Анотація. Старовойтова Н. Діофантові рівняння у Всеукраїнських учнівських олімпіадах з математики. *У статті проаналізовано завдання Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики за період з 2013 по 2019 навчальні роки для учнів 7-11 класів на наявність у них Діофантових рівнянь. Ми побачили, що таких задач мало. Напевно через те, що в шкільній програмі не приділяється взагалі увага цій темі, а рівняння у цілих числах розглядаються лише на математичних гуртках та факультативах. Також у статті наведено приклади завдань, що містять рівняння у цілих числах, та способи їх розв'язання.*

Ключові слова: *Діофантові рівняння, рівняння в цілих числах, Всеукраїнські олімпіади з математики.*

Abstract. Starovoitova N. Diophantine equations in the All-Ukrainian pupil Olympiads in mathematics. *The article analyzes the tasks of the All-Ukrainian student Olympiads in mathematics for the period from 2013 to 2019 academic years for students of grades 7-11 for the presence of Diophantine equations. We have seen that there are few such tasks. Probably because the school program does not pay attention to this topic at all, and the equations in integers are considered only in math groups and electives. Also in the article are examples of problems that contain equations in integers, and the ways to solve them.*

Keywords: *Diophantine equations, equations in integers, All-Ukrainian Olympiads in mathematics.*

Стеценко Каріна
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
Karina829@ukr.net
Науковий керівник – Ю.В. Хворостіна

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗОБРАЖЕНЬ ЧИСЕЛ ЗНАКОДОДАТНИМИ ТА ЗНАКОЗМІННИМИ РЯДАМИ ЛЮРОТА

У 1883 році німецький математик Я. Люрот знайшов розклад дійсного числа $x \in (0; 1]$ у знакододатний ряд виду:

$$x = \frac{1}{d_1 + 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)} + \dots, \qquad d_n \in \mathbb{N},$$

який тепер називається знакододатним рядом Люрота. У 1990 році С. Калпазідоу, А. Кнопфмахер, Дж. Кнопфмахер запропонували знакозмінний аналог розкладів Люрота. Вони довели, що довільне дійсне число $x \in (0; 1]$ можна подати у вигляді скінченної суми або нескінченного знакозмінного ряду:

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}, \quad a_n \in \mathbb{N},$$

причому кожне ірраціональне число має єдине нескінченне і неперіодичне представлення, а кожне раціональне число або скінченне, або періодичне.

Теорема 1. Кожне число $x \in (0; 1]$ єдиним чином розкладається в ряд Люрота, тобто для числа x існує єдина послідовність натуральних чисел (d_n), $d_n = d_n(x)$, така, що

$$x=\frac{1}{d_1+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}\equiv\Delta^L_{d_1d_2\dots d_n\dots}.$$

Вираз $\Delta^L_{d_1d_2\dots d_n\dots}$ називається L – зображенням дійсного числа $x\in(0;1]$.

Алгоритм розкладу у знакододатний ряд Люрота. Нехай x довільне дійсне число з $(0;1]$. Оскільки $(0;1]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}]$, то очевидно, що для числа $x\in(0;1]$ існує d_1 таке, що

$$x\in\left(\frac{1}{d_1+1};\frac{1}{d_1}\right]\Leftrightarrow\frac{1}{d_1+1}<x\leq\frac{1}{d_1}.$$

Тоді

$$0<x-\frac{1}{d_1+1}=x_1\leq\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_1+1}=\frac{1}{d_1(d_1+1)}.$$

Оскільки

$$\left(0;\frac{1}{d_1(d_1+1)}\right]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{d_1(d_1+1)(n+1)};\frac{1}{d_1(d_1+1)n}],$$

то очевидно, що для $x_1\in\left(0;\frac{1}{d_1(d_1+1)}\right]$ існує $d_2\in\mathbb{N}$ таке, що

$$\frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)}<x_1\leq\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2}.$$

Звідки

$$0<x_1-\frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)}=x_2\leq\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)}$$

$$\text{і } x=\frac{1}{d_1+1}+x_1=\frac{1}{d_1+1}+\frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)}+x_2.$$

Далі проводимо аналогічні міркування стосовно $x_2\in\left(0;\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)}\right]$ і т.д. За k кроків буде отримано впорядкований набір натуральних чисел $(d_1,d_2,\dots,d_k)$ і дійсних чисел $(x_1,x_2,\dots,x_k)$ таких, що

$$0<x_{k-1}-\frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_{k-1}(d_{k-1}+1)(d_k+1)}=x_k\leq\frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_k(d_k+1)}$$

Тоді матимемо

$$x_{k-1}=\frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_{k-1}(d_{k-1}+1)(d_k+1)}+x_k.$$

Звідки

$$x=\frac{1}{d_1+1}+\frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)}+\dots+\frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_{k-1}(d_{k-1}+1)(d_k+1)}+x_k.$$

Цей процес нескінченний, але збіжний, оскільки

$$x_k\leq\frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_k(d_k+1)}\leq\frac{1}{2^k}\to 0\ (k\to\infty).$$

Таким чином має місце розклад

$$x=\frac{1}{d_1+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}\equiv\Delta^L_{d_1d_2\dots d_n\dots}.$$

Теорема 2. Число $x\in(0;1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його L-зображення є періодичним.

Числа, L-зображення яких має простий період, називають L-раціональними. Причому число $x \in (0; 1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його L-зображення є періодичним.

Означення 1. Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ - фіксований набір натуральних чисел. Циліндром рангу m з основою $c_1, c_2, \ldots, c_m$ називається множина $\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}$, яка містить всі числа x такі $d_i(x) = c_i$при $i \leq m$, тобто

$$\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}\equiv \left\{x\colon x = \ \Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_{m+i}}\ \epsilon\mathbb{N}\right\}.$$

Циліндри мають наступні властивості [1]:

1. $\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i_1=1}^{\infty} \ldots \bigcup\limits_{i_k=1}^{\infty} \Delta^L_{c_1\ldots c_m i_1 i_2\ldots i_k}, \forall k \in \mathbb{N}.$
2. Циліндр $\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}$ є півінтервалом з кінцями

$$inf\Delta^L_{c_1\ldots c_m} = \frac{1}{c_1+1} + \cdots + \frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_{m-1}(c_{m-1}+1)(c_m+1)} = a_m,$$

$$sup\Delta^L_{c_1\ldots c_m} = max\Delta^L_{c_1\ldots c_m} = a_m + \frac{1}{b_m\cdot 2} + \frac{1}{b_m\cdot 1\cdot 2\cdot 2} + \cdots = a_m + \frac{1}{b_m},$$

де $b_m = c_1(c_1+1)\ldots c_m(c_m+1)$, тобто

$$\Delta^L_{c_1\ldots c_m} = \left(a_m, a_m + \frac{1}{b_m}\right] = \left(a_m, a_m + \frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_m(c_m+1)}\right].$$

3. Довжина циліндра виражається формулою:

$$\left|\Delta^L_{c_1\ldots c_m}\right| = \frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_m(c_m+1)} = \prod_{i=1}^{m}\frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

4. Для довільної послідовності натуральних чисел (c_n) переріз

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\Delta^L_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta^L_{c_1\ldots c_m\ldots}$$

є точкою (числом) з півінтервалу $(0; 1]$.

5. Для відношення вкладених циліндрів виконується рівність:

$$\frac{\left|\Delta^L_{c_1\ldots c_m i}\right|}{\left|\Delta^L_{c_1\ldots c_m}\right|} = \frac{1}{i(i+1)} \quad\Leftrightarrow\quad \left|\Delta^L_{c_1\ldots c_m i}\right| = \frac{1}{i(i+1)}\left|\Delta^L_{c_1\ldots c_m}\right|.$$

6. Має місце наступна оцінка:

$$\left|\Delta^L_{c_1\ldots c_m i}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\Delta^L_{c_1\ldots c_m}\right|.$$

Причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $i = 1$.

Теорема 3. Для довільного дійсного числа $x \in (0; 1]$ існує скінченний набір натуральних чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ або нескінченна послідовність (a_n) таких, що

$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n} + \ldots = \Delta^{\tilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}.$$

Вираз $\Delta^{\tilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ називається $\widetilde{L}$– зображенням дійсного числа $x \in (0; 1]$.

Алгоритм розкладу числа в знакозмінний ряд Люрота. Нехай x довільне дійсне число з $(0; 1]$ і

$$a_1 = \left[\frac{1}{x}\right], \quad x_1 = \left(\frac{1}{a_1} - x\right)a_1(a_1+1).$$

Тоді рекурсивно задамо

$$a_{n+1} = \left[\frac{1}{x_n}\right] \geq 1,$$

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{a_{n+1}} - x_n\right) a_{n+1}(a_{n+1} + 1).$$

Причому, $0 \le x_n < 1$, що легко побачити з нерівності $\frac{1}{a_{n+1}+1} < x_n \le \frac{1}{a_{n+1}}$.

Алгоритм зупиняє дію при $x_n = 0$, в іншому випадку дія алгоритму є нескінченною. Повторне використання описаного вище алгоритму дає такий результат:

$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)} \cdot x_1 = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)} \cdot x_1 = \ldots$$

$$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(a_1+1)a_2} + \ldots + \frac{(-1)^k}{a_1(a_1+1)\ldots a_k(a_k+1)} \cdot x_k .$$

Оскільки, $a_n \ge 1$ для всіх $n > 1$, то

$$\frac{x_n}{a_1(a_1+1)\ldots a_n(a_n+1)} \le \frac{1}{2^n} \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Звідси випливає, що x має знакозмінний розклад в ряд Люрота.

Теорема 4. Дійсне число $x \in (0; 1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його $\tilde{L}$ - зображення є скінченним або періодичним.

Зазначимо, що для раціональних чисел зі скінченним розкладом можлива неоднозначність останнього члена, аналогічна неоднозначності, яка має місце у випадку ланцюгових дробів. Щоб усунути неоднозначність у випадку $a_n = 1$, ми будемо використовувати заміну зображення $\Delta^{\tilde{L}}_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} 1 (\emptyset)}$ зображенням $\Delta^{\tilde{L}}_{a_1 a_2 \ldots [a_{n-1}+1] (\emptyset)}$, де $[a_{n-1} + 1]$ – цифра зображення.

Означення 2. Циліндром рангу n з основою $c_1, c_2, \ldots, c_n$ називається множина $\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ всіх $x \in (0; 1]$ виду $x = \tilde{L}(a_1 a_2 \ldots a_n, \ldots)$, або $x = \tilde{L}(a_1 a_2 \ldots a_n)$, $a_i = c_i, i = \overline{1, n}$.

Циліндричні множини мають наступні властивості [2]:

1. $\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_n} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_n i}$.

2. $$inf\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_{2m-1}} = \tilde{L}(c_1, \ldots c_{2m-1}) - \frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_{2m-1}(c_{2m-1}+1)} = \tilde{L}(c_1, \ldots c_{2m-1}, 1)$$
$$=$$
$$= \tilde{L}(c_1, \ldots c_{2m-2}, c_{2m-1} + 1) \notin \Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_{2m-1}};$$

$sup\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_{2m-1}} = \tilde{L}(c_1, \ldots c_{2m-1}) \in \Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_{2m-1}}$;

$inf\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_{2m}} = \tilde{L}(c_1, \ldots c_{2m}) \in \Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_{2m}}$;

$$sup\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_{2m}} = \tilde{L}(c_1, \ldots c_{2m}) + \frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_{2m}(c_{2m}+1)c_{2m}} = \tilde{L}(c_1, \ldots c_{2m}, 1) =$$
$$= \tilde{L}(c_1, \ldots c_{2m-1}, c_{2m} + 1) \notin \Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_{2m}};$$

3. $sup\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_{2m-1} i} = inf\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_{2m-1} [i+1]}$;

$inf\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_{2m} i} = sup\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_{2m} [i+1]}$.

Нехай $l_1 = \tilde{L}(c_1, \ldots c_n + 1), l_2 = \tilde{L}(c_1, \ldots c_n)$.

4. Циліндр $\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_n}$ є півінтервалом $(l_1, l_2]$, якщо n – непарне, або піввідрізок $[l_2, l_1)$, якщо n – парне.

5. Для довжини циліндра рангу n має місце співвідношення:

$$diam\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_n} \equiv \left|\Delta^{\tilde{L}}_{c_1 \ldots c_n}\right| = \frac{1}{c_1(c_1+1)\ldots c_n(c_n+1)} \le \frac{1}{2^n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Вираз довжини циліндра $\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}$ дозволяє отримати ряд метричних відношень, які лежать в основі метричної "геометрії" зображення чисел знакозмінними рядами Люрота.

6. Якщо $\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}$ – фіксований циліндр, то має місце рівність (основне метричне відношення)

$$\frac{\left|\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n i}\right|}{\left|\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}\right|} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

Справді,

$$\frac{\left|\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n i}\right|}{\left|\Delta^{\tilde{L}}_{c_1c_2\ldots c_n}\right|} = \frac{c_1(c_1+1)\ldots c_n(c_n+1)}{c_1(c_1+1)\ldots c_n(c_n+1)i(i+1)} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

З наведених властивостей зображень чисел знакододатним і знакозмінним рядами Люрота можна зробити наступні висновки:

1. Кожне дійсне число інтервала $(0;1]$ єдиним чином розкладається в знакододатний і знакозмінний ряд Люрота. В знакододатньому ряді Люрота для числа x існує єдина послідовність натуральних чисел, а в знакозмінному ряді Люрота існує єдиний скінченний набір натуральних чисел або єдина нескінченна послідовність.
2. Алгоритм розкладу дійсного числа і в знакододатний і в знакозмінний ряд Люрота зупиняє дію при $x_n = 0$, в іншому випадку дія алгоритму є нескінченною.
3. У знакододатньому ряді Люрота кожне дійсне число $x \in (0;1]$ є раціональним тоді, коли його $\tilde{L}$-зображення є періодичним, а в знакозмінному ряді Люрота тоді, коли його $\tilde{L}$- зображення є скінченним або періодичним.
4. Обидва зображення мають однакове основне метричне відношення:

$$\frac{\left|\Delta^{L}_{c_1\ldots c_m i}\right|}{\left|\Delta^{L}_{c_1\ldots c_m}\right|} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

5. Геометрія розміщення циліндрів кожного рангу принципово відрізняється. В знакододатньому ряді Люрота – одностороння, в знакозмінному – різностороння.
6. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота і зображення чисел знакозмінними рядами Люрота мають однакове основне метричне відношення, а тому – аналогічні метричні теорії, але різну топологію.

Список використаних джерел

1. Жихарєва Ю.І., Працьовитий М.В. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи топологометричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер.1. Фіз.-мат.науки. – 2008. – №9. – С. 200–211.
2. Хворостіна Ю. В. Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування / М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна // Наук. час. НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. – №11. – С.102–118.

Анотація. Стеценко К. Порівняльний аналіз зображень чисел знакододатними та знакозмінними рядами Люрота. *У даній роботі розглянуто алгоритми розкладу дійсного числа у знакододатний та знакозмінний ряди Люрота. Описано властивості циліндричних множин L – зображення і $\tilde{L}$ – зображення. Також наведено порівняльний аналіз зображень чисел у знакододатньому та знакозмінному рядах Люрота.*

Ключові слова: *зображення чисел знакододатними та знакозмінними рядами Люрота, $\tilde{L}$ – зображення, L – зображення, геометричне зображення.*

Abstract. Stetsenko K. Comparative analysis of numerical transform images by the positive terms and alternate series of Lurot. *In this article we consider the algorithms of a real number expanding in the positive terms and alternate series of Lurot. The properties of cylindrical sets L - image and* $\tilde{L}$*- image are described. Also a comparative analysis of numerical transform images by the positive terms and alternate series of Lurot is given.*

Keywords: *transform images of real numbers by the positive terms and alternate series of Lurot, L – image,* $\tilde{L}$*- image, geometric image.*

Терьохіна Влада
Магістрантка, спеціальності «Середня освіта (Математика)»
vlada.teryohinaaa@gmail.com
Науковий керівник – В.Д. Погребний

ІРРАЦІОНАЛЬНІ АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ В ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ

Нині в умовах світового співробітництва, інтеграції економіки, виробництва, наукових досліджень розвинуті країни всього світу, у тому числі й держава Україна, прагнуть до підвищення свого Інтелектуального потенціалу. Тому потрібний високий рівень математичної підготовки випускників середньої школи та інших навчальних закладів. За відомим висловом М В. Ломоносова (1711-1765), «математику вже тому вчити треба, що вона розум до ладу приводить». У зв'язку з цим підвищуються відповідальність і роль вчителя математики, посилюються вимоги до його власної математичної і методичної підготовки. Головною метою є подальший всебічний розвиток дитини як цілісної особистості, її здібностей і обдарувань, збагачення на цій основі інтелектуального потенціалу людини.

Отже, всебічний розвиток особистості, створення для цього сприятливих умов - головна мета школи. Мета навчання і виховання підпорядковані розвитку і виступають як загальні форми, засоби розвитку. Виходячи із зазначеного, можна сформулювати основні цілі навчання математики в школі:

1)розумовий розвиток учнів - розвиток логічного мислення й інтуїції просторових уявлень і уяви, пам'яті, алгоритмічної та інформаційної культури як особливого аспекту культури мислення; формування позитивних якостей особистості - розумової активності, пізнавальної самостійності, пізнавального інтересу, потреби в самоосвіті, здатності адаптуватися до умов, що змінюються, ініціативи, творчості;

2)забезпечення свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, потрібних у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності кожному членові сучасного суспільства, достатніх для вивчення інших дисциплін, продовження освіти в системі безперервної освіти; формування уявлень про ідеї і методи математики та її роль у пізнанні навколишнього світу, формування навичок математизації ситуацій під час досліджень різних явищ природи і суспільства;

3)формування наукового світогляду, загальнолюдських духовних цінностей; виховання національної самосвідомості, поваги до національної культури і традицій України; формування позитивних рис характеру (чесності й правдивості, наполегливості; волі, культури думки і поведінки, обґрунтованості суджень, відповідальності за доручену справу тощо); естетичне, екологічне, економічне, патріотичне, трудове виховання, професійна орієнтація на виховання здорового способу життя.