

(Ostapchuk, M. V. (2005). Consideration of problematic teaching of physics through the prism of the didactic system. Collection of scientific works of Kamianets-Podilskyi State University: Pedagogical series: Didactics of physics in the context of the guidelines of the Bologna process. Kamianets-Podilskyi. CPSU, information and publishing department, 11, 57–60).

9. Щербина, Т. (2003). Чому? Цікаві питання з фізики. 7–9 клас. Київ : Редакція загальнопедагогічних газет. (Shcherbina, T. (2003). Why? Interesting questions in physics. Grade 7–9. Kyiv: Editorial office of general pedagogical newspapers).

**Ostapchuk M. V. Didactic system of problem-based learning in a school physics course.**

*Summary.* The concept of «system» implies the presence of a set of elements with relations and connections between them, forming a certain integrity. The article considers problem-based learning from the point of view of holistic education as a didactic system, as a type of learning that promotes the development of students' creative abilities, rather than a method of educational activity. Systemic education leads to a property that individual elements do not possess. The article presents the statements of scientists regarding the components of the didactic system, which are not unambiguous. For example, M. Makhmutov considers problem-based learning to be a didactic system, as it offers a new structure of interaction between teacher and students. He connects the emergence of the didactic system of problem-based learning with the research of L. Zankov (organisation of the content and structure of the learning process), M. Danilov (construction of the learning process), M. Skatkin, I. Lerner (content and methods of teaching), N. Menchinskaya (construction of a system of cognitive activity techniques), V. Davidov (organisation of content). However, we are of the opinion that the didactic system of problem-based learning in a school physics course is based on a certain understanding of the logical and psychological laws of the development of thinking and creative abilities of a person. It is based on learning by solving problems and has a developmental function in relation to human creativity. This type of teaching is a system of forming students' creative abilities, not just a sum or implicit set of individual techniques for activating students' cognitive activity and thinking. The author's model of the didactic system is presented, in particular, the didactic system is a set of interrelated elements, such as learning objectives, learning content, methods, means and organisational forms of learning, and a system for assessing students' learning achievements. The author describes the components-elements of the system. The system-forming factor of the didactic system is two elements: learning objectives and learning content. The developmental effect of problem-based learning, its advantages and disadvantages in the study of physics are shown. Not all topics of the school physics course should be studied using the problem-based method.

**Key words:** didactic system, problem-based learning, system elements, characteristics of system elements, system approach, physics course, development of thinking, problem method.

УДК 378.147+372.851

DOI 10.5281/zenodo.8025578

І. А. Сверчевська

ORCID ID 0000-0001-7306-3836

Державний університет «Житомирська політехніка»

**УЗАГАЛЬНЕННЯ ІСТОРИЧНОЇ ТОТОЖНОСТІ ДЮФАНТА ЯК ЗАСІБ  
РОЗВИТКУ ТВОРЧОГО МИСЛЕННЯ У ПРОЦЕСІ ФОРМУВАННЯ  
МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ**

У статті досліджується питання розвитку логічного і творчого мислення для забезпечення формування математичної компетентності здобувачів освіти. Стверджується, що всебічному розвитку особистості, її інтелектуального потенціалу і розвитку мислення

*сприяє робота над власними дослідженнями і пошуками шляхів узагальнення відомих математичних тверджень.*

*Зосереджується увага на узагальненні відомої історичної тотожності давньогрецького математика Діофанта про два квадрати. Пропонується творчо діяти, керуватися загальними закономірностями тотожностей і проводити узагальнення. Висувати ідеї можливості виконання тотожності для більших степенів чисел, перевіряти їх правильність та спростовувати хибні гіпотези. Знаходити нові можливості узагальнення тотожності Діофанта, збільшивши кількість доданків-квадратів. Перевіряти нові гіпотези, підтверджувати їх власними доведеннями, а також виявляти відомі історичні задачі, що доводять або спростовують узагальнені тотожності для суми трьох, чотирьох і більше квадратів. Пропонується використати для підтвердження можливості узагальнення історичні задачі на доведення тотожностей Коші, Лагранжа, Ейлера.*

*Робиться висновок, що робота по дослідженню й узагальненню тотожностей, вивчення підходів до доведень, запропонованих авторами історичних задач про тотожності сприятиме виробленню навичок дослідження й узагальнення математичних тверджень, і як наслідок розвитку творчого і логічного мислення.*

*Таким чином буде покращуватися формування компетентностей здобувача освіти, як математичної в частині її логічної складової, так й інноваційної, для якої є важливими вміння генерувати нові ідеї, аналізувати, доводити їх або спростовувати. Стверджується, що навчання математики має широкі можливості для впровадження компетентнісного підходу в освіті та всебічного розвитку особистості.*

**Ключові слова:** *компетентнісний підхід, формування компетентностей, математична компетентність, розвиток творчого мислення, навчання математики, визначні історичні задачі, тотожність Діофанта, узагальнення.*

**Постановка проблеми.** Першочерговим завданням сучасного освітнього процесу є реалізація компетентнісного підходу в навчанні. Це передбачає формування ключових компетентностей: математичної, компетентності в галузі природничих наук, техніки і технологій, компетентності інноваційність. Основою навчальної діяльності є розвиток компетентної особистості, що вміє творчо мислити, застосовувати свої знання у нових ситуаціях. Важливим завданням навчання математики є інтелектуальний розвиток здобувача освіти, розвиток логічного мислення, пізнавальної самостійності, обґрунтованості суджень.

У формуванні математичної компетентності важливою є логічна складова, тобто розвиток логічного мислення. Компетентність інноваційність передбачає набуття умінь генерувати нові ідеї, аналізувати та планувати їх втілення. Розвиток творчого мислення відбувається при дослідженні нового, виявленні нових зв'язків та властивостей у відомих фактах.

Нами досліджено формування математичної компетентності в процесі вивчення історичних задач [3, с. 19], [5, с. 93], [7, с. 80]; приділено увагу дослідженню математичних моделей в історичних задачах [4, с. 99]; та розвитку інтелектуальних умінь студентів у процесі розв'язування задач [6, с. 107]. Зосередимо увагу на ролі застосування узагальнень у задачах для розвитку творчого мислення при навчанні математики.

**Аналіз актуальних досліджень.** Проблеми впровадження компетентнісного підходу в освітній діяльності досліджують Акуленко І. А., Бурда М. І., Литвинова С. Г., Овчарук О. В., Пометун О. І. Тарасенкова Н. А.

Питання формування математичної компетентності висвітлюють у своїх працях Возносименко Д. А., Кірман В. Г., Матяш О. І., Михайленко Л. Ф., Раков С. А. [2], Скворцова С. О., Хом'юк В. В. [8].

Аспекти розвитку творчого мислення під час навчання розглядали у своїх роботах Алексюк А. М., Бондар В. І., Калашніков І. В., Слєпкань З. І., Чашечнікова О. С. [9].

Використанню історичних задач у навчанні математики присвячені дослідження Бєвз В. Г., Годованюк Т. Л., Шумигой С. М.

**Мета статті:** розкриття можливостей розвитку логічного та творчого мислення, формування математичної компетентності у процесі узагальнення історичної тотожності Діофанта.

**Виклад основного матеріалу.** Дослідження відомої історичної тотожності давньогрецького математика Діофанта про квадрати, генерування ідей по її узагальненню на нові випадки взаємозв'язку чисел і степенів дає поштовх для розвитку творчого мислення і формування важливої логічної складової математичної компетентності.

### Задача з "Арифметики" Діофанта

Історична довідка. Діофант (ймовірно III ст.) – грецький математик з Олександрії. В "Арифметиці" Діофанта дано початки алгебри, розв'язано задачі, що зводяться до невизначених рівнянь [1, с. 172]

*Довести, що добуток двох чисел, кожне з яких є сумою двох квадратів, сам подається як сума двох квадратів.*

Розв'язання. Знайдемо добуток двох даних чисел.  $(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) = (a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 + 2aba_1 b_1) + (a^2 b_1^2 + b^2 a_1^2 - 2aba_1 b_1) = (aa_1 + bb_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2$ .

Якщо доданки згрупувати інакше, то  $(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) = (a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 - 2aba_1 b_1) + (a^2 b_1^2 + b^2 a_1^2 + 2aba_1 b_1) = (aa_1 - bb_1)^2 + (ab_1 + ba_1)^2$ .

Маємо тотожність Діофанта  $(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) = (aa_1 \pm bb_1)^2 + (ab_1 \mp ba_1)^2$ .

Можна запропонувати інший спосіб, розклавши суму квадратів на множники, ввівши уявну одиницю  $i$  ( $i^2 = -1$ ).

$(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) = (a^2 - b^2 i^2)(a_1^2 - b_1^2 i^2) = (a + bi)(a - bi)(a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i) = ((a + bi)(a_1 - b_1 i))((a - bi)(a_1 + b_1 i)) = ((aa_1 + bb_1) - (ab_1 - ba_1)i)((aa_1 + bb_1) + (ab_1 - ba_1)i) = (aa_1 + bb_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2$ .

В загальному вигляді цю тотожність довів Леонардо Пізанський у трактаті "Книга квадратів" (1225 р.) ймовірно за допомогою безпосередніх перетворень.

Вивченням даного питання також займався Огюстен Луї Коші – французький математик. Він розглянув та довів тотожність про суму квадратів на множині комплексних чисел.

### Задача Коші

Історична довідка. Огюстен Луї Коші (1789 – 1857) – французький математик, праці якого стосуються різних галузей математики. Він запропонував розглядати геометричне зображення комплексної змінної як точки, що переміщується у площині. Коші ввів терміни "модуль комплексного числа" та "спряжені комплексні числа". [1, с. 246]

*Якщо помножити між собою два цілих числа, кожне з яких є сумою двох квадратів, то одержаний добуток буде також складатися з суми двох квадратів*

Розв'язання автора. Розглянемо чотири попарно спряжені комплекси  $a + bi$ ,  $a - bi$ ,  $a_1 + b_1 i$ ,  $a_1 - b_1 i$ . Знайдемо добуток всіх, перемножуючи пари спряжених комплексів  $(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2)$ . Якщо помножити перший на третій і другий на четвертий, то загальний добуток дорівнює  $(aa_1 - bb_1 + (ab_1 + ba_1)i) \cdot (aa_1 - bb_1 - (ab_1 + ba_1)i) = (aa_1 - bb_1)^2 + (ab_1 + ba_1)^2$ . Отже, доведено  $(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) = (aa_1 + bb_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2$ .

Задасмося питанням, як можна узагальнити тотожність Діофанта. Почнемо з випадку збільшення степенів. Чи може добуток двох чисел, що є сумами двох кубів, дорівнювати сумі двох кубів  $(a^3 + b^3)(a_1^3 + b_1^3) = A^3 + B^3$ ? Або добуток двох сум четвертих степенів дорівнювати сумі четвертих степенів  $(a^4 + b^4)(a_1^4 + b_1^4) = A^4 + B^4$ ? Дослідження доводять, що узагальнена тотожність для суми кубів, а також суми четвертих степенів не виконується.

Дослідимо, чи можна узагальнити тотожність Діофанта шляхом збільшення кількості доданків-квадратів. Відомо, що добуток двох чисел, кожне з яких є сумою трьох

квадратів неможливо подати як суму трьох інших квадратів. Для цього достатньо довести тотожність Лагранжа.

### Задача Лагранжа

Історична довідка. Жозеф Луї Лагранж (1707 – 1783) – французький математик і механік. Його називали "хеопсовою пірамідою математичних наук". В алгебрі Лагранж побудував теорію рівнянь, зокрема винайшов метод виключення змінних із системи рівнянь (складання результанта), за допомогою неперервних дробів розв'язував невизначені рівняння [1, с. 269]

$$\text{Перевірити тотожність} \quad (a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 = \\ = (ab_1 - a_1b)^2 + (ac_1 - a_1c)^2 + (bc_1 - b_1c)^2.$$

Доведення можна виконати безпосередніми перетвореннями виразів або із застосуванням властивостей детермінантів. Маємо  $(a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = (aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 + (ab_1 - a_1b)^2 + (ac_1 - a_1c)^2 + (bc_1 - b_1c)^2$ . Отже, якщо два множники є сумами трьох квадратів, то їх добуток не є сумою трьох квадратів.

Перевіримо, чи можна узагальнити тотожність для добутку суми чотирьох квадратів.

### Задача з "Універсальної арифметики" Ейлера

Історична довідка. Леонард Ейлер (1707 – 1783) – відомий математик, фізик, механік, астроном [1, с. 181]. "Універсальна арифметика" Ейлера зіграла значну роль у розвитку математичної освіти. Вона була написана в 1767 році, видана в 1768 р. і перевидавалася німецькою, французькою, англійською та іншими мовами. За зразком "Універсальної арифметики" Ейлера склалися підручники з елементарної алгебри. В цій книзі є ряд визначних тотожностей.

*Добуток двох чисел, кожне з яких є сумою чотирьох квадратів, також дорівнює сумі чотирьох квадратів.*

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) = (aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1)^2 + \\ + (ab_1 - ba_1 + c_1d - cd_1)^2 \\ + (ac_1 - ca_1 + bd_1 - b_1d)^2 + (ad_1 - a_1d + b_1c - bc_1)^2$$

Тотожність можна довести способами застосування комплексних чисел, детермінантів, кватерніонів.

Формули для добутку сум двох і чотирьох квадратів мають застосування в арифметиці комплексних чисел і кватерніонів. С. Робертсон (1859 – 1899) з'ясував, що для множників з 16 квадратів таке подання неможливе. Адольф Гурвіц (1859 – 1919) довів, що вказаний спосіб подання добутку у вигляді суми квадратів має місце тільки для двох множників з двох, чотирьох і восьми квадратів.

Галузь арифметики, що займається питаннями подання цілих чисел у вигляді суми цілих чисел певного вигляду, називається адитивна арифметика. Окремі питання адитивної арифметики розв'язувалися Діофантом (III ст.), Леонардо Пізанським (бл. 1170 – після 1228), Франсуа Віетом (1540 – 1603), Огюстеном Луї Коші (1789 – 1857). Ці окремі дослідження були перетворені Леонардом Ейлером (1707 – 1783) у науку.

**Висновки та перспективи подальших наукових розвідок.** Розвиток творчого мислення пов'язаний з пошуком та висуненням нових ідей, умінням застосовувати вже знайомі факти та на основі дедуктивних міркувань здійснювати узагальнення певних закономірностей, змінюючи окремі елементи. Здійснення цих кроків під час узагальнення тотожності Діофанта про два квадрати на випадок більшої кількості доданків сприятиме розвитку логічного і творчого мислення здобувачів освіти та формуванню математичної компетентності. У подальших дослідженнях слід розглянути вплив дослідницьких математичних завдань на розвиток творчого мислення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Бородин, О. І., Бугай, А. С. (1973). Біографічний словник діячів у галузі математики. Київ : Вища школа. (Borodin, O. I., Buhai, A. S. (1973). Biographical dictionary of prominent figures in the field of mathematics. Kyiv : Vushcha shkola).
2. Раков, С. А. (2005). Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ. Харків: Факт. (Rakov, S. A. (2005). Mathematical education: a competency-based approach using ICT. Kharkiv: Fact).
3. Сверчевська, І. А. (2020). Історичний підхід у формуванні ключових компетентностей при навчанні математики. Інноваційна педагогіка. Одеса, 21(3), 19–23. (Sverchevska, I. A. (2020). Historical approach to the formation of key competences in teaching mathematics. Innovative Pedagogics. Odesa, 21(3), 19–23).
4. Сверчевська, І. А. (2020). Математичні моделі в історичних задачах. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ\*плюс – 2020», (сс. 99–100). Суми. (Sverchevska, I. A. (2020). Mathematical models in historical tasks. The development of intellectual and creative students' skills while teaching Science and Mathematics «ITM\*plus – 2020», (pp. 99–100), Sumy).
5. Сверчевська, І. А. (2021). Математичні моделі у задачах природничого змісту як засіб формування компетентностей здобувачів освіти. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Суми, 1(17), 93–102. (Sverchevska, I. A. (2021). Mathematical models in problems with scientific meaning as a tool for students' competencies formation. Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Sumy, 1(17), 93–102).
6. Сверчевська, І. А. (2021). Розвиток інтелектуальних умінь студентів при вивченні вищої математики. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ\*плюс – 2021» (сс. 107–108). Суми. (Sverchevska, I. A. (2021). The development of intellectual students' skills while teaching higher mathematics. The development of intellectual and creative students' skills while teaching Science and Mathematics «ITM\*plus – 2021», (pp. 107–108), Sumy).
7. Сверчевська, І. А. (2022). Формування математичної компетентності студентів у процесі розв'язування історичних задач з математичного аналізу. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Суми, 1(19), 80–90. (Sverchevska, I. A. (2022). The formation of mathematical competence of mathematics teachers through solving historical mathematical analysis problems. Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Sumy, 1(19), 80–90).
8. Хом'юк, І. В., Кирилашук, С. А., Хом'юк, В. В. (2022). Використання задач на доведення як засобу формування логічної компетентності майбутніх інженерів. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Суми, 1(19), 90–98. (Khomyuk I. V., Kyrylashchuk, S. A., Khomyuk, V. V. (2022). Using problems to prove as a means of forming logical competence of future engineers. Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Sumy, 1(19), 90–98).
9. Чашечникова, О. С. (2011). Теоретико-методичні основи формування і розвитку творчого мислення учнів в умовах диференційованого навчання математики (дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02). Суми. (Chashechnikova, O. S. (2011). Theoretical and methodological bases for formation and development of the creative thinking in differentiated teaching of mathematics. (DSc thesis). Sumy).

**Sverchevska I. A. The generalization of Diophantus'es identity as a means of creative thinking development during the formation of mathematical competence.**

*Summary.* The article investigates logical and creative thinking development as a support for the formation of students' mathematical competence. The author states that students' own studies on the generalization of well-known statements promote the comprehensive development of one's personality, thinking and intellectual potential.

*The work focuses on a generalization of a famous historical identity by Diophantus, an ancient Greek mathematician, about two squares. The author proposes being creative, following general laws of identities, and making generalizations. The study also recommends putting forward ideas that the identity possibly holds for greater powers, to check whether these ideas are correct, and disprove false hypotheses.*

*The work also advises searching for new ways to generalize Diophantus'es identity by increasing the number of square addends. The author also recommends that students test new hypotheses and prove them by themselves, as well as discover famous historical problems that prove or disprove generalized identities for the sum of three, four and more squares. The article offers using historical problems of proving Cauchy's, Lagrange's, Euler's identities to confirm the possibility of generalization.*

*The work concludes that investigation and generalization of identities, studying approaches to proving, suggested by the authors of historical problems about identities, facilitates the development of skills of investigating and generalizing of mathematical statements, and as a result, the development of creative and logical thinking.*

*The above-mentioned factors would also improve the formation of student's competences, including mathematical competence, in its logical component, and innovative competence, in the ability to generate new ideas, to analyse, prove and disprove. The work concludes that studying mathematics gives wide opportunities for applying competency-based approach in education, as well as comprehensive development of the personality.*

**Key words:** *competency-based approach, competence formation, mathematical competence, creative thinking development, teaching mathematics, famous historical problems, Diophantus'es identity, generalization.*

**УДК 378.147**

**DOI 10.5281/zenodo.8025425**

**І. В. Хом'юк**

ORCID ID 0000-0002-2516-2968

**Н. В. Сачанюк-Кавецька**

ORCID ID 0000-0001-6405-1331

**В. В. Хом'юк**

ORCID ID 0000-0003-1704-570X

**Б. С. Білецький**

Вінницький національний технічний університет

## **ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ІНСТРУМЕНТАРІЮ СТУДЕНТАМИ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ У ВОЛОНТЕРСЬКІЙ ДІЯЛЬНОСТІ**

*У дослідженні висвітлено проблему оптимізації волонтерської діяльності засобами математичного інструментарію, який дозволяє зібрати, систематизувати та узагальнити інформацію. Проаналізовано погляди вітчизняних та зарубіжних науковців щодо дефініції поняття «волонтерська діяльність». Констатовано, що волонтерська діяльність дає можливість студентам різних спеціальностей, і технічних в тому ж числі, розширити в певному руслі свою професійну діяльність, здобути новий досвід та застосувати на практиці отримані в університеті знання із різних дисциплін як професійного, так і фундаментального циклів.*

*Підсумовуючи наведені погляди на поняття «волонтерська діяльність», авторами визначено, що їй притаманний більш стійкий рівень мотивації до діяльності, самостійність у діяльності породжує особистісне та професійне зростання майбутнього фахівця, який завдяки змісту та формам волонтерської діяльності сам вибудовує індивідуальну траєкторію свого професійного зростання.*