44), а їх довжини становлять

$$\left|\Delta_{c_1\dots c_{2n-2}cc}\right| = r_{2n} = \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}q^n,$$

$$\left|\Pi_{c_1\dots c_{2n-2}ab}\right| = 2r_{2n} - r_{2n+2} = \frac{(a_1+3a_2)(a_1+a_2)}{2a_2}q^n \equiv \varepsilon_n.$$

Таким чином, при всіх $n \in N$ справедливо

$$m^{\alpha}_{\varepsilon_n} \le x_n \cdot \left|\Pi_{c_1\dots c_{2n-2}ab}\right|^{\alpha} + y_n \cdot \left|\Delta_{c_1\dots c_{2n-2}ii}\right|^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right)\left(\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}q^n\right)^{\alpha} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right)\left(\frac{(a_1+3a_2)(a_1+a_2)}{2a_2}q^n\right)^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n(A_1q^n)^{\alpha} + \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n(A_1q^n)^{\alpha}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n(A_2q^n)^{\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n(A_2q^n)^{\alpha} =$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})^n}{2}\left((A_1q^n)^{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{3}}(A_2q^n)^{\alpha}\right)+\frac{(2-\sqrt{3})^n}{2}\left((A_1q^n)^{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}}(A_2q^n)^{\alpha}\right) =$$

$$= (2+\sqrt{3})^n q^{\alpha n}\left(\frac{A_1^{\alpha}}{2} + \frac{A_2^{\alpha}}{2\sqrt{3}}\right) + (2-\sqrt{3})^n q^{\alpha n}\left(\frac{A_1^{\alpha}}{2} - \frac{A_2^{\alpha}}{2\sqrt{3}}\right) =$$

$$= B_1\left((2+\sqrt{3})q^{\alpha}\right)^n + B_2\left((2-\sqrt{3})q^{\alpha}\right)^n =$$

$$B_1 \left(1 + \frac{B_2}{B_1}(2-\sqrt{3})^{2n}\right) \cdot \left((2+\sqrt{3})q^{\alpha}\right)^n,$$

де $A_1 = \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}$, $A_2 = \frac{(a_1+3a_2)(a_1+a_2)}{2a_2}$, $B_1 \equiv B_1(\alpha) = \frac{A_1^{\alpha}}{2} + \frac{A_2^{\alpha}}{2\sqrt{3}}$, $B_2 \equiv B_2(\alpha) = \frac{A_1^{\alpha}}{2} - \frac{A_2^{\alpha}}{2\sqrt{3}}$.

Отже,

$$H^{\alpha}(E_q) \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(B_1 \left(1 + \frac{B_2}{B_1}(2-\sqrt{3})^{2n}\right) \cdot \left((2+\sqrt{3})q^{\alpha}\right)^n\right) =$$

$$= B_1 \lim_{n\to\infty} \left((2+\sqrt{3})q^{\alpha}\right)^n.$$

Якщо$(2+\sqrt{3})q^{\alpha} < 1 \leftrightarrow \alpha > \log_q(2+\sqrt{3}) \equiv \alpha_0$, тоді $H^{\alpha}(E_q) = 0$. А тому $H^{\alpha}(E_q) = 0$ при всіх $\alpha > \alpha_0$. Таким чином,

$$H^{\alpha_0}(E_q) \le B_1(\alpha_0) = \frac{A_1^{\alpha_0}}{2} + \frac{A_2^{\alpha_0}}{2\sqrt{3}} \; i \; \alpha_0(E_q) \le \alpha_0 = \log_{\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}}(2+\sqrt{3}).$$

Доведемо тепер нерівність $\alpha_0(E_q) \ge \alpha_0$. Для цього продемонструємо, що $H^{\alpha_0}(E_q) \ge \mathrm{C} > 0$, де C – це деяка константа. Оскільки множина E_q є компактною, то для обчислення величини m достатньо розглянути її скінченні ε-покриття $\{E_k\}$ відрізками $E_{\mathrm{i}} = [a_{\mathrm{i}}, b_{\mathrm{i}}]$. Тоді нехай

$$m_{\varepsilon}^{\alpha}(E_q) \equiv \sum_{i=1}^{k} |E_i|^{\alpha}.$$

Для будь-якої множини E_{i} з даного покриття є номер n_{i} , що має ранг відрізка із $A_{n_{\mathrm{i}}}$ такий, що

$$\min\left\{\left|\Delta_{c_1\ldots c_{2(n_i-1))}cc}\right|, \left|\Pi_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}ab}\right|\right\} \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2} q^{n_i} \le$$

$$\le |E_{\mathrm{i}}| < \left|\Pi_{c_1\ldots c_{2(n_i-2)}ab}\right| = \varepsilon_{n_i-1} < \varepsilon$$

Підносимо до степеня $\alpha_0 = \log_q(2-\sqrt{3})$ і отримаємо наступну систему для кожного E_{i} :

$$\begin{cases} (\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}q^{n_1})^{\alpha_0} = A_1^{\alpha_0}(2-\sqrt{3})^{n_1} \leqslant |E_1|^{\alpha_0}, \\ A_1^{\alpha_0}(2-\sqrt{3})^{n_2} \leqslant |E_2|^{\alpha_0}, \\ \ldots \\ A_1^{\alpha_0}(2-\sqrt{3})^{n_k} \leqslant |E_k|^{\alpha_0}. \end{cases}$$

Підсумувавши по k, маємо

$$\left(\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}\right)^{\alpha_0} \cdot \sum_{i=1}^{k}\left(2-\sqrt{3}\right)^{n_i} \leq \sum_{i=1}^{k}|E_{\text{i}}|^{\alpha_0} = m_{\varepsilon}^{\alpha_0}\left(E_q\right). \qquad (46)$$

Оскільки $|E_{\text{i}}| < \left|\Pi_{c_1\ldots c_{2(n_i-2)}ab}\right|$ та довжини циліндричних відрізків $\Delta_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}\text{cc}}$ менші ніж довжини інтервалів $\delta_{c_1\ldots c_{2n_i-3}i_2(n_i-1)}$ для $\frac{a_2}{a_1} > \frac{1}{\sqrt{3}}$, а множина $\Pi'_{c_1\ldots c_{2n-2}01ab}$, входить в об'єднання трьох відрізків виду $\Delta_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}\text{cc}}$ і двох відрізків виду $\Pi_{c_1\ldots c_{2(n_i-2)}ab}$, тоді кожний відрізок E_{i} має спільні точки не більше, ніж з п'ятьма відрізками, що мають ранг $2_{n_{\text{i}}}$ і належать сім'ї $A_{n_{\text{i}}}$. Теорему доведено.

Висновки до розділу II

Детально вивчено лебегівську структуру, тополого-метричні та фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини ξ, заданої за допомогою збіжного знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності. У випадку дискретності описано точковий спектр розподілу, а у випадку неперервності доведено, що він є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром. Більше того, доведено, що s-кратна автозгортка неперервного розподілу випадкової величини ξ має аномально фрактальний розподіл при будь-якому натуральному значенні s.

Досліджено фрактальні властивості несамоподібних множин, які є узагальненням множини неповних сум геометричного ряду, зокрема обчислено їх розмірності Гаусдорфа-Безиковича.

Також в цьому розділі вивчались множини неповних сум класів збіжних знакододатних рядів, для яких нерівності $a_n > r_n\ і\ a_n < r_n$ виконуються для нескінченних множин індексів n.

ВИСНОВКИ

Розпочате ще у 1914 році дослідження геометрії числових рядів (а в основному властивостей множини неповних сум) сьогодні стало важливим напрямком сучасних математичних досліджень, що ведуться як і в математичному аналізі, фрактальної геометрії, топології, теорії міри та ймовірностей.

Тому в даній роботі нами було розглянуто основі теореми та означення множини неповних сум. Виокремлено та систематизовано основні властивості множин неповних сум рядів Енгеля, Остроградського, Люрота. Продемонстровано знаходження множини неповних сум деяких окремих числових рядів. Встановлено типи та властивості множин підсум.

У другому розділі наведені приклади застосування неповних сум числових рядів в теорії ймовірностей та математичному аналізі (а саме фрактальному). Поняття спектр, сингулярного розподілу, характеристичних функцій та іншого дають змогу розглянути множину неповних сум числових рядів ширше та з різних сторін. Також були продемонстровані обчислення розмірності Гаусдорфа-Безиковича для деяких множин.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Guthrie J.A. The topological sructure of the set of subsums of an infinite series//Studia Math.- 1988. – T.55, №2. – P.323-327.
2. Hutchinson J. E. Fractals and self similarity // Indiana Univ. Math. J. — 1981. — 30. — P. 713–747.
3. Jessen B., Wintner A. Distribution function and the Riemann zeta function // Trans. Amer. Math. Soc. — 1935. — 38, no. 1. — P. 48–88.
4. Kakeya S. On the partial sums of an infinite series, Tohoku Sci. Rep.3, No. 4 (1914).
5. Александров П.С., Пасынков В.А. Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. — М.: Мир, 1973. — 576 с.
6. Барановський О.М. Ряди Остроградського 1-го виду та їх застосування. Київ: Вид-во НПУ імені Драгоманова, 2011 – с.188.
7. Барановський, О. М. Ряди Остроградського як засіб аналітичного задання множин і випадкових величин [Текст] / О. М. Барановський // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — No 1. — С. 91–102.
8. Боровков А.А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986. — 432 с.
9. Гетьман Б. І. Зображення чисел s-адичними рядами Енгеля // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9 — С. 212.
10. Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум збіжного знакододатного ряду та розподілів на ній// Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2005. – No6. – С. 210–224.
11. Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Фрактальні властивості множин точок недиференційованості абсолютно неперервної та сингулярної функцій розподілу // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2001. – No65. – С. 25–32.

12. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 231 с.
13. Івоненко А. О. Знаходження розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини канторівського типу // Студентські фізико-математичні етюди — 2010, No 9. — С. 43–58.
14. Корсунь Н. О., Працьовитий М. В. Про множину неповних сум знакododатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2009, No 10. — С. 28–39.
15. Лауринчикас А. П. Совместная универсальность общих рядов Дирихле // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т.69, No1. — С.133-144.
16. Лукач Е. Характеристические функции / Е. Лукач. — Москва: Наука, 1979. — 424 с.
17. Працьовита І.М. Розклади дійсних чисел в ряди Остроградського 2-го виду, їх геометрія та застосування. Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. К: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2008. №9. – с. 128-147
18. Працьовита І.М. Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова.Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2006. — No7. — С. 174–189.
19. Працьовита І.М. Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум. Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 174–189.
20. Працьовитий М.В., Гетьман Б.І. Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2006. — No7. — С. 105–116.

21. Працьовитий М.В., Савченко І.О. Розподіли випадкових неповних сум знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності// Теор. ймовірност. матем. статист. – 2014 - №91. – С.133-137.
22. Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В. Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота та розподіли ймовірностей на ній // Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. — No10.—С.14–28.
23. Працьовитий, М. В. Використання рядів Остроградського для аналітичного задання розподілів випадкових величин і відображень [Текст] / М. В. Працьовитий, О. М. Барановськи // Динамічні системи: Пр. Укр. мат. конгр.–2001. — Київ : Ін-т математики НАН України, 2003. — С. 59–76.
24. Савченко І.О. Фрактальний аналіз множин неповних сум числових рядів: дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз-мат. Наук.спец.: 01.01.01 "математичний аналіз"/ І.О. Савченко. – Київ, 2016. – 116 с.
25. Торбін Г. М. Фрактальні розподіли ймовірностей і перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича: дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз-мат. наук: спец.: 01.01.05 "теорія ймовірностей і математична статистика" / Г. М. Торбін. — Київ, 2008. — 404 с.
26. Торбін Г.М. Топологічні властивості спектра випадкової величини, за даної за допомогою збіжного знакододатного ряду // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – 1998. – No1. – С.45–52.
27. Ширяев А. Н. Вероятность. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 640 с.