УДК 538.3+372.853

Величко Степан Петрович
Мороз Иван Алексеевич
Песоцкая Инесса Александровна

МЕТОДИКА ОБОСНОВАНИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В КУРСЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Рассматривается методика обоснования единственности решений уравнений Максвелла для электростатического поля в курсе электродинамики при подготовке учителей физики.

Ключевые слова: уравнения Пуассона и Лапласа, потенциал, напряженность и индукция электрического поля.

Постановка проблемы Одной из основных задач, которые решаются в учебном процессе изучения электродинамики при подготовке учителя физики, является задача о вычислении характеристик электрического поля системы свободных и связанных зарядов заданной конфигурации. Такую задачу можно решить несколькими способами. Наиболее общий из них - это вычисление потенциала (φ) электростатического поля путем решения уравнений Пуассона и Лапласа, которые являются дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных [1-4]. Как известно из математики, такие уравнения в общем случае имеют большое количество линейно независимых решений для потенциала φ, а значит и для напряженности $\vec{E} = -grad\varphi$ и индукции $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ электрического поля. Поэтому необходимо обосновать вопрос о том, как из огромного количества линейно независимых решений, которые удовлетворяют уравнениям Пуассона и Лапласа, выбрать одно единственное, соответствующее заданной конфигурации зарядов.

Как показывает **анализ актуальных исследований** этот вопрос остался вне поля зрения методической науки, не освещен в учебной литературе (см., например, известные учебники для ВУЗов [4-8]) и не рассматривается в лекционной практике, что является совершенно необоснованным.

Поэтому **в данной статье** предлагается к рассмотрению один из возможных вариантов обоснования выбора единственного решения уравнений Пуассона и Лапласа, соответствующего конкретному заданию конфигурации зарядов, которое преподаватель должен выполнить во время чтения лекций по теме «Стационарное электрическое поле», т.к. отсутствие такого обоснования приводит к догматизму в восприятии материала.

Изложение основного материала. Для решения вопроса об указанном обосновании единственности решений необходимо воспользоваться следующими, известными студентам, теоретическими сведениями.

1. Электрическое поле стационарных зарядов при наличии свободных зарядов, проводников и диэлектриков описывается системой уравнений:

$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$ (или $\mathrm{div}\vec{\mathrm{D}} = \rho$) и $rot\vec{E} = 0$, где ε - диэлектрическая проницаемость вещества, которая формальным образом учитывает наличие в нем связанных зарядов, ρ - объемная плотность свободных зарядов, ε_0 - электрическая постоянная.

2. Для векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$, характеризующих электрическое поле, справедливы, так называемые, граничные условия, определяющие поведение их нормальных и тангенциальных составляющих на границе раздела сред.

3. Взаимодействие электрических зарядов выражается через векторы, характеризующие поле:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\vec{D}dV \,. \tag{I}$$

Это выражение дает возможность утверждать, что каждая единица объема электрического поля обладает энергией:

$$u = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D},$$

т.е. энергия взаимодействия локализована в самом поле.

4. Для электрического поля справедлив принцип суперпозиции.

Итак, пусть задана система заряженных тел, среди которых есть как проводники с известным распределением зарядов, так и поляризованные диэлектрики с известной диэлектрической проницаемостью, с помощью которой учитывается связанный заряд, возникающий при поляризации. Таким образом, будем считать, что в каждой точке пространства известная плотность свободных зарядов и диэлектрическая проницаемость диэлектриков. Докажем, что электрическое поле, заданной таким образом системы свободных и связанных зарядов, описывается единственным набором характеристик поля φ, $\vec{E}$ и $\vec{D}$, удовлетворяющим уравнением Максвелла и граничным условиям. Доказательство будем вести от противоположного, то есть допустим, что существует несколько разных выражения для потенциала, напряженности и индукции электростатического поля, образованного совокупностью указанных заряженных тел. Каждое из этих решений удовлетворяет уравнениям поля и граничным условиям. Все величины, которые относятся к некоторому одному набору характеристик поля, обозначим одним штрихом, а к некоторому другому - двумя штрихами. Каждое решение удовлетворяет граничным условиям и уравнениям поля. Для первого набора имеем:

$$\vec{E}' = -grad\varphi' \,, \quad div\vec{D}' = \rho \,, \quad rot\vec{E}' = 0 \,. \tag{II}$$

Аналогичным уравнением удовлетворяет второе решение:

$$\vec{E}'' = -grad\varphi'' \,, \quad div\vec{D}'' = \rho \,, \quad rot\vec{E}'' = 0 \,. \tag{III}$$

Используя принцип суперпозиции, можно считать, что поле, которое описывается, например, величинами $\vec{E}',\ \vec{D}',\ \varphi'$, является наложением (суперпозицией) поля $\vec{E}'',\ \vec{D}'',\ \varphi''$ и некоторого третьего поля $\left(\vec{E} = \vec{E}' - \vec{E}'',\ \vec{D} = \vec{D}' - \vec{D}'',\ \varphi = \varphi' - \varphi''\right)$, которое условно назовем разностным полем. Запишем уравнения, которым удовлетворяет разностное поле:

$$\begin{gathered} \vec{E} = -grad\,\varphi, \\ div\vec{D} = div\left(\vec{D}' - \vec{D}''\right) = div\vec{D}' - div\vec{D}'' = 0, \\ rot\vec{E} = rot(\vec{E}' - \vec{E}'') = rot\vec{E}' - rot\vec{E}'' = 0. \end{gathered} \tag{IV}$$

Если наше предположение о возможности существования различных решений уравнений поля верное, т.е. возможно существование различных полей, соответствующих заданной конфигурации зарядов, то с каждым из этих полей должна быть связаны энергия, определяемая выражением (I) и, следовательно, энергия разностного поля равна:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\vec{D}dV = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \int_V E^2 dV \,. \qquad \text{(V)}$$

Преобразуем подынтегральное выражение в (V), используя известную формулу векторной алгебры[1]:

$$\vec{E}\vec{D}dV = -\vec{D}grad\varphi dV = -div(\varphi\vec{D})dV + \varphi div\vec{D}dV = -div(\varphi\vec{D})dV \,.$$

Тогда энергия разностного поля в объеме *V* будет равна:

$$W = -\frac{1}{2}\int_V div(\varphi\vec{D})dV \,. \qquad \text{(VI)}$$

К интегралу в правой части применим формулу Остроградского-Гаусса:

$$\int_V div(\varphi\vec{D})dV = \oint_S \left(\varphi\vec{D}\right)d\vec{S} \,, \qquad \text{(VII)}$$

где S – некоторая замкнутая поверхность, которая охватывает объем V, $d\vec{S}$ - элемент площади на этой поверхности.

В формуле Остроградского-Гаусса (VII) поверхность интегрирования S произвольная. Поэтому в качестве такой поверхности может быть выбрана сфера, которая целиком охватывает объем V.

Чтобы найти всю энергию разностного поля, интеграл (VII) должен быть взят по всему объему, занятому полем, включая и бесконечно отдаленные точки, т. е. интегрирование в (VII) следует вести по сферической поверхности бесконечного радиуса.

Систему заряженных тел, которые сосредоточены в конечной области пространства, относительно бесконечно отдаленных точек можно рассматривать как точечный заряд, который находится в центре сферы бесконечно большого радиуса. Потенциал поля точечного заряда уменьшается с расстоянием не медленнее, чем $\varphi \sim \frac{1}{R}$, где R - расстояние от точки, где сосредоточен суммарный заряд системы, до поверхности сферы. Модуль вектора $\vec{D}$ в поле точечного заряда уменьшается не медленнее, чем $D \sim \frac{1}{R^2}$. Следовательно, произведение ($(\varphi\vec{D})$ в (VII) уменьшается не медленнее, чем ($\varphi D \sim \frac{1}{R^3}$) , тогда как поверхность растет не быстрее, чем ($S \sim R^2$. Потому интеграл в (VII) по бесконечно отдаленной поверхности равняется нулю. Равенство нулю интеграла по поверхности, которая ограничивает поле, означает, что энергия разностного поля равняется нулю. Поскольку квадратичная функция E^2 в выражении (V), из которого мы исходили, не может быть отрицательной, то в любой точке разностного поля квадрат напряженности (E^2), а следовательно, и величина напряженности E равняется нулю. Следовательно, разностного поля не существует:

$$\vec{E}' = \vec{E}'', \quad \vec{D}' = \vec{D}'', \quad \varphi' = \varphi'' \,.$$

Таким образом, наше предположение о возможном существовании множества решений Пуассона и Лапласа, которые удовлетворяют решениям Максвелла и граничным условиям, для заданной конфигурации зарядов оказывается неверным, что и определяет

---

[1] Для произвольных скалярной ψ и векторной $\vec{A}$ функций справедлива формула:

$div\psi\vec{A} = \psi div\vec{A} + \vec{A}grad\psi$.

утверждение: **решение, которое удовлетворяет уравнением поля и граничным условиям, является единственным.**

Далее следует предложить студентам самостоятельно доказать следующие свойства рассмотренного обоснования, которые лежат в основе, так называемого, метода зеркальных изображений. Этот метод (без рассмотренного обоснования единственности решений уравнений поля и доказательства следствий) часто используется для решения задач в общем курсе физики и даже в олимпиадных задачах по школьному курсу физики.

Следствие 1. Электростатическое поле и соответствующие ему выражения для потенциала (и напряженности) в некотором объеме, ограниченном эквипотенциальными поверхностями, не изменится, если эти поверхности станут проводящими, то есть превратятся в границы проводников, которым сообщаются соответствующие потенциалы.

Следствие 2. Электростатическое поле по одну сторону некоторой поверхности S (необязательно эквипотенциальной) не изменится, если по другую сторону этой поверхности изменить параметры среды и распределение зарядов так, чтобы сохранились граничные условия на указанной поверхности.

Выводы: 1. Рассмотренная методика обоснования единственности решений уравнений Максвелла ставит окончательную точку в формировании представлений студентов о свойствах электростатического поля и методах его расчета и в предложенном (или ином) варианте обязательно должна использоваться преподавателями в лекционном курсе, поскольку без такого обоснования студенты должны принять «на веру» решение задачи о вычислении характеристик поля.

2. Поскольку вектор индукции $\vec{B}$ магнитного поля выражается через векторный потенциал $\vec{A}$ $(\vec{B} = rot\vec{A})$, а последний также определяется решением уравнений Пуассона и Лапласа, то, очевидно, остается нерешенным вопрос и о методическом обосновании в учебном процессе подготовки учителей физики единственности решений уравнений Максвелла и для магнитного поля, а в более общем случае – и для электромагнитного поля.

Литература

1. Бредов М.М. Классическая электродинамика / М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. – М. : Наука, 1985. – 400 с.

2. Тамм И.Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М.: Наука, 1966. – 624 с.

3. Коновал О.А. Теоретичні та методичні основи вивчення електродинаміки на засадах теорії відносності : монографія / О.А. Коновал; Міністерство освіти і науки України; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2009. – 346 с.

4. Мултановский В.В. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика / В.В. Мултановский, А.С. Василевский.. – М.: Просвещение, 2006, – 352 с.

5. Сивухин Д.В. Общий курс физики : / Д.В. Сивухин. Электричество – Т. III:. – М.: Наука, 1977. – 688 с.

6. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм / А.Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1983. – 463 с.

7. В.И. Белодед. Электродинамика: / В.И. Белодед. М. Инфа-М. Новое знание, 2011. – 208 с.

8. А.М. Сомов. Электродинамика / В.В. Старостин, С.Д. Бенеславский. – М. Горячая линия – Телеком. 2011. – 198 с.

Величко С.П. – профессор кафедры физики и методики ее преподавания, доктор педагогических наук, профессор.
Кировоградский педагогический университет им. В. Винниченко, Кировоград (Украина)
(рабочий) 21006, г. Кировоград, ул. Шевченко, 1.

Мороз И.А. - профессор кафедры экспериментальной и теоретической физики, кандидат технических наук, доцент.
Сумский государственный педагогический университет имени А.С. Макаренко, Сумы (Украина)
(рабочий) ул. Роменская, 87, г. Сумы, Украина, 40002

Песоцкая Инесса Александровна - начальник управления образования и науки Сумской областной государственной администрации.
Управление образования и науки Сумской областной государственной администрации, Сумы (Украина)
(рабочий) 40024 Г. Сумы, Ул. Прокофьева , 38-а.

Annotation

Methodology of ground of nicety of decisions of equalizations of Maxwell is examined for the electrostatic field in a course an electrodynamics at preparation of teachers of physics.

Keywords: equalizations of Poisson and Laplace, potential, tension and induction of electric-field.