При $a \in (2 - 2\sqrt{5}; -2)$ система (4) буде стійка (причому асимптотично) у додатному напрямку і нестійка – у від'ємному.

Список використаних джерел

1. Murray R. M. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation / R. M. Murray,. Z. Li, S. S. Sastry – California: CRC Press,1994. – 456 p.

2. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння: Підручник (2-ге вид., переробл. і доп.). / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

Анотація. Блещенко Н. Дослідження стійкості за Ляпуновим систем диференціальних рівнянь. *У статті наведено основні означення й факти з теорії стійкості руху за О. М. Ляпуновим. Розглянуто критерії стійкості лінійних однорідних систем звичайних диференціальних рівнянь, зокрема зі сталими коефіцієнтами. Наведено чисельні приклади застосування якісної теорії диференціальних рівнянь до дослідження систем на стійкість.*

Ключові слова: *теорія стійкості руху за О. М. Ляпуновим, стійкий розв'язок системи, асимптотична стійкість, фазовий портрет.*

Abstract. Bleshchenko N. Investigation of Lyapunov stability of systems of differential equations. *The article gives the basic definitions and facts on the theory of A. M. Lyapunov stability. The criteria of stability of linear homogeneous systems of ordinary differential equations, in particular, with constant coefficients, are considered. Numerous examples of the application of qualitative theory of differential equations to the study of stability systems are given.*

Key words*: the theory of A. M. Lyapunov stability, stable solution of the system, asymptotic stability, phase portrait.*

Змієнко Михайло

Студента 4 курсу, напряму підготовки «Математика»*

exypret@gmail.com

Науковий керівник - В.Д. Погребний

СИСТЕМИ ПОДВІЙНИХ ТА ДУАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Побудуємо числову систему із виразу виду $(a + bi)$ визначив додавання наступним виразом:$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. Спробуємо визначити множення. Вимоги: 1) Множення дійсного числа $a = a + 0i$ на число $z = b + ci$ має давати результат узгоджений з випадком комплексних чисел - $(a + 0i)(b + ci) = ab + aci$ та $(b + ci)(a + 0i) = ab + aci$, і цим самим виконується і умова для множення дійсних чисел - $(a + 0i)(b + 0i) = ab + 0i$. Зауважмо, що оскільки і для додавання виконується $(a + 0i) + (b + 0i) = ab + 0i$, то дійсні числа є підсистемою нової системи; 2) Виконується рівність - $(az_1)(bz_2) = (ab)(z_1 z_2)$; 3) Лівий та правий дистрибутивний закон множення відносно додавання - $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ та $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$. З цих вимог слідує, що - $(a+bi)(c+di)=a(c+di)+(bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$. Залишилося вказати чому саме дорівнює i^2. Прийнявши $i^2=-1$ отримуємо множення комплексних чисел. Але це не єдиний можливий варіант. Досить щоб $i*i$ належало розглянутій системі, тобто мало вигляд - $p+qi$. Отримуємо - $(a+bi)(c+di)=(ac+bdp)+(ad+bc+bdq)i$, де $i=p+qi, p\ q$- два фіксовані числа.

Легко перевірити що для нової системи виконується комутативний та асоціативний закон відносно множення - $z_1z_2=z_2z_1-(a+bi)(c+di)=(ac+bdp)+(ad+bc+bdq)i$; $(c+di)(a+bi)=ca+dbp+(cb+da+dbq)i$ та $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)-\ [(a+bi)(c+di)](e+fi)=[(ac+bdp)+(ad+bc+bdq)i](e+fi)=\big((ac+bdp)e+(ad+bc+bdq)fp\big)+\big((ac+bdp)f+(ad+bc+bdq)e+(ad+bc+bdq)fq\big)i$; $(a+bi)[(c+di)(e+fi)]=(a+bi)[(ce+dfp)+(cf+de+dfq)i]=(a(ce+dfp)+b(cf+de+dfq)p)+(a(cf+de+dfq)+b(ce+dfp)+b(cf+de+dfq)q)i$.

Отже над полем дійсних чисел будь-яка система чисел виду $a+bi$ з правилами дій: 1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$; 2) $(a+bi)(c+di)=(ac+bdp)+(ad+bc+bdq)i$, де $i=p+qi$, відповідає одній з 3х: 1) *комплексних чисел* $a+bi, i^2=-1$; 2) *подвійних чисел* $a+b\varepsilon, \varepsilon^2=1$; 3) *дуальних чисел* $a+be, e^2=0$. Покажемо що це єдині можливі результати. Із рівності $i^2=p+qi$ маємо $i^2-qi=p$. Виконавши перетворення - $(i-\frac{q}{2})^2=p+\frac{q^2}{4}$. Можливі три і тільки три випадки: 1) $p+\frac{q^2}{4}$ – від'ємне число, тобто $p+\frac{q^2}{4}=-k^2$, k – відмінне від нуля дійсне число. Тоді $(i-\frac{q}{2})^2=-k^2$. Поділивши на k^2отримуємо - $(-\frac{q}{2k}+\frac{1}{k}i)^2=-1$. Перепозначив число в дужках на *i* маємо - $i^2=-1$. Фактично маємо систему *комплексних* чисел; 2) $p+\frac{q^2}{4}$ – додатне число, тобто $p+\frac{q^2}{4}=k^2$. Тоді отримаємо $(-\frac{q}{2k}+\frac{1}{k}i)^2=1$. Перепозначив число в дужках на ε отримаємо $\varepsilon^2=1$ маємо систему *подвійних* чисел; 3) $p+\frac{q^2}{4}=0$. В цьому випадку перепозначив дужки на *е* матимемо $e^2=0$ – система *дуальних* чисел. [3]

По аналогії з комплексними числами вводяться формули додавання, множення; означення модуля.

Дуальні числа – це пари дійсних чисел (*a*, *b*) для яких правила дій визначенні формулами: (1) $\begin{cases}(a+b\varepsilon)+(c+d\varepsilon)=(a+c)+(b+d)\varepsilon,\\ (a+b\varepsilon)-(c+d\varepsilon)=(a-c)+(b-d)\varepsilon\\ \quad (a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon)=ac+(ad+bc)\varepsilon.\end{cases}$

Число $\bar{z}=a-b\varepsilon$ – називають спряженим до числа $z=a+b\varepsilon$(и навпаки). $\bar{z}z=(a-b\varepsilon)(a+b\varepsilon)=a^2(2)$, a^2 називають модулем дуального числа, і позначають $|z|$. Сума двох спряжених $\bar{z}+z=(a-b\varepsilon)+(a+b\varepsilon)=2a$ – дійсне число, $\bar{z}-z=(a-b\varepsilon)-(a+b\varepsilon)=2b\varepsilon$ – чисто уявне число. Формули $\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}, \overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}, \overline{z_1}\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}, \overline{z_1}:\overline{z_2}=\overline{z_1:z_2}(3)$ – виконуються для дуальних чисел.

Правило ділення на дуальне число записується у наступному вигляді: $\frac{c+d\varepsilon}{a+b\varepsilon}=\frac{(c+d\varepsilon)(a-b\varepsilon)}{(a+b\varepsilon)(a-b\varepsilon)}=\frac{ca+(-cb+da)\varepsilon}{a^2}=\frac{c}{a}+\frac{-cb+da}{a^2}\varepsilon(4)$. Отже для того щоб була можливість ділення на дуальне число необхідно, щоб $|z| = a$ цього числа був відмінним від нуля; при цьому, на відміну від комплексних чисел, дуальне число нульового модуля може бути відмінним від нуля. Для випадків ділення на нуль, вважатимемо що $\frac{1}{\varepsilon}$ та $\frac{1}{0}$ – числа, які позначимо через ω та ∞. Введемо числа виду $c\omega$, де $c \neq 0$ – дійсне. Тоді будь-яке дуальне число матиме собі обернене - $\frac{1}{b\varepsilon} = \frac{1}{b}\omega$ при $b \neq 0; \frac{1}{0} = \infty$. Правила дій для символу ∞ - визначенні наступними формулами: $z + \infty = \infty, z - \infty = \infty, z\infty = \infty, \frac{\infty}{z} = \infty, \frac{z}{\infty} = 0. (5)$ Правила дій над числами $a\omega$ визначенні наступними формулами: (6)

$$\begin{cases} (a + b\varepsilon) + c\omega = c\omega, \\ (a + b\varepsilon) - c\omega = (-c)\omega, \\ (a + b\varepsilon)c\omega = ac\omega, \\ \frac{c\omega}{a+b\varepsilon} = \frac{c}{a}\omega, \\ \frac{a+b\varepsilon}{c\omega} = \frac{a}{c}\varepsilon, \\ c\omega \pm d\omega = (c \pm d)\omega, \\ c\omega d\omega = \infty. \end{cases}$$

Покладемо, $\overline{c\omega} = -c\omega, \overline{\infty} = \infty(6a)$. Тоді для розширеної системи дуальних чисел із $c\omega$ та ∞ виконуються рівності (3).

Число $c\varepsilon$ нульового модуля характеризується тип, що існує відмінне від нуля дуальне число z, рівне $d\varepsilon$, добуток якого на число $c\varepsilon$ рівний: $c\varepsilon d\varepsilon = (cd)\varepsilon^2 = 0(7)$- числа такого виду називаються *дільники нуля*.

Дуальні числа ненульового модуля a можна записати в формі, близькій до тригонометричної форми комплексного числа: $a + b\varepsilon = \left(a + \frac{b}{a}\varepsilon\right) = r(1 + \varepsilon\varphi), (8)$ $r = a$ – модуль числа $z = a + b\varepsilon$, а відношення $\frac{b}{a} = \varphi$ – аргумент числа і позначається по аналогій із комплексними числами *Arg z* (r – довільне дійсне число, відмінне від нуля; φ – довільне дійсне число). Спряжені дуальні числа мають однаковий модуль и протилежні аргументи.

Форма (8) запису дуальних чисел зручна для виконання дій множення або ділення: $r_1(1 + \varepsilon\varphi_1)r_2(1 + \varepsilon\varphi_2) = r_1r_2(1 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \varepsilon^2\varphi_1\varphi_2) = r_1r_2 = (1 + \varepsilon(\varphi_1 + \varphi_2). (9)$ – отже модуль добутку двох дуальних чисел рівний добутку модулів множників, а аргумент – сумі аргументів. Звідси маємо, що модуль частки двох дуальних чисел рівний частці модулів, а аргумент частки – різниці аргументів: $\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2(1+\varepsilon\varphi_2)}{r_1(1+\varepsilon\varphi_1)} = \frac{r_2}{r_1}(1 + \varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1). (10)$

Також можна отримати закони, які дозволяють підносити дуальні числа в степінь та добувати корінь: (11) $\begin{cases} (r(1 + \varepsilon\varphi)^n = r^n(1 + \varepsilon n\varphi), \\ \sqrt[n]{r(1 + \varepsilon\varphi)} = \sqrt[n]{r}(1 + \varepsilon\frac{\varphi}{n}) \end{cases}$

Із (11) маємо що корінь непарної степені, при $r \neq 0$ визначається однозначно; непарної існує якщо $r < 0$ і має 2 значення і якщо $r > 0$.

В повній аналогії з вказаним вище можемо описати систему подвійних чисел. *Подвійні числа* - це пари дійсних чисел (a, b) для яких правила дій визначенні формулами:

$$(12)\begin{cases}(a+be)\pm(c+de)=(a\pm c)+(b\pm d)e,\\(a+be)(c+de)=(ac+bd)+(ad+bc)e,\\\frac{c+de}{a+be}=\frac{(c+de)(a-be)}{(a+be)(a-be)}=\frac{(ca-db)+(-cb+da)e}{a^2-b^2}=\frac{ca-db}{a^2-b^2}+\frac{-cb+da}{a^2-b^2}e.\end{cases}$$

Аналогічно спряженим число до z є число $\bar{z}$, виду $z=a+be, \bar{z}=a-be$. Сума та добуток подвійних чисел: $z+\bar{z}=2a\ z\bar{z}=a^2-b^2$ – числа дійсні. Модуль $|z|=\sqrt{|a^2-b^2|}$ – знак якого співпадає із знаком із знаком більшого по абсолютній величенні дійсного числа a та b. Для подвійних чисел залишаються дійсними формули (3).

Ділення на число $z=a+be$ можливо лише в тих випадках, коли $|z|=\sqrt{|a^2-b^2|}\neq 0$. Подвійні числа $a\pm ae$, модуль яких рівний нулю, називаються дільниками нуля:$(a+ae)(b-be)=ab(1+e)(a-e)=0$. Знову введемо числа $\frac{1}{1+e}=\omega_1, \frac{1}{1-e}=\omega_2, \frac{1}{0}=\infty$. Введемо додатково добутки $c\omega_1$та $c\omega_2$, де c – будь-яке дійсне число; $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{1-e}{1+e}=\sigma_1$і $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{1+e}{1-e}=\sigma_2$. Правила дій над символами $c\omega_1, c\omega_2, \infty, \sigma_1, \sigma_2$- визначаються формулами (5) та відношеннями виду :

$$(13)\begin{cases}(a+be)\pm c\omega_1=(\pm c)\omega_1,\\(a+be)c\sigma_2=(a+b)c\sigma_2,\\\frac{a+be}{c\omega_2}=\frac{a-b}{c}(1-e),\\\frac{c+be}{c\sigma_1}=\frac{a-b}{c}\sigma_2,\\a\omega_1 b\omega_2=\infty,\\a\omega_1 b\sigma_2=ab\omega_2,\\a\omega_1 b\omega_1=\frac{ab}{2}\omega_1.\end{cases}$$

Покладемо, $\overline{c\omega_1}=c\omega_2, \overline{c\omega_2}=c\omega_1, \overline{\sigma_1}=\sigma_2, \overline{\infty}=\infty$(13а). З чого випливає що для розширеної системи подвійних чисел виконуються рівності (3).

Подвійні числа ненульового модуля можна також записати у вигляді (8) запису дуальних чисел. Нехай $r=\pm\sqrt{|a^2-b^2|}$ – модуль подвійного числа $|z|$. Отримаємо: $z=a+be-r\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{r}e\right)$. Із означення модуля маємо, що $(\frac{a}{r})^2-\left(\frac{b}{r}\right)^2=\pm 1$. Із властивостей гіперболічних функцій можемо отримати $\frac{a}{r}=ch\varphi, \frac{b}{r}=sh\varphi$ або $\frac{a}{r}=sh\varphi, \frac{b}{r}=ch\varphi$, (14) де φ – деяке число задане формулами (14).

Таким чином отримали $z=r(ch\varphi+esh\varphi); z=r(sh\varphi+ech\varphi)$. (15), φ – аргумент подвійного числа, і позначається $Arg\ z$.

Форма (15) запису подвійних чисел зручна в тих випадках, коли потрібно виконувати дій над кількома подвійними числами:

$$(16)\begin{cases}r_1(ch\varphi_1+esh\varphi_1)r_2(ch\varphi_2+esh\varphi_2)=r_1r_2(ch(\varphi_1+\varphi_2)+esh(\varphi_1+\varphi_2),\\r_1(sh\varphi_1+ech\varphi_1)r_2(sh\varphi_2+ech\varphi_2)=r_1r_2(ch(\varphi_1+\varphi_2)+esh(\varphi_1+\varphi_2),\\r_1(ch\varphi_1+esh\varphi_1)r_2(sh\varphi_2+ech\varphi_2)=r_1r_2(sh(\varphi_1+\varphi_2)+ech(\varphi_1+\varphi_2).\end{cases}$$

Модуль добутку двох подвійних чисел дорівнює добутку модулів множників, а аргумент добутку – сумі аргументів. Із формул (16) можемо отримати правила ділення подвійних чисел: (17) $\begin{cases} \frac{r_2(ch\varphi_2+esh\varphi_2)}{r_1(ch\varphi_1+esh\varphi_1)} = \frac{r_2(sh\varphi_2+ech\varphi_2)}{r_1(sh\varphi_1+ech\varphi_1)} = \frac{r_1}{r_2}\left(ch(\varphi_2-\varphi_1)+esh(\varphi_2-\varphi_1)\right), \\ \frac{r_1(sh\varphi_2+ech\varphi_2)}{r_1(ch\varphi_1+esh\varphi_1)} = \frac{r_1(ch\varphi_2+esh\varphi_2)}{r_1(sh\varphi_1+ech\varphi_1)} = \frac{r_1}{r_2}\left(sh(\varphi_2-\varphi_1)+ech(\varphi_2-\varphi_1)\right) \end{cases}$

Із формул (16) можна отримати правила піднесення подвійного числа до натурального показника та добування кореня: $(r(ch\varphi + esh\varphi))^n = r^n(ch(n\varphi) + esh(n\varphi)$; [1,2]

$$(r(sh\varphi + ech\varphi))^n = \begin{cases} r^n(sh(n\varphi) + ech(n\varphi) - n \text{ непарне} \\ r^n(ch(n\varphi) + esh(n\varphi) - n \text{ парне} \end{cases};$$

$$\sqrt[n]{r(ch\varphi + esh\varphi)} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(ch\frac{\varphi}{n} + esh\frac{\varphi}{n}\right), n - \text{непарне;} \\ \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(ch\frac{\varphi}{n} + ech\frac{\varphi}{n}\right), \\ \sqrt[n]{r}\left(sh\frac{\varphi}{n} + ech\frac{\varphi}{n}\right), \end{cases} n - \text{парне;} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{r(sh\varphi + ech\varphi)} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(sh\frac{\varphi}{n} + ech\frac{\varphi}{n}\right), n - \text{непарне} \\ \text{не існує при } n \text{ парному} \end{cases}$$

Список використаних джерел

1. Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. – М.: Физматгиз, 1963
2. Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения. – М.: Наука, 1979
3. Канто И.Л. Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа – М.: Наука, 1973

Анотація. Змієнко М. Системи подвійних та дуальних чисел. *У статті розглянуті алгебри з рангом ділення 2 над полем дійсних чисел. Введені означення подвійних та дуальних чисел. Визначені операції додавання, множення, віднімання та ділення зазначених чисел. Введені означення модуля та спряженого числа, правила ділення на дуальні та подвійні числа. Представлена форма запису близька до тригонометричної. Правила піднесення до степені та добування кореня n-натурального.*

Ключові слова: *математика, алгебра, алгебраїчне розширення, дуальні числа, подвійні числа, комплексні числа, алгебри з рангом ділення 2, гіперкомплексні числа*

Abstract. Zmienko M. Systems of dual and double numbers. *In the article reviewed algebras with rank of division 2 over the field of real numbers. Double and dual numbers were introduced. Specified operations of the addition, multiplication, subtraction and division. Introduced module and conjugate notation rules, division rules for dual and double numbers. The presented form of the recording is close to trigonometric. Rules of powered and extraction of the root for n-natural.*

Keywords: *mathematics, algebra, algebraic extension, dual numbers, double numbers, complex numbers, algebras with rank of division 2, hypercomplex numbers.*