предметом при вивченні суміжних дисциплін. Все це безумовно сприятиме й підвищенню рівня їх математичної освіти.

**Література**


1. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.mon.gov.ua
2. Возняк Г., Маланюк М. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики/ Г. Возняк, М. Маланюк // Рад. шк. – 1989. – С. 345.
3. Гете И. В. Избранное. В 2-х ч., Ч. 2. / И. В. Гете // Просвещение. – 1985. – С. 452.
4. Терешкин Н. Прикладная направленность школьного курса математики/ Н.Терешкин // Просвещение. – 1990. – С. 153-212.


УДК 517.6

**В.Д. Погребний**

*Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка*

## ЗІРКОВІ ЗБІЖНОСТІ: РОЗВИТОК ПОНЯТТЯ

Збіжність є основою математичного аналізу (у широкому розумінні). Структура збіжності є однією з фундаментальних структур сучасного аналізу. Вивчення структур збіжності і структур, ними утворених є однією з головних ліній Аналізу. Однією з основних структур збіжності є структура зіркової збіжності.

Поняття зіркової збіжності з'явилось у 20-х роках XX століття [2]. Потім це поняття було узагальнене і формалізоване. Нами вивчалось, досліджувалось і узагальнювалось це поняття у ряді робіт [4-17].

Метою даної роботи є огляд розвитку поняття зіркової збіжності на всіх етапах його вивчення і узагальнення.

У сучасному аналізі розглядається багато типів збіжності послідовностей, фільтрів, напрямленостей. Нерідкою є ситуація, коли на основі однієї збіжності означається інша. Серед таких конструкцій є одна, що має особливе теоретичне і практичне значення. Це конструкція зіркової збіжності.

Вперше ця конструкція була застосована у формі підпослідовностей стосовно порядкової збіжності у першій половині XX століття. Нехай X – решітка (інша назва – структура) [3, 25]. Розглянемо послідовність $(x_n)_{n\in N}$, $x_n \in X$. Вона називається збіжною по впорядкованості або (о)-збіжною до $x_0 \in X$, якщо існують послідовності $(y_n)_{n\in N}$ неспадна та $(z_n)_{n\in N}$ незростаюча, що виконані умови:

1. $\forall n \in N\ [z_n \le x_n \le y_n]$
2. $x_0 = \inf\limits_{n\in N} y_n = \sup\limits_{n\in N} z_n$

Запис: $x_n \xrightarrow{(o)} x_o$ [2, 38-39].

П.С. Александров та П.С. Урисон в 1923 році ввели поняття зіркової збіжності по відношенню до (о)-збіжності [2, 47]. $(x_n)_{n\in N}$ називається зірково збіжною відносно (о)-збіжності до $x_0 \in X$, якщо кожна підпослідовність $(x_{n_k})_{k\in N}$ має підпослідовність

$\left(x_{n_{k_m}}\right)_{m\in N}$, яка (о)-збіжна до $x_0$. Запис: $x_n \xrightarrow{(*o)} x_o$. В решітках вводиться топологія упорядкування за допомогою (о)-збіжності [2, 46]. $F \subset X$ називається (о)-замкненим, якщо $F$ містить всі (о)-границі всіх своїх (о)-збіжних напрямленостей. Цю топологію будемо позначати $\tau^{(o)}$. У решітках $(o) \Rightarrow (*\, o) \Rightarrow (\tau^{(o)})$ – таке співвідношення трьох вказаних збіжностей ($(\tau^{(o)})$ – збіжність у вказаній топології).

У подальшому зіркова $(*\, o)$-збіжність була узагальнена на напрямленості. П.С. Александров та П.С. Урисон також ввели поняття зіркової збіжності відносно деякої даної збіжності на даній множині. Вони використовували конфінальні піднапрямленості [2, 42].

Разом з $(o)$-збіжністю велике теоретичне і прикладне значення має збіжність з регулятором у архімедових лінійних (векторних) решітках – це (*r*)-збіжність [2, 82]. Напрямленість $S = (x_\alpha, \alpha \in A)$ називається (*r*)-збіжною до $x_0$, якщо $\exists u \geq \theta$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha_0 \in A$: $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow |x_\alpha - x_0| \leq \varepsilon u$. Запис: $x_\alpha \xrightarrow{(r)} x_o$. З (*r*)-збіжності випливає (о)-збіжність. Можна розглядати зіркову $(*\, r)$-збіжність. У банахових решітках $(*\, r)$-збіжність співпадає зі збіжністю по вихідній нормі [2, 196].

Автор цієї статті почав займатися вивченням зіркових збіжностей з 1975 року, зокрема, при дослідженні проблем топологічного вкладення упорядкованих топологічних лінійних просторів. Зіркові збіжності ми використовували у класі конфінальних піднапрямленостей.

Подальший аналіз показав можливості узагальнення поняття зіркової збіжності за рахунок використання різних класів піднапрямленостей:

1. Конфінальні.
2. Ізотонні.
3. Мурівські.
4. Квазіпіднапрямленості.

Спочатку були вивчені співвідношення між цими класами піднапрямленостей [8].

Далі послідовно вивчались відповідні типи зіркових збіжностей по відношенню до даної абстрактної $(\sigma)$-збіжності.

1. Конфінальна зіркова збіжність $(c * \sigma)$ [9]
2. Ізотонна зіркова збіжність $(i * \sigma)$ [12]
3. Мурівська зіркова збіжність $(m * \sigma)$ [10]
4. Квазізіркова збіжність $(q * \sigma)$ [11]

Пронумеруємо для зручності типи піднапрямленостей:

1. Конфінальні.
2. Ізотонні.
3. Мурівські.
4. Квазі.

Тепер сформулюємо поняття зіркової збіжності певного типу по відношенню до даної $(\sigma)$-збіжності.

Означення. Напрямленість $S = (x_\alpha, \alpha \in A)$ називається зірково збіжною типу $k, k = 0 \div 4$, якщо кожна її піднапрямленість $T = (y_\beta, \beta \in B)$ типу $\underline{k}$, має свою піднапрямленість $U = (z_\gamma, \gamma \in C)$ типу $\underline{k}$, яка $(\sigma)$-збігається до $x_0 \in X$.

Нами вивчались властивості цих типів зіркових збіжностей, зокрема, у зв'язку з аксіоматиками класу збіжності [1; 3]. Було встановлено:

1. $(c * \sigma)$-збіжність завжди задовольняє умови NA2, NA3. Якщо дана $(\sigma)$-збіжність задовольняє умову NA1 або NA4, то $(c * \sigma)$ має ту ж властивість. Отже, якщо $(\sigma)$-збіжність задовольняє умови NA1, NA4, то $(c * \sigma)$-збіжність є збіжність по класу. Якщо $(\sigma)$-збіжність задовольняє умову NA2, то $(\sigma) \Longrightarrow (c * \sigma)$, а якщо NA3, то $(c * \sigma) \Rightarrow (\sigma)$. Таким чином, $(\sigma) \Longrightarrow (c * \sigma)$ тоді і тільки тоді, коли $(\sigma)$-збіжність задовольняє умови NA2, NA3. Умова (NA3) у конфінальному варіанті еквівалентна умові $(c * \sigma) \Rightarrow (\sigma)$. При виконанні умов T1, T2, T2' [1] умова (T3') $\sim \left(\left(\tau^{(\sigma)}\right) \Rightarrow (c * \sigma)\right)$, де $\left(\tau^{(\sigma)}\right)$ – збіжність у топології, індукованій $(\sigma)$-збіжністю.

2. $(i * \sigma)$ має властивості NA2, NA3. При виконанні для $(\sigma)$ NA1, $(i * \sigma)$ має ту ж властивість. Стосовно співвідношень $(\sigma)$, $(i * \sigma)$, NA2, NA3 властивості аналогічні $(c * \sigma)$.

3. Властивості $(m * \sigma)$ стосовно вказаних співвідношень аналогічні властивостям $(i * \sigma)$.

4. Властивості $(q * \sigma)$ аналогічні стосовно вказаних співвідношень властивостям $(m * \sigma)$. (NA1) $\sim$ (NA1.1): $\forall x_0 \in X\ \exists (S = x_\alpha, \alpha \in A)$: $x_\alpha \equiv x_0, S \xrightarrow{\sigma} x_0$.

5. $\left(k(k * \sigma) = (k * \sigma)\right), k = 1, 2, 3, 4, (c * \sigma) \Rightarrow (i * \sigma) \Rightarrow (m * \sigma) \Rightarrow (q * \sigma)$.

Вище вказані типи зіркових збіжностей можна назвати «чистими», бо в кожному типі застосовуються піднапрямленості одного типу.Конструкція зіркової збіжності дозволяє узагальнити це поняття. Нехай, $k, j = 1 \div 4$, як і раніше означають номери основних класів піднапрямленостей.

Означення. Напрямленість $S = (x_\alpha, \alpha \in A)$ називається $(kj * \sigma)$-збіжною до точки $x_0 \in X$, якщо кожна її піднапрямленість типу $(k)$ має піднапрямленість типу $(j)$, яка $(\sigma)$-збіжна до $x_0$. Запис: $x_\alpha \xrightarrow{(kj * \sigma)} x_o$.

Таким чином, одержуємо 16 типів зіркових збіжностей типів $(kj * \sigma)$. Ясно, що при $k = j$ одержуємо раніше розглянуту $(k * \sigma)$-збіжність. При $k \neq j$ одержуємо «мішані», а при $k = j$ – «чисті» зіркові збіжності. Ми вивчали властивості «мішаних» зіркових збіжностей [13-17].

Основні одержані результати такі:

1. $(kj * \sigma)$ мають властивість NA1 при її виконанні для даної $(\sigma)$-збіжності.

2. $(kj * \sigma)$ має властивість (NA2) в формулюванні для піднапрямленостей типу $(k)$.

3. При $k \leq j$, $(kj * \sigma)$ має властивість $(NA3)_k$.

Наступним етапом узагальнення зіркової збіжності є використання двох абстрактних збіжностей. Нехай на множині $X \neq \emptyset$ задані дві абстрактні збіжності $(\sigma)$ та $(\omega)$, напрямленість $S = (x_\alpha, \alpha \in A)$ має як $(\sigma)$, так і $(\omega)$-збіжні піднапрямленості.

<u>Означення.</u> Напрямленість $(S)$ називається $(* \sigma\omega)$-збіжною до точки $x_0 \in X$, якщо кожна її піднапрямленість $(T)$ має $(\sigma)$-збіжну піднапрямленість $U$, яка має піднапрямленість $V$, що $(\omega)$-збігається до $x_0$

Стосовно типів використання піднапрямленостей, ми одержуємо як «чисті», так і «мішані» $(* \sigma\omega)$-збіжності. Маємо велику кількість варіантів. Властивості одержаних збіжностей залежать від властивостей даних $(\sigma)$ та $(\omega)$-збіжностей. Наприклад, якщо $(\sigma)$ та $(\omega)$-збіжності задовольняють умову NA1, то $(* \sigma\omega)$-збіжність має ту ж властивість. Умови NA2 та NA3 теж будуть виконуватись.

Таким чином, поняття зіркової збіжності пройшло свій шлях розвитку від конкретної збіжності відносно порядкової збіжності у решітках до дуже абстрактного поняття подвійної зіркової збіжності у просторах абстрактної збіжності. Властивості зіркових збіжностей достатньо передбачувані і тісно пов'язані з аксіоматикою просторів абстрактної збіжності.

## Література


1. Биркгоф Г. Теория решеток. – М.: Наука, 1984. – 568 с.
2. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 408 с.
3. Келли Дж. Общая топология. – М.: Наука, 1968. – 384 с.
4. Погребний В.Д. Аксіоматика класів збіжності і зіркові збіжності // Матеріали V Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. – К., 1996. – С. 512.
5. Погребний В.Д. Зіркові збіжності // Матеріали VI Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. – К., 1997. – С. 314.
6. Погребний В.Д. Деякі варіанти аксіоматики класів збіжності // Матеріали VII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. – К., 1998. – С. 398.
7. Погребний В.Д. Про третю аксіому класу збіжності // Матеріали VIII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. – К., 2000. – С. 348.
8. Погребной В.Д. Основные классы подсетей // Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. – 2001. – №3(24). – С. 138-141.
9. Погребной В.Д. Конфинальная звездная сходимость // Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. – 2001. – №4(25). – С. 141-144.
10. Погребной В.Д. Муровская звездная сходимость // Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. – 2002. – №5(38). – С. 180-183.
11. Погребной В.Д. Квазизвездная сходимость // Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. – 2002. – №6(39). – С. 183-186.
12. Погребной В.Д. Изотонная звездная сходимость // Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. – 2003. – №8(54). – С. 85-87.
13. Погребний В.Д. Зіркові збіжності мішаного типу // Матеріали X Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. – К., 2004. – С. 385.

14. Погребной В.Д. Звездные сходимости смешанного типа // Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. – 2006. – №6. – С. 150-155.
15. Погребний В.Д. Властивості мішаних зіркових збіжностей // Матеріали XI Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. – К., 2006. – С. 551.
16. Погребной В.Д. Свойства звездных сходимостей смешанного типа // Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. – 2006. – №9. – С. 125-127.
17. Погребной В.Д. Смешанные звездные сходимости смешанного типа: дальнейшие свойства // Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. – 2007. – №9(93). – С. 127-129.

***Анотація.*** *Погребний В.Д. Зіркові збіжності: розвиток поняття. Розглядаються зіркові збіжності і процес їх узагальнення з використанням більш абстрактних конструкцій збіжності, різних класів піднапрямленостей та абстрактних збіжностей двох типів одночасно.*

***Ключові слова****: простір, збіжність, зіркова, піднапрямленість.*

***Аннотация.*** *Погребной В.Д. Звездные сходимости: развитие понятия. Рассматриваются звездные сходимости и процесс их обобщения с использованием более абстрактных конструкций сходимости, различных типов подсетей и абстрактных сходимостей двух типов одновременно.*

***Ключевые слова****: пространство, сходимость, звездная, подсеть.*

***Summary.*** *Pogrebniy V. Star of convergence: the development of concepts. Star convergence and process of their generalization with use of more abstract designs of convergence, various types of subnets and abstract convergence of two types at the same time are considered.*

***Key words****: space, convergence, star, subnet.*

УДК 371.315.6:51

**В.О. Полуйко**

*Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка*

## ПІДГОТОВКА УЧНІВ 5-6 КЛАСІВ ДО УЧАСТІ В ОЛІМПІАДАХ З МАТЕМАТИКИ

Не всі діти люблять математику. Є учні, в яких це почуття ніби природжене, а є ті, у кого любов до математики виникає під час вивчення її на уроках, інші починають захоплюватися математикою після цікавого позакласного заходу. Добре організована й уміло поставлена позакласна є одним із найефективніших засобів пробудження й підтримання інтересу до математики в учнів.

У позакласній роботі ми безпосередньо не навчаємо математики, а лише даємо можливість учням помандрувати її стежинами, знайомимо їх із дивовижними подіями та відкриттями й піднімаємо завісу над її секретами та парадоксами. Відкриваючи для