Research results. Because of the difficulty in organizing and conducting excursions, they are not often used in pre-school education institutions, although they provide solutions to many tasks, both educational and educational. The organization of an ecological excursion requires preliminary preparation of the educator and children, the selection and use of a number of methods and means, in particular, problem and research tasks, and a final discussion is required to consolidate the results.

In the course of the study, we identified levels of ecological upbringing and defined their criteria to prove the effectiveness of the system of ecological excursions. As a result of the work done, the number of children with a high level of ecological upbringing has noticeably (50-70%) increased, they have developed knowledge, a positive attitude towards objects of nature and environmentally friendly behavior.

Conclusions and perspectives of further research. As the study shows, environmental excursions should be actively used in the practice of preschool education institutions as an effective form of environmental education of children.

***Key words:** environmental education, excursions, older preschoolers, pre-school education institutions.*

УДК 372.851.2
DOI 10.5281/zenodo.2643157

О. О. Одінцова
ORCID ID 0000-0002-9948-3801
Ю. О. Кондик
Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка

ДЕЯКІ ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ НАВЧАННЯ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ РОЗВ'ЯЗУВАТИ РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

У шкільному курсі алгебри змістова лінія рівнянь та нерівностей є однією з основних. Вона має розгалужену систему внутрішньопредметних та міжпредметних зв'язків. Оволодіння різними способами розв'язування рівнянь, їх систем, серед яких і квадратні, й ті, що зводяться до таких, та їх систем сприяє розвитку мислення, пам'яті, інтуїції, вміння знаходити вихід з нестандартних ситуацій, а також відіграє пропедевтичну роль при вивченні інших розділів природничо-математичних наук.

Метод заміни змінної традиційно викликає певні труднощі в учнів. Тому в статті розглянуті деякі типи раціональних рівнянь, що зводяться до квадратних шляхом використання відповідних перетворень та замін змінних. Усі розглядувані типи рівнянь вивчаються в курсі алгебри 8-го класу, поглибленого рівня навчання. До кожного типу рівнянь наведено методичні коментарі щодо їх розв'язування та відповідні приклади.

***Ключові слова:** раціональні рівняння, рівняння, що зводяться до квадратних, розв'язок рівняння, метод заміни змінної, теорема Вієта.*

Постановка проблеми. Змістова лінія рівнянь та нерівностей є однією з основних змістових ліній шкільного курсу математики, що пронизує його починаючи з початкової школи. Вона має розгалужену систему внутрішньопредметних (з іншими лініями курсу) та міжпредметних зв'язків. Тому, розв'язуючи велику кількість різних видів рівнянь, їх систем учні знаходять відповіді щодо різноманітних питань з науки і техніки, а оволодіння різними способами розв'язування таких завдань сприяє розвитку мислення, пам'яті, інтуїції, вміння знаходити вихід з нестандартних ситуацій. Особливого розвитку змістова лінія рівнянь та нерівностей набуває у класах з поглибленим вивченням математики.

Не дивлячись на те, що в класах з поглибленим вивченням математики квадратні рівняння, ті, що зводяться до таких, та їх системи, розглядаються більш ґрунтовно, заявлена тема залишається складною, при її вивченні в учнів завжди виникають труднощі й типові помилки. Враховуючи, що квадратні рівняння й ті, що зводяться до таких, та їх системи активно використовуються при вивченні інших змістових ліній математики, інших предметів природничо-математичного циклу, то труднощі, що викають в учнів при розв'язуванні рівнянь, що зводяться до квадратних, та їх систем, можуть викликати незручності в подальшій навчально-пізнавальній діяльності школярів. Тому глибоке осмислення та розуміння учнями даної теми є основним із найважливіших завдань, що стоять перед вчителями математики.

Аналіз актуальних досліджень. Проблема розв'язування рівнянь була актуальною здавна, тому відомості про них можна знайти вже у працях Діофанта Александрійського (III століття), аль-Хорезмі (близько 780–850), Бхаскари (1114–1185), Л. Фібоначчі (близько 1170–1250), Л. Пачолі (1454–1514), Дж. Кардано (1501–1576), М. Штіфеля (1487–1567), Ф. Вієта (1540–1603), Й. Кеплера (1571–1630), А. Жірара (1595–1632), Р. Декарта (1596–1650), І. Ньютона (1643–1727), К. Маклорена (1698–1746) тощо. Якщо звернутися до робіт сучасних математиків, то можна виокремити роботи С.Т. Завало (1919–1990), Н.Я. Вілєнкіна (1920–1991), А. Г. Мерзляка, В.Б. Полонського, які крім питань розв'язування рівнянь, займаються питаннями методики навчання математики, є авторами шкільних підручників. Серед інших науковців, хто цікавився і цікавиться заявленими питаннями, слід зазначити В.І. Міхайловського, В.А. Вишенського, І.В. Федака, О.А. Сарану.

Мета статті: узагальнення та систематизація науково-методичних досліджень із проблеми навчання учнів розв'язувати рівняння вищих степенів, що зводяться до квадратних, методом заміни змінної.

Виклад основного матеріалу. Оскільки змістова лінія рівнянь та нерівностей в шкільному курсі математики є однією з основних, то вивченню рівнянь присвячена значна частина всього навчального часу. Чільне місце серед усіх їх видів займають квадратні рівняння та рівняння, що зводяться до квадратних. Тема «Квадратні рівняння» розглядається у 8 класі, на її вивчення відводиться 16 годин – базовий курс, та 33 години – поглиблений. Зрозуміло, що в класах поглибленого курсу ця теми вивчається детальніше, зокрема зміст теми «Квадратні рівняння» є більш розширеним: розглядається також розв'язування квадратних рівнянь з параметрами; розв'язування раціональних рівнянь, які зводяться до квадратних; метод заміни змінної при розв'язуванні раціональних рівнянь [4, с.26; 2, с.14].

Серед рівнянь вищих степенів, що пропонуються у 8 класі під час вивчення теми «Квадратні рівняння» поглибленого рівня навчання, але не вивчаються за рівнем стандарт, можна виділити рівняння наступних типів:

1) рівняння виду $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=A(a,b,c,d\epsilon R)$, в яких $a+b=c+d$;

2) рівняння виду $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=Ax^2(abcdA\neq 0)$, в яких $ab=cd$;

3) симетричні рівняння четвертого степеня, що мають вигляд $ax^4+bx^3+cx^2+$ $+bx+a=0$ $(a,b,c\,\epsilon\,R, a\neq 0)$;

4) зворотно-симетричні рівняння четвертого степеня $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ $(a,b,c,d,e\,\epsilon\,R, a\neq 0)$, де $\frac{a}{e}=\left(\frac{b}{d}\right)^2$;

5) однорідні рівняння другого степеня $af^2(x)+bf(x)g(x)+cg^2(x)=0$, де $a,b,c\,\epsilon\,R, f(x), g(x)$ – деякі функції;

6) рівняння виду $(x+a)^4+(x+b)^4=A\ (a,b,A\,\epsilon\,R)$;

7) рівняння виду $\frac{ax}{px^2+nx+q}+\frac{bx}{px^2+mx+q}=c\ (c\neq 0)$.

Розглянемо способи їх зведення до квадратних.

1) Рівняння виду

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=A(a,b,c,d\epsilon R),$$

в якому $a+b=c+d$, розв'язується шляхом знаходження «вигідного» способу групування множників:

$$(x^2+(a+b)\cdot x+ab)(x^2+(c+d)\cdot x+cd)=A$$

та введенням заміни

$$x^2 + (a+b) \cdot x = t,$$

після чого воно зводиться до квадратного.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $(x-4)(x+2)(x+8)(x+14) = 1204$.

Розв'язання. Бачимо: – 4 + 14 = 2 + 8. Отже, «вигідний» спосіб групування буде таким: $\big((x-4)(x+14)\big)\big((x+2)(x+8)\big) = 1204$.

Маємо: $(x^2 + 10x - 56)(x^2 + 10x + 16) = 1204$.

Зробимо заміну: $x^2 + 10x = t$. Тоді:

$$(t-56)(t+16) = 1204,$$
$$t^2 - 40t - 896 = 1204,$$
$$t^2 - 40t - 2100 = 0.$$

За наслідком з оберненої до теореми Вієта $(t_1 + t_2 = 40,\ t_1 t_2 = -2100)$: $t_1 = 70$, $t_2 = -30$.

Роблячи зворотну заміну, отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 10x = 70, \\ x^2 + 10x = -30, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x^2 + 10x - 70 = 0, \\ x^2 + 10x + 30 = 0. \end{array}\right.$$

1) $x^2 + 10x - 70 = 0$,

$D_1 = 25 - 1 \cdot (-70) = 95$,

$x_1 = -5 - \sqrt{95}$, $x_2 = -5 + \sqrt{95}$.

2) $x^2 + 10x + 30 = 0$,

$D_1 = 25 - 1 \cdot 30 = -5$, $D < 0$ – рівняння не має дійсних коренів.

Відповідь: $-5 + \sqrt{95}; -5 - \sqrt{95}$.

2) Рівняння виду

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = Ax^2 (abcdA \neq 0),$$

в якому $ab = cd$, розв'язується знову ж таки шляхом знаходження «вигідного» способу групування множників:

$$(x^2 + (a+b) \cdot x + ab)(x^2 + (c+d) \cdot x + cd) = Ax^2,$$

а далі – діленням обох частин на $x^2 \neq 0$ (бо $x = 0$ не є коренем рівняння) і заміни

$$x + \frac{ab}{x} = t,$$

після чого воно зводиться до квадратного.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2) = 18x^2$.

Розв'язання. Бачимо: – 4 · 5 = 10 · (– 2) і$x = 0$ не є коренем рівняння. Згрупуємо відповідні множники:

$$\big((x-4)(x+5)\big)\big((x+10)(x-2)\big) = 18x^2.$$

Маємо:

$$(x^2 + x - 20)(x^2 + 8x - 20) = 18x^2.$$

Поділимо обидві частини на $x^2 \neq 0$:

$$\left(x + 1 - \frac{20}{x}\right)\left(x + 8 - \frac{20}{x}\right) = 18.$$

Зробимо заміну: $x - \frac{20}{x} = t$. Тоді:

$$(t+1)(t+8) = 18,$$
$$t^2 + 9t + 8 = 18,$$
$$t^2 + 9t - 10 = 0.$$

За наслідком з оберненої до теореми Вієта $(t_1 + t_2 = -9,\ t_1 t_2 = -10)$: $t_1 = -10, t_2 = 1$.

Після зворотної заміни, отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} x - \dfrac{20}{x} = -10, \\ x - \dfrac{20}{x} = 1, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x^2 + 10x - 20 = 0, \\ x^2 - x - 20 = 0. \end{array}\right.$$

1) $x^2 + 10x - 20 = 0$,

$D_1 = 25 - 1 \cdot (-20) = 45$,

$x_1 = -5 - \sqrt{9 \cdot 5} = -5 - 3\sqrt{5}$, $x_2 = -5 + \sqrt{9 \cdot 5} = -5 + 3\sqrt{5}$.

2) $x^2 - x - 20 = 0$.

За наслідком з оберненої до теореми Вієта $(x_3 + x_4 = 1,\ x_3 x_4 = -20)$ маємо: $x_3 = -4,\ x_4 = 5$.

Відповідь:$-5 - 3\sqrt{5};\ -4;\ -5 + 3\sqrt{5}; 5$.

3) *Симетричне рівняння* четвертого степеня, що має вигляд

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + + bx + a = 0 \ (a, b, c \in R, a \neq 0),$$

зводиться до квадратного шляхом ділення обох частин на $x^2 \neq 0$ (бо $x = 0$ не є коренем рівняння) і таким групуванням отриманих виразів:

$$a \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

та введенням заміни

$$x + \frac{1}{x} = t.$$

Приклад 3. Розв’язати рівняння $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = 0$.

Розв’язання. Бачимо, що $x = 0$ не є коренем заданого рівняння. Тому поділимо обидві частини рівняння на $x^2 \neq 0$:

$$4x^2 - 8x + 3 - \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} = 0.$$

Згрупуємо отримані вирази наступним чином:

$$4 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0.$$

Нехай $x + \frac{1}{x} = t$, тоді

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2,$$
$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2,$$
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Маємо:

$$4 \cdot (t^2 - 2) - 8t + 3 = 0,$$
$$4t^2 - 8 - 8t + 3 = 0,$$
$$4t^2 - 8t - 5 = 0,$$
$$D_1 = 16 - 4 \cdot (-5) = 36,$$
$$t_1 = \frac{4 - \sqrt{36}}{4} = -\frac{1}{2}, t_2 = \frac{4 + \sqrt{36}}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Після зворотної заміни, отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{2}, \\ x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2 + x + 2 = 0, \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0. \end{array}\right.$$

1) $2x^2 + x + 2 = 0$,

$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -15$, $D < 0$ – рівняння не має дійсних коренів.

2) $2x^2 - 5x + 2 = 0$,

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$,

$x_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = 2$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$; 2.

Цікаво, що симетричні рівняння мають таку властивість: якщо відмінне від нуля число a є його розв’язком, то обернене число $\frac{1}{a}$ також буде його розв’язком.

4) Рівняння виду

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \ (a, b, c, d, e \in R, a \neq 0)$$

називається *зворотно – симетричним рівнянням* четвертого степеня, якщо між коефіцієнтами виконується умова

$$\frac{a}{e}=\left(\frac{b}{d}\right)^2.$$

Під час його розв'язування спочатку ділять обидві частини рівняння на $x^2\neq 0$ (бо $x=0$ не є коренем рівняння), потім згруповують отримані вирази таким чином:

$$a\cdot\left(x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}\right)+b\cdot\left(x+\frac{d}{bx}\right)+c=0$$

і введенням заміни

$$x+\frac{d}{bx}=t$$

рівняння зводять до квадратного.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$x^4-2x^3-18x^2-6x+9=0.$$

Розв'язання. Умова $\frac{a}{e}=\left(\frac{b}{d}\right)^2$, тобто $\frac{1}{9}=\left(\frac{-2}{-6}\right)^2$, виконується, отже рівняння є зворотно – симетричним. $x=0$ не є коренем, тому поділимо обидві частини на $x^2\neq 0$:

$$x^2-2x-18-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}=0.$$

Згрупуємо вирази: $\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)-2\cdot\left(x+\frac{3}{x}\right)-18=0.$

Нехай $x+\frac{3}{x}=t$, тоді

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)^2=t^2,$$
$$x^2+6+\frac{9}{x^2}=t^2,$$
$$x^2+\frac{9}{x^2}=t^2-6.$$

Маємо:

$$t^2-6-2t-18=0,$$
$$t^2-2t-24=0.$$

За наслідком з оберненої до теореми Вієта $(t_1+t_2=2,\ t_1t_2=-24)$: $t_1=-4,\ t_2=6.$
Після зворотної заміни, отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{3}{x}=-4, \\ x+\dfrac{3}{x}=6, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2+4x+3=0, \\ x^2-6x+3=0. \end{array}\right.$$

1) $x^2+4x+3=0.$
За наслідком з оберненої до теореми Вієта$(x_1+x_2=-4,\ x_1x_2=3)$, маємо:
$x_1=-3, x_2=-1.$
2) $x^2-6x+3=0,$
$D_1=9-1\cdot 3=6,$
$x_3=3-\sqrt{6}, x_4=3+\sqrt{6}.$
Відповідь:$-3;\ -1;\ 3\pm\sqrt{6}.$

5) *Однорідними рівняннями* другого степеня називаються рівняння виду

$$af^2(x)+bf(x)g(x)+cg^2(x)=0,$$

де $a,b,c\in R, f(x), g(x)$ – деякі функції.

Такі рівняння також зводяться до квадратних: спочатку обидві частини рівняння ділять на $f^2(x)\neq 0$ або $g^2(x)\neq 0$, після чого вводять заміну

$$\frac{g(x)}{f(x)}=t \text{ або} \frac{f(x)}{g(x)}=t$$

відповідно.

Зауваження 1. Рівність $f(x)=0$ або $g(x)=0$ в рівнянні

$$af^2(x) + bf(x)g(x) + cg^2(x) = 0$$

призводить до того, що або $g(x) = 0,$ або $f(x) = 0$ відповідно, і це слід розглядати як окремий випадок під час розв'язування такого рівняння. Проте, найчастіше розглядаються рівняння, в яких або $f(x) \neq 0$, або $g(x) \neq 0$ для всіх дійсних значень змінної x.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$2 \cdot (x^2 + x + 1)^2 - 7 \cdot (x - 1)^2 = 13 \cdot (x^3 - 1).$$

Розв'язання.

$$2 \cdot (x^2 + x + 1)^2 - 7 \cdot (x - 1)^2 = 13 \cdot (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Поділимо обидві частини рівняння на $(x^2 + x + 1)^2$, оскільки

$$x^2 + x + 1 \neq 0$$

при будь-яких значеннях змінної x:

$$\frac{2\cdot(x^2+x+1)^2}{(x^2+x+1)^2} - \frac{7\cdot(x-1)^2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{13\cdot(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2},$$

$$2 - \frac{7\cdot(x-1)^2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{13\cdot(x-1)}{(x^2+x+1)},$$

$$2 - 7 \cdot \left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^2 = 13 \cdot \frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

Нехай $\frac{x-1}{x^2+x+1} = t$, тоді $2 - 7t^2 = 13t$.

$$7t^2 + 13t - 2 = 0,$$

$$D = 169 - 4 \cdot 7 \cdot (-2) = 225,$$

$$t_1 = \frac{-13-15}{14} = -2,\ t_2 = \frac{-13+15}{14} = \frac{1}{7}.$$

Роблячи зворотну заміну, отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{x^2+x+1} = -2, \\ \dfrac{x-1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{7}, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-1 = -2x^2 - 2x - 2, \\ 7x - 7 = x^2 + x + 1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2 + 3x + 1 = 0, \\ x^2 - 6x + 8 = 0. \end{array}\right.$$

1) $2x^2 + 3x + 1 = 0,$

$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1,$

$x_1 = \frac{-3-1}{2\cdot2} = -1,\ x_2 = \frac{-3+1}{2\cdot2} = -\frac{1}{2}.$

2) $x^2 - 6x + 8 = 0.$

За наслідком з оберненої до теореми Вієта $(x_3 + x_4 = 6,\ x_3x_4 = 8)$, маємо: $x_3 = 2, x_4 = 4.$

Відповідь: $-1;\ -\frac{1}{2};\ 2;\ 4.$

5) Рівняння виду

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = A\ (a, b, A \in R)$$

зводиться до квадратного заміною

$$x + \frac{a+b}{2} = t.$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння $(x - 6)^4 + (x - 4)^4 = 82.$

Розв'язання. Введемо заміну

$$x + \frac{-6+(-4)}{2} = t,\ x - 5 = t,$$

тоді

$$x = t + 5.$$

$$(t + 5 - 6)^4 + (t + 5 - 4)^4 = 82,$$

$$(t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 82.$$

Використовуючи біном Ньютона

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

отримаємо:

$$t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 82,$$

$$2t^4 + 12t^2 - 80 = 0,$$

$$t^4 + 6t^2 - 40 = 0.$$

За наслідком з оберненої до теореми Вієта $(t_1^2 + t_2^2 = -6, t_1^2 t_2^2 = -40)$: $t_1^2 = -10$; $t_2^2 = 4$.

$$\left[\begin{array}{l} t^2 = -10, \\ t^2 = 4, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t_{1,2} \in \emptyset, \\ t_3 = -2, t_4 = 2. \end{array}\right.$$

Після відповідної заміни, отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -2 + 5 = 3, \\ x_2 = 2 + 5 = 7. \end{array}\right.$$

Відповідь: 3; 7.

6) Рівняння виду $\frac{ax}{px^2+nx+q} + \frac{bx}{px^2+mx+q} = c \ (c \neq 0)$

розв'язується шляхом ділення чисельника і знаменника кожного дробу на $x \neq 0$ (бо $x = 0$ не є коренем рівняння) та введенням заміни

$$px + \frac{q}{x} = t,$$

після чого воно зводиться до дробово – раціонального, яке, в свою чергу, зводиться до квадратного.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1.$$

Розв'язання. Оскільки $x = 0$ не є коренем рівняння, то поділимо чисельник і знаменник кожного дробу на x:

$$\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}} + \frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}} = 1.$$

Нехай $4x + \frac{7}{x} = t$, тоді:

$$\frac{4}{t-8} + \frac{3}{t-10} = 1,$$

$$\frac{4 \cdot (t-10) + 3 \cdot (t-8) - (t-8)(t-10)}{(t-8)(t-10)} = 0,$$

$$\frac{4t - 40 + 3t - 24 - t^2 + 18t - 80}{(t-8)(t-10)} = 0,$$

$$\frac{t^2 - 25t + 144}{(t-8)(t-10)} = 0,$$

$$\begin{cases} t^2 - 25t + 144 = 0, \\ (t-8)(t-10) \neq 0. \end{cases}$$

$$t^2 - 25t + 144 = 0,$$

$$D = 625 - 4 \cdot 1 \cdot 144 = 49,$$

$$t_1 = \frac{25-7}{2} = 9, \ t_2 = \frac{25+7}{2} = 16.$$

Після виконання оберненої заміни, отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} 4x + \dfrac{7}{x} = 9, \\ 4x + \dfrac{7}{x} = 16, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 9x + 7 = 0, \\ 4x^2 - 16x + 7 = 0. \end{array}\right.$$

1) $4x^2 - 9x + 7 = 0$,

$D = 81 - 4 \cdot 4 \cdot 7 = -31, D < 0$ – рівняння не має дійсних коренів.

2) $4x^2 - 16x + 7 = 0$,

$D_1 = 64 - 4 \cdot 7 = 36$,

$x_1 = \frac{8-\sqrt{36}}{4} = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{8+\sqrt{36}}{4} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$.

При вивченні розглянутих типів рівнянь методом заміни змінної доцільно створити таблицю, до якої опрацьований матеріал заноситься поступово, відповідно до вивченого типу рівняння. Таблиця може містити, наприклад, такі стовпці:

– загальний вид рівняння;
– заміна, яку слід виконати, щоб звести рівняння до квадратного;
– коментар щодо перетворення рівняння до виду коли заміна стає очевидною.

Після заповнення, таблиця набуває наступного вигляду (таблиця 1).

Таблиця 1.

Рівняння вищих степенів, що зводяться до квадратних

Загальний вид рівняння	Необхідна заміна	Кометар
1) $(x+a)(x+b)(x+c)\cdot$ $\cdot(x+d)=A, a+b=c+d$	$x^2+(a+b)\cdot x=t$	Групування множників «вигідним» способом
2) $(x+a)(x+b)(x+c)\cdot$ $\cdot(x+d)=Ax^2,\ ab=cd$	$x+\frac{ab}{x}=t$	Групування множників «вигідним» способом та виконання ділення обох частин на $x^2\neq 0$
3) $x^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$	$x+\frac{1}{x}=t$	Виконання ділення обох частин на $x^2\neq 0$ та групування виразів
4) $ax^4+bx^3+cx^2+dx+$ $+e=0,\ \frac{a}{e}=\left(\frac{b}{d}\right)^2$	$x+\frac{d}{bx}=t$	Виконання ділення обох частин на $x^2\neq 0$ та групування виразів
5) $af^2(x)+bf(x)g(x)+$ $+cg^2(x)=0$	$\frac{f(x)}{g(x)}=t$ або $\frac{g(x)}{f(x)}$	Виконання ділення обох частин на $f^2(x)\neq 0$ або $g^2(x)\neq 0$.
6) $(x+a)^4+(x+b)^4=A$	$x+\frac{a+b}{2}=t$	Використання бінома Ньютона
7) $\frac{ax}{px^2+nx+q}+\frac{bx}{px^2+mx+q}=c,$ $(c\neq 0)$	$px+\frac{q}{x}=t$	Виконання ділення чисельника і знаменника кожного дробу на $x\neq 0$

Зауважимо, подана таблиця може використовуватись на різних етапах: під час первинного закріплення, під час розв'язування вправ, а також під час контролю знань, зокрема, фронтального опитування (закриваючи, наприклад другий або третій стовпчики).

Висновки. Як засвідчує досвід навчання учнів використовувати метод заміни змінної при розв'язуванні раціональних рівнянь, тривале застосування зазначеного методу дозволяє: розвинути в учнів орієнтцію як в типах рівнянь, так і орієнтацію у виборі відповідних перетворень та відповідних замін; розвинути пошукові навички (як от пошук оптимального способу розв'язку); розвитку дослідницьких навичок та сприяє розвитку інтуїції учнів. Метод заміни змінної, крім зазначених аспектів, відіграє також і пропедевтичну роль для навчання тем як самої математики, наприклад, тем «Системи рівнянь другого порядку» або «Первісна та інтеграл», так і тем в інших природничих науках.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Завало С. Т. Рівняння і нерівності / С. Т. Завало. – К.: Рад. школа, 1973. – 384 с.
2. Математика (Алгебра, Геометрія). Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf.
3. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2017. – 416 с.: іл.
4. Навчальні програми для загальноосвіт. навч. закл. України + опис ключових змін. 5-9 класи. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. – 56 с. – (Серія «На допомогу вчителеві»).

5. Федак І. В. Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх / І. В.Федак. – Чернівці: Зелена Буковина, 2002. –340 с.
6. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч / О.А.Сарана. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 400 с.

Одинцова О. А., Кондык Ю. А. Некоторые теоретические аспекты обучения учеников основной школы решать рациональные уравнения, которые сводятся к квадратным.

В школьном курсе алгебры содержательная линия уравнений и неравенств является одной из основных. Она имеет разветвлённую систему внутрипредметных и межпредметных связей. Овладение разными способами решения уравнений, их систем, среди которых есть квадратные, и те, которые сводятся к квадратным, а также их систем, способствует развитию мышления, памяти, интуиции, умению находить выход из нестандартных ситуаций, кроме того играет пропедевтическую роль при изучении других разделов естественно-математических наук.

Метод замены переменной традиционно вызывает трудности у учеников. Поэтому в статье рассмотрены типы рациональных уравнений, которые сводятся к квадратным путем соответствующих преобразований и замен. Все рассмотренные типы уравнений изучаются в курсе алгебры 8 класса, углубленного уровня обучения. К каждому типу уравнений даны методические комментарии касательно их решения и соответствующие примеры.

Ключевые слова: *рациональные уравнения, уравнения, которые сводятся к квадратным, решение уравнения, метод замены переменной, теорема Виета.*

Odintsova O. O., Kondyk Yu. O. The some theoretical aspects of teaching students to solve the rational equations, which are reduced to square equations.

The content line of equations and inequalities is one of the main in the school algebra's curricula. It has a branched system of intrinsic and intersubject connections. The mastering of different methods of solving various types of equations their systems including square ones, and those reduced to such, and their systems contributes to the development of students' thinking, memory, intuition, the ability to find a way out of non-standard situations. This mastering also plays a propaedeutic role in studying other chapters of natural sciences and mathematics.

The variable substitutions' method a traditionally causes some difficulties for students. Therefore, there are considered some types of rational equations, which are reduced to square equations by using the corresponding transformations and variables substitutions in the article. All types of reviewed equations are studied in the course of algebra of the 8th year, in-depth level of education. They are 1)$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=A(a,b,c,d\epsilon R)$, *where*$a+b=c+d$; *2)*$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=Ax^2(abcdA\neq 0)$, *where* $ab=cd$; $ax^4+bx^3+cx^2+$ $+bx+a=0\ (a,b,c\ \epsilon\ R, a\neq 0)$; $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ (a,b,c,d,e\ \epsilon\ R, a\neq 0)$, *where* $\frac{a}{e}=\left(\frac{b}{d}\right)^2$; $af^2(x)+bf(x)g(x)+cg^2(x)=0$, де $a,b,c\epsilon R, f(x), g(x)$ *are some functions;* $(x+a)^4+(x+b)^4=A\ (a,b,A\epsilon R)$; $\frac{ax}{px^2+nx+q}+\frac{bx}{px^2+mx+q}=c(c\neq 0)$. *There are provided methodological comments on solution and relevant examples for each type of reviewed equations.*

Keywords: *rational equations, equations, which are reduced to square equations, solution of the equation, Viet theorem.*