УДК 372.853

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ» В СИСТЕМЕ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ ФИЗИКИ

Мороз И.А. ***Сумский государственный педагогический университет имени А.С. Макаренко***

Анализируется методика рассмотрения темы «Статистическая теория теплового излучения» в курсе теоретической физики для педагогических специальностей.

Ключевые слова: тепловое излучение, законы Стефана-Больцмана и Вина, формула Планка.

Физическое мировоззрение будущего учителя физики в значительной степени зависит от понимания и усвоения основных идей квантовой физики, а для этого нужно построить достаточно наглядную и понятную методику изучения истоков квантовой теории, которая бы при этом отвечала уровню базовой науки. Известно, что к истокам квантовой физики, в первую очередь, относится тепловое излучение, которое было хорошо изучено в конце XIX века, и при объяснении его законов (и некоторых других экспериментальных фактов) возникли непреодолимые классической физикой противоречия.

Теоретическому анализу законов теплового излучения и методике их изучения посвящено, по-видимому, наибольшее количество публикаций. Но, как показывает их анализ, в учебной и методической литературе (особенно при изучении общей физики) решения вопроса о распределении энергии в спектре абсолютно черного тела обычно связывают исключительно с М. Планком. Он, как известно, ввел гипотезу о распространении света в виде квантов и действительно получил закон распределения энергии в спектре абсолютно черного тела, который позволяет теоретически получить все законы теплового излучения. Но несложный анализ показывает, что объяснение Планком распределения энергии в спектре абсолютно черного тела приводит к новому противоречию, которое невозможно объяснить в рамках квазиклассической теории Планка. Противоречие, о котором идет речь, осталось вне поля зрения учебно-методической литературы [1-3] и это создает условия для неправильного понимания студентами вопроса о теории теплового излучения. Указанное противоречие нами детально проанализировано в статье [4] и сводится к тому, что последовательно развивая предложенную М. Планком гипотезу, равновесное тепловое излучение нужно рассматривать как систему частиц, которые не взаимодействуют между собой и хаотически двигаются. Поэтому такую систему можно считать классической и применять для нее, например, распределение Максвелла-Больцмана. Тогда, в соответствии с распределением Максвелла-Больцмана, количество фотонов, импульс которых лежит в интервале от p до $p+dp$, должно равняться:

$$dn(\nu) = const\cdot e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} p^2 dp\,.$$

Для фотонов $\varepsilon = h\nu$, $p = \frac{h\nu}{c}$**.** Подставляя эти формулы в предыдущее выражение, получим число фотонов в интервале частот от ν до $\nu+d\nu$:

$$dn(\nu) = const\cdot e^{-\frac{h\nu}{\theta}} \nu^2 d\nu\,.$$

Тогда энергия излучения в данном интервале частот будет, очевидно, равной:

$$dE(\nu,\theta) = h\nu\cdot dn(\nu) = conste\cdot \nu^3\cdot {}^{-\frac{h\nu}{\theta}}\, d\nu\,.$$

Отсюда находим выражение для распределения энергии в спектре абсолютно черного тела:

$$\rho_{\nu,T} = \frac{dE(\nu,\theta)}{d\nu} = h\nu\cdot dn(\nu) = conste\cdot \nu^3\cdot {}^{-\frac{h\nu}{\theta}},$$

которое совпадает с известной (но неверной) формулой Вина и только в области больших частот совпадает с экспериментом. Она в этой части спектра частот является следствием правильной формулы Планка, которая описывает распределение энергии во всем спектре абсолютного черного тела. Поэтому решение М. Планком проблемы «ультрафиолетовой катастрофы» нельзя рассматривать как завершающий этап в изучении теплового излучения. Здесь нужны более радикальные отходы от классических позиций [5,6]. Действительно, анализ этих противоречий свидетельствует о том, что при рассмотрении теплового излучения как совокупности хаотически движущихся и не взаимодействующих между собой частиц – фотонов, следует учитывать не только классические характеристики частиц (масса, заряд и тому подобное), но и более тонкие их отличия, выходящие за рамки классической физики, т.е. возникает задача об учете этих «неклассических» свойств частиц. Ими является наличие спина и его величина. Как известно из квантовой механики, частицы с полуцелым спином (они получили название - фермионы) подчиняются принципу Паули о невозможности находиться в одном и том же квантовом состоянии, а ко всем другим частицам (бозоны – частицы с целочисленным спином), к которым относятся и фотоны, принцип Паули не применяется. Кроме этого, с позиций квантовой физики все частицы одного сорта являются абсолютно тождественными. Классические же частицы вовсе не имеют спина и их физически можно различить. Поэтому, при описании вероятности состояния термодинамических систем, необходимо учитывать указанные квантовые отличия частиц.

К началу изучения квантовых газов студенты уже знают основы метода Гиббса и умеют им пользоваться, например, для изучения классических идеальных и реальных газов. Поэтому воспользуемся большим каноническим распределением Гиббса, определяющим вероятность состояния квантовой системы с энергией $E_i = n\varepsilon_i$ и количеством частиц *n*, которая может обмениваться частицами и энергией с окружающей средой

$$\omega = e^{\frac{\mu n - E_i}{\theta}} g_i(E_i, n) \cdot \left(\sum_{i,n} e^{\frac{\mu n - E_i}{\theta}} g_i(E_i, n) \right)^{-1}, \qquad \text{(I)}$$

где μ - химический потенциал, θ - статистическая температура, g – кратность вырождения, и вычислим среднее количество частиц на некотором энергетическом уровне ε_i:

$$\langle n \rangle = \sum_{i,n} n \cdot e^{\frac{\mu n - E_i}{\theta}} \cdot g_i(\varepsilon_i, n) \cdot \left(\sum_{i,n} e^{\frac{\mu n_i - E_i}{\theta}} g_i(\varepsilon_i, n) \right)^{-1}. \qquad \text{(II)}$$

Подставляя в это выражение значение энергии системы $E_i = n\varepsilon_i$, мы автоматически учитываем суммирование по *i*.

Выражение (II) может быть записано в виде:

$$\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_n e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta} n} \cdot g(n). \qquad \text{(III)}$$

Для определения кратности вырождения необходимо фазовый объем, который соответствует выбранной подсистеме (он равен h^3, поскольку система содержит один квантовый уровень) разделить на фазовый объем, который приходится на один квантовый уровень (он также равен h^3), тогда в (III) $g(\varepsilon_i) = 1$. Следовательно, среднее число тождественных частиц, какими являются фотоны, на *i*-том энергетическом уровне будет равно:

$$\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_n^N e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}\right) n} \qquad \text{(IV)}$$

В этом выражении суммирование выполняется по количеству всех частиц системы, которые могут находиться на i -том уровне. В случае частиц, которые не подчиняются принципу Паули, верхний предел может быть заменен на (∞), поскольку при $n>N$ члены ряда в (IV) будут бесконечно малыми (при условии $\mu<0$). Тогда:

$$\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}\right) n}$$

Здесь ряд $\sum_{n=0}^{\infty} e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}\right) n}$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $q = e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta}}$, сумма которой, как известно из математики, определяется следующим выражением: $\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta}n} = \frac{1}{1-q}$.

Таким образом, среднее количество тождественных частиц, которые не подчиняются принципу Паули (световые кванты, атомы и молекулы, которые имеют в своем составе парное число элементарных частиц и др.), и находятся на энергетическом уровне ε_i, равно:

$$n = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\theta}} - 1} \tag{V}$$

Это выражение называется распределением Бозе-Эйнштейна.

В макроскопических системах уровни энергии расположены достаточно густо (квазинепрерывно), и мы можем определять не количество частиц, которые находятся на некотором конкретно выбранном энергетическом уровне, а количество частиц, которые имеют энергию от ε до $\varepsilon+d\varepsilon$. Очевидно, что для нахождения среднего числа таких частиц, необходимо среднее число частиц на одном уровне умножить на количество уровней $\frac{d\Gamma}{h^3}$, где $d\Gamma$ – фазовый объем, который соответствует состояниям с энергией от ε до $\varepsilon+d\varepsilon$. Тогда количество частиц, которые находятся на указанных уровнях энергии, определится выражением:

$$dn = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\theta}} - 1} \cdot \frac{d\Gamma}{h^3} \tag{VI}$$

Применим это выражение для получения эмпирических законов излучения абсолютно черного тела (распределение энергии в спектре абсолютно черного тела, закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина).

В отличие от молекулярных или атомарных систем бозе-газа, системы фотонного газа не могут иметь произвольного количества частиц. Если, например, фотонный газ существует в некоторой полости, то при уменьшении объема при постоянной температуре стенки полости будут больше фотонов поглощать, чем излучать, и при уменьшении объема до нуля все фотоны поглотятся. Поэтому в состоянии равновесия фотонного газа при заданном объеме и температуре в нем может быть лишь определенное количество частиц (фотонов), то есть для такой системы независимыми параметрами будут *V, T, N*. Как известно, при таких независимых параметрах свойствами характеристических функций обладает свободная энергия *F*, которая в состоянии равновесия имеет минимальное значение. Поэтому при условии $T = const$ и $V = const$, $\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} = 0$, но $\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} = \mu$. Следовательно, химический потенциал фотонного газа равняется нулю. Этот вывод вытекает также из непосредственного расчета термодинамического потенциала Гиббса, который мы обычно выполняем при анализе термодинамики теплового излучения.

Воспользуемся также тем, что фазовый объем частиц может быть записан в известном студентам виде – $d\Gamma = 4\pi p^2 dp \cdot dV$, а импульс фотона связан с его энергией $p = \frac{h\nu}{c}$, тогда $d\Gamma = 4\pi \frac{h^3}{c^3} \nu^2 d\nu \cdot dV$. Подставив данное выражение в (VI), перейдем от распределения по энергии к распределению по частоте, то есть получим количество фотонов с частотой от ν до $\nu+d\nu$. Учтем при этом, что фотоны, как электромагнитные волны, могут иметь две взаимно перпендикулярных поляризации или, что то же, что спин фотонов может иметь две ориентации. Тогда имеем:

$$dn = 8\pi\nu^2 c^{-3} \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1} d\nu \cdot dV \tag{VII}$$

Энергия электромагнитного излучения в упомянутом интервале частот при заданной температуре в объеме V будет равна:

$$dE(\nu,T) = h\nu \cdot dn = 8\pi h\nu^3 c^{-3}\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1} d\nu \cdot dV\ , \qquad \text{(VIII)}$$

а спектральная плотность энергии $\varepsilon_{(\nu,T)} = \dfrac{dE(\nu,T)}{Vd\nu}$, которая характеризует распределение энергии в спектре абсолютно черного тела, определится выражением:

$$\varepsilon_{(\nu,T)} = 8\pi h\nu^3 c^{-3}\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1}. \qquad \text{(IX)}$$

Это и есть известная формула Планка, которую он получил, допустив, что электромагнитная энергия излучается отдельными порциями – квантами. Формула (IX), в отличие от полученных в рамках классической физики формул Релея-Джинса и Вина, совпадает с экспериментальными данными во всем интервале частот. Нетрудно увидеть, что из формулы Планка при $h\nu>>kT$ получаем формулу Вина, а при $h\nu<<kT$ – формулу Релея-Джинса.

Найдем суммарную энергию излучения в данном объеме. Для этого необходимо выражение (VIII) проинтегрировать по всем частотам:

$$E = 8\pi hc^{-3}V\int_0^\infty \nu^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1} d\nu\,.$$

Вводя новую переменную $x = \dfrac{h\nu}{kT}$, и учитывая, что $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3 d\nu}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$, получим закон Стефана-Больцмана: $E = \dfrac{8\pi k^4}{15c^3h^3}\cdot V\cdot T^4$ или:

$$E = \sigma V T^4\,, \qquad \text{(X)}$$

где $\sigma = \dfrac{8\pi k^4}{15c^3h^3}$ – постоянная Стефана-Больцмана, которую, в отличие от термодинамического описания теплового излучения, легко рассчитать.

Отметим, что выражение (VII) позволяет определить количество фотонов, которые в состоянии равновесия могут в среднем находиться при заданной температуре T в объеме V:

$$N = 8\pi c^{-3}V\int_0^\infty \nu^2\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1} d\nu = const\cdot T^3\cdot V\,. \qquad \text{(XI)}$$

Из полученного выражения видно, что в данном объеме при заданной температуре может быть лишь однозначно определенное количество фотонов и концентрация фотонов (а значит и плотность энергии равновесного излучения) однозначно связана с температурой.

Далее в качестве упражнения, которое студенты решают на лекции, получаем закон смещения Вина $\nu_{max} = const\cdot T$.

В заключение рассмотрения теплового излучения указываем, как рассчитываются термодинамические потенциалы фотонного газа статистическим методом. Зависимость внутренней энергии от температуры статистическим методом мы уже получили – это выражение (X), потому можно воспользоваться уравнением Гиббса-Гельмгольца, которое (при постоянном объеме полости, в которой существует тепловое излучение) приведем к следующему виду: $F = -T\displaystyle\int\frac{EdT}{T^2}$. Подставляя в это выражение внутреннюю энергию теплового излучения (X), получим уже известное из термодинамического рассмотрения теплового излучения выражение для свободной энергии, дифференцируя которое, получаем энтропию фотонного газа и давление, а также уравнение состояния: $pV = \frac{E}{3}$. По вычисленным величинам определяем термодинамический потенциал Гиббса и энтальпию. Полученные законы излучения абсолютно черного тела и выражения для термодинамических потенциалов совпадают с выводами термодинамического метода. Но, в отличие от термодинамического метода, при статистическом описании фотонного газа не возникает необходимости в заимствовании уравнений состояния из других разделов физики.

Таким образом, статистический подход, с последовательным и строгим учетом свойств бозонного газа (дискретность энергии, тождественность, спин и отсутствие массы покоя), позволил не только объяснить закономерности излучения абсолютно черного тела, и тем самым – устранить причины, которые породили в физике состояние, известное под названием "ультрафиолетовая катастрофа", но и получить, как следствие, формулы Вина и Релея-Джинса. Это является проявлением принципа соответствия, согласно которому любая общая теория должна заключать в себе, как следствие или частный случай, менее общую теорию.

Следует также отметить, что рассмотренная методика изложения вопроса о тепловом излучении охватывает все ключевые аспекты этого вопроса, не содержит избыточную информацию и математические сложности, и потому, как показывает собственный опыт преподавания теоретической физики, достаточно легко воспринимается студентами.

Литература

1. Ансельм А.И. Основы статистической физики и термодинамики. / Ансельм А.И. – М.: Наука, 1973. – 424с.
2. Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. / М.А. Леонтович – М.: Наука, 1983. – 416с.
3. Василевский А.С. Статистическая физика и термодинамика. / А.С. Василевский, В.В. Мултановский – М.: Просвещение, 1985. – 255с.
4. Мороз І.О. Висвітлення протиріч класичної статистики в курсі термодинаміки та статистичної фізики / Мороз І.О. // Вісник черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – Черкаси, 2012. – № 12 (225). – с. 80 – 84.
5. Ландау Л.Д. Статистическая физика. / Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. – М.: Наука, 1964. – 568с.
6. Мороз И.А. Основы термодинамики и статистической физики. Учебное пособие/ И.А. Мороз. – Сумы: Издательство «МакДен», 2012. – 565с.

Справка об авторе:
Мороз Иван Алексеевич,
научная степень – канд. техн. наук,
научное звание – доцент,
должность – профессор кафедры экспериментальной и теоретической физики