Список використаних джерел

1. Мартиненко О. В. Контрприклади та розвиток поняття функції / О. В. Мартиненко, О. М. Бойко // Фізико-математична освіта: збірник наукових праць. – 2012. – № 1 (3). – 88 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – [3-е изд.]. – Т.2 – М. : Наука, 1951 – 800 с.

Анотація. Шевченко С. Застосування знаменитих функцій до побудови контрприкладів.

Вказується поняття «контрприкладу». Розглядається застосування функцій Діріхле, Рімана, Вейєрштрасса та дельта-функції Дірака до побудови контрприкладів. Наводяться приклади розв'язування інтегралів з параметрами за допомогою бета- та гама-функції Ейлера.

Ключові слова: *функція, контрприклад, інтеграл.*

Abstract. Shevchenko S. The use of well-known functions to build counterexamples.

Indicate the term "counterexample". The application features Dirichlet, Riemann, Weierstrass and Dirac's delta-function to build a counterexample. Examples of solving integrals with parameters using beta- and gamma-functions Euler.

Keywords: *function, counterexample, integral.*

Альона Шепель

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

alionashepel@inbox.ru

Науковий керівник – В.Д. Погребний

ДОВЕДЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТОТОЖНОСТЕЙ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Вивченню різновидів виразів і перетворенню їх відведено в курсі алгебри значну частину навчального часу. Це не дивно, оскільки перетворення виразів є основою для розв'язування рівнянь і нерівностей, доведення тотожностей, обчислення значень буквених виразів. Їх широко використовують у диференціальному й інтегральному численні.

Вивчення тотожних перетворень сприяє розвитку в учнів вміння мислити згорнутими структурами (використання тотожностей дозволяє представляти формули більш лаконічно, що надає можливості оперативно і зручніше виконувати розв'язання рівнянь, обчислювати значення виразу).

Важливими є три основні аспекти:

1) формування основних понять «вирази», «числові вирази», «вирази зі змінними», «тотожність», «тотожні перетворення»; учень має знати види виразів, способи перетворення певного виду виразів, розуміти з якою метою виконується те чи інше перетворення;

2) формування в учнів навичок виконувати тотожні перетворення і розуміння, які перетворення є тотожними, а які не є тотожними;

3) застосування тотожних перетворень у ході розв'язування рівнянь, нерівностей, їх систем, у ході обчислень значень величин, для побудови графіків функцій, для виконання доведень.

З найпростішими числовими і буквеними виразами учні ознайомились у 1 - 6 класах, вивчали найпростіші перетворення виразів за законами арифметичних дій. У курсі алгебри постає завдання на основі вже здобутих знань і умінь систематизувати, поглибити і розширити знання, навички й уміння учнів про вирази та їх перетворення, навчити цілеспрямовано використовувати їх під час виконання різних навчальних задач (спрощення виразів, розв'язування рівнянь нерівностей, доведення тотожностей та ін.).

Програма передбачає в 7 класі повторити й уточнити відомості про числові та буквені вирази, формули, ввести поняття про тотожно рівні вирази, тотожність, тотожні перетворення виразів. У цьому класі вивчають тотожні перетворення цілих виразів (одночленів і багаточленів), формули скороченого множення та застосування їх до перетворення багаточленів.

У 8 класі передбачено вивчення тотожних перетворень раціональних дробів, дробових виразів і перетворень ірраціональних виразів, пов'язаних з квадратним коренем. Розширюється поняття степеня. Зокрема, вводять поняття степеня з цілим від'ємним показником і розглядають перетворення найпростіших виразів, що містять степені з від'ємним показником.

У 9 класі тотожні перетворення цілих і дробових виразів використовуються для розв'язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь. Вивчається спеціальне перетворення - розкладання квадратного тричлена на множники, яке використовується для виведення загальної формули коренів квадратного рівняння, побудови графіка квадратичної функції.

У старшій школі учні, використовуючи здобуті раніше знання, вивчають тотожні перетворення тригонометричних, логарифмічних та показникових виразів.

Перетворення в курсі алгебри розподіляють на два класи: 1) тотожні перетворення - перетворення виразів; 2) рівносильні перетворення – перетворення формул. У разі потреби спрощення однієї частини формули в ній виокремлюють вираз, який перетворюється (використовується певне тотожне перетворення). Відповідний предикат в цьому разі не змінюється. Наприклад, $5x - 6x = 36$; $9x = 36$.

Шкільна практика свідчить, що для вивчення різних видів тотожних перетворень доцільним виявляється алгоритмічний підхід. Це означає, що вивчення кожного з видів перетворень має завершуватися (або починатися) формулюванням правила (алгоритму) перетворення.

Першим, новим для учнів перетворенням, яке трапляється в курсі алгебри 7 класу, є зведення одночленів до стандартного вигляду. Мотивують це перетворення потребою спрощення одночлена, отриманого в результаті множення двох одночленів. Важливо при цьому підкреслити теоретичну основу виконання перетворення: у разі зведення одночлена до стандартного вигляду використовують переставний, сполучний закони множення і правило множення степенів з однаковою основою.

Після розгляду кількох прикладів слід сформулювати правило: для того щоб звести одночлен до стандартного вигляду, потрібно перемножити числові множники і степені змінних з однією основою; отримане число поставити в добутку на перше місце.

Такі вміння будуть потрібні надалі під час розкладання багаточленів на множники. Піднесення одночленів до степеня не спричинює труднощів и учнів, проте деякі з них забувають підносити до степеня коефіцієнт.

До основних видів тотожних перетворень багаточленів належать: зведення багаточленів до стандартного вигляду, додавання та віднімання багаточленів, множення одночлена на багаточлен і обернене перетворення (розкладання багаточлена на множники способом винесення спільного множника за дужки), множення багаточлена на багаточлен й обернене перетворення (розкладання багаточлена на множники способом групування).

Зведення багаточлена до стандартного вигляду виконують зведенням подібних членів. Це перетворення фактично відоме учням з 5 - 6 класів, але там воно мало іншу назву - зведення подібних доданків. Важливо, щоб учні могли пояснити теоретичну основу цього перетворення і правило його виконання: щоб звести подібні члени, потрібно додати їх коефіцієнти і приписати до отриманого числа співмножником спільну буквену частину подібних членів.

Додавання та віднімання багаточленів є позначення цих дій і зведення подібних членів. При цьому учні мають добре знати правило відкриття дужок, перед якими стоїть знак «+» або «-».

У курсі алгебри вивчають й обернене перетворення. Тому учні мають знати правило взяття багаточлена в дужки, якщо перед ними стоїть знак «+» або «-».

Множення одночлена на багаточлен також фактично відоме учням перетворення, яке вони виконували в 5 -6 класах, вивчаючи розподільний закон множення числа стосовно додавання. Труднощі у сприйманні виникають в окремих учнів під час вивчення оберненого перетворення - розкладання багаточленів на множники способом винесення спільного множника за дужки. Під час вивчення цього тотожного перетворення важливо мотивувати потребу в ньому [3, с. 203].

В процесі вивчення учні 7-9 класів повинні:

- засвоїти поняття тотожності і саму ідею тотожних перетворень;
- оволодіти умінням виконувати тотожні перетворення цілих, раціональних виразів, нескладних виразів, які містять степені і корні, тригонометричні вирази;
- засвоїти важливу ідею алгебри – ідею підстановки; якщо в тотожності замість змінної підставити вираз, то знову одержимо тотожність (при цьому треба слідкувати за допустимими значеннями змінних);
- навчитися застосувати апарат тотожних перетворень при доведенні алгебраїчних теорем, розв’язанні рівнянь і нерівностей, побудові графіків функцій.

При розв’язуванні задач з різних розділів математики досить часто виникає необхідність використання тотожних перетворень. Спрощення виразів, розклад многочленів на множники, скорочення дробів – це все приклади тотожних перетворень.

Алгебраїчні перетворення використовують для доведення алгебраїчних тотожностей, спрощення алгебраїчних виразів, для розв'язування алгебраїчних рівнянь, при обчисленні значень складних алгебраїчних виразів. Алгебраїчні вирази – це математичні вирази, що складаються з чисел і змінних за допомогою знаків додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до раціонального степеня, добування кореня і за допомогою дужок [1, с. 159].

Рівність, правильну при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають тотожністю.

Довести тотожність-це значить встановити, що для будь-якого допустимого значення змінні його ліва частина дорівнює правій частині [2, с. 36].

В алгебрі існує кілька різних способів доведення тотожностей.

Способи доведення тотожностей:

- виконати рівносильні перетворення в лівій частині тотожності. Якщо в результаті отримаємо праву частину, тоді тотожність вважається доведеною.

- виконати рівносильні перетворення в правій частині тотожності. Якщо в результаті отримаємо ліву частину, тоді тотожність вважається доведеною.

- виконати рівносильні перетворення в лівій і правій частині тотожності. Якщо в результаті отримаємо однаковий результат, тоді тотожність вважається доведеною.

- з правої частини тотожності віднімаємо ліву частину. Виконуємо над різницею рівносильні перетворення. І якщо в результаті отримуємо нуль, то тотожність вважається доведеною.

- з лівої частини тотожності віднімають праву частину. Виконуємо над різницею рівносильні перетворення. І якщо в результаті отримуємо нуль, то тотожність вважається доведеним.

- метод математичної індукції.

Для ілюстрації вказаних тверджень розглянемо кілька прикладів задач на алгебраїчні тотожності:

Приклад 1. Довести, якщо a + b + c = 0, то $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.

Доведення: нехай a = - b - c

$$(-b-c)^3+b^3+c^3 = -(b+c)^3+b^3+c^3 = -(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+b^3+c^3 =$$
$$= -b^3-3b^2c-3bc^2-c^3++b^3+c^3 = 3bc(-b-c) = 3abc$$

Отримали: 3abc = 3abc.

Приклад 2. Довести, що для будь-якого натурального числа n правильною є рівність:

$$5+55+555+\ldots+\underbrace{55\ldots5}_{n\_n'ятірок} = \frac{5(10^{n+1}-9n-10)}{81}.$$

Доведення.

Якщо n = 1, то $5=\frac{5(10^2-9-10)}{81}$ - правильна числова рівність.

Припустимо, що правильною є рівність:

$$5+55+555+\ldots+\underbrace{55\ldots5}_{k\_n'ятірок} = \frac{5(10^{k+1}-9k-10)}{81}.$$

Звідси $5+55+555+\ldots+\underbrace{55\ldots5}_{k\_n'ятірок} - \frac{5(10^{k+1}-9k-10)}{81} = 0$.

Доведемо, що правильною буде рівність:

$$5+55+555+\ldots+\underbrace{55\ldots5}_{k+1\_n'ятірок} = \frac{5(10^{k+2}-9(k+1)-10)}{81}.$$

Для цього розглянемо різницю лівої та правої частин останньої рівності. Якщо різниця дорівнює 0, то ця рівність правильна.

$$5+55+555+\ldots+\underbrace{55\ldots5}_{k+1\_n'ятірок} - \frac{5(10^{k+2}-9(k+1)-10)}{81} =$$

$$= 5+55+555+\ldots+\underbrace{55\ldots5}_{k\_n'ятірок} + \underbrace{55..5}_{k+1\_n'ятірок} - \frac{5(10^{k+1}-9k-10)}{81} - \frac{9\cdot5\cdot(10^{k+1}-1)}{81} =$$

$$= \underbrace{55\ldots5}_{k+1\_n'ятірок} - \frac{5\cdot\overbrace{99\ldots9}^{k+1}}{9} = \underbrace{55\ldots5}_{k+1\_n'ятірок} - \underbrace{55\ldots5}_{k+1\_n'ятірок} = 0.$$

Згідно принципу математичної індукції рівність:

$5+55+555+...+\underbrace{55...5}_{n\_n'ятірок} = \frac{5(10^{n+1}-9n-10)}{81}$ правильна при $\forall$ n $\in$N [4, с.27].

Тотожні перетворення складають одну із основних змістовно-методичних ліній шкільного курсу алгебри. Вони є базою для вивчення рівнянь і нерівностей, дослідження функцій і організацій обчислень. Тотожні перетворення знаходять широке застосування в курсах геометрії, алгебри і початків аналізу, фізики, хімії і інших предметів. Від рівня сформованості навичок тотожних перетворень залежить результативність навчання учнів математики і іншим дисциплінам.

Список використаних джерел

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: 5-те вид. Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.
2. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підручник – Х.: Гімназія, 2008. – 283 с.
3. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
4. Супрун А. О., Супрун В. Є. Індукція. Принцип. Метод. Задачі. – К.: Гімназія, 2010. – 40 с.

Анотація. Шепель А. Доведення алгебраїчних тотожностей в шкільному курсі математики.

У роботі наведено поняття алгебраїчних тотожностей також розглянуто види алгебраїчних виразів та способи доведення тотожностей. Наведені кілька прикладів на доведення деяких алгебраїчних тотожностей.

Ключові слова: *тотожність, алгебраїчний вираз, доведення тотожностей.*

Abstract. Shepel A. The proof of algebraic identities school course in mathematics.

In this paper the concept of algebraic identities also considered types of algebraic expressions and ways of proving identities. These few examples to bring some algebraic identities.

Keywords: *identity, algebraic expression proving identities.*