and self-improvement that contribute to the formation of new thinking, perception and development of the creative potential of the future primary school teachers.

***Key words**: creativity, professional activity, creative personality, self perfection of future teacher of primary school.*

УДК 378.147:519.219

О. О. Чумак
Донбаська державна машинобудівна академія

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННЮ МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ ПІД ЧАС АУДИТОРНИХ ЗАНЯТЬ З ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Обґрунтовано важливість формування в майбутніх інженерів уміння математичного моделювання під час навчання теорії ймовірностей та випадкових процесів. Розглянуто поняття математичного моделювання та основних його етапів під час навчання студентів технічних ВНЗ математичним дисциплінам. Проаналізовано труднощі, що виникають у студентів під час побудови моделей до професійно орієнтованих та практичних завдань. Запропоновано використання прийомів евристичної діяльності на першому етапі моделювання професійно орієнтованих завдань. Наведено приклад побудови моделі під час лекції до професійно орієнтованого завдання, що ілюструє марковський випадковий процес.

***Ключові слова:** теорія ймовірностей та випадкових процесів, математичне моделювання, майбутні інженери, професійно орієнтовані завдання, лекція.*

Постановка проблеми. Зростаючі темпи розвитку науково-технічного прогресу на підприємствах вимагають від сучасного інженера володіння вмінням математичного моделювання. Широкі можливості для його формування під час навчання студентів технічних спеціальностей має дисципліна теорія ймовірностей та випадкових процесів (ТЙ та ВП). Її навчальний матеріал, з одного боку, базується на математичних моделях курсу вищої математики, а, з іншого, лежить в основі подальшого навчання профільним дисциплінам майбутніх інженерів. У такому аспекті безапеляційної актуальності набуває питання навчання математичному моделюванню ймовірнісних явищ, випадкових подій та інженерних процесів.

Аналіз актуальних досліджень. Питання навчання студентів математичному моделюванню розглядаються в роботах таких сучасних науковців-математиків, як К. В. Власенко [2], Т. В. Крилова [3], Л. І. Нічуговська [4], Т. М. Хмара і Т. М. Задорожня [6], В. О. Швець [7] та ін. Вони відзначають необхідність розвитку в студентів ВНЗ та учнів загальноосвітніх шкіл уміння математичного моделювання та його використання в різних галузях науки і техніки. Крім того, у працях сучасних дослідників моделювання розглядається і як метод навчання, і як метод наукового дослідження. Але оволодіння майбутніми інженерами цим умінням описується науковцями здебільшого під час навчання вищої математики.

У роботах, що відображають математичне моделювання в ході навчання теорії ймовірностей майбутніх економістів, цей процес розглядається або досить фрагментарно, або під час розв’язування професійно спрямованих економічних завдань. Також слід зазначити, що майже не існує такої методики навчання математичному моделюванню студентів, що передбачала б можливість її застосування в курсі теорії випадкових процесів.

Тому, **метою статті** є обґрунтування важливості формування в майбутніх інженерів уміння математичного моделювання під час навчання ТЙ та ВП і розробка методичних рекомендацій щодо управління їхньою навчально-пізнавальною діяльністю під час побудови моделі, що відображає марковський випадковий процес із дискретним станом і неперервним часом.

Виклад основного матеріалу. Проаналізуємо визначення поняття математичного моделювання, що пропонується в науково-методичній літературі.

Так, Т. В. Крилова [3] під математичним моделюванням процесу чи об’єкта розуміє вивчення їхніх властивостей на спрощеній моделі, у якості якої може виступати певний математичний об’єкт, зокрема вектор, функція, графік, рівняння, система рівнянь, нерівність, похідна, інтеграл тощо.

З цим погоджується і К. В. Власенко [2, 321], яка, спираючись на О. А. Ляпунова, під моделюванням розуміє опосередковане практичне або теоретичне дослідження об’єкта у випадку, коли безпосередньо вивчається не сам об’єкт, що цікавить, а деяка допоміжна штучна або природна модель: яка знаходиться в деякій об’єктивній відповідності з об’єктом, що досліджується; здатна заміщати його в певних відносинах; уможливлює отримання в процесі дослідження підсумкової інформації про сам об’єкт моделювання.

У більшості сучасних досліджень математиків-методистів вважається, що процес математичного моделювання в ході розв’язування прикладних або професійно орієнтованих завдань поділяється на етапи: 1) математичне формулювання завдання (первинний збір даних; постановка задачі; обґрунтування основних припущень); 2) створення математичної моделі; 3) дослідження математичної моделі; 4) інтерпретація отриманих математичних результатів, їх аналіз та корекція.

Аналіз науково-методичної літератури [5; 6; 7] та досвід автора [1] свідчать про те, що найбільш складним для студентів є перший та другий етапи, оскільки універсального алгоритму формалізації реальних проблем не існує.

Так, Т. М. Хмара та Т. М. Задорожня [6, 88], розглядаючи стохастичне моделювання, відзначають, що найбільш проблематичним під час розв'язування ймовірнісно-стохастичних завдань для студентів є побудова всіх можливих наслідків стохастичного експерименту з розподілом ймовірностей, що і утворює математичну модель випадкового експерименту. На думку авторів, одним із шляхів навчання студентів «мистецтву моделювання» є реалізація його розвитку як здібності студентів «бачити різне в однаковому і однакове в різному». Проте умови організації такого розвитку під час навчання студентів теорії ймовірностей авторами не відображено.

Інша позиція науковців представлена, зокрема, у працях К. В. Власенко [1], О. І. Скафи [5], В. О. Швеця [6], які для уникнення труднощів студентами пропонують на першому етапі моделювання використовувати евристичні запитання, евристичні підказки, евристичні приписи, спеціальні евристики, що застосовуються для вивчення конкретного навчального матеріалу.

Як відзначає О. І. Скафа [5], завдяки неодноразовому застосуванню певної евристики до розв'язання низки схожих завдань відбувається поступова автоматизація цього вміння, втрачається новизна застосування евристики в даних обставинах. У такий спосіб виявлення евристики втрачає притаманну раніше оригінальність і новизну, тобто формується евристична діяльність.

Отже, ми вважаємо доцільним залучення евристичного компоненту в процес навчання математичному моделюванню майбутніх інженерів.

Покажемо, як на прикладах навчального матеріалу модуля «Теорія випадкових процесів» відбувається демонстрація побудови математичних моделей випадкових процесів найбільш відомих в інженерній практиці.

Продемонструємо під час лекції побудову моделі, що відображає марковський випадковий процес з дискретним станом і неперервним часом.

Під час такої лекції слід звернути увагу студентів на те, що процеси, в яких перехід з одного стану системи в інший відбувається у фіксовані моменти часу, мало застосовуються в інженерній практиці. Більш розповсюдженими є процеси, в яких переходи відбуваються у випадкові моменти часу. Такі процеси називають марковськими процесами з дискретним станом та неперервним часом. З метою демонстрації моделі студентам пропонується завдання 1.

Завдання 1. Верстат із програмним управлінням може знаходитись у трьох станах: S_1 – працює безвідмовно, S_2 – не працює, ведеться пошук несправності, S_3 – ремонтується. Відомо, що зі стану S_1 система може переходити у стан S_2 з інтенсивністю λ_{12}, із S_2 вона може переходити у стан S_3 з інтенсивністю λ_{23}, з якого вона або повертається до S_2 з інтенсивністю λ_{32}, або переходить до S_1 з інтенсивністю λ_{31}. Знайдіть ймовірність того, що у випадковий момент часу *t* система перебуватиме у стані S_1.

На початку побудови моделі доцільно нагадати студентам етапи моделювання. Слід звернути їх увагу на те, що в даному випадку ми починаємо одразу з постановки навчальної задачі і обґрунтування основних припущень моделі.

Побудова моделі, яку ми розглядаємо, ґрунтується на наступних гіпотезах:

1) перехід одного стану S_i в інший S_j відбувається у випадковий момент часу під впливом пуассонівських потоків подій з інтенсивністю λ_{ij} (середнє число переходів із стану S_i у стан S_j за одиницю часу);

2) процес, який ми розглядаємо, є однорідним, тобто інтенсивності λ_{ij} не залежать від часу *t.*

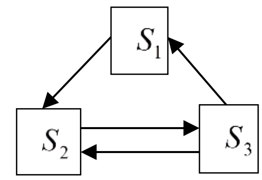
Почнемо складання моделі. Покажемо, як у ході побудови моделі викладач може залучити студентів до активної співбесіди. Для цього запис викладача на дошці має супроводжуватися відповідним діалогом зі студентами, що наведено нижче.

Діалог викладача зі студентами	***Запис на дошці***
Викладач. Позначимо $p_i(t)$ – ймовірність того, що в момент часу *t* система знаходиться у стані S_i $(i=1,2,3)$.	$p_i(t)$ – ймовірність того, що в момент часу *t* система знаходиться у відповідному стані S_i $(i=1,2,3)$.
Очевидно, що для будь-якого моменту часу *t* сума таких ймовірностей дорівнює 1, оскільки події, що полягають у знаходженні системи в станах S_1, S_2, S_3 у момент часу *t* несумісні та утворюють повну групу.	$\sum_{i=1}^{3} p_i(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$.

Надамо часу *t* малий приріст Δt. Позначимо, як *А*, подію, що полягатиме у знаходженні системи в момент часу $t+\Delta t$ у стані S_1.

Подія *А* – система в момент часу $t+\Delta t$ знаходиться у стані S_1.

Розглянемо більш раціональне зображення графу системи, та з’ясуємо, за яких умов може відбутися подія *А* з урахуванням умови завдання?



Студенти. Подія *А*, яка полягає в тому, що в момент часу $t+\Delta t$ система буде перебувати у стані S_1 може відбутись двома способами, що відповідають різним подіям:

1) система в момент часу *t* знаходилась у стані S_1 і за проміжок часу Δt не вийшла з цього стану (подія *В*);

2) система в момент часу *t* знаходилась у стані S_3 і за проміжок часу Δt перейшла у стан S_1 (подія *С*).

Подія *В* – система в момент часу *t* знаходилась у стані S_1 і за проміжок часу Δt не вийшла з цього стану.

Подія *С* – система в момент часу *t* знаходилась у стані S_3 і за проміжок часу Δt перейшла у стан S_1.

Викладач. Правильно. Позначимо вказані події. З’ясуємо залежність подій *В* та *С*.

Студенти. Події *В* та *С* є несумісними.

Події *В* та *С* – несумісні.

Викладач. Правильно. Скажіть, як пов’язана подія А з подіями *В* та *С*?

Студенти. Оскільки подія А полягає в тому, що відбудеться чи подія *В*, чи подія *С*, то *А* є сумою подій *В* та *С*.

$A = B + C$.

Викладач. Правильно. Знайдемо ймовірність події *А*. Оскільки події є несумісними, то виконується теорема додавання несумісних подій.

$P(A) = P(B+C) = P(B) + P(C)$.

У попередніх міркуваннях ми припустили, що $\Delta t > 0$ – нескінченно мала величина. Тоді, за властивістю пуассонівського потоку подій $\lambda_{ij} \cdot \Delta t$ – ймовірність

$P_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t$.

того, що система перейде з стану S_i у стан S_j.

За теоремою множення ймовірностей залежних випадкових подій знайдемо ймовірність події *B* як добуток ймовірності того, що в момент часу *t* система знаходилась у стані S_1 ($p_1(t)$), на умовну ймовірність того, що за проміжок часу Δt вона не перейде у стан S_2.

$$P(B) = p_1(t) \cdot (1 - \lambda_{12} \cdot \Delta t).$$

Аналогічно знаходимо ймовірність події *C*.

$$P(C) = p_3(t) \cdot \lambda_{31} \cdot \Delta t.$$

Знаходимо ймовірність події A як суму подій *B* та *C*.

$$P(A) = p_1(t + \Delta t) = p_1(t) \cdot (1 - \lambda_{12} \cdot \Delta t) +$$
$$+ p_3(t) \cdot \lambda_{31} \cdot \Delta t.$$

Виконаємо перетворення, розкриваючи дужки у правій частині рівняння.

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t) - p_1(t) \cdot \lambda_{12} \cdot \Delta t +$$
$$+ p_3(t) \cdot \lambda_{31} \cdot \Delta t.$$

Переносимо функцію $p_1(t)$ з правої частини рівняння в ліву частину.

$$p_1(t + \Delta t) - p_1(t) = -p_1(t) \cdot \lambda_{12} \cdot \Delta t +$$
$$+ p_3(t) \cdot \lambda_{31} \cdot \Delta t.$$

Для знаходження швидкості зміни функції ймовірності поділимо рівняння на Δt.

$$\frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = -p_1(t)\lambda_{12} + p_3(t)\lambda_{31}.$$

Знайдемо границю лівої частини рівняння, якщо $\Delta t \to 0$. Згадаємо, який зміст має ця границя.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} =$$
$$= -p_1(t)\lambda_{12} + p_3(t)\lambda_{31}.$$

Студенти. Границя відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, визначає похідну цієї функції.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = \frac{dp_1(t)}{dt}.$$

Викладач. Правильно. Отже, зліва отримуємо похідну функції $p_1(t)$.

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -p_1(t)\lambda_{12} + p_3(t)\lambda_{31}.$$

Таким чином, ми отримали диференціальне рівняння, якому задовольняє функція $p_1(t)$.

$$p_1'(t) = \lambda_{31} \cdot p_3(t) - \lambda_{12} \cdot p_1(t).$$

Аналогічно можна вивести диференціальні рівняння для інших функцій та скласти систему диференціальних рівнянь, що і буде математичною моделлю до завдання 1.

$$\begin{cases} p_1'(t) = \lambda_{31} \cdot p_3(t) - \lambda_{12} \cdot p_1(t), \\ p_2'(t) = \lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{32} \cdot p_3(t) - \lambda_{23} \cdot p_2(t), \\ p_3'(t) = \lambda_{23} \cdot p_2(t) - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) \cdot p_3(t). \end{cases}$$

Викладач зауважує, що задача Коші визначається в залежності від того, в якому початковому стані знаходилася система.

Враховуючи, що лекція розрахована на майбутніх інженерів, висновок про загальний вигляд системи диференціальних рівнянь для випадку S_n станів може бути сформульований на основі дедукції.

Таким чином, математичною моделлю для знаходження ймовірностей станів $p_i(t)$ є система диференціальних рівнянь Колмогорова, яка має загальний вигляд:

$$\begin{cases} \lambda_{21}p_2 + \lambda_{31}p_3 + \ldots\lambda_{n1}p_n - \left(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \ldots\lambda_{1n}\right)p_1 = p_1'(t), \\ \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 + \ldots\lambda_{n2}p_n - \left(\lambda_{21} + \lambda_{23} + \ldots\lambda_{2n}\right)p_2 = p_2'(t), \\ \ldots \\ \lambda_{1n}p_1 + \lambda_{2n}p_2 + \ldots\lambda_{n-1,n}p_{n-1} - \left(\lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots\lambda_{n,n-1}\right)p_n = p_n'(t). \end{cases}$$

де $p_1(0) = p_{1,0}$, $p_2(0) = p_{2,0}$,..., $p_n(0) = p_{n,0}$.

Крім цього, слід пояснити студентам, як легше запам’ятати структуру побудови моделі.

<u>*Зауваження:*</u> похідна ймовірності будь-якого стану системи дорівнює сумі потоків ймовірностей, що переводять систему в цей стан, без суми усіх потоків ймовірностей, що виводять її з цього стану.

У випадку, коли необхідно знайти тільки граничні ймовірності, то можна уникнути розв’язування досить громіздкої проблеми Коші. Для досить великих значень *t*, якщо $t \to \infty$, ймовірності прямують до своїх граничних значень. Отже, ймовірності постійні і їх похідні дорівнюють нулю. Таким чином, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_{21}p_2 + \lambda_{31}p_3 + \ldots\lambda_{n1}p_n - \left(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \ldots\lambda_{1n}\right)p_1 = 0, \\ \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 + \ldots\lambda_{n2}p_n - \left(\lambda_{21} + \lambda_{23} + \ldots\lambda_{2n}\right)p_2 = 0, \\ \ldots \\ \lambda_{1n}p_1 + \lambda_{2n}p_2 + \ldots\lambda_{n-1,n}p_{n-1} - \left(\lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots\lambda_{n,n-1}\right)p_n = 0. \end{cases}$$

У такій системі одне з рівнянь доцільно замінити нормуючим рівнянням: $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + \ldots p_n(t) = 1$.

Таким чином, отримана модель до завдання 1 може мати більш спрощений вигляд:

$$\begin{cases} \lambda_{31} \cdot p_3(t) - \lambda_{12} \cdot p_1(t) = 0, \\ \lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{32} \cdot p_3(t) - \lambda_{23} \cdot p_2(t) = 0, \\ p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1. \end{cases}$$

Після цього, в якості домашнього завдання можна запропонувати студентам конкретизувати завдання 1 та отриману до нього математичну модель, а його перевірку організувати під час наступного практичного заняття.

Така навчальна діяльність, що полягає в побудові й дослідженні моделі випадкового процесу, сприяє кращому усвідомленому засвоєнню даної теми студентами, формуванню їхнього уявлення про єдність деяких розділів вищої математики, теорії випадкових процесів та зв'язку з реальними інженерними дослідженнями. На наступних лекційних заняттях мають бути розглянуті:

1) модель, що описує процес загибелі та розмноження в ході дослідження різноманітних технічних систем;
2) модель, що описує процес резервування технічного пристрою;
3) модель, що описує процес Ерланга на прикладі обслуговування технічних пристроїв.

Одну з перелічених моделей можна запропонувати студентам в якості домашнього завдання чи для самостійного розгляду на практичному занятті під керівництвом викладача. Роль викладача в організації самостійної роботи студентів полягатиме у формулюванні й роз'ясненні завдання, інструктажі, спостереженні за роботою, роз'ясненні питань студентів, корекції роботи, перевірці й аналізі отриманих результатів.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Робота з математичною моделлю реального інженерного процесу сприяє підвищенню мотивації до навчання дисципліни, відображає зв'язок між ТЙ і ВП, вищою математикою та спеціальними дисциплінами, унаслідок чого студенти активно опановують уміння, що є необхідними для майбутньої професійної діяльності. Питання навчання побудові та дослідженню математичних моделей до інших випадкових процесів може стати об'єктом подальших розвідок у цьому напрямі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Власенко К. В. Математичне моделювання майбутніми інженерами в ході навчання теорії ймовірності та випадкових процесів / К. В. Власенко, О. О. Чумак // Вісник національного технічного університету «ХПІ» : зб. наук. праць. Тем. випуск: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ» – 2012. – № 1. – С. 38–43.

2. Власенко К. В. Теоретичні й методичні аспекти навчання вищої математики з використанням інформаційних технологій в інженерній машинобудівній школі : монографія / К. В. Власенко ; Науковий редактор д.пед.н., проф. О. І. Скафа. – Донецьк :

«Ноулідж» (донецьке відділення), 2011. – 410 с.

3. Крилова Т. В. Проблеми навчання математики в технічному ВНЗ : монографія / Т. В. Крилова. – К. : Вища школа,1998. – 437 с.

4. Нічуговська Л. І. Математичне моделювання в системі економічної освіти : монографія / Л. І. Нічуговська. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2003. – 289 с.

5. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология : монография / Е. И. Скафа. – Донецк : Изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.

6. Хмара Т. М. Стохастичні моделі як засіб розвитку мислення учнів / Т. М. Хмара, Т. М. Задорожня // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. – Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2010. – № 2 (4) – С. 86–93.

7. Швець В. О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики / В. О. Швець // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Вип. 32. – Донецьк : Фірма ТЕАН, 2009. – С. 16–23.

РЕЗЮМЕ

Чумак Е. А. Методические рекомендации к обучению математическому моделированию будущих инженеров во время аудиторных занятий по теории случайных процессов.

В статье обосновывается важность формирования у будущих инженеров умения математического моделирования при обучении теории вероятностей и случайных процессов. Автором рассматриваются понятия математического моделирования и основных его этапов при обучении студентов технических вузов математическим дисциплинам. Анализируются трудности, возникающие у студентов при построении моделей во время решения профессионально ориентированных заданий. В работе приводится пример построения модели во время лекции к профессионально ориентированному заданию, иллюстрирующему марковский случайный процесс.

Ключевые слова: *теория вероятностей и случайных процессов, математическое моделирование, будущие инженеры, профессионально ориентированные задания, лекция.*

SUMMARY

Chumak E. Guidelines for mathematical modeling training of future engineers during classroom studies on the theory of stochastic processes.

The importance of formation of the mathematical modeling ability during the study of the theory of probability and stochastic processes by future engineers is substantiated. The notion of mathematical modeling when teaching the students of technical universities to the mathematical disciplines is examined.

The paper reveals the difficulties met by students during the construction of models to the problems. The author notes that the universal formalization algorithm of real problems does not exist; therefore the most difficult for students are the first and the second stages of simulation when solving professionally oriented tasks. In order to solve a problem the techniques of heuristic activity are proposed to take advantage in the first stage of modeling.

The study displays one of the ways of teaching students to the «art of modeling», namely the implementation of its development as the ability of students to «see different in the same and the same in differences».

This article contains an example of building a model to a professionally oriented task during a lecture. It is shown how a teacher in the course of constructing a model can engage students into interactive debate. For this purpose the teacher's notation on the blackboard should be accompanied by an appropriate dialogue with students. Methodological recommendations for the direction of educational and cognitive activities of students during the construction of models reflecting Markov random process of discrete state and continuous time are suggested.

It is shown why such learning activities, which are to build and study models of stochastic process, contribute to the conscious assimilation of the topic by the students, as well as to the building of their understanding of the unity of some sections of higher mathematics, stochastic processes and connection with real engineering studies. The author emphasizes that the work with a mathematical model of a real engineering process enhances motivation to learn the discipline, so that the students actively master the skills necessary for their future careers. The issue of mathematical modeling training and research of other stochastic processes may become the subject of further survey in this area.

Key words: *probability theory and stochastic processes, mathematical modeling, future engineers, professionally oriented tasks, lecture.*