Ірина Бондар
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
irinka-bondar@rambler.ru
Науковий керівник – О.В. Мартиненко

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ ЯК НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВА

Поняття функції, як і поняття числа, пройшло довгий історичний шлях уточнення і розширення. Воно виникло з потреб практики і таких наук, як фізика, хімія, природознавство та ін. Явного означення функції ще не було навіть тоді, коли І. Ньютон (1643—1727) та Г. Лейбніц (1646—1716) уже відкрили диференціальне та інтегральне числення. Вперше термін «функція» вжив у своїх працях Г. Лейбніц, пов’язуючи його з геометричними уявленнями. Він також упровадив терміни «змінна», «константа».

Перше означення функції сформулював учень і співпрацівник Лейбніца Бернуллі в 1718 р.: функцією змінної величини називають кількість, що утворена будь-яким способом з цієї змінної величини і сталих.

У 1748 р. це означення було уточнене Л. Ейлером: функція змінної кількості – це аналітичний вираз, складений певним чином з цієї кількості і чисел або сталих кількостей. Отже, перше означення функції Й. Бернуллі і Л. Ейлер пов’язували з аналітичним виразом, що її задає. Однак таке тлумачення звужувало поняття функції принаймні з двох причин:

1) існують функції, які не можна задати аналітичним виразом (формулою);

2) той самий вираз може задавати різні функції. Наприклад, $y = x$ і $y = \sin(\arcsin x) = x$ для x з [–1; 1]. Отже, таке означення функції гальмувало подальший розвиток математичної науки та її застосувань.

Розвиток природознавства і математики потребувало розширення поняття функції. На це звернув увагу Ж. Фур’є, при розробці теорії рядів. Проте минуло понад 100 років після застосування першого означення функції, поки М.І. Лобачевський у 1834 р. не сформулював загальніше означення функції: число, яке задається для кожного x і разом з x поступово змінюється; значення функції можна задати або аналітичним виразом, або умовою, яка подає засіб випробовувати всі числа і вибирати одне з них; нарешті, залежність може існувати і залишатися невідомою.

Три роки потому П. Діріхле дійшов висновку, що спосіб встановлення відповідності між значеннями *x* і *y* неважливий, і дав таке означення функції: *y* є функцією від *x,* якщо будь-якому значенню *x* відповідає цілком певне значення *y,* причому зовсім неістотно, яким саме способом встановлено зазначену відповідність.

Отже, в основу означень М.І. Лобачевського і П. Діріхле явно покладено ідею відповідності [3].

Аналіз навчально-методичної літератури для шкіл і вищих навчальних закладів свідчить, що в ній існують два напрями у тлумаченні поняття функції: класичний і сучасний.

У межах *класичного напряму* є кілька підходів до розуміння поняття функції. Зокрема, функцію тлумачать як:

1) змінну величину, числові значення якої змінюються залежно від числових значень іншої змінної величини;

2) закон (або правило), за яким значення залежної змінної величини змінюються за зміни незалежної змінної;

3) відповідність між значеннями змінних величин.

Сучасний напрям у тлумаченні поняття функції охоплює такі означення, які ґрунтуються на теоретико-множинній основі та використовують поняття «відповідність», «множина». У межах цього напряму також існує кілька підходів:

1) означають не саму функцію, а лише функціональну ситуацію;

2) функцію розглядають як відповідність або відношення між певними множинами;

3) функцію означають як закон відповідності між множинами.

Поняття функції є одним з основних понять математичного аналізу. У вищій математиці поняття функції тісно пов’язане з однією з властивостей – неперервністю. Строге означення неперервності функції сформулював у 1823 р. французький математик Огюстен Луї Коші (1789 – 1857). Ще раніше за Коші воно було сформульоване чеським математиком Бернардом Больцано (1781 – 1848). За цим означеннями на базі теорії дійсних чисел було здійснено строге обґрунтування основних положень математичного аналізу [1].

Існують різні підходи до визначення поняття неперервності функції: так зване формальне означення неперервності функції (через границю), означення за Гейне, означення за Коші, означення через скінченний приріст функції.

Функція f(x) неперервна в точці $x=x_0$, якщо виконується умова:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Неперервність функції, як її властивість, може бути як необхідною так і достатньою умовою існування інших властивостей даної функції. При чому такі теореми мають зміст у диференціальному та інтегральному численні, теорії рядів та інших розділах математики.

Проаналізувавши основні теореми диференціального числення, то поняття неперервності функції є достатньою умовою для перетворення функції на нуль (перша теорема Больцано-Коші), для існування проміжного значення функції (друга теорема Больцано-Коші), для існування оберненої функції (теорема Кантора). Неперервність є достатньою умовою також для обмеженості функції (перша теорема Вейєрштрасса), існування точної верхньої та точної нижньої граней (друга теорема Вейєрштрасса), для рівномірної неперервності функції, для існування горизонтальної дотичної до графіка функції (теорема Ролля), для існування середнього значення функції (теорема Лагранжа та теорема Коші).

Властивість неперервності функції є достатньою умовою для її інтегрованості та виконання ознаки Діріхле-Абеля збіжності невласних інтегралів.

У теорії рядів неперервність функцій є достатньою умовою для неперервності суми ряду, рівномірної збіжності послідовності дійсних неперервних функцій (теорема Діні) та інтегрування суми збіжного функціонального ряду.

Неперервність функції як її властивість є необхідною умовою для неперервності монотонної функції, а в теорії рядів - неперервність членів функціональних рядів (за умови їх рівномірної збіжності) є необхідною умовою для неперервності суми цього ряду.

Покажемо на прикладі, що невиконання умови неперервності функції приводить до невиконання самої теореми Больцано-Коші.

Наведемо формулювання даної теореми: нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і на кінцях цього відрізка приймає різні значення:

$$f(a) = A, f(b) = B.$$

Тоді, яке б не було число C таке, що: $A < C < B$, знайдеться така точка c: $a < c < b$.

Нехай маємо функцію:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{при } x \le -1 \\ x^2+1, & \text{при } -1 < x \le 1 \\ -x+3, & \text{при } x > 1 \end{cases} \text{ (рис.1)}$$

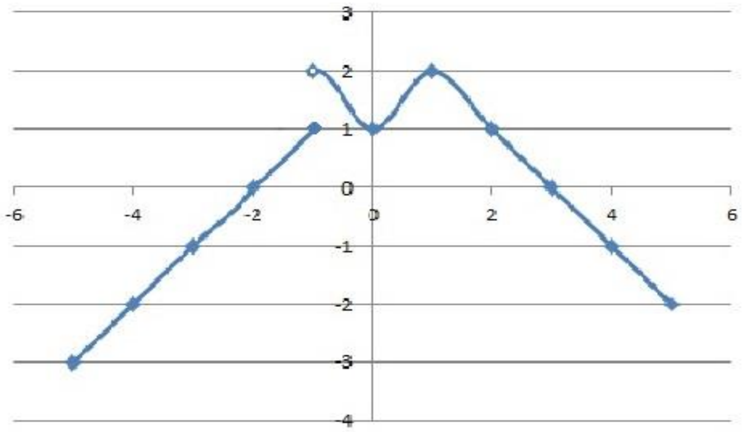

Рис. 1. Графік функції f(x)

Очевидно, що функція визначена на множині всіх дійсних чисел, тобто одна з умов теореми виконується. Але наша функція має розрив I роду в точці $x = -1$, отже, умова неперервності не виконується.

Розглянемо, наприклад, відрізок $x \in [-1{,}5;\ -0{,}5]$. Знайдемо значення функції на кінця відрізку:

$$f(-1{,}5) = -1{,}5 + 2 = 0{,}5$$
$$f(-0{,}5) = (-0{,}5)^2 + 1 = 1{,}25$$

Маємо:

$$-1{,}5 < -0{,}5$$
$$f(-1{,}5) < f(-0{,}5)$$

Ми остаточно переконалися, що виконуються всі умови теореми, крім умови неперервності.

Дослідимо безпосередньо виконання другої теореми Больцано-Коші.

Оберемо будь-яке значення $f(x_0)$ таке, що

$$0{,}5 < f(x_0) < 1{,}25.$$

Нехай, наприклад, $f(x_0) = 1{,}16$.

Знайдемо відповідне значення аргумента x_0 для заданого значення функції:

$$x^2 + 1 = 1{,}16$$
$$x_1 = -0{,}4 \text{ або } x_2 = 0{,}4\,.$$

Бачимо, що жодне із значень $x_1 = -0{,}4$ або $x_2 = 0{,}4$ не належить заданому відрізку $[-1{,}5;\ -0{,}5]$, а за другою теоремою Больцано-Коші знайдене значення аргумента має йому належати.

Якби задана функція мала вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{при } x \le -1 \\ x^2+1, & \text{при } -1 < x \le 1, \\ -x+3, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

то вона була б неперервною і теорема б виконувалась.

Отже, можна зробити висновок, що неперервність функції на відрізку в даній теоремі є важливою умовою і нехтувати нею не можна, інакше не виконується сама теорема.

Список використаних джерел

1. Каленіченко І. Історія виникнення математичного аналізу [Електронний ресурс] / І.Каленіченко// 2013. – Режим доступу: http://prilmom.at.ua/publ/istorija_viniknennja_matematichnogo_analizu/1-1-0-2
2. Ляшко И. И. Математический анализ: введения в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по высшей математике. Т. 1. / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач // М.: Едиториал УССР. – 2001. – С. 97-110.
3. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
4. Фихтенгольц В. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1 / В.М. Фихтенгольц // Государственное издательство физико-математической литературы. – М., 1962. – С. 146-166.

Анотація. Бондар І. Неперервність функцій як необхідна та достатня умова.

У статті розглянута властивість неперервності функції як необхідна або достатня умова існування інших її властивостей, зокрема, у теорії диференціального та інтегрального числення, теорії рядів. На прикладі проілюстровано, що невиконання даної властивості функції є важливою умовою, якою не можна нехтувати, бо це приводить до невиконання самої теореми.

Ключові слова: *неперервність функцій, необхідна умова, достатня умова.*

Summary. Bondar I. Continuity of functions as necessary and sufficient condition.

In the article the property of continuity of the function as a necessary or sufficient condition for the existence of its other properties, in particular, in the theory of differential and integral calculus, theory of series. The example shows that the property of continuity of a function is an important condition, which cannot be neglected.

Keywords: *continuity of functions, necessary condition, sufficient condition.*

Віта Гризун

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

vitaliya.gryzun@mail.ru

Науковий керівник – О.О. Одінцова

КОЛА, ПОВ'ЯЗАНІ З ТРИКУТНИКОМ

Шкільний курс планіметрії містить не так багато інформації з геометрії конфігурації трикутників і кіл. А тема ця дуже цікава. Багато великих вчених, такі як Гаусс, Ейлер, Лейбніц, Чева займалися вирішенням завдань пов'язаних з комбінацією трикутників і кіл. З найдавніших часів коло і трикутник вважали досконалими фігурами, в деяких країнах їх наділяли і наділяють магічними сенсом. Розглянемо такі цікаві факти геометрії: коло вписане та описане навколо трикутника, зовні описане коло коло дев'яти точок (коло Ейлера) та її властивості, коло Аполлонія.

Колом називається фігура, яка складається із всіх точок площини, рівновіддалених від однієї точки. Ця точка називається центром кола [1].