УДК 517.9

О.В. Мартиненко, О.М. Бойко
Сумський державний педагогічний університет ім. А.С. Макаренка

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Постановка проблеми. У наш час функціональні рівняння широко використовуються у механіці, геометрії, алгебрі, теорії чисел, комбінаториці, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей тощо.

Однією з серйозних проблем при дослідженні функціонального рівняння є вибір відповідного методу для його розв'язування.

Зауважимо, що універсального підходу до розв'язування функціональних рівнянь не існує. Зазвичай виділяють наступні методи їх розв'язування: метод підстановок, метод диференціювання, метод граничного переходу, метод невизначених коефіцієнтів, метод рекурентних співвідношень, метод відокремлення змінних, метод Коші та інші. Будь-який із зазначених методів заслуговує на окрему увагу, оскільки іноді використання тільки одного з них буває недостатнім.

Розв'язування кожного функціонального рівняння включає елемент дослідження, оскільки часто виникає необхідність з одного боку в уточненні тих чи інших умов, що повинні виконуватись для застосування певного методу розв'язування, а з іншого – у виділенні типу рівняння, яке розв'язується заданим способом.

Аналіз актуальних досліджень. Одним з найпоширеніших типів рівнянь, за допомогою яких досить часто математично описують різні процеси математики та природознавства, є рівняння, що містять невідому функцію, їх називають функціональними. У загальному випадку до таких рівнянь відносять: диференціальні, інтегральні та різницеві рівняння. Проте, у переважній більшості джерел [3; 4; 6; 7] під функціональними розуміють рівняння, в яких шуканими є функції, що пов'язані з елементарними за допомогою операцій додавання, множення та композиції.

Питання про розв'язування функціональних рівнянь – одне з найстаріших у математичному аналізі. Першим поштовхом до їх дослідження послужила одна з класичних задач механіки – задача про паралелограм сил. У 1769 році Д'Аламбер, обґрунтовуючи закон додавання сил, отримав функціональне рівняння вигляду

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),$$

а О.Коші у 1821 році знайшов розв'язки даного рівняння у класі неперервних функцій [5; 6].

Видатні математики минулого – серед них Л. Ейлер, К. Гаусс, Н. Абель, М. Лобачевський, Д. Гільберт, – часто зверталися до функціональних рівнянь і використовували їх для розв'язування цілого ряду задач. Наприклад, М.І. Лобачевський для визначення кута паралельності у неевклідовій геометрії використовував функціональне рівняння виду

$$f^2(x) = f(x-y) + f(x+y).$$

Ч. Бабедж для дослідження періодичних кривих вивчав рівняння

$$f\big(f(x)\big) = x.$$

О. Коші був одним з перших вчених, який розпочав систематичне вивчення та виклад теорії функціональних рівнянь. У монографії «Курс аналізу», яка вийшла з друку у 1821 році, він детально дослідив рівняння виду:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in R$$
$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), x, y \in R$$
$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), x, y \in R$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), x, y \in R$$
$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y), x, y \in R.$$

За умови неперервності функції $f(x)$ розв'язком кожного із запропонованих рівнянь є певна множина лінійних, показникових, логарифмічних, степеневих та тригонометричних ($y = \cos x$) функцій відповідно.

Ці рівняння мають застосування в різних галузях математики і називаються ***рівняннями типу Коші***. [1; 8]

Деякі функціональні рівняння широко використовуються у шкільному курсі математики. Це, наприклад, рівняння виду:

$$f(x) = f(-x), f(-x) = -f(x), f(x+T) = f(x),$$

які описують такі властивості функцій, як парність, непарність і періодичність відповідно.

Зазвичай, функціональні рівняння визначають не окрему конкретну функцію, а виражають властивість, що характеризує цілий клас функцій. Наприклад, функціональне рівняння $f(x+1) = f(x)$ характеризує множину періодичних функцій з періодом 1; а рівнянню

$$f(x+1) = f(1-x)$$

відповідає клас функцій, графіки яких симетричні відносно прямої $x = 1$.

Слід зазначити, що питання дослідження функціональних рівнянь залишається досить актуальним і сьогодні. Вивченню цієї проблеми присвячені роботи таких математиків як С. Л. Блюмин, О. М. Вороний, Г.В. Писанко, В.А. Недокіс, Є.І. Пенцак, А.С. Юрчишин та інші.

Мета статті: нами зроблена спроба розкрити значущість методів математичного аналізу як математичного апарату розв'язування функціональних рівнянь.

Виклад основного матеріалу. При розв'язуванні функціональних рівнянь досить часто доводиться використовувати деякі фундаментальні поняття та факти математичного аналізу, зокрема, границю послідовності та функції, неперервність та диференційовність функції тощо.

Розглянемо застосування методу граничного переходу для розв'язування функціональних рівнянь. Цей метод у більшості випадків застосовується за умови неперервності шуканої функції в деякій точці. Одним із типів задач на його застосування є задачі на знаходження значення функції, яка задовольняє рівняння Коші в ірраціональних точках.

Запропонованим способом також можуть бути розв'язані у класі неперервних функцій рівняння виду:

$$f(kx+b)=mf(x)+P(x),$$

$$f(kx+b)=f(x)a^{P(x)},$$

де $k>1$, $|m|<1, P(x)$ – многочлен, $a>0,\ a\neq 1,\ a=const$

Метод граничного переходу полягає в наступному. Здійснюється підстановка, яка переводить вираз, що стоїть під знаком функції f в одному члені рівняння, у вираз, який стоїть під знаком функції f в іншому його члені. Підстановку повторюють n разів і приходять до системи n лінійних рівнянь. Потім послідовно виключають невідомі та отримують рівняння виду

$$f(x)=a_n f(b_n)+c_n,$$

де a_n, b_n, c_n – члени деяких послідовностей, n – фіксоване натуральне число. При цьому a_n, b_n, c_n можуть бути і функціями від змінної x.

Якщо існують границі при $n\to\infty$ послідовностей $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=const$, то за умови неперервності функції $f(x)$, застосувавши граничний перехід, знаходять вираз для $f(x)$. Перевірка правильності знайденої функції є складовою частиною розв'язування функціонального рівняння. [7]

Проілюструємо застосування методу граничного переходу на конкретному прикладі.

Приклад 1. Знайти всі неперервні функції f, які задовольняють умову

$$f(x)=f\left(\frac{x}{5}\right)a^{x}, \qquad (1)$$

для всіх $x\in R$.

Розв'язання. Насамперед помічаємо, що функція $f(x)\equiv 0$ є розв'язком даного функціонального рівняння. Нехай тепер $f(x)$ не дорівнює тотожно нулеві. Замінимо послідовно n разів у лівій і правій частинах рівності (1) x на $\frac{x}{5}$, матимемо:

$$f\left(\frac{x}{5}\right)=f\left(\frac{x}{25}\right)a^{\frac{x}{5}},$$

$$f\left(\frac{x}{25}\right)=f\left(\frac{x}{125}\right)a^{\frac{x}{25}},$$

$$\ldots$$

$$f\left(\frac{x}{5^n}\right) = f\left(\frac{x}{5^{n+1}}\right) a^{\frac{x}{5^n}}.$$

Звідси $f(x) = f\left(\frac{x}{5^{n+1}}\right) a^{x+\frac{x}{5}+\dots+\frac{x}{5^n}}$.

Перейдемо до границі в останній рівності, коли $n \to \infty$. Оскільки ліва частина не залежить від n і функція $f(x)$ є неперервною, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ існує, а отже існує границя і правої частини. Зрозуміло, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{5^{n+1}} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{x}{5} + \dots + \frac{x}{5^n}\right) = \frac{5x}{4}$$

(сума нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником $\frac{1}{5}$). Відомо, що коли функція $y = f(x)$ неперервна, то $\lim\limits_{x_n\to x} f(x_n) = f(x)$. За теоремою про перехід до границі під знаком неперервної функції та властивостями границь маємо, що

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{5^{n+1}}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} \frac{x}{5^{n+1}}\right) = f(0),$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{x+\frac{x}{5}+\dots\frac{x}{5^n}} = a^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(x+\frac{x}{5}+\dots+\frac{x}{5^n}\right)} = a^{\frac{5x}{4}}.$$

Прирівняємо знайдені границі:

$$f(x) = ka^{\frac{5x}{4}}, \text{ де } k = f(0) \qquad (2)$$

Зауважимо, що ці міркування мають зміст лише за умови, коли задача має розв'язок.

Отже, якщо функція, що є розв'язком функціонального рівняння (1) взагалі існує, то вона має вигляд (2). Щоб пересвідчитися у правильності знайденого розв'язку, потрібно виконати перевірку:

$$f\left(\frac{x}{5}\right) a^x = ka^{\frac{x}{4}} a^x = ka^{\frac{5x}{4}} = f(x).$$

Перевірка показала, що функція $f(x) = ka^{\frac{5x}{4}}$ дійсно задовольняє рівняння (1) при довільній сталій k. [2, 6]

Розглянемо ще один важливий метод розв'язування функціональних рівнянь – метод диференціювання; його застосовують, як правило, для класу диференційовних функцій. Вказаний метод полягає у зведенні даного функціонального рівняння до диференціального: для цього обидві частини функціонального рівняння диференціюють і отримують рівняння, що містить похідну шуканої функції, тобто диференціальне рівняння. Розв'язавши його відносно похідної, знаходять шукану функцію як одну з її первісних. [8]

Метод диференціювання, зазвичай, застосовується у випадку, коли невідома функція залежить від суми, різниці, добутку або частки незалежних змінних, тобто рівняння містить

$$f(x+y), f(x-y), f(x\cdot y) \text{ або } f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Проілюструємо застосування даного методу на прикладі.

Приклад 2. У класі диференційовних функцій розв'язати рівняння

$$f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-y \qquad (3)$$

Розв'язання. Продиференціюємо рівняння (3) по змінній x, а потім по змінній y. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f'(x+y)+2f'(x-y)=3f'(x), \\ f'(x+y)-2f'(x-y)=-1. \end{cases}$$

Додамо їх почленно, будемо мати

$$2f'(x+y)=3f'(x)-1. \qquad (4)$$

Продиференціюємо спочатку рівність (4) по x: $2f''(x+y)=3f''(x)$, а потім по y: $2f''(x+y)=0$. Очевидно, що $f''(x)=0$ (оскільки ліві частини рівні, то рівними будуть і праві). Проінтегрувавши дане рівняння, знайдемо $f(x)=C_1x+C_2$, де C_2 – довільна стала, а C_1 ми визначимо, підставивши цей розв'язок у рівняння (3)

$$C_1(x+y)+C_2+2C_1(x-y)+2C_2=3C_1x+3C_2-y,$$

отже, $C_1y=y$ або $C_1=1$.

Розв'язком функціонального рівняння (3) є функція виду

$f(x)=x+C$, де C – довільна стала. [6, 57]

Одним із поширених методів розв'язування функціональних рівнянь є метод відокремлення змінних. В основі даного методу лежить наступне твердження. [5, 44]

Твердження 1. Якщо в рівності $P(y)=Q(x)$, яка виконується для всіх x, $y\in G\subset R$, ліва частина залежить тільки від змінної y, а права – тільки від змінної x, то існує деяка стала c така, що $P(y)=Q(x)=c$ для всіх x та y з множини G.

Універсальних рекомендацій щодо застосування даного методу розв'язування функціональних рівнянь немає, тому проілюструємо процес відокремлення змінних на конкретному прикладі.

Приклад 3. Знайти всі пари многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що для всіх x і y виконується рівність

$$f(xy)=f(x)+g(x)f(y). \qquad (5)$$

Розв'язання. Тривіальні випадки, коли один із шуканих многочленів є многочленом нульового степеня, ми досліджувати не будемо. Зупинимося на визначенні інших пар многочленів.

Запишемо (5) у вигляді $f(x)+g(x)f(y)=f(y)+g(y)f(x)$, (це можна зробити, виходячи з очевидної рівності: $f(xy)=f(yx)$).

Перепишемо цю рівність у вигляді

$$f(x)\big(1-g(y)\big)=f(y)\big(1-g(x)\big), \qquad (6)$$

і проаналізуємо її.

Якщо $g(t)=1$ для всіх t, то

$$\frac{f(x)}{1-g(x)}=\frac{f(y)}{1-g(y)}=c, \text{де } c\neq 0 - \text{деяка стала},$$

тому $f(x)=\big(1-g(x)\big)c$.

Для визначення многочлена $g(x)$ підставимо функцію $f(x)$ у рівність (5):

$$1-g(xy)c=\big(1-g(x)\big)c+g(x)\big(1-g(y)\big)c \text{ або}$$

$$g(xy)=g(x)g(y).$$

Очевидно, що функція $f(x)=\big(1-g(x)\big)c$ задовольнятиме рівність (5) при довільній сталій c, якщо многочлен $g(x)$ задовольняє рівність

$$g(xy)=g(x)g(y).$$

Зауважимо, що ця рівність є відомим функціональним рівнянням, що характеризує одну з основних властивостей степеневої функції. Французький математик О. Коші розв'язав дане рівняння у класі неперервних функцій.

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів на множині многочленів можна знайти функцію $g(x)=x^n$. Після цього отримаємо пари многочленів вигляду: $g(x)=x^n$ та $f(x)=(1-x^n)c$, де $n\in N$, що задовольняють рівність (5) для всіх $x\neq 1$ при будь-якому значенні n та $x\neq -1$, якщо n – парне.

Визначимо ті значення a змінної x, для яких многочлен $g(x)$ дорівнює 1. Нехай $a=0$, тоді з рівності (6) при довільному y і $x=a$ отримаємо рівність $f(0)\big(1-g(y)\big)=0$. Дана рівність виконується тільки, коли $f(0)=0$, оскільки многочлен g не є многочленом нульового степеня. Покладемо у рівності (5) $x=0$, а y будемо вважати довільним. За умови, що $g(0)=1$, отримаємо $f(y)=0$ для довільного y, а це суперечить домовленості. Отже, якщо $g(a)=1$, то $a\neq 0$.

При $x=\ a, y=\ 1$ і $x=\ a, y=\ \frac{1}{a}$ з рівності (5) отримаємо систему

$$\begin{cases} f(a)=2f(1), \\ f(1)=2f(a), \end{cases}$$

звідси знайдемо, що $f(a)=0$.

При $y=a$ рівність (5) матиме вигляд $f(ax)=f(x)$, очевидно, що $a=1$ для будь-якого многочлена f, або $a=-1$ для многочлена, який містить тільки парні степені змінної. Отже, якщо $g(1)=1$ для всіх $n\in N$ і $g(-1)=1$ для парних n, що узгоджується з побудовою многочлена g.

Таким чином, ми отримали, що $f(x)=(1-x^n)c$ і $g(x)=x^n$, де n – натуральне число, c – довільне дійсне число і будуть шуканими парами многочленів, що задовольняють рівність (5) на множині всіх дійсних чисел. Для знаходження всіх пар многочленів необхідно розглянути ще такі пари як $f(x) = 0, g(x)$ – довільний многочлен і $f(x) = c, g(x) = 0$.

Висновки. Розв’язування функціональних рівнянь неможливе без глибокого розуміння фундаментальних понять математики вцілому і, зокрема, математичного аналізу, оскільки саме на цих поняттях може ґрунтуватися математичний апарат, необхідний для їх дослідження.

На наше переконання, процес розв’язування функціональних рівнянь – це пошукова та творча робота, яка потребує ґрунтовних математичних знань та дозволяє розвивати дослідницькі здібності як школярів, так і студентів.

Література

1. Блюмин С.Л. Класс функциональных уравнений типа Коши // Фундаментальные исследования / С.Л. Блюмин, 2008. – №2. – С. 20–25.
2. Бродський Я.С., Сліпченко А.К. Граничний перехід і функціональні рівняння / Я.С.Бродський, А.К. Сліпченко // Математика. – 2000. – №20. – С. 6 – 7.
3. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Функциональные уравнения / Я.С. Бродский, А.К. Слипенко. – К.: Вища школа, 1983. – 96 с.
4. Вороний О. М. Готуємось до олімпіад з математики / О. М. Вороний. – Х.: Вид. група «Основа», 2008. – 255 с.
5. Вороний О.М., Писанко Г.В. Розв'язування функціональних рівнянь способом відокремлення змінних / О.М. Вороний, Г.В. Писанко // Математика в школі. – 2006. – № 10. – С. 44 – 48.
6. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения / Л.М. Лихтарников. – Санкт-Петербург: Лань, 1997. – 158 с.
7. Недокіс В.А. Розв’язування найпростіших функціональних рівнянь методом підстановки / В.А. Недокіс // У світі математики. – 1996. – №4. – С. 33 – 39.
8. Пенцак Є.І., Юрчишин А.С. Функційні рівняння / Є.І. Пенцак, А.С. Юрчишин. – Львів: ЛДУ, 1998. – 112 с.

Анотація. *Мартиненко О.В., Бойко О.М. Методи математичного аналізу при розв’язуванні функціональних рівнянь. Стаття присвячена дослідженню трьох основних методів (граничного переходу, диференціювання, відокремлення змінних) математичного аналізу розв’язування функціональних рівнянь. На конкретних прикладах проаналізовано доцільність використання того чи іншого методу до розв’язування певного типу функціонального рівняння, показано умови та особливості його застосування.*

Ключові слова. *Функціональне рівняння, границя функції, неперервність, диференційованість, метод.*

Аннотация. *Мартыненко Е.В., Бойко О.М. Методы математического анализа при решении функциональных уравнений. Статья посвящена исследованию трех основных методов (предельного перехода,* *дифференцирования, разделения переменных) математического анализа решения функциональных уравнений. На конкретных примерах проанализирована целесообразность использования того или иного метода к решению типа функционального уравнения, показано условия и особенности его применения.*

Ключевые слова. *Функциональное уравнение, граница функции, непрерывность, дифференцированность, метод.*

Summary. *O. Martynenko, O. Boyko. Methods of mathematical analysis in solving functional equations. This article is devoted to research of main three methods (limiting transition, differentiation, separation of variables) of mathematical analysis in solving functional equations. Expediency of using one or other method to solve the certain type of functional equation was analyzed on concrete examples, conditions and peculiarities of its application were shown.*

Key words. *Functional equations, boundary functions, continuity, ifferentiation, method.*