Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Скороход Г.И. Некоторые типы математических задач и методы их решения // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2016. – Випуск 4(10). – С. 126-130.

Skorokhod G.I. Some types of mathematical problems and methods of their solutions // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2016. – Issue 4(10). – P. 126-130.

УДК 372.851

Г.И. Скороход
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Украина

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Математика стремится к созданию как можно более обобщённых математических структур (объектов) за счёт: 1) включения в состав этих структур характеристик (элементов), общих для ряда разнородных объектов, 2) идеализации этих характеристик, 3) абстрагирования от различий разнородных объектов. Поэтому математические структуры являются моделями для решения прикладных задач из различных областей знания и практики, а методы решения математических задач можно трактовать как конкретизации общих эвристических приёмов решения задач [1-4].

Большинство учеников и студентов не станут ни чистыми, ни даже прикладными математиками. Тогда, казалось бы, какой смысл столько времени тратить на обучение их именно математике? На наш взгляд, этот смысл может состоять в том, чтобы на примере решения математических задач обучать их общим типам задач, которые решают люди в процессе своей деятельности, и методам их решения. Такая же цель должна быть одной из главных и при обучении в школе другим естественным наукам, ибо большинство школьников не станут ни физиками, ни химиками, ни биологами.

Типом задачи мы называем не её внешнюю форму (задачи на движение, проценты и т.п.), а её внутреннее логическое содержание. Именно тип позволяет составить адекватную структурную и/или математическую модели и выбрать метод решения. Между типами задач и методами решения нет взаимно однозначного соответствия.

Далее приведены некоторые обобщённые типы задач, методы их решения и примеры.

Тип 1: Условие задачи представлено (или может быть представлено) в виде системы простых повествовательных предложений (высказываний); решение задачи должно обращать все эти высказывания в истинные.

Метод Декарта: 1) для каждого высказывания создать адекватную математическую модель в виде уравнения или неравенства и найти множество решений каждого уравнения и неравенства,

2) пересечь эти множества решений.

Частный случай: метод двух геометрических мест для решения задач на построение на плоскости [4].

Тип 2: пересечение множеств. В предыдущем типе пересечение множеств выступало как метод решения задачи. Многие задачи существенно продвигаются к решению, если подвести их под тип пересечения множеств. В одних задачах пересечение множеств заложено в условии задачи, в других пересекающиеся множества нужно создать, например, путём введения вспомогательного элемента, который и создаёт новые множества, и сам же является их пересечением.

Пример 1: при решении задач стереометрии связь между элементами, лежащими в разных плоскостях, осуществляется через отрезок, который находится на линии пересечения этих плоскостей.

Пример 2: при решении сложного уравнения $f(x)=g(x)$ (1) следует сначала проверить, пересекаются ли области определения функций $f(x)$ и $g(x)$. Если они не пересекаются, то решений нет. Если они касаются в одной или нескольких дискретных точках, то следует проверить эти точки на удовлетворение уравнению (1). И только если они пересекаются в непрерывном множестве точек, возникает задача нахождения решения в этом множестве.

Тип 3: Условие задачи представлено (или может быть представлено) в виде объединения простых повествовательных предложений (высказываний); решение задачи должно обращать хотя бы одно из этих высказываний в истинное.

Решение представляет собой объединение решений каждого высказывания.

Метод: найти решения всех высказываний в отдельности и объединить их.

Пример 1. Уравнение $f(x)*g(x)=0$ (2) равносильно объединению уравнений $f(x)=0$ (3) и $g(x)=0$ (4). Решение уравнения (2) есть объединение решений уравнений (3) и (4).

Пример 2. Уравнение $f^2(x) = a^2$ равносильно объединению уравнений $f(x) = a$ и $f(x) = – a$.

Тип 4: **найти подмножество (элемент) множества, обладающее заданными свойствами.**

Метод: сузить область поиска решения делением её на две части, в одной из которых решения заведомо нет, и продолжить поиск в другой части.

Пример: методы приближеного вычисления изолированного корня функции *f(x)*.

Тип 5: доказать справедливость бесконечной последовательности утверждений, которые отличаются одно от другого только значением натурального параметра.

Метод математической индукции.

Тип 6: опровергнуть общее утверждение. Метод: контрпример.

Тип 7: доказать утверждение. Метод от противного. Может рассматриваться как частный случай метода сведения к противоречию.

Тип 8: доказать верность оценки. Метод крайнего; в частности, рассмотреть наилучший или наихудший случай.

Тип 9: вычислить значение характеристики аддитивной величины.

В математике аддитивности соответствует линейность.

Метод 1: создать линейную математическую модель, определить полную систему частных решений и использовать суперпозицию частных решений [4].

Метод 2: разбить величину на несколько частей, вычислить значения характеристики для каждой части и сложить эти значения; при необходимости использовать предельный переход.

Пример: определение одномерных и многомерных интегралов.

Тип 10: вычислить количество элементов заданного множества.

Метод: установить взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и другого, у которого соответствующее количество элементов можно вычислить.

Тип 11: оценить количество элементов заданного множества.

Метод: сравнить искомое количество с количеством элементов другого множества, которое можно вычислить.

Тип 12: вычислить значение величины.

Метод 1: найти такое преобразование объекта, при котором искомая величина является инвариантом и в преобразованном объекте её можно вычислить.

Пример : вычисление определённого интеграла методом замены переменной.

Метод 2: 1) ввести вспомогательный элемент – формулу С преобразования задачи А в задачу В, 2) с помощью преобразования С превратить задачу А в задачу В, 3) решить задачу В, 4) получить решение исходной задачи А, использовав к решению задачи В преобразование, обратное к С.

Пример 1: вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной.

Пример 2: методы интегральных преобразований и конформных отображений в теории уравнений математической физики.

Метод 3: ввести вспомогательный элемент – преобразование С, которое превращает задачу А в задачу В, решение которой является приближением к решению задачи А.

Пример : численные методы решения дифференциальных уравнений за счет замены дифференциального уравнения соответствующим уравнением в конечных разностях.

Метод 4: выразить искомую величину через другие величины, значения которых известны (формула).

Метод 5: представить некоторую величину y, связанную с искомой неизвестной x, двумя разными способами: $y=f(x)$ и $y=g(x)$, и, сравнивая две величины через третью, получить уравнение $f(x) = g(x)$ для определения неизвестной x.

Тип 13: найти точки x, в которых функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют равные значения.

Метод: решить уравнение $f(x) = g(x)$, которое является математической моделью задачи.

Тип 14: оценить значение величины.

Метод: сравнить искомое значение со значением, которое можно вычислить.

Тип 15: найти объект при заданном значении некоторого параметра задачи.

Метод: проанализировать, является ли искомый объект инвариантным относительно величины этого параметра и может ли он быть найден при другом значении этого параметра. Если, это так, то найти его при новом значении параметра (часто новое значение – экстремальное).

Если объект не инвариантен относительно всех значений параметра, то проанализировать, существует ли значение параметра, при котором объект имеет то же значение, что и при заданном значении параметра, и может ли он быть найден при этом другом значении параметра. Если это так, найти объект при новом значении параметра.

Пример: найти значение чётной функции в точке, симметричной заданной относительно оси симметрии.

Тип 16: дано несколько взаимосвязанных утверждений, требуется получить вывод или следствие из них.

Метод: дедукция, т.е. вывод следствий (с помощью правил логического вывода) из утверждений условия задачи с привлечением подходящих теорем, формул и уже выведенных следствий. Дедукция в том или ином объёме и форме применяется всегда, часто достаточно одного этого метода.

Тип 17: преобразование объектов. Всегда содержит три элемента: 1) начальное состояние объекта Н, 2) операция преобразования (или последовательность операций) П, 3) конечное состояние объекта К. Схема: Н→П→К.

Рассмотрим возможные постановки задач, при которых два из этих элементов заданы, третий требуется найти.

17.1. Дано: Н и П. Определить количественную характеристику К.

Общий метод решения: найти инвариант преобразования, он позволяет составить уравнение с неизвестным, в левой части которого – выражение инварианта в исходном состоянии объекта, а в правой – в преобразованном состоянии. Решение этого уравнения либо прямо даёт ответ на требование задачи, либо существенно приближает к решению задачи.

Примеры: к этому типу относятся задачи на преобразование растворов, смесей и сплавов, рост депозита в банке и т.п.

Отметим, что не у всяких преобразований существует инвариант. Для решения таких задач применяются другие методы, они описаны ниже.

17.2. Дано: Н и П. Определить качественную характеристику (свойство) К.

Метод: найти инвариант преобразования и на его основе с помощью дедуктивных (логических) умозаключений прийти к решению задачи.

Пример. В одной чашке налито кофе, в другой такой же чашке – молоко. Объёмы жидкости равны между собой. Из чашки с кофе берут чайную ложку кофе, переливают в чашку с молоком, размешивают, и чайную ложку смеси переливают в чашку с кофе. Чего будет больше, кофе в молоке или молока в кофе? Решение: Если учесть, что объём смеси в каждой из чашек после таких переливаний остаётся неизменным, т.е. является **инвариантом** этих **преобразований**, то становится очевидным (в буквальном смысле этого слова), что объёмы кофе в молоке и молока в кофе равны между собой. Более того, становится очевидным также, что задача имеет то же самое решение: 1) при любом количестве двойных переливаний с размешиванием, 2) при различных формах чашек, 3) при неравных исходных объёмах кофе и молока. Существенным является только равенство переливаемых из чашки в чашку объёмов и размешивание. Таким образом, в процессе **сравнения** определяются также существенные и несущественные факторы в условии задачи, задача обобщается за счёт устранения несущественных факторов и легко решается без составления уравнения, лишь с помощью дедуктивных рассуждений.

17.3. Дано: Н и К. Определить последовательность операций П, осуществив которую можно состояние Н перевести в состояние К.

Метод 1: найти и использовать инвариант преобразования, это позволяет продвинуться в решении задачи.

Пример: из 5 одинаковых квадратов сложен крест. Разрезать квадраты прямыми линиями так, чтобы из полученных фигур можно было сложить один квадрат. Отметим, что у искомого квадрата не известна длина стороны. Инвариантом такого преобразования фигуры одной фигуры в другую является её площадь, отсюда определяем длину стороны искомого квадрата. Задача сводится к тому, как получить физически элемент такой длины.

Метод 2: использовать равносильные преобразования, при которых меняется форма объекта, но инвариантным остаётся его количественное содержание.

Пример: решение уравнения $f(x)$=0 можно трактовать как преобразование его начального состояния в конечное $x = a$, форма которого известна, но неизвестно значение a. Аналогично можно трактовать решение системы уравнений или неравенств.

Метод 3: задать структуру К, оставив в ней неопределенные элементы; задача сводится к определению этих элементов.

Примеры: 1) разложение функции в ряд заданного вида, 2) метод неопределённых коэффициентов для решения задач разных типов.

17.4. Дано: П и К. Определить Н.

Частный случай: каждая операция в последовательности П: 1) применяется к результату предыдущей операции, 2) является однозначной, 3) имеет однозначную или многозначную обратную операцию.

Такие задачи решаются методом обратных преобразований («от конца к началу»): к конечному значению применяется последовательность обратных операций.

Пример. Решить уравнение $\sin x = 1$. Такое уравнение можно трактовать как преобразование начального состояния x с помощью операции $\sin z$ к конечному состоянию $\sin x$, значение которого в данной задаче равно 1.

Отметим, что уравнение $\sin x + \cos x = 1$ не может быть решено методом обратных преобразований, ибо здесь конечное состояние 1 получено путём суммирования результатов двух параллельных операций $\sin x$ и $\cos x$, идущих от начального состояния x.

17.5. Дано: Н, П и К. Определить некоторое промежуточное состояние объекта.

Метод: либо с начала, либо с конца – до заданного промежуточного состояния.

Тип 18: заданы 1) две сходные ситуации (или два процесса), 2) некоторые характеристики этих ситуаций и 3) связь между отдельными характеристиками; требуется определить другие характеристики.

Метод: найти величину y (часто она прямо задана в условии), которую через искомую неизвестную x можно со стороны одной ситуации выразить как $y=f(x)$, а со стороны другой – как $y=g(x)$, и, сравнивая две величины через третью, получить уравнение $f(x) = g(x)$ для определения неизвестной x.

Пример 1. Задачи, в которых есть две ситуации (план – реальность, две бригады и т.п.), характеристики каждой из которых связаны формулой, аналогичной формуле $S=vt$, при этом пять из величин $S_1, v_1, t_1, S_2, v_2, t_2$ заданы, а одну нужно найти. Наглядной формой представления условия является таблица.

	Ситуация 1	Ситуация 2
S	S_1	S_2
V	v_1	v_2
t	t_1	t_2

Пример 2. Как было показано ранее, в задаче преобразования объекта часто существует инвариант преобразования, в этом случае $f(x)$ и $g(x)$ можно трактовать как значения инварианта в двух различных состояниях объекта (чаще всего, в начальном и конечном).

Тип 19: найти подмножество (элемент) Х заданного множества М, удовлетворяющее условиям У.

Тип 20: **доказать, что существует подмножество (элемент) Х заданного множества М, обладающее заданными характеристиками У.**

Метод решения, общий для задач типов 19 и 20: преобразование одного или нескольких элементов постановки задачи Х, М, У.

1. Преобразование множества М.

Метод: разделить область поиска – множество M – на две части, и удалить из рассмотрения ту часть, в которой заведомо нет решения. Такое сужение области поиска продолжается, пока будет найдено решение или показано, что его в данной области нет.

Примеры: 1) методы приближённого вычисления изолированного корня функции одной переменной, они различаются между собой способом деления области на части; 2) в конечном множестве последовательных натуральных чисел найти задуманное число за наименьшее число вопросов с ответами «да» или «нет», надёжным методом решения является метод деления области на равные части (метод половинного деления); 3) метод Больцано для доказательства того, что у ограниченной последовательности существует предельная точка, он совпадает с методом половинного деления. Деление пополам применяется тогда, когда нет оснований для иного способа деления.

2. Преобразование условия У.

Пример: решить уравнение $f_1(x) = 0$. Здесь условием У является само уравнение.

Метод 1: решение заключается в преобразовании уравнения к равносильному уравнению (одному или нескольким) того же типа и построении последовательности таких равносильных преобразований уравнения $f_i(x) = 0$ в уравнение $f_{i+1}(x) = 0$ до тех пор, пока получится уравнение вида $x=C$ (или объединение уравнений такого вида), которое и представляет искомый элемент Х.

Равносильность заключается в том, что все уравнения $f_i(x) = 0$ имеют одно и то же решение.

Метод 2: 1) преобразовать уравнение $f_1(x) = 0$ к уравнению (одному или нескольким) другого типа $F_1(y) = 0$ с заменой переменной x на $y=g(x)$, 2) получить решение $y=K$ уравнения $F_1(y) = 0$, 3) вычислить искомое значение $x = g^{-1}(K)$.

3. Преобразование искомого элемента Х.

Пример 1: паук и муха сидят в углах комнаты, расположенных в концах А и В диагонали комнаты. Найти кратчайший путь Х от паука к мухе по плоскостям комнаты. Решение основано на двух утверждениях: 1) длина ломаной Х инвариантна относительно изменения взаимного расположения её звеньев, и 2) среди всех ломаных, соединяющих точки А и В, наименьшую длину имеет отрезок АВ. Метод: 1) создать развёртку параллелепипеда на плоскость, 2) провести отрезок АВ.

Пример 2: через вершины квадрата провести трехзвенную замкнутую ломаную линию Х, не отрывая карандаш от бумаги. Метод: 1) переформулировка требования, а именно, замена «трехзвенной замкнутой ломаной линии Х» на «треугольник Х», 2) переформулировка постановки задачи: построить треугольник так, чтобы заданные 4 точки лежали на его сторонах. Так сформулированную задачу не только легко решить, очевидно, что она имеет бесчисленное множество решений. .

Тип 21: **даны два дискретных множества однородных элементов M1 и M2, известны значения сумм X1+X2 и C1+C2 характеристик одного (X1, C1) и другого (X2, C2) множеств, связанных с количеством элементов этого множества. Требуется определить количество элементов каждого множества.**

Метод решения покажем на примере 1 решения известной логической задачи, в которой требуется среди 10 мешков, в одном из которых каждая «фальшивая» монета весит B_1 грамм, а в остальных – B_2 грамм, за одно взвешивание с определением веса найти мешок с «фальшивыми» монетами. Метод: 1) одинаковое сделать различным, а именно, из каждого мешка взять различное количество монет и определить вес A_1 набора всех этих монет, 2) с помощью логической конструкции «Если бы…» представить виртуальную ситуацию, в которой все монеты весят по B_2 грамм, тогда вес A_2 того же набора легко вычислить. Количество «фальшивых» монет $k=(A_2 - A_1) /(B_2 - B_1)$. Мешок, из которого взято такое количество монет, и содержит «фальшивые» монеты.

Пример 2: известная задача об определении количества фазанов и кроликов, если заданы общие количества их ног и голов. Заметим, что эту задачу можно решить также методом математического моделирования.

Тип 22: сравнить две величины.

Метод: сравнить две величины через третью. Можно трактовать как обобщение метода подсчета величины двумя способами.

Примеры 1-5: 1) $a=b, c=b \rightarrow a=c;$ 2) $a||b, c||b \rightarrow a||c;$ 3) $y=f(x), y=g(x) \rightarrow f(x)=g(x)$. 4) если прямые a и b параллельны одной плоскости, то они перпендикулярны между собой; 5) если прямая a перпендикулярна плоскости S, а прямая b параллельна прямой a, то прямая b перпендикулярна плоскости S.

Пример 6: в теории определённого интеграла схема доказательства теоремы о том, что любая нижняя сумма Дарбу s_1 не превосходит любой верхней суммы Дарбу S_2, такова: 1) путём объединения двух сравниваемых разбиений с суммами Дарбу соответственно (s_1, S_1) и (s_2, S_2) создаётся третье разбиение с суммами (s_3, S_3), 2) из ранее доказанного следует, что при таком объединении справедливы неравенства $s_1 \le s_3, S_3 \le S_2$. 3) учитывая также, что $s_3 \le S_3$, получаем требуемое неравенство $s_1 \le S_2$.

Отметим, что в примере 6 множество для сравнения создано путём объединения сравниваемых множеств, а в примерах 1-6 – за счёт пересечения множеств, например, в примерах 1 и 2 – это пересечение множеств {a, b} и {c, b}.

Очевидно, что здесь представлены не все возможные типы задач и, тем более, не все методы решения, сформулированые в достаточно общей форме. Однако, на наш взгляд, количество и типов, и методов не столь уж велико, в работе [1] описано 39 методов.

Создание как можно более полных перечней общих типов и методов и иллюстрация их качественными примерами является, по нашему мнению, важной не только научной, но и педагогической задачей.

Если учитель, решая конкретную задачу (или цикл задач), будет тренировать учеников в определении общего типа задачи и поиске метода решения среди общих методов решения задач такого типа и акцентировать на этом внимание учеников, то за длительное время обучения ученики получат возможность освоить общие типы задач, которые решают люди, и общие методы их решения, что должно являться существенной целью обучения большинства учеников математике и естественным наукам. Заметим при этом, что в базовом школьном курсе математики рассматриваются задачи далеко не всех типов и методов, что облегчает задачу их усвоения учениками.

Список использованных источников

1. Скороход, Г.І. Основні методи розв'язання нестандартних математичних задач. / Г.І. Скороход // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: збірник наукових праць. Випуск Х. – Кривий Ріг. Видавничий відділ НМетАУ, 2012. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – С. 228-234.
2. Пойя, Д. Как решать задачу [Текст] / Д. Пойя. – М.: Учпедгиз РСФСР, 1959. – 208 с.
3. Пойя, Д. Математика и правдоподобные рассуждения [Текст] / Д. Пойя. – М.: Изд-во иностранной литературы., 1957. – 536 с.
4. Пойя, Д. Математическое открытие [Текст] / Д. Пойя. – М.: Наука, 1970. – 452 с.

Аннотация. Скороход Г.И. Некоторые типы математических задач и методы их решения.

В достаточно общей форме сформулирован 21 тип математических задач, методы решения задач каждого типа и примеры. Под типом задачи понимается не её внешняя форма, а внутреннее логическое содержание. Именно тип позволяет составить адекватную структурную и/или математическую модели и выбрать метод решения. Очевидно, что представлены не все возможные типы задач и, тем более, не все методы решения, сформулированые в достаточно общей форме. Однако, можно предположить, что количество и типов и методов не столь уж велико. Поэтому, если учитель, решая конкретную задачу (или цикл задач), будет тренировать учеников в определении общего типа задачи и поиске метода решения среди общих методов решения задач такого типа и акцентировать на этом внимание учеников, то за длительное время обучения ученики получат возможность освоить общие типы задач, которые решают люди, и общие методы их решения, что должно являться существенной целью обучения большинства учеников математике и естественным наукам.

***Ключевые слова**: математические задачи, тип задачи, методы решения, цель обучения математике.*

Анотація. Скороход Г.І. Деякі типи математичних задач і методи розв'язання.

У досить загальній формі сформульован 21 тип математичних задач, методи розв'язання задач кожного типу і приклади. Під типом задачі розуміється не її зовнішня форма, а внутрішній логічний зміст. Саме тип дозволяє скласти адекватну структурну і/або математичну моделі та вибрати метод розв'язання. Очевидно, що представлені не всі можливі типи завдань і, тим більше, не всі методи розв'язання, сформульовані в досить загальній формі. Однак, можна припустити, що кількість і типів, і методів не настільки велика. Тому, якщо вчитель, вирішуючи конкретну задачу (або цикл задач), буде тренувати учнів у визначенні загального типу задачі і пошуку способу розв'язання серед загальних методів розв'язання задач такого типу і акцентувати на цьому увагу учнів, то за тривалий час навчання учні отримають можливість освоїти загальні типи задач, які вирішують люди, і загальні методи їх розв'язання, що має бути суттєвою метою навчання більшості учнів математиці та природничим наукам.

***Ключові слова**: математичні задачі, тип задачі, методи розв'язання, мета навчання математики.*

Abstract. Skorokhod G.I. Some types of mathematical problems and methods of their solutions.

In a sufficiently general form there are formulated 21 types of mathematical problems, methods for solving problems of each type and examples. Under the type of problem is understood not her external form but internal logical content. This type allows you to create adequate structural and / or mathematical models and choose the method of solution. Obviously, there are present not all the possible types of problems and, moreover, not all the methods of solution, in formulation of a sufficiently general form. However, it can be assumed that the number of types and methods is not so large. Therefore, if the teacher is solving a specific task (or tasks cycle), will train students in the definition of generic problem tipe and finding a method for solving among the common methods for solving problems of this tipe and will focus attention students on this, then for a long time students will be able to learn general types of problems that solve people, and general methods for their solution, which should be essential to educate math and science the majority of students.

***Key words**: math problems, the type of problem, solution methods, the purpose of teaching mathematics.*