УДК 519.21

ВИПАДКОВІ НЕПОВНІ СУМИ ЗНАКОЗМІННОГО РЯДУ ЛЮРОТА, ДОДАНКИ ЯКОГО УТВОРЮЮТЬ ОДНОРІДНИЙ ЛАНЦЮГ МАРКОВА

Ю.В. Хворостіна

Анотація. Вивчаються властивості розподілу випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\tau_k}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)...a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n},$$

де (a_n) – напередзадана послідовніть натуральних чисел, (τ_k) – випадкові величини, які набувають двох значень 0 та 1 і утворюють однорідний ланцюг Маркова. Повністю розв'язана задача про лебегівську структуру (вміст чисто дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) розподілу ξ. Доведено, що розподіл ξ є дискретним або чисто неперервним, а у випадку неперервності чисто абсолютно неперервним або чисто сингулярним. У випадку сингулярності вказано необхідні і достатні умови канторовості та салемовості, і неможливість належності розподілу до квазіканорівського типу.

Abstract. We study the properties of the distribution of the random variable

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\tau_k}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)...a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n},$$

where (a_n) is a fixed consecutive positive integers, (τ_k) are random variables, which take two values 0 and 1 to form a homogeneous Markov chain. We have completely solved the problem of lebehivsku the distribution of the random variable ξ (we studied the contents of a pure discrete, absolutely continuous and singular components). We have shown that the distribution of ξ is a discrete or pure continuous. If the distribution is continuity it is purely absolutely continuous or purely singular. We specify necessary and sufficient conditions under which a singular distribution is the distribution of Cantor type or the Salem type. We proved that a singular distribution can not be the distribution of quasi-Cantor type.

Вступ

Тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум деяких рядів, а також розподіл ймовірностей випадкових величин на ній, цікавлять багатьох авторів сучасників. Так дослідженню цих властивостей множини неповних сум рядів Остроградського-Серпінського-Пірса присвячені роботи Альбеверіо С., Барановського О.М., Працьовитого М.В., Торбіна Г.М. [1], рядів Остроградського 2-го виду – Працьовитої І.М. [2], рядів Енгеля – Працьовитого М. В., Гетьмана Б. І. [3], рядів Сільвестера – Працьовитого М. В., Задніпряного М. В. [4] та інших. Нещодавно Працьовитий М. В. та Хворостіна Ю. В. вивчили та представили у роботі [6] деякі тополого-метричні властивості множини неповних сум знакозмінного ряду Люрота, які ми наведемо у цьому пункті для цілісності викладу.

Нехай (a_n) – задана послідовність натуральних чисел,

$$\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}$$

– відповідний знакозмінний ряд Люрота [7] з сумою r.

Введемо наступні скорочення

$$A_1=a_1, \qquad A_n=a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)...a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n.$$

Звідси $A_n=A_{n-1}\cdot(a_{n-1}+1)a_n$.

Означення 1. Якщо M – деяка підмножина множини натуральних чисел, то число

$$x=x(M)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\varepsilon_n}{A_n},\text{ де} \tag{0.1}$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}1, & \text{якщо } n\in M,\\ 0, & \text{якщо } n\notin M;\end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою) даного ряду Люрота.*

Означення 2. Множина

$$C_r=\left\{x: x=\sum_{n\in M\subset N}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{A_n},\quad M\in\sigma(N)\right\},$$

де $\sigma(N)$ — множина всіх підмножин множини N, називається *множиною неповних сум даного ряду Люрота.*

Вираз (0.1) і його суму x формально зображатимемо у вигляді $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ і називатимемо *циліндричним зображенням*, при цьому число $\varepsilon_k(x)$ називається k-тою цифрою числа x. Поняття k-тої цифри є, взагалі кажучи, не коректно визначеним, оскільки існують знакозмінні ряди Люрота, для яких деякі точки множини неповних сум мають не одне циліндричне зображення. Це ряди, у яких $a_n=1$ для всіх $n>n_0$. Для них зліченна підмножина множини неповних сум має два циліндричні зображення. Такі числа називаються нега-двійково-раціональними [5]. Прикладом такого ряду є двійковий знакозмінний ряд Люрота:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}+\ldots.$$

Теорема 1. *Множина неповних сум ряду Люрота C_r є:*

1. *відрізком* $\left[-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$, *якщо* $a_n=1\quad\forall n\in N$;
2. *об'єднанням скінченного числа відрізків, якщо* $a_n=1$ *для всіх* $n\geq n_0$ *;*
3. *ніде не щільною досконалою множиною нульової міри Лебега, якщо* $a_n\neq 1$ *для нескінченної множини значень* n.

Нехай $c_1,c_2,\ldots,c_m$ — фіксований набір нулів та одиниць.

Означення 3. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\dots c_m$* називається множина $\Delta'_{c_1\dots c_m}$ всіх неповних сум, які мають зображення

$$\Delta_{c_1\dots c_m\varepsilon_{m+1}\dots\varepsilon_{m+j}\dots},\quad \varepsilon_{m+j}\in\{0,1\},\quad j\in N.$$

Означення 4. *Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2\dots c_m$* називається відрізок, кінці якого співпадають з нижньою і верхньою гранями циліндра $\Delta'_{c_1\dots c_m}$, його позначатимемо через $\Delta_{c_1\dots c_m}$

Лема 1. *Циліндричні множини (циліндри та циліндричні відрізки) мають властивості:*

1. $\Delta'_{c_1c_2\dots c_m}\subset\Delta_{c_1c_2\dots c_m}$.
2. $\Delta'_{c_1\dots c_m}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta'_{c_1\dots c_m i}$.
3. $|\Delta_{c_1c_2\dots c_m}|=d+b-\sum\limits_{n=1}^{m}\dfrac{1}{A_n}=\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}\dfrac{1}{A_n}=r_{m+1}\to 0\ (m\to\infty)$.
4. *Основне метричне відношення:*
$$\frac{|\Delta_{c_1c_2\dots c_m i}|}{|\Delta_{c_1c_2\dots c_m}|}=\frac{r_{m+2}}{r_{m+1}}=\frac{r_{m+2}}{\dfrac{1}{A_{m+1}}+r_{m+2}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{A_{m+1}\cdot r_{m+2}}}.$$
5. *Мають місце наступні нерівності:*
$$0<\frac{1}{1+(a_{m+1}+1)a_{m+2}}\leq\frac{|\Delta_{c_1c_2\dots c_m i}|}{|\Delta_{c_1c_2\dots c_m}|}\leq\frac{1}{1+\dfrac{1}{A_{m+1}}}.$$
Справді,
$$\frac{1}{A_{m+2}}\leq r_{m+2}<1,$$
$$1+\frac{1}{A_{m+1}}\leq 1+\frac{1}{A_{m+1}\cdot r_{m+2}}\leq 1+\frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}=1+(a_{m+1}+1)a_{m+2}.$$
Тоді
$$0<\frac{1}{1+(a_{m+1}+1)a_{m+2}}\leq\frac{1}{1+\dfrac{1}{A_{m+1}\cdot r_{m+2}}}\leq\frac{1}{1+\dfrac{1}{A_{m+1}}}.$$
6. $\Delta_{c_1c_2\dots c_{m-1}0}\bigcap\Delta_{c_1c_2\dots c_{m-1}1}=\varnothing$, *крім випадку коли всі $a_n=1$, при $n>m$, причому*
$$k_m=|\Delta_{c_1c_2\dots c_{m-1}}\setminus(\Delta_{c_1c_2\dots c_{m-1}0}\cup\Delta_{c_1c_2\dots c_{m-1}1})|=$$
$$=\frac{1}{A_m}-\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{A_n}\geq\frac{1}{A_m}\left(1-\frac{2}{a_m+1}\right)\geq 0.$$
7. $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\Delta_{c_1c_2\dots c_m}=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\Delta'_{c_1c_2\dots c_m}=x\equiv\Delta_{c_1c_2\dots c_m\dots}$.
8. $C_r=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{\substack{c_i\in\{0,1\},\\ i=\overline{1,m}}}\Delta_{c_1c_2\dots c_m}$.

Основним об'єктом дослідження в даній роботі є розподіл випадкової величини

$$\xi = \frac{\tau_1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\tau_n}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} \equiv \Delta_{\tau_1\tau_2\dots\tau_n\dots},$$

де (τ_n) – послідовність випадкових величин, які набувають двох значено 0 та 1 і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ і матрицею перехідних ймовірностей

$$\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}, \text{ тобто } P\{\tau_{k+1} = j/\tau_k = i\} = p_{ij}.$$

Нас цікавить лебегівська структура розподілу ξ (вміст дискретної, абсолютно неперервної чи сингулярної компонент) та його спектральні властивості (топологометричні і фрактальні властивості спектра, тобто мінімального замкненого носія). Очевидно, що коли матриця перехідних ймовірностей нулів не містить спектр розподілу ξ співпадає з множиною неповних сум ряду Люрота.

1. Наявність атомів та неатомарність розподілу

Нагадаємо, що атомом розподілу випадкової величини ξ називається число x таке, що $P\{\xi = x\} > 0$. Якщо $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень $n \in \mathbb{N}$, то кожне число $x \in C_r$ має єдине циліндричне зображення. У випадку єдиності циліндричного зображення числа $x \in C_r$ очевидним є наступне твердження:

Ймовірність події $\{\xi = x\}$ обчислюється за формулою

$$P\{\xi = x\} = p_{\varepsilon_1(x)} \prod_{k=1}^{\infty} p_{\varepsilon_k(x)\varepsilon_{k+1}(x)}. \tag{1.1}$$

З цього випливає, що для даного випадку x_0 є атомом тоді і тільки тоді, коли $p_{\varepsilon_k(x)\varepsilon_{k+1}(x)} = 1$ для всіх $k > k_0$.

Зрозуміло, що коли число x має два зображення, тобто $x = \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n\dots} = \Delta_{\varepsilon'_1\varepsilon'_2\dots\varepsilon'_n\dots}$ (а це можливо лише тоді, коли $a_n = 1$ для всіх $n \geq n_0$), то

$$P\{\xi = x\} = p_{\varepsilon_1(x)} \prod_{k=1}^{\infty} p_{\varepsilon_k(x)\varepsilon_{k+1}(x)} + p_{\varepsilon'_1(x)} \prod_{k=1}^{\infty} p_{\varepsilon'_k(x)\varepsilon'_{k+1}(x)}. \tag{1.2}$$

Лема 2. *Нега-двійково-раціональна точка не може бути атомом розподілу.*

Доведення. Нехай $a_n = 1$ для всіх $n \geq n_0$. Розглянемо довільну нега-двійково-раціональну точку

$$x_0 = \Delta_{c_1c_2\dots c_m\dots c_n 0(01)} = \Delta_{c_1c_2\dots c_m\dots c_n 1(10)}.$$

Якщо припустити, що

$$a = p_{c_1}\left(\prod_{i=1}^{n-1} p_{c_ic_{i+1}}\right) \cdot p_{c_n0}p_{00} \lim_{k\to\infty} (p_{01}p_{10})^k > 0$$

або

$$b = p_{c_1}\left(\prod_{i=1}^{n-1} p_{c_ic_{i+1}}\right) \cdot p_{c_n1}p_{11} \lim_{k\to\infty} (p_{10}p_{01})^k > 0,$$

то $p_{01} \cdot p_{10} = 1$, але тоді $p_{00} = 0 = p_{11}$. А отже, $a = 0 = b$, що суперечить припущенню. □

Теорема 2. *Для того щоб розподіл випадкової величини ξ мав атоми, необхідно, щоб матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ містила хоча б один нуль.*

Доведення. Нехай розподіл випадкової величини ξ має атоми і x – один із них. Згідно з попередньою лемою x не може бути нега-двійково-раціональною точною, а тому має єдине зображення.

Припустимо, що матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ не містить жодного нуля, а отже, і не містить жодної одиниці. Значить існують такі p_* і p^*, що $0 < p_* \le p_{ij} \le p^* < 1$. Тоді

$$P\{\xi = x\} = p_{\varepsilon_1(x)} \prod_{k=1}^{\infty} p_{\varepsilon_k(x)\varepsilon_{k+1}(x)} = 0,$$

а це суперечить тому, що x є атомом розподілу. □

Зауваження. Наявність нуля у матриці перехідних ймовірностей не є достатньою умовою існування атому. Наприклад, коли у матриці лише один нуль, а саме $p_{ii} = 0$, то розподіл атомів не має.

Окремо розглянемо всі випадки, коли матриця перехідних ймовірностей містить принаймні один нуль. У ситуації, коли він лише один, залишилось розглянути випадок: $p_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Лема 3. *Якщо матриця перехідних ймовірностей містить рівно один нуль, то розподіл є дискретним або чисто неперервним (неатомарним), причому дискретним, якщо $p_{ij} = 0$ при $i \neq j$, і неперервним, якщо $p_{ii} = 0$, $i \in \{0; 1\}$.*

Доведення. Якщо $p_{ij} = 0$, то $p_{ii} = 1$. У цьому випадку атомами є точки:

$$x_0 = \Delta_{(i)}, \quad x_n = \Delta_{jj\ldots j(i)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Справді,

$$P\{\xi = x_0\} = p_i \cdot 1 = p_i > 0, \qquad P\{\xi = x_n\} = p_j p_{jj}^{n-1} p_{ji} \cdot 1 > 0.$$

Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_j p_{jj}^{n-1} p_{ji} = \frac{p_j p_{ji}}{1 - p_{jj}} = p_j$$

і $p_i + p_j = 1$, то розподіл ξ є чисто дискретним. □

Лема 4. *Якщо матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ має два нулі, то розподіл є чисто дискретним.*

Доведення. 1. Якщо $p_{00} = 0 = p_{11}$, то $p_{01} = p_{10} = 1$ і атомами розподілу є точки $x_1 = \Delta_{(01)}$ і $x_2 = \Delta_{(10)}$.

Справді,

$$P\{\xi = x_1\} = p_0 \lim_{k\to\infty} (p_{01}p_{10})^k = p_0.$$

$$P\{\xi = x_2\} = p_1 \lim_{k\to\infty} (p_{10}p_{01})^k = p_1.$$

2. Якщо $p_{01} = 0 = p_{10}$, то $p_{00} = p_{11} = 1$ і атомами розподілу є точки $x_1 = \Delta_{(0)}$ і $x_2 = \Delta_{(1)}$.

3. Якщо $p_{00} = 0 = p_{10}$, то $p_{01} = p_{11} = 1$ і атомами розподілу є точки $x_1 = \Delta_{0(1)}$ і $x_2 = \Delta_{(1)}$.

4. Якщо $p_{01} = 0 = p_{11}$, то $p_{00} = p_{10} = 1$ і атомами розподілу є точки $x_1 = \Delta_{(0)}$ і $x_2 = \Delta_{1(0)}$. □

2. Лебегівська структура розподілу

Лема 5. *Спектром розподілу ξ є замикання множини*

$$E = \{x : x = \Delta_{\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\ldots\varepsilon_n(x)\ldots}, \quad p_{\varepsilon_k(x)\varepsilon_{k+1}(x)} > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 3. *Якщо матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ містить лише один нуль, причому на головній діагоналі ($p_{ii} = 0$), то розподіл ξ є сингулярно неперервним розподілом канторівського типу.*

Доведення. У випадку коли матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ містить лише один нуль $p_{ii} = 0$, то спектром розподілу ξ є замикання множини

$$D[C_r, \overline{ii}] = \{x : x = \Delta_{\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\ldots\varepsilon_n(x)\ldots}, \quad \varepsilon_k(x)\varepsilon_{k+1}(x) \neq ii, \quad p_{\varepsilon_k(x)\varepsilon_{k+1}(x)} > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Згідно з лемою 3 цей розподіл є неперервним. Множина $D[C_r, \overline{ii}] \subset C_r$. Якщо $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n, то за пунктом 3 теореми 1 C_r є множиною нульової міри Лебега. А це значить, що розподіл випадкової величини ξ є сингулярним розподілом канторівського типу.

Доведемо, що $\lambda(D[C_r, \overline{ii}]) = 0$, де λ – міра Лебега, якщо $a_n = 1$ для всіх n не менших деякого натурального числа n_0. Нехай F_{2k} – об'єднання всіх циліндрів рангу $2k$, внутрішність яких містить точки множини $D[C_r, \overline{ii}]$, $F_0 = (0, 1]$, а множину $\overline{F}_{2(k+1)}$ означимо рівністю

$$\overline{F}_{2(k+1)} = F_{2k} \backslash F_{2(k+1)}.$$

Тоді $\lambda(\overline{F}_{2(k+1)}) = \lambda(F_{2k}) - \lambda(F_{2(k+1)})$.

$$\frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} = 1 - \frac{\lambda(F_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}. \tag{2.1}$$

Очевидно, що $F_{2k} \supset F_{2(k+1)} \supset D[C_r, \overline{ii}]$ для будь-якого натурального k.

$$D[C_r, \overline{ii}] = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{2k} = \lim_{k\to\infty} F_{2k}.$$

З неперервності міри Лебега зверху маємо

$$\lambda(C_r, \overline{ii}]) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_{2k}).$$

Тоді

$$\lambda(D[C_r, \overline{ii}]) = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})} \cdot \frac{\lambda(F_{2(k-1)})}{\lambda(F\lambda_{2(k-2)})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_0)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}.$$

З рівності (2.1) маємо

$$\lambda(D[C_r,\overline{ii}])=\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}\right].$$

Останній нескінченний добуток розбігається до нуля тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}. \tag{2.2}$$

Знайдемо оцінки відношення $\dfrac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}$. Нехай $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_{2k}}$ – циліндр із F_{2k}. Можливі випадки: 1) $c_{2k}=i$, 2) $c_{2k}\neq i$.

Якщо $c_{2k}=i$, то $\Delta_{c_1c_2\ldots c_{2k}i}\cap D[C_r,\overline{ii}]=\varnothing$ і за властивістю 5 циліндричних множин

$$0<\frac{1}{1+(a_{2k+1}+1)a_{2k+2}}\leq\frac{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_{2k}i}|}{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_{2k}}|}\leq\frac{1}{1+\dfrac{1}{A_{2k+1}}}.$$

Якщо $c_{2k}\neq i$, то $int\Delta_{c_1c_2\ldots c_{2k}ii}\cap D[C_r,\overline{ii}]=\varnothing$ і

$$\frac{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_{2k}ii}|}{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_{2k}}|}=\frac{r_{2k+3}}{r_{2k+1}}=\frac{r_{2k+3}}{\dfrac{1}{A_{2k+1}}+\dfrac{1}{A_{2k+2}}+r_{2k+3}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{A_{2k+1}\cdot r_{2k+3}}+\dfrac{1}{A_{2k+2}\cdot r_{2k+3}}}.$$

$$1+\frac{1}{A_{2k+1}}+\frac{1}{A_{2k+2}}\leq 1+\frac{1}{A_{2k+1}\cdot r_{2k+3}}+\frac{1}{A_{2k+2}\cdot r_{2k+3}}\leq 1+\frac{A_{2k+3}}{A_{2k+1}}+\frac{A_{2k+3}}{A_{2k+2}}=$$
$$=1+(a_{2k+2}+1)a_{2k+3}\left(1+(a_{2k+1}+1)a_{2k+2}\right).$$

Тому

$$0<\frac{1}{1+(a_{2k+2}+1)a_{2k+3}\left(1+(a_{2k+1}+1)a_{2k+2}\right)}\leq\frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}\leq\frac{1}{1+\dfrac{1}{A_{2k+1}}}.$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}\geq\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+(a_{2k+2}+1)a_{2k+3}\left(1+(a_{2k+1}+1)a_{2k+2}\right)}=\frac{1}{7}.$$

Отже, ряд (2.2) розбігається і $\lambda(D[C_r,\overline{ii}])=0$. Тому розподіл випадкової величини ξ є сингулярним розподілом канторівського типу. □

Теорема 4. *Якщо матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ не містить нулів, то розподіл ξ є*

1) сингулярним розподілом канторівського типу, якщо $a_n\neq 1$ нескінченну кількість разів;

2) кусково рівномірним, якщо $a_n=1$ для всіх $n\geq n_0$ і

$$\|p_{ik}\|=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\equiv B.$$

3) сингулярним розподілом салемівського типу, якщо $\|p_{ik}\|\neq B$ і $a_n=1$ для всіх $n\geq n_0$.

Доведення. **1)** Оскільки серед елементів матриці $\|p_{ik}\|$ немає нулів, то згідно з теоремою (2) розподіл ξ є неперервним. Враховуючи, що спектр розподілу випадкової величини ξ є підмножиною множини C_r, а за пунктом 3 теореми 1 множина C_r має нульову міру Лебега при $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n, то розподіл ξ є сингулярним розподілом канторівського типу.

2) За пунктом 2 теореми 1 C_r є об'єднанням скінченного числа відрізків, якщо $a_n = 1$ для всіх $n \geq n_0$. Тому ймовірність події $\{\xi \in \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}\varepsilon_{n_0+1}\ldots\varepsilon_{n_0+k}}\}$ для довільного $k \in \mathbb{N}$ обчислюється за формулою

$$P\{\xi \in \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}\varepsilon_{n_0+1}\ldots\varepsilon_{n_0+k}}\} = \frac{1}{2^{n_0+k}}.$$

За пунктом 3 леми 1 довжина циліндра $\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}\varepsilon_{n_0+1}\ldots\varepsilon_{n_0+k}}$ обчислюється за формулою

$$|\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}\varepsilon_{n_0+1}\ldots\varepsilon_{n_0+k}}| = \sum_{n=n_0+k+1}^{\infty} \frac{1}{A_n} = \frac{1}{A_{n_0}\cdot 2^{k-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{A_{n_0}\cdot 2^{k-1}}.$$

Тоді

$$\frac{P\{\xi \in \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}\varepsilon_{n_0+1}\ldots\varepsilon_{n_0+k}}\}}{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}\varepsilon_{n_0+1}\ldots\varepsilon_{n_0+k}}|} = \frac{A_{n_0}\cdot 2^{k-1}}{2^{n_0+k}} = \frac{A_{n_0}}{2^{n_0+1}}.$$

Отже, відношення ймовірності події $\{\xi \in \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}\varepsilon_{n_0+1}\ldots\varepsilon_{n_0+k}}\}$ до довжини відрізка $|\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}\varepsilon_{n_0+1}\ldots\varepsilon_{n_0+k}}|$ є величина стала для фіксованого n_0. А тому розподіл ξ є рівномірним на циліндрах $\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n_0}}$ для всіх наборів $c_1, c_2, \ldots, c_{n_0}$. **3)** Оскільки матриця перехідних ймовірностей $\|p_{ik}\|$ не містить нулів, то $p_{ik} > 0$ для будь-яких $i \in \{0;1\},\ k \in \{0;1\}$. Тому

$$P\{\xi \in \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_{n_0}c_{n_0+1}\ldots c_{n_0+k}}\} = p_{c_1}\prod_{i=2}^{n_0} p_{c_ic_{i+1}} \cdot \left(\prod_{j=n_0+1}^{n_0+k} p_{\varepsilon_j\varepsilon_{j+1}} + \prod_{j=n_0+1}^{n_0+k} p_{\varepsilon'_j\varepsilon'_{j+1}}\right) > 0$$

для довільного набору натуральних чисел $(c_{n_0+1}, \ldots, c_{n_0+k})$. Значить F_ξ є строго зростаючою на кожному з циліндрів $\Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m}$. Тобто в цьому випадку S_ξ є замиканням множини

$$\bigcup_{\substack{c_i\in\{0,1\},\\ i=\overline{1,m}}} \Delta^{\widetilde{L}}_{c_1\ldots c_m}.$$

Отже, за означенням, розподіл ξ належить до салемівського типу. □

Література

[1] Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G. The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and probability distributions on it. // Rev. Roum. Math. Pures Appl. — 2009. — 54, no. 2. — P. 85-115.

[2] *Працьовита І. М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2006. — № 7. — С. 174–189.

[3] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2006. — № 7. — С. 105–116.

[4] *Працьовитий М. В., Задніпряний М.В.* Розклади чисел в ряди Сільвестера та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2009. — № 10. — С. 73–87.

[5] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[6] *Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В.* Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота та розподіли ймовірностей на ній // Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. — №10.—С.14–28.

[7] *Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В.* Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування // Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2010. — №11.—С.102–118.