

problem solving. The teacher must demonstrate that there are different mathematical models and their examples. The teacher also must to allocate time for fixation of all steps of mathematical modeling at the lesson and during homework. First, the teacher proposes the problem with «mathematical plot». Such a problem does not difficult neither in solving not in its interpretation. Then the teacher can propose story tasks. Some of such tasks can have redundant information (books by I. Perelman).

Key words: *learning mathematics, secondary school, equation, equations, mathematical modelling, mathematical model.*

УДК 372.851:373.1

О. В. Школьний

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
ID ORCID 0000-0002-3131-1915

Ю. О. Захарійченко

Національний університет «Києво-Могилянська академія»
ID ORCID 0000-0001-7436-3435

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕТИПОВИХ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ ПІД ЧАС ПІДГОТОВКИ ДО ЗНО З МАТЕМАТИКИ

Тест зовнішнього незалежного оцінювання з математики нині виконує подвійну функцію. За допомогою цього тесту, з одного боку, здійснюється державна підсумкова атестація українських випускників, а з іншого боку – формування ранжованого списку для конкурсного відбору абітурієнтів при вступі до вищих навчальних закладів. Як наслідок, цей тест має містити як типові завдання для перевірки основних результатів навчання, так і завдання, сформульовані в незвичній формі, які призначені для виявлення творчого і нестандартного мислення учнів.

У даній роботі ми наводимо підбірку нетипових тестових завдань, які можуть бути використані вчителями математики під час підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. При цьому ми розглядаємо завдання різних форм (із альтернативами, з короткою відповіддю, з повним поясненням), намагаючись здійснити широке тематичне покриття. До кожного з цих завдань наведено повне розв'язання і методичні коментарі, у яких ми робимо акцент на їх характерних особливостях. Ми вважаємо, що запропоновані в даній роботі методичні рекомендації сприятимуть забезпеченню якісної підготовки до ЗНО з математики учнів української старшої школи.

Ключові слова: *ЗНО з математики, ДПА з математики, учні старшої школи, навчальні досягнення з математики, нетипові тестові завдання.*

Постановка проблеми. Наразі зовнішнє незалежне оцінювання якості знань з математики (далі ЗНО) виконує дві функції. З одного боку, за допомогою цього тесту перевіряють обов'язкові результати навчання, здійснюючи державну підсумкову атестацію (далі ДПА) випускників української старшої школи. З іншого боку, за допомогою тесту ЗНО з математики проводиться конкурсний відбір під час вступної кампанії до українських вищів. На нашу думку, поєднання цих двох функцій не є природним і в подальшому варто відокремити формування ранжованого списку абітурієнтів для вступу до вищів від проведення ДПА. Однак, на даному етапі, коли це поєднання реалізується на практиці, перед розробниками тестів ЗНО постає ціла низка методичних проблем. Зокрема, важливо в тест ЗНО з математики включати як типові завдання, що стосуються всіх змістових ліній шкільної математики і призначені для перевірки обов'язкових результатів навчання, так і конкурсні завдання, сформульовані в незвичній формі, спрямовані на виявлення творчого і нестандартного мислення учасників тестування.

Традиційно тестові завдання, які використовують під час проведення стандартизованого оцінювання, за когнітивним рівнем поділяють на три категорії: 1) завдання на знання і розуміння; 2) завдання на застосування знань і умінь у типових та змінених ситуаціях; 3) завдання на застосування знань і умінь у нових ситуаціях. Саме про завдання останнього типу буде йти мова в цій статті.

Аналіз актуальних досліджень. Проблема підготовки учнів до ЗНО та ДПА з математики систематично розглядається в фахових науково-педагогічних виданнях. Активно працюють у цьому напрямку і постійно публікують результати своїх досліджень В.Г. Бевз, М.І. Бурда, Г.І. Білянin, О.Я. Білянina, О.П. Вашуленко, Л.П. Дворецька, О.В. Єргина, О.С. Істер, А.Г. Мерзляк, Є.П. Нелін, В.Б. Полонський, В.К. Репета, О.М. Роганin, О.П. Томащук, М.С. Якir та інші.

Наш авторський колектив (у складі авторів статті разом із Л.І. Захарійченко та О.В. Шкoльною) протягом останніх дванадцяти років досить активно працює над методичним забезпеченням процесу підготовки до ЗНО з математики. Основи теорії та методики оцінювання навчальних досягнень учнів старшої школи в Україні описано в монографії [1], для підготовки учнів до ЗНО та ДПА з математики ми використовуємо методичний комплект із посібників [2] та [3]. Більшість уміщених у цій роботі тестових завдань взято нами з двох останніх джерел. Розв'язуванню типових тестових завдань різних форм присвячені роботи [4]-[8].

Мета статті. Головною метою даної статті є формування методики підготовки учнів до розв'язування нетипових тестових завдань з математики в процесі підготовки до ЗНО. Для цього ми розглянемо приклади конкретних нетипових тестових завдань різних форм, які стосуються основних змістових ліній шкільного курсу математики, подавши до кожного з них повне розв'язання і методичні коментарі.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети в роботі використано *теоретичні методи*: аналіз методичної літератури з досліджуваного питання та *емпіричні методи*: спостереження за навчальним процесом слухачів курсів підготовки до ЗНО з математики та аналіз результатів їхніх досягнень. У дослідженні також використано *комплекс методів наукового пізнання*: порівняльний аналіз для з'ясування різних поглядів на проблему та визначення напрямів дослідження; систематизація та узагальнення для формулювання висновків і рекомендацій щодо підготовки до загальнодержавних стандартизованих оцінювань навчальних досягнень з математики; узагальнення авторського педагогічного досвіду і спостережень.

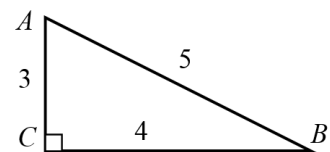
Виклад основного матеріалу. Далі у статті ми розглянемо приклади конкретних нетипових тестових завдань різних форм (із альтернативами, з короткою відповіддю, на встановлення відповідностей, із повним поясненням), намагаючись забезпечити при цьому досить широке тематичне покриття.

Завдання 1. (Тема «Числа і вирази», завдання з короткою відповіддю). Знайдіть значення виразу $\sin(\arctg(0,75))$.

Розв'язання. Розглянемо прямокутний трикутник ABC , в якому катети $AC = 3$ і $BC = 4$ (див. малюнок). За теоремою Піфагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$.

Оскільки $\operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{BC} = 0,75$, то $\angle B = \arctg(0,75)$.

$$\text{Отже, } \sin(\arctg(0,75)) = \sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} = 0,6.$$



Коментар. Традиційно завдання, що містять аркфункції, викликають труднощі в більшості учнів. На нашу думку, не варто уникати таких завдань під час підготовки до ЗНО з математики. Навпаки, слід показувати, що окремі з них тільки видаються дуже складними, а насправді для їх розв'язування не потрібно виводити і запам'ятовувати громіздкі та незвичні формули, а варто лише добре розуміти означення арксинуса, арккосинуса, арктангенса та арккотангенса.

Завдання 2. (Тема «Функції», завдання з короткою відповіддю). Нехай $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Знайдіть $g'(2)$, якщо відомо, що $f(x)$ є диференційовною на \mathbb{R} , $f(2) = -1$, $f'(2) = 5$.

Розв'язання. Оскільки $g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}$, то

$$g'(2) = \frac{f'(2) \cdot 2 - f(2)}{2^2} = \frac{5 \cdot 2 - (-1)}{4} = 2,75.$$

Коментар. Важливим принципом при розв'язуванні тестових завдань когнітивного рівня «застосування знань і умінь в нових ситуаціях» є принцип, який можна виразити девізом: «Нічого не бійся!». Доволі часто такі завдання не є громіздкими і не вимагають від учня додаткових знань, вони потребують лише певної сміливості в застосуванні відомих правил.

Завдання 3. (Тема «Рівняння і нерівності», завдання з повним поясненням). Зобразіть у системі координат xOy множину розв'язків нерівності $(|x| + |y| - 1)^{x^2 + y^2 - 4x} < 1$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} |x| + |y| - 1 > 1, \\ x^2 + y^2 - 4x < 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 0 < |x| + |y| - 1 < 1, \\ x^2 + y^2 - 4x > 0. \end{cases}$$

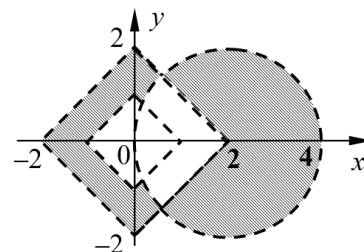
Виконаємо рівносильні перетворення першої системи нерівностей:

$$\begin{cases} |x| + |y| > 2, \\ (x-2)^2 + y^2 < 4. \end{cases}$$

У прямокутній системі координат точки, координати яких задовольняють цю систему нерівностей, знаходяться зовні квадрата з вершинами в точках $(2;0), (0,2), (-2;0), (0,-2)$ і всередині круга з центром у точці $(2;0)$ радіуса 2. Для другої системи нерівностей маємо:

$\begin{cases} 1 < |x| + |y| < 2, \\ (x-2)^2 + y^2 > 4. \end{cases}$ Точки, координати яких що задовольняють цю систему нерівностей

знаходяться всередині згаданого вище квадрата і зовні квадрата з вершинами в точках $(1;0), (0,1), (-1;0), (0,-1)$ та зовні круга з центром у точці $(2;0)$ радіуса 2. У підсумку отримуємо множину точок, заштриховану на малюнку.



Коментар. На відміну від попередніх двох завдань, це завдання є доволі громіздким і вимагає від учня акуратних міркувань та певного досвіду розв'язування типових завдань. Однак, за своєю логічною будовою воно досить зрозуміле, а отже, вчителям при підготовці до ЗНО з математики варто приділяти час і таким завданням.

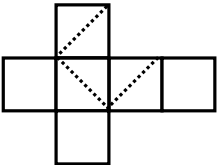
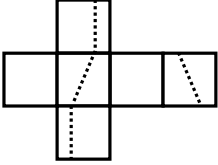
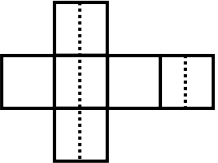
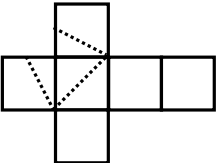
Завдання 4. (Тема «Планіметрія», завдання з альтернативами). Укажіть графік, який може бути графіком залежності $P = f(S)$ периметра P правильного трикутника від його площі S .

А	Б	В	Г	Д

Розв'язання. Нехай сторона правильного трикутника дорівнює a . Тоді периметр $P = 3a$, а площа $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. Тоді $a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$ і $P = \frac{6}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{S}$. Серед запропонованих альтернатив графік функції цього виду зображений лише на малюнку А.

Коментар. Дане завдання є комбінованим, воно вимагає від учнів поєднання знань і умінь з різних тем шкільного курсу математики – «Планіметрія», «Числа і вирази» та «Функції та їх графіки». Головним, безумовно, є планіметричний матеріал, оскільки без знання формул площі та периметра це завдання розв'язати не можна. Але й без навичок перетворення числових виразів та знання графіків основних елементарних функцій правильну відповідь до завдання 4 отримати не можна. Подібними «мультитематичними» завданнями не слід зловживати при підготовці до ЗНО, але й уникати їх також не потрібно.

Завдання 5. (Тема «Стереометрія», завдання на встановлення відповідностей). Серед геометричних фігур (А–Д) виберіть ті, які є перерізами куба, зображеними пунктиром на розгортках куба (1–4).

<i>Розгортки куба</i>		<i>Геометричні фігури</i>
1		А Правильний трикутник
2		Б Трикутник, який не є правильним
3		В Квадрат
4		Г Прямокутник, який не є квадратом
		Д Чотирикутник, що не є паралелограмом

Розв'язання. На малюнку 1 площина перерізу перетинає куб по діагоналям трьох граней, що мають спільну вершину. Оскільки всі ці діагоналі рівні між собою, то перерізом куба є правильний трикутник. На малюнку 2 площина перерізу перетинає дві пари протилежних граней куба, а отже, є прямокутником. Оскільки відрізки перерізу на сусідніх квадратах розгортки різні за довжиною, то цей прямокутник не є квадратом. На малюнку 3 площина перерізу перетинає дві пари протилежних граней куба по відрізках однакової довжини, а отже, є квадратом. Нарешті, на малюнку 4 площина перерізу перетинає три грані куба, що містять одну вершину, але при цьому відрізки перерізу на гранях мають різні довжини. Отже, переріз є трикутником, що не є правильним.

Відповідь: **1 – А, 2 – Г, 3 – В, 4 – Б.**

Коментар. Дане завдання сприяє розвитку просторової уяви учнів. Під час його розв'язання варто виготовити 4 розгортки куба і демонструвати кожен переріз на паперовій моделі. Такий підхід дозволить уникнути проблем з розумінням ходу розв'язання, а також підвищить рівень інтересу учнів до теми «Многогранники». Хоч того й не вимагається в цьому завданні, не варто також забувати і про обґрунтування висловлених припущень про вид перерізу.

Завдання 6. (Тема «Елементи комбінаторики і стохастики», завдання з повним поясненням). У трикутнику з вершинами в точках $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ навмання вибирають точку $M(a;b)$. Знайдіть імовірність того, що рівняння $x^2 + ax + b = 0$ має дійсні корені.

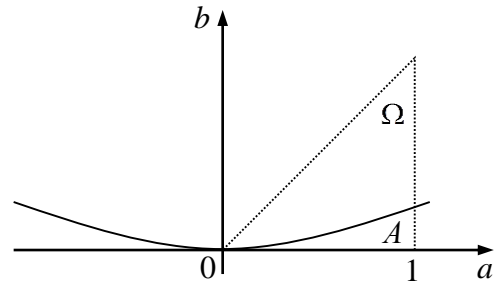
Розв'язання. Квадратне рівняння $x^2 + ax + b = 0$ має дійсні корені за умови $D = a^2 - 4b \geq 0$ або $b \leq \frac{1}{4}a^2$. Зобразимо в системі координат aOb множину точок A , яка належить даному трикутнику і для якої виконується дана умова (див. малюнок).

За геометричним означенням шукана ймовірність P обчислюється за формулою $P = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$, де $S(A)$ – площа A , а $S(\Omega)$ – площа простору елементарних подій. Оскільки

простір елементарних подій є трикутником із даними в умові вершинами, то $S(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Знайдемо

$$S(A) : S(a) = \int_0^1 (\frac{1}{4}a^2) da = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{12}. \text{ Отже, } P(A) = \frac{1}{6}.$$

Коментар. Подібні завдання будуть корисні, в першу чергу, «сильним» учням, які шукають цікавих застосувань теорії ймовірностей як у інших розділах математики, так і в реальному житті. Завдання 6 знову поєднає кілька тем шкільного курсу математики і потребує розуміння суті поняття «ймовірність події» та застосування знань із тем «Рівняння» та «Інтеграл і його застосування».



Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Методика належної підготовки учнів до ЗНО з математики наразі є актуальною проблемою сучасної педагогічної науки. Досить важливо при цій підготовці не випустити з розгляду нетипові тестові завдання, які стосуються когнітивного рівня «застосування знань і умінь у нових ситуаціях», оскільки, внаслідок функції конкурсного відбору, подібні завдання постійно присутні в тесті ЗНО з математики. Учителям варто частіше проявляти математичну фантазію та сміливіше включати завдання згаданого когнітивного рівня в програму підготовки до тестування, оскільки саме ці завдання дозволяють виявити учнів з нестандартним мисленням, здатних до математичної творчості.

Ми сподіваємось, що наведені в роботі приклади тестових завдань і коментарі до їх розв'язування стимулюватимуть творчий підхід учителів до процесу підготовки до ЗНО з математики, а отже, як наслідок, сприятимуть забезпеченню належної якості підготовки випускників української старшої школи до загальнодержавного стандартизованого оцінювання якості знань з математики.

Автори статті готові до конструктивної дискусії з читачами щодо методики підготовки до ЗНО з математики, яку можна вести з нами особисто, написавши листа на електронну пошту: shkolnyi@ukr.net або yzakhar@gmail.com.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Школьний О. В. Основи теорії та методики оцінювання навчальних досягнень з математики учнів старшої школи в Україні: Монографія. / О. В. Школьний. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. – 424 с.
2. Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань: У 2 ч. Ч. 1: Різномірні завдання / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна. – 6 вид., випр. – Х.: Вид-во «Ранок», 2017. – 496 с.
3. Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань: У 2 ч. Ч. 2: Теоретичні відомості. Тематичні та підсумкові тести / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна. – Х.: Вид-во «Ранок», 2017. – 176с.
4. Школьний О. В. Підготовка випускників загальноосвітніх шкіл до ЗНО з математики / О. В. Школьний // Науковий вісник Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського. – Випуск 3(110). – Серія : Педагогіка. – Одеса: ПНПУ імені К. Д. Ушинського, 2016. – С. 129-134.
5. Школьний О. В. Тренувальні тести до ЗНО з математики (частина 1). / О. В. Школьний, Ю. О. Захарійченко, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна // Математика в рідній школі. – 2016. – № 11. – С. 18-25.
6. Школьний О.В. Тренувальні тести до ЗНО з математики (частина 2). / О. В. Школьний, Ю. О. Захарійченко, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна // Математика в рідній школі. – 2016. – № 12. – С. 2-9.
7. Школьний О.В. Підготовка до ЗНО з математики. Тренувальні тести і методичні коментарі (частина 1). / О.В. Школьний, Ю.О. Захарійченко, Л.І. Захарійченко, О.В.Школьна // Математика в рідній школі. – 2017. – № 11. – С. 2-9.

8. Школьный О. В. Подготовка до ЗНО з математики. Тренувальні тести і методичні коментарі (частина 2). / О. В. Школьный, Ю. О. Захарійченко, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна // Математика в рідній школі. – 2017. – № 12.– С. 11-18.

Школьный А.В., Захарійченко Ю.А. Решения нетипичных тестовых заданий в процессе подготовки к ВНО по математике.

Тест внешнего независимого оценивания по математике в настоящее время выполняет двойную функцию. С помощью этого теста, с одной стороны, осуществляется государственная итоговая аттестация украинских выпускников, а с другой стороны – формирование ранжированного списка для конкурсного отбора абитуриентов при поступлении в высшие учебные заведения. Как следствие, этот тест должен содержать как типовые задачи для проверки основных результатов обучения, так и задачи, сформулированные в необычной форме, которые предназначены для выявления творческого и нестандартного мышления учеников.

В данной работе мы приводим подборку нетипичных тестовых заданий, которые могут быть использованы учителями математики при подготовке к внешнему независимому оцениванию. При этом мы рассматриваем задачи различных форм (с альтернативами, с кратким ответом, с полным объяснением), пытаясь осуществить широкое тематическое покрытие. К каждому из этих заданий приведено полное решение и методические комментарии, в которых мы делаем акцент на их характерных особенностях. Мы считаем, что предложенные в данной работе методические рекомендации будут способствовать обеспечению качественной подготовки к ВНО по математике учеников украинской старшей школы.

Ключевые слова: ВНО по математике, ГИА по математике, ученики старших классов, учебные достижения по математике, нетипичные тестовые задания.

Shkolnyi O., Zakhariychenko Yu. Solving of untypical test items during the preparation to IEA in mathematics.

The external independent assessment in mathematics now performs a dual function. On the one hand, by this test the state final examination of Ukrainian graduates is carried out, and on the other hand, this test helps the formation of ranked list for the competitive selection of applicants for admission to universities. As a result, this test should contain both typical tasks for checking the main learning outcomes, as well as tasks arranged in an unusual form that are intended to identify creative and non-standard thinking of pupils.

In this paper we give a selection of non-typical test items, that can be used by mathematics teachers during the preparation to external independent assessment. At the same time, we consider the items of various forms (with alternatives, with short answer, with full explanation), trying to implement a wide thematic coverage. Each of these items provides complete solution and methodological comments, in which we focus on their specific features. We believe that the methodological recommendations suggested in this paper will contribute to the provision of high-quality training for non-university students in mathematics of Ukrainian senior school pupils.

Keywords: IEA in mathematics, SFE in mathematics, pupils of senior school, learning achievements in mathematics, untypical test items.