Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Плясенко Євгеній Олександрович

РІЗНІ ФОРМИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ КЛАСІВ ГУМАНІТАРНИХ ПРОФІЛІВ (СТАРША ШКОЛА)

Спеціальність 014.04 Середня освіта (математика)
Галузь знань: 01. Освіта

Кваліфікаційна робота
На здобуття освітнього ступеню магістр

Науковий керівник
Розуменко Анжела Оурелянівна,
кандидат педагогічних наук, доцент,
Шишенко Інна Володимирівна,
кандидат педагогічних наук, доцент
«____» _________________ 2020 року
Виконавець
Плясенко Євгеній Олександрович
«____» _________________ 2020 року

Суми 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Глобалізаційні процеси в світовій економіці, культурному і суспільно-політичному житті, швидка зміна ідей, знань, технологій, суцільна інформатизація суспільства ставлять нові вимоги перед сучасною школою. Серед таких вимог – формування інноваційної, конкурентноздатної і компетентної особистості, для якої отримання знань, необхідної інформації та вміння застосовувати їх на практиці, потреба в навчанні та самовдосконаленні стають сутнісною рисою способу життя.

Засобом реалізації цієї вимоги та пріоритетним напрямком реформування середньої школи є перехід її старшої ланки на профільне навчання. Майже четверта частина старшокласників обирає гуманітарний напрям. Навчання математики на цьому профілю відбувається за програмою рівня стандарту. Основною метою вивчення предмета виступає формування ключових (вільне володіння державною мовою; математична компетентність; інноваційність; інформаційно-комунікаційна компетентність; навчання впродовж життя та ін.), загальнопредметних (галузевих) та предметних компетентностей, які сприяють практичній здатності учня застосовувати свої знання в реальних життєвих ситуаціях, відповідати за свої дії, брати активну участь у суспільному житті.

Традиційне вивчення математики не завжди задовольняє потреби профільного навчання на суспільно-гуманітарному або філологічному напрямках. Навчання математики в умовах класів гуманітарної спрямованості – це не полегшена математична підготовка школярів, а розвиток їхніх практичних здібностей у певній сфері діяльності засобами математики, демонстрування можливостей застосування математики в тій чи іншій професії. Тому, виникає питання розробки нової методики викладання і навчання предмета на рівні стандарту з нахилом на не математичні сфери.

Важливим її компонентом, який останнім часом актуалізується серед педагогічного загалу і потребує детального науково-методичного дослідження і розвитку, виступає розробка, систематизація та упровадження різних форм навчання математики учнів класів гуманітарних профілів навчання старшої школи.

Особливості нормативно-понятійного аспекту навчання математики у класах гуманітарного напрямку відображені в Законі України «Про освіту» [47], Державному стандарті базової і повної середньої освіти [16], навчальній програмі з математики [35–37], методичних листах МОН щодо вивчення навчальних предметів [26; 27; 42] та ін. Однак, досліджень, присвячених особливостям методики навчання математики в таких класах, небагато. Серед них акцентуємо увагу на наукових працях І. Лов’янової [29], В. Прошкіна та О. Панішевої [48], П. Сікорського [58], З. Слєпкань [59], І. Шишенко [66; 68] та ін. Методичні напрацювання цих авторів стосуються лише окремих аспектів проблеми математичної підготовки, зокрема, й різних форм навчання учнів класів з гуманітарним профілем навчання.

Зацікавленість наукових працівників, учителів математики до питання використання різних форм навчання математики в класах гуманітарних профілів навчання старшої школи, розширення спектру завдань, які ставить сучасна наука, освіта та суспільне життя вказують на актуальність проблематики й широкий простір для наукових, методичних і практичних досліджень.

Мета дослідження полягає в дослідженні різних форм навчання математики учнів класів гуманітарних профілів навчання старшої школи.

Мета дослідження реалізується виконанням таких тактичних **завдань**:

1) охарактеризувати процес навчання математики у класах гуманітарного профілю з позицій диференційованого, рівневого і компетентнісного підходів;

2) проаналізувати основний зміст навчального матеріалу з математики для класів гуманітарного профілю;

3) класифікувати різні форми навчання математики;

4) розглянути методичні особливості навчання математики учнів гуманітарних класів, зокрема:

- оптимізацію організаційних форм навчання в процесі компетентнісного вивчення функціональної змістової лінії;

- форми формування навчально-пізнавальної компетентності та розвитку творчого мислення учнів під час виконання обчислень, перетворення виразів та навчання розв’язуванню різних типів рівнянь;

- організаційні форми формування практичної компетентності в процесі вивчення геометрії;

- форми використання історичного матеріалу;

- позаурочні форми навчання математики.

Об’єкт дослідження – процес навчання математики у старшій школі.

Предмет дослідження – форми навчання математики учнів класів гуманітарних профілів навчання старшої школи.

Методи дослідження. Для виконання поставлених завдань використано наступні методи:

– теоретичні – аналіз, систематизація, узагальнення, які дозволяють опрацювати нормативні, наукові і навчально-методичні джерела, проаналізувати методику і практику навчання математики учнів класів гуманітарних профілів старшої школи.

– емпіричні – вивчення матеріалів навчальної та педагогічної діяльності, які забезпечують дослідження стану і визначення перспективних напрямків використання різних форм навчання математики учнів класів гуманітарних профілів старшої школи.

Наукова новизна дослідження полягає в узагальненні й систематизації науково-методичних відомостей про особливості і методику різних форм навчання математики учнів класів гуманітарних профілів старшої школи.

Практичне значення одержаних результатів пов’язане з їх використанням у практично-педагогічній діяльності вчителів математики загальноосвітніх навчальних закладів, методистів, викладачів, учнів, всіх, хто цікавиться вивченням математики.

Апробація результатів. Основні положення та результати дослідження були представлені для обговорення на засіданнях кафедри математики.

Публікації. Основні результати дослідження опубліковані в збірнику «Студентська звітна конференція» [45], матеріалах Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції «Організаційно-методологічне забезпечення підготовки фахівців: тенденції, проблеми та шляхи їх вирішення (з нагоди 90- річчя ХНАДУ)» (м. Харків, 18 листопада 2020 року) [46], II Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Інтеграція освіти, науки та бізнесу в сучасному середовищі: літні диспути» (м. Дніпро, 17-18 серпня 2020 р.) [55].

Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел (68 найменувань), 7 додатків.

У першому розділі роботи охарактеризовано процес навчання математики у класах гуманітарного профілю з позицій диференційованого, рівневого і компетентнісного підходів, проаналізовано основний зміст навчального матеріалу з математики для класів гуманітарного профілю, класифіковано різні форми навчання математики.

У другому розділі роботи розглянуто методичні особливості навчання математики учнів класів гуманітарних профілів, зокрема: оптимізацію організаційних форм навчання в процесі компетентнісного вивчення функціональної змістової лінії; форми формування навчально-пізнавальної компетентності та розвитку творчого мислення учнів під час виконання обчислень, перетворення виразів та навчання розв'язуванню різних типів рівнянь; організаційні форми формування практичної компетентності в процесі вивчення геометрії; форми використання історичного матеріалу; позаурочні форми навчання математики.

У висновках узагальнено й систематизовано результати вивчення і визначено перспективи подальших досліджень.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ КЛАСІВ ГУМАНІТАРНИХ ПРОФІЛІВ

1.1. Диференційований підхід як засіб реалізації компетентнісного навчання математики у старшій школі. Програми різних рівнів

Сучасна система математичної освіти, в тому числі вивчення математики у старшій школі, перебуває в стадії еволюційного реформування класичної або традиційної моделі в сучасну посткласичну.

Метою нової освіти є формування і розвиток креативної, інноваційно здатної особистості, готової до діяльності в нетипових ситуаціях, ситуаціях невизначеності, орієнтуватися в процесах динамічного оновлення знань, ідей, технологій, інформації та суспільства. В основу її покладено принцип дитиноцентризму, а основними рисами виступають: компетентнісний характер навчально-виховного процесу, особистісно орієнтований підхід та індивідуалізація навчальної діяльності, врахування ціннісного та етичного вимірів знань; невизнання існування нормативної істини, варіативність навчальних програм, використання інноваційних методик, технологій, засобів, свобода вибору та стимулюючий характер оцінки навчальних досягнень, демократизація педагогічного процесу, суб’єкт-суб’єктна взаємодія в навчально-пізнавальній діяльності.

Під «компетенцією» розуміється «добра обізнаність із чим-небудь» [60, Т. 4, с. 250], «компетентністю» – «властивість за значенням компетентний, тобто який має достатні знання в якій-небудь галузі; який з чим-небудь добре обізнаний; тямущий» [60, Т. 4, с. 250]. Освітня «компетенція» – це наперед визначена державою норма до знань, умінь та навичок школяра, необхідна йому для успішного навчання та якісної діяльності в межах тієї сфери, де ця діяльність буде здійснюватися. Узагальненим результатом навчання випускника загальноосвітнього навчального закладу виступає «компетентність» як здатність особистості «відбирати й знаходити потрібні знання та способи дій для розв’язування навчальних задач; здатність до навчання і розвитку на основі опанування загальних способів навчальної діяльності; усвідомлення необхідності продовжувати освіту, розвивати індивідуальний досвід пізнання» [43, с. 6]. Тобто, компетенція є певним набором знань, вмінь та навичок, а компетентність – здатність їх використовувати.

У процесі навчальної діяльності учні засвоюють соціальні вимоги, програмові норми, що виражаються у певній сукупності знань, умінь, навичок, способів діяльності, досвіду, цінностей і ставлення (компетенцій). Мобільність знань, гнучкість методики застосування їх у конкретній ситуації та критичність мислення складають основу набуття школярем відповідної компетентності – особистісної якості, особистісного ставлення до предмета діяльності, інтегрованої здатності реалізувати опановані компетенції на практиці [22, с. 7–8].

Компетентнісний підхід полягає у спрямованості навчально-виховного процесу на формування ключових, загальнопредметних і предметних компетентностей учнів. За означення, він є системним та міждисциплінарним і характеризується як особистісними так і діяльними аспектами, тобто має практичну, прагматичну та гуманітарну напрямленість. Компетентнісний підхід передбачає формування вмотивованої компетентної особистості, здатної: активно й зацікавлено пізнавати світ, усвідомлювати цінність знань, важливість творчої діяльності, швидко орієнтуватися в динамічному інформаційному просторі, творчо працювати з різноманітною інформацією, самостійно визначати проблемні питання та розв’язувати їх на основі отриманих знань, умінь і навичок, приймати обґрунтовані рішення, брати на себе відповідальність за отриманий результат, навчатися впродовж життя, застосовувати отримані знання у практичній діяльності.

Кожний навчальний предмет покликаний формувати не лише суто «свою» предметну компетентність, а й вносити посильний вклад у набуття особистістю ключових [42]. Основною метою освітньої галузі «Математика» є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам'яті, логіки, мислення та інтуїції.

Математичну компетентність (як ключову) розглядають М. Бурда і О. Глобін як нерозривну єдність, цілісність знань, умінь і особистісних якостей людини. Складовими її компонентами виступають ціннісно-мотиваційний, загальнокультурний, навчально-пізнавальний, інформаційний, інтелектуальний, комунікативний, світоглядний [23, с. 12–18]. Таким чином, компетентнісний підхід не заперечує значення знань, але їх сутність (на відміну від традиційного, знаннєво орієнтованого навчання) полягає в тому, що вони розглядаються не як самоціль, а як засіб розвитку та виховання учня.

Під математичною (предметною) компетентністю розуміється здатність особистості створювати математичні моделі процесів навколишнього світу, застосовувати досвід математичної діяльності під час розв'язування навчально-пізнавальних і практично зорієнтованих задач. С. Раков трактує математичну (предметну) компетентність як «спроможність особистості бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень» [53, с. 15].

Формування математичної компетентності в процесі вивчення математики включає наступні компоненти: процедурну компетентність – уміння розв'язувати типові математичні задачі, логічну компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень, технологічну компетентність – володіння сучасними інформаційнокомунікаційними технологіями підтримки математичної діяльності, дослідницьку компетентність – володіння методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач математичними методами, методологічну компетентність – уміння оцінювати доцільність використання математичних методів для розв'язування індивідуально і суспільно значущих задач [12, с. 169–170; 53; 61].

Навчання математики у старшій школі здійснюється на компетентнісній основі з урахуванням диференційованого підходу. Регламентовано воно Листом МОН України № 1/11-5966 від 01.07.2019 року: «Щодо методичних рекомендацій про викладання навчальних предметів у закладах загальної середньої освіти у 2019/2020 навчальному році» [27].

Відповідно цих рекомендацій, учні 10-11 класів вивчають два окремих предмета: «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія». На рівні стандарту на вивчення алгебри і початків аналізу відводиться 54 години протягом року, а на геометрію 51 година. На профільному рівні учні вивчають математику за 9-ти годинним тижневим навантаженням: 6 годин алгебри та початків аналізу і 3 години геометрії. Можливим є використання двох програм: для учнів, які вивчають математику на профільному рівні з 10-го класу і для учнів, які вивчали математику поглиблено з 8-го класу [26; 27].

Стандартизовані рівні знань дозволяють диференціювати обсяг, глибину та ступінь застосування програмового матеріалу з урахуванням конкретних здібностей особистості, її інтелектуального потенціалу та потреб профілізації, поєднання обґрунтованості, абстрактності й загальності з прикладною спрямованістю.

Навчання учнів на рівні стандарту покликане забезпечити оволодіння математичними знаннями, вміннями та навичками, необхідними для повсякденного життя, розв'язування практичних і прикладних задач, які ставилять сучасне виробництво, ринок праці і суспільне буття, отримання якісної професійної освіти, продовження навчання та фахового зростання на наступних етапах продуктивної діяльності [35].

Основною метою навчання на рівні стандарту є забезпечення умов для формування практичної компетентності школярів. Під практичною компетенцією розуміють вміння: моделювати реальні об'єкти, процеси чи явища за допомогою математичних об'єктів, ставити відповідні математичні задачі; аналізувати, змінювати умову задачі, виробляти алгоритм розв'язання та реалізовувати його на практиці; працювати з формулами, раціонально виконувати різні обчислення; будувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їхні властивості; знаходити кількісні характеристики геометричних фігур та ін.

Метою навчання за профільним рівнем є забезпечення «свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою» [36]. У навчальній програмі цих рівнів деталізовано тактичні освітні завдання та критерії сформованості ключових та предметної компетентностей.

Порівняно з рівнем стандарту посилюється профілізація навчання, зв'язок математики з профільними дисциплінами, розширюється коло задач прикладного змісту. Основна увага приділяється не лише засвоєнню програмових знань, а й виробленню вмінь застосовувати їх до розв'язування задач прикладного і практичного спрямування, математичного моделювання.

Зауважимо, що навчання математики на профільному рівні і профільному, з початком вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, зумовлене профілізацією старшої загальноосвітньої школи і має ширші можливості для системного вивчення предмета в порівнянні з рівнем стандарту.

Навчальна програма з математики побудована на компетентнісній основі і передбачає засвоєння певних прийомів математичної діяльності та навичок застосування їх до розв'язування практичних задач [35–37].

Навчання математики у старшій школі спрямоване на засвоєння математичних, предметних компетенцій та формування ключових компетентностей. У навчальній програмі визначено такі компетентності та основні параметри, характерні для вивчення предмета – уміння, ставлення, навчальні ресурси. Деталізуємо висловлене для математичної, інформаційно-цифрової та навчальної компетентностей (додаток Б).

Формування ключових компетентностей розглядається як системний, інтегрований і синергетичний процес. Навчальною програмою визначено чотири наскрізні лінії цієї діяльності: «Екологічна безпека та сталий розвиток», «Громадянська відповідальність», «Здоров’я і безпека», «Підприємливість та фінансова грамотність». Засобами реалізації вивчення предмета за вказаними лініями є: креативне та толерантне навчальне середовище; змістове наповнення, згідно з програмою певного навчального рівня; предмети, курси, факультативи, система позакласної навчальної роботи.

В основу відбору змісту навчального матеріалу покладено принципи: науковість і можливість забезпечення високого рівня теоретичної математичної підготовки як основи професійної підготовки майбутнього фахівця, наступність і системність навчання, диференційований і рівневий підхід, можливість для самостійного набуття нових знань і способів навчальної діяльності, врахування надбань вітчизняної математичної освіти і методичної школи, формування всебічно розвиненої і компетентної особистості.

Навчальну програму представлено у формі таблиці, що містить дві колонки: очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів та зміст навчального матеріалу.

Головною змістовою лінією курсу «Алгебри і початків аналізу» є функціональна лінія. Набувають розвитку й інші змістові лінії: обчислення, вирази і перетворення, рівняння та нерівності. Розглядаються обчислення, оцінювання та порівняння значень тригонометричних, степеневих, показникових, логарифмічних виразів. Вивчаються елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики. У додатку В представлено розподіл навчального матеріалу за рівневим розкладом: рівень стандарту [35], профільний рівень [36], профільний рівень (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) [37].

Як і в основній школі, вивчення геометрії у старшій школі, спрямоване на формування в учнів правильного сприйняття навколишнього світу. Але стереометрія має для цього більше можливостей. Зокрема у питаннях розвитку логічного мислення, формування просторової уяви, вироблення навичок розв’язання практичних завдань. У рівневому розкладі рівень стандарту [35], профільний рівень [36], Профільний рівень (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) структура розподілу навчального матеріалу представлена в додатку Г.

Підсумовуючи зауважимо, що навчальна програма з математики у старшій школі побудована на компетентнісній основі з урахуванням диференційованого підходу до навчання математики і передбачає засвоєння певних прийомів математичної діяльності та навичок застосування їх до розв’язування практичних задач. Формування ключових компетентностей розглядається як системний, інтегрований і синергетичний процес.

1.2. Основний зміст навчального матеріалу з математики для класів гуманітарного профілю

Основною метою навчання на рівні стандарту є формування навичок застосовувати математику до розв’язання прикладних задач і забезпечення умов для формування практичної компетентності школярів. Під практичною компетенцією розуміють вміння:

- моделювати реальні об’єкти, процеси чи явища за допомогою математичних об’єктів, ставити відповідні математичні задачі;

- аналізувати, змінювати умову задачі, виробляти алгоритм розв'язання та реалізовувати його на практиці;

- працювати з формулами, раціонально виконувати різні обчислення;

- будувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їхні властивості;

- класифікувати геометричні фігури на площині і у просторі, встановлювати їх властивості, зображати просторові фігури та виконувати побудови на зображеннях;

- проводити вимірювання реальних предметів, аналізувати й оперувати одержаними вимірами;

- знаходити кількісні характеристики геометричних фігур та тіл;

- оцінювати шанси настання тих чи інших подій та ін.

Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, гуманітарної підготовки учнів старшої школи. Її рівень свідчить про готовність випускників закладів загальної середньої освіти до розв'язання повсякденних життєвих проблем, до оволодіння професійною освітою, до самореалізації в умовах конкурентного середовища.

Практична спрямованість процесу навчання математики у класах гуманітарного профілю забезпечується:

- засвоєнням учнями програмових знань, умінь і навичок навчального, практичного і прикладного застосування математики;

- математичним моделюванням реальних об'єктів, явищ і процесів, вмінням будувати математичні моделі та створенням запасу математичних моделей;

- вмінням оперувати математичними моделями, проводити дослідження у межах визначених моделей, транслювати одержані результати на реальну обстановку;

- внутрішньо-предметною та міжпредметною інтеграцією знань;

- широким використанням інноваційних технологій, зокрема, інформаційно-комунікаційних, візуальним інтерпретуванням математичної діяльності;

- практичною експериментальною, дослідницькою та творчою діяльністю учнів та ін.

Важлива роль у процесі навчання математики в старшій школі належить змісту навчального матеріалу. Зміст навчання у навчальній програмі структуровано за темами алгебри і початків аналізу та геометрії із зазначенням послідовності тем та кількості годин на їх вивчення. Звичайно, враховуючи демократизацію процесу реформування системи профільної освіти, розподіл змісту і навчального часу є орієнтовним.

Предметоутворювальним компонентом змісту навчання математики виступають математичні знання, які відображаються у вигляді термінів, уявлень, понять та законів, залежностей та співвідношень, ознак та властивостей. Формування компетентнісно орієнтованого змісту навчання математики в школі має проходити з дотриманням основних дидактично-методичних принципів: соціальної ефективності, пріоритету розвивальної функції навчання та діяльнісного підходу до навчання, наступності змісту, відповідності, науковості і прикладної реалізованості, діяльнісного підходу до навчання, диференційованої реалізованості, модульності, якісного поєднання алгебраїчного та геометричного матеріалу, концентризму [23, с. 29].

До навчальних досягнень учнів з математики, які підлягають оцінюванню, належать ключові та математичні компетенції:

- теоретичні знання, що стосуються математичних понять, тверджень, теорем, властивостей, ознак, методів та ідей математики;

- знання, що стосуються способів діяльності, які можна подати у вигляді системи дій (правила, алгоритми);

- здатність безпосередньо здійснювати вже відомі способи діяльності відповідно до засвоєних правил, алгоритмів (наприклад, виконувати певне тотожне перетворення виразу, розв'язувати рівняння певного виду, виконувати геометричні побудови, досліджувати функцію на монотонність, розв'язувати текстові задачі розглянутих типів тощо);

- здатність застосовувати набуті знання і вміння для розв'язання навчальних і практичних задач, коли шлях, спосіб такого розв'язання потрібно попередньо визначити (знайти) самому.

Проаналізуємо зміст навчального матеріалу з математики для класів гуманітарного профілю, визначений навчальною програмою і реалізований у навчальних підручниках [5; 7; 11; 19; 31; 32; 35; 38; 39].

У навчальній темі «Функції, їхні властивості та графіки» алгебри і початків аналізу 10 класу класифікуються числові функції та характеризуються їх властивості. Розглядаються способи задання функцій, парні та непарні функції. На основі вивчення кореня *n*-го степеня, арифметичного кореня *n*-го степеня і його властивостей аналізуються степеневі функції, досліджуються їх властивості та будуються графіки.

Друга тема називається «Тригонометричні функції» До неї увійшли такі питання: тригонометричні функції кута (синус, косинус, тангенс, котангенс) і радіанне вимірювання кутів; тригонометричні функції числового аргументу, основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу і формули зведення; тригонометричні функції як періодичні функції, їх властивості та графіки;формули додавання для тригонометричних функцій та наслідки з них; найпростіші тригонометричні рівняння.

На вивчення теми «Похідна та її застосування» на рівні стандарту навчальною програмою відводиться всього 14 годин. Серед основних питань: границя функції в точці; з'ясування геометричного (кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції) і фізичного (миттєва швидкість руху матеріальної точки) змісту похідної; правила диференціювання; ознаки сталості, зростання й спадання функцій; екстремуми функції; застосування похідної до дослідження функцій та побудови їхніх графіків; найбільше і найменше значення функції на проміжку.

Першою темою алгебри і початків аналізу 11 класу є «Показникова та логарифмічна функції». У межах цієї теми вивчаються властивості та графіки цих функцій, вводиться поняття логарифма та розглядаються його властивості, розв'язуються найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

У рамках інтегрального числення вивчається первісна та її властивості, розглядається визначений інтеграл та тлумачиться його геометричного змісту, розв'язуються задачі на обчислення площ плоских фігур за допомогою інтегралів.

Завершальною темою курсу алгебри і початків аналізу є «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики». У ній розглядаються елементи комбінаторики, зокрема, перестановки, розміщення і комбінації без повторень, дається класичне визначення ймовірності випадкової події, характеризуються вибірки за розмахом, модою, медіаною, середнім значенням, наводиться методика графічного подання інформації про вибірку.

Змістом навчальної теми курсу геометрії «Паралельність прямих і площин у просторі» визначено питання: основні поняття, аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них; розгляд випадків взаємного розміщення прямих у просторі; введення паралельного проектування, розгляд його властивостей та зображення стереометричних фігур; умова паралельності площин, прямої і площини.

У темі «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» розглядається: перпендикулярність прямих, прямої і площини, площин, кут між площинами. Змістом навчального матеріалу передбачено вимірювання відстаней та кутів у просторі, зокрема, від точки до площини, від прямої до площини, між площинами; кутів між прямими, між прямою і площиною, між площинами.

У межах навчального змісту теми «Координати і вектори» означаються прямокутні координати в просторі, описуються формули координати середини відрізка та відстані між двома точками. У підтемі векторів розглядаються вектори у просторі та операції над ними, формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками, перетворення симетрії відносно початку координат та координатних площин.

Серед многогранників вивчаються опуклі многогранники, призма, зокрема, пряма і правильна призми, паралелепіпед, піраміда, в тому числі правильна піраміда, поняття перерізів многогранників, розглядаються площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди.

У темі «Тіла обертання» розглядаються циліндр, конус, їх елементи, осьові перерізи циліндра і конуса, перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі, куля і сфера, переріз кулі площиною.

Підсумковою в курсі геометрії 11 класу є тема: «Об’єми і площі поверхонь геометричних тіл». Змістом матеріалу передбачено розгляд поняття об’єму тіла і його властивостей, формул об’ємів призми, паралелепіпеда, піраміди, циліндра, конуса, кулі та площ бічної і повної поверхонь циліндра, конуса, сфери.

Змістовий компонент навчання математики на засадах компетентнісного підходу, як зазначає Г. Гоменюк, складається з двох частин – нормативної, яка визначена навчальною програмою, та компетентнісно орієнтованої, яку найкраще реалізувати у формі системи компетентнісних задач. Під «компетентнісно орієнтованою задачею, мається на увазі «інноваційна форма організації навчального матеріалу, змодельована у вигляді життєвої ситуації, яка дозволяє розвивати узагальнені навчальні вміння, забезпечити застосування математичних знань та вмінь у нових, незнайомих ситуаціях, отримувати досвід розв’язування прикладних проблем соціального характеру» [15, с. 90].

У методиці навчання математики, як зазначає В. Ачкан, існують різні тлумачення понять «прикладна» і «практична» спрямованість. Ю. Калягін і В. Пікан розрізняють ці поняття. На їхню думку, «прикладна спрямованість» навчання математики – це орієнтація змісту і методів навчання на застосування математики в техніці й суміжних науках; у професійній діяльності; в народному господарстві та побуті; «практична спрямованість» навчання математики – це спрямованість змісту і методів навчання на розв'язування задач і вправ, на формування у школярів навичок самостійної діяльності математичного характеру. В. Даллінгер вважає, що прикладна спрямованість математичних знань повинна означати як їх практичне застосування, так і їх теоретичне значення в самій математиці. Прикладна спрямованість навчання математики найбільше реалізується під час розв'язування прикладних задач. Під прикладною задачею в школі здебільшого розуміють задачу, яка виникла поза курсом математики і розв'язується математичними методами і способами, які вивчаються в шкільному курсі [1, с. 13–14].

Навчальною програмою визначаються три етапи розв'язування прикладних задач:

1) формалізація (перехід від ситуації, описаної в задачі, до формальної математичної моделі цієї ситуації, і від неї — до чітко сформульованої математичної задачі);

2) розв'язування задачі у межах побудованої моделі;

3) інтерпретація одержаного розв'язання задачі та застосування його до вихідної ситуації.

Підсумовуючи зауважимо, що зміст навчального матеріалу з математики для класів гуманітарного профілю, визначений навчальною програмою, створює можливості для диференційованого вивчення математики, формування математичної і ключових компетентностей, набуття практичних навичок розв'язувати прикладні задачі тощо.

1.3. Різні форми навчання математики

Під формою організації навчання в педагогіці розуміють «зовнішнє вираження узгодженої діяльності вчителя і учнів, що здійснюється у встановленому порядку і в певному режимі» [64, с. 145].

У наукових і навчально-методичних джерелах пропонуються різні класифікації форм навчання. Творче опрацювання дозволяє диференціювати форми навчання, які можуть бути використані під час навчання математики в класах гуманітарного профілю так:

- за дидактичною метою – теоретичні заняття (лекція, гурток, конференція), комбіновані заняття (урок, семінар, консультація), практичні заняття (практикум розв'язування задач, виконання проєкту, індивідуальне дослідне завдання);

- за контингентом учасників – колективні або фронтальні, групові (у великих групах, у малих групах, у парах), індивідуальні;

- за тривалістю навчального заняття – традиційний урок, спарені уроки, уроки «без дзвінків»;

- за часом проведення – класно-урочне навчання (урок, практикум, презентація), позаурочне заняття (конференція, гурток, елективне заняття), позашкільне заняття (екскурсія, інтелектуально-прикладне змагання, онлайн-спілкування);

- за місцем проведення – шкільні (урок, гурток, практикум), позашкільні заняття (екскурсія, інтелектуально-прикладне змагання, онлайн-спілкування).

Ми схильні, без додаткових корекцій, прийняти до користування практично зручну тривимірну класифікацію форм організації навчання, запропоновану І. Лов'яновою, яка включає:

- загальні форми організації навчання (індивідуальна, парна, групова, колективна, фронтальна);

- зовнішні форми організації навчання (урок, семінар, лекція, конференція, самостійна робота, екскурсія);

- внутрішні форми організації навчання (вступне заняття, урок формування практичних навичок, урок узагальнення і систематизації знань, урок контролю знань, умінь і навичок, комбінований урок) [29, с. 270].

Оптимізація вибору форм занять гуманітарного профілю пов'язана з урахуванням таких факторів:

- наближенням умов діяльності учнів на уроках математики до умов виконання завдань певних професій;

- використанням алгоритмічних прийомів навчальної і прикладної діяльності, сучасних технологій і засобів навчання;

- активізацією творчої діяльності учнів на основі педагогіки співпраці, толерантності, суб'єктності;

- вибором змісту навчального матеріалу, який би відповідав сфері обраного напрямку професійного розвитку;

- урахуванням специфіки гуманітарного профілю і рівня навчальних досягнень учнів.

Ефективними практичними організаційно-педагогічними формами компетентнісного навчання математики у старшій школі, на нашу думку, є:

- сучасний урок, елементами якого виступають перспективні методи і форми навчання, презентація результатів творчої діяльності, розв'язування складних задач, практикум, робота в Інтернет-мережі тощо;

- система позаурочної роботи, яка включає індивідуальні заняття та консультації, виконання самостійних творчих завдань, участь в предметній олімпіаді, участь у Міжнародному чемпіонаті з розв'язування логічних математичних задач, участь Всеукраїнському етапі Міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру», масових пізнавальних заходах;

- заходи громадської участі (громадський огляд знань, учнівсько-батьківські інтелектуальні заходи, розв'язування креативних задач в колі сім'ї тощо).

Основною формою організації навчання математики виступає урок. Розробка концепції класно-урочної системи її суспільне утвердження й поширення, обґрунтування уроку як основного шкільного заняття пов'язано, як зазначає І. Кучеренко, з ім'ям відомого чеського педагога XVII століття Я. Коменського [24, с. 161–162]. Творчо опрацювавши основну дидактичну працю Я. Коменського «Велика дидактика» [21], можна назвати основні ознаки, особливості й характеристики підготовки і проведення стосовно уроку математики: визначення місця конкретного уроку в системі математичної підготовки, чітке окреслення його мети; прагматична постановка завдань – «опрацювати навчальний матеріал, пояснений учителем і розміщений у концентричний спосіб» [24, с. 162]; розробка структури уроку, яка б передбачала: початок уроку – повторення матеріалу, опитування та мотиваційну хвилинку; власне хід заняття – пояснення, спільна суб'єктна праця, пізнання; закінчення – виправляння, використання; вибір і використання оптимальних методів навчання; раціональний розподіл часу заняття; розробка дидактичного наповнення уроку – вправи для актуалізації відомого матеріалу, для пізнання нового, для закріплення; вправи для органів чуття, розуму, пам'яті, історії, стилю, мови, голосу, норову, благочесті [24, с. 162].

У подальшому проблематика уроку як предмета науково-педагогічних досліджень не виходила з поля зору учених. Насамперед, це стосувалося означення терміна урок. Наведемо деякі з таких дифініцій.

Найбільш комплексне означення уроку подано М. Фіцулою, який розглядає урок як форму «організації навчання, при якій навчальні заняття проводяться вчителем з групою учнів постійного складу, одного віку і рівня підготовки протягом певного часу і відповідно до розкладу» [64, с. 145]. Подібні означення наведені у посібниках з педагогіки Ю. Бабанського, І. Харламова та М. Ярмаченка. М. Махмутов визначає урок як цілісну систему, основну форму організації вчителем єдиного процесу навчання, виховання і розвитку. Н. Мойсеюк називає урок відрізком навчального процесу, який є викінченим у змістовому часовому й організаційному відношеннях [33].

Класифікуючи уроки за типами: урок засвоєння нових знань, урок формування умінь і навичок, урок застосування знань, умінь і навичок, урок узагальнення і систематизації знань, урок перевірки, оцінки і корекції знань, умінь і навичок, комбінований урок, В. Онищук розкриває загальні вимоги до уроку з чіткою орієнтацією на кінцевий результат. Серед них: засвоєння міцних знань; формування навичок і вмінь; забезпечення виховної спрямованості; всебічний розвиток особистості школяра, розвиток загальних і специфічних здібностей; розвиток самостійності, творчості й ініціативності; формування навичок самостійної праці з різними видами інформації; мотивація навчальної і пізнавальної діяльності; піднесення престижу навчання в особистому й суспільному аспектах [41].

Серед вимог до сучасного уроку І. Підласий виділяє: ретельну підготовку, діагностування, прогнозування, проектування та планування кожного уроку; використання новітніх досягнень педагогічної науки і практики; оптимізацію дидактичних принципів і правил, встановлення міжпредметних зв’язків; створення сприятливих умов для продуктивної навчальної діяльності; логічність навчального процесу, набуття нових знань на основі засвоєних; емоційність навчального процесу й активізація пізнавальної діяльності учнів; ефективність використання педагогічних засобів; прикладна спрямованість навчання; мотивація навчальної діяльності; засвоєння програмових знань, умінь і навичок, раціональних прийомів мислительської діяльності; формування вміння навчатися, потреби постійно поповнювати свій інтелектуальний рівень [52].

Н. Островерхова наголошує, що у підходах до трактування терміна урок треба враховувати дві важливі його особливості:

- урок як певна змістова і часова частина навчального процесу;
- урок як спільна суб’єктна діяльність вчителя і учнів.

Із цієї позиції та системно-диференційованого підходу до уроку як складної соціально-педагогічної системи дослідниця означає урок як «соціально-педагогічну систему, що інтегрує змістові субсистеми (організаційну, дидактичну, психологічну, виховну, санітарно-гігієнічну) на основі об'єктивних взаємозв'язків між ними; діяльнісні субсистеми (педагогічна діяльність учителя, навчальна діяльність учнів), взаємодія яких спрямована на реалізацію змістових підсистем уроку та досягнення його результативності – позитивних змін в освіченості, вихованості, розвитку учнів» [40, с. 10, 14]. Структурно-змістова модель уроку як педагогічної системи наведена у додатку А.

Основною педагогічною формою реалізації компетентнісного навчання є урок. Найпоширенішим уроком у початкових класах є комбінований урок. Структура комбінованого уроку математики, побудованого на засадах компетентнісного підходу передбачає органічне поєднання таких етапів:

1) організація і налаштування класу;

2) стимулювання та мотивація навчально-пізнавальної діяльності учнів;

3) актуалізація опорних знань учнів і способів дій;

4) формування нових знань і способів дій;

5) формування вмінь і навичок;

6) закріплення й узагальнення вивченого матеріалу;

7) рефлексія навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Особливістю сучасного уроку математики є інтеграція знань. Метою інтегрованих уроків створення передумов для різнобічного розгляду учнями певного об'єкта, поняття, явища, формування системного мислення, збудження уяви, позитивного емоційного ставлення до пізнання. Ознаками інтегрованого уроку є: взаємопов'язаність конкретних і перспективних пізнавальних завдань; розв'язання окресленого кола завдань, які можна виконати тільки інтегруванням; органічне входження у структуру навчально-виховного процесу.

Відмінність інтегрованого уроку від традиційного полягає в тому що:

- предметом розгляду на інтегрованому уроці є багатопланові об'єкти, відомості про сутність яких знаходяться в різних навчальних дисциплінах;

- використовується велика кількість міжпредметних зв'язків при різноаспектному розгляді однопланових об'єктів;

- своєрідна структура і методика уроку сприяють його організації та реалізації мети і завдань.

Характерними тенденціями удосконалення методики і практики сучасного уроку алгебри і початків аналізу є:

- побудова і проведення уроку на компетентнісній основі;

- інтеграція знань з математики та інших навчальних предметів;

- активізація пізнавальної діяльності учнів шляхом використання «активних» методів навчання;

- забезпечення діяльнісного підходу, «суб'єкт-суб'єктної» взаємодії учнів та вчителя;

- використання сучасних технологій навчання та перспективного педагогічного досвіду;

- впровадження індивідуальних вчительських методик, вироблення особистісної системи і структури уроку та його моделювання.

Реалізація компетентнісного підходу до проведення уроків математики передбачає використання як традиційних так і нових методів навчання. До традиційних методів організації навчально-пізнавальної діяльності треба віднести розповідь, пояснення, робота з підручником, розв'язування задач і вправ, самостійну роботу [64, с. 132–138].

В умовах сучасного інформаційного суспільства все частіше ведуть мову про інноваційне навчання, яке здійснюється шляхом використання інноваційних технологій і новітніх методик. Під інноваційним (від лат. *innovatio* – «оновлення, зміна») навчанням розуміється зорієнтована на динамічні зміни в навколишньому світі навчальна та освітня діяльність, яка ґрунтується на розвитку різноманітних форм мислення, творчих здібностей, високих соціально-адаптаційних можливостей особистості. Інноваційні педагогічні технології визначаються як процес цілеспрямованого, систематичного й послідовного впровадження в практику оригінальних, новаторських способів, прийомів педагогічних дій і засобів, що охоплюють цілісний навчальний процес від визначення його мети до очікуваних результатів [17, с. 9–11]. До інноваційних методів відносяться ті з них, які спонукають учнів до здобуття нових знань. Серед них: евристична бесіда, творчі задачі і вправи, візуалізація за допомогою сучасних електронних засобів, поєднання індуктивного й дедуктивного навчання, навчальна дискусія і колективне розв'язання проблем, метод проєктів та ін.

Реформування системи математичної освіти та компетентнісний підхід до освітньої діяльності розкривають широкі можливості для творчого розвитку і втілення методичних можливостей вчителя математики старшої школи. Навчальною програмою визначено аспекти, врахування яких сприяє ефективності формування компетентнісної особистості. Зокрема, вивчаючи курс математики за програмою гуманітарного профілю, педагогу доцільно:

- прагматично розподіляти зміст навчального матеріалу, коригувати послідовність його вивчення і час, відведений на засвоєння;

- використовувати різні засоби, форми, методи навчання, методичні шляхи і прийоми викладення конкретного матеріалу;

- поряд з традиційними уроками вивчення нового матеріалу, формування вмінь розв'язувати задачі, узагальнення та систематизації знань, контролю і корекції знань та ін., практикувати лекційно-практичну форму проведення занять, практикуми, презентації;

- застосовувати модульне (блочне) вивчення навчальних питань теми;

- практикувати рівневу диференціацію та індивідуалізацію навчання;

- значну увагу приділяти самостійній роботі школярів, виконанню індивідуальних творчих завдань з теми;

- впроваджувати сучасні технології моніторингу та контролю за процесом засвоєння знань, умінь та навичок (поточне, тестове, зокрема комп'ютерне, тематичне, семестрове, річне оцінювання);

- пропонувати історичний матеріал.

Підсумовуючи зауважимо, що вибір форм навчання математики у старшій школі у кожному конкретному випадку обумовлюється змістом і цілями навчання, рівнем методичної озброєності вчителя, рівнем навчальних досягнень учнів та специфікою гуманітарного профілю.

Висновки до розділу 1

Проаналізувавши теоретичні основи навчання математики учнів гуманітарних класів, можна зробити висновки.

1. Диференційований підхід як засіб реалізації компетентнісного навчання математики у старшій школі забезпечується можливістю оптимального вибору відповідного професійного профілю. Навчання математики учнів гуманітарних класів здійснюється за програмою рівня стандарту.

2. Зміст навчального матеріалу з математики для класів гуманітарного профілю, визначений навчальною програмою рівня стандарту, створює можливості для диференційованого вивчення математики, формування математичної і ключових компетентностей, набуття практичних навичок розв’язувати прикладні задачі тощо.

3. Вибір форм навчання математики учнів гуманітарних класів достатньо широкий. Ефективними практичними організаційно-педагогічними формами компетентнісного навчання математики у старшій школі є: сучасний урок, елементами якого виступають перспективні методи і форми навчання, система позаурочної роботи, яка включає індивідуальні заняття та консультації, виконання самостійних творчих завдань, заходи громадської участі.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ КЛАСІВ ГУМАНІТАРНИХ ПРОФІЛІВ

2.1. Оптимізація організаційних форм навчання в процесі компетентнісного вивчення функціональної змістової лінії

Формування в учнів ключових і математичної компетентностей відбувається впродовж всього часу вивчення математики у загальноосвітній школі і завершується в курсі алгебри і початків аналізу. Однією з важливих ланок цього процесу виступає вивчення функціональної змістової лінії.

Функціональна змістова лінія курсу алгебри і початків аналізу охоплює вивчення тригонометричних, степеневих, показникових та логарифмічних функцій, а також тем «Похідна» та «Інтеграл». Диференціальне й інтегральне числення відкриває широкі можливості для використання математичних знань у різних галузях науки і практики, для об'єктивної оцінки ролі і значення математичних ідей у суспільному житті, для формування наукового світогляду.

На основі вивчення тригонометричних, степеневих, показникових та логарифмічних функцій розвивається змістова лінія тотожних перетворень. Учні засвоюють тригонометричні формули, показникові та логарифмічні тотожності, тотожності пов'язані з ірраціональними виразами, які пізніше використовують для спрощення виразів, доведення тотожностей, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, побудови графіків складних функцій тощо. З урахуванням властивостей зазначених функцій реалізується змістова лінія рівнянь і нерівностей.

Основною метою функціональної змістової лінії є формування в суб'єктів пізнання уявлення про функції як математичної моделі (словесної, табличної, графічної, аналітичної) залежності між величинами й об'єктами будь-якої природи. На основі аналізу нормативних та методичних джерел [16; 18; 59, с. 332–333], особистого досвіду, можна стверджувати, що вивчення функцій сприяє засвоєнню предметних компетенцій і формуванню математичної компетентності, зокрема:

- формуванню наукового світогляду, цілісного уявлення про функціональну числову залежність, властивості і графіки функцій та вміння використовувати їх для опису і вивчення явищ, процесів та об'єктів;
- розширенню математичного апарату, засвоєнню основних формул, тригонометричних, показникових і логарифмічних тотожностей та вмінню виконувати на їх основі тотожні перетворення відповідних виразів, розв'язувати відповідні рівняння й нерівності, формуванню умінь складати математичні моделі залежностей за умов практичних задач;
- ознайомленню з ідеями і методами диференціального та інтегрального числення та формуванню вмінь застосовувати їх до дослідження функцій і побудови графіків, обчислення площ криволінійних трапецій та об'ємів найпростіших тіл обертання, розв'язування інших прикладних і практичних задач;
- розширенню і поглибленню уявлень про математику як елемент історичної і сучасної загальнолюдської культури, про застосування її в практичній діяльності, різних галузях науки;
- розвитку пізнавального інтересу, креативності мислення, здібностей, пам'яті, просторового уявлення й уяви.

Основною дидактичною формою засвоєння знань, умінь і навичок функціональної змістової лінії є **урок**. За типом це можуть бути різні заняття.

Вступний урок у 10 класі можна провести у вигляді лекції з елементами бесіди. Треба повторити основні відомості про функції , які учні вивчили в основній школі. Також учням треба пояснити, що поняття функції формувалося впродовж тривалого історичного періоду. Зміст лекції може бути таким: «Ще в Стародавньому Вавилоні складали таблиці обернених значень чисел, їх квадратів і кубів, сум квадратів і кубів чисел, що в сучасному розумінні асоціюється з таблицями значень функцій $y=\frac{1}{x}, y=x^2, y=x^3, y=x^2+x^3.$ Використовувалися також функції двох змінних, зокрема, при складанні таблиць додавання та множення.

У Стародавній Греції розв'язували деякі задачі на знаходження найбільшого та найменшого значення, складали таблиці залежностей між довжинами хорд та мірами дуг, що їх стягують, досліджували питання астрономії за допомогою тригонометрії [2, с. 122; 3].

Функціональна залежність величин була присутня в математичних дослідженнях, однак, до XVII століття самого поняття функції не вводилося. Р. Декарт почав використовувати функцію для досліджень в аналітичній геометрії і механіці. Він, як і Г. Лейбніц та інші вчені цього періоду, функцію уявляли як деяку лінію, з тією умовою, що ордината точки на ній є функція абсциси.

Наочне геометричне пояснення поняття функції та введення самого терміна «функція» належить Г. Лейбніцу і датоване 1692 роком. Воно використовувалося в дуже вузькому значенні – для вираження залежності довжини відрізків, пов'язаних з кривою, від положення точки на кривій [62, с. 6].

Власне термін «функція» використовувався братами Я. і Й. Бернуллі для характеристики різних відрізків, зв'язаних з точками деякої кривої. У 1718 році Й. Бернуллі, спираючись на результати досліджень Г. Лейбніца та І. Ньютона, вперше вводить означення функції вільне від геометричних представлень: «Функцією змінної величини називається кількість, утворена яким завгодно способом з цієї змінної величини і сталих». Він також запропонував розуміти під функцією аналітичний вираз.

Л. Ейлер розвинув пояснення значення поняття функції у своїй книзі «Введення в аналіз нескінченно малих» (1748 р.) так: «Функція змінної кількості є аналітичним виразом, складеним будь-яким способом з цієї змінної кількості, а також із чисел або постійних кількостей». Однак, вже у передмові до книги «Диференціального числення» (1755 р.) дослідник уточнює й узагальнює це означення. Він наводить таке формулювання: «Коли деякі кількості залежать від інших таким чином, що при зміні останніх і самі вони підлягають зміні, то перші називаються функціями других». Л. Ейлеру належить також звичне позначення функції $f(x)$ [63, с. 48–49].

Перші означення функції Й. Бернуллі та Л. Ейлера здійснені з урахуванням алгебраїчного виразу, що її задає. Таке тлумачення, як зазначає З. І. Слєпкань, звужує поняття функції принаймі з двох причин: 1) деякі функціональні залежності не можна задати алгебраїчним виразом (формулою); 2) та ж формула може задавати різні функції (наприклад, $y = x, y = \sin(\arcsin x) = x$). Науковець стверджує, що таке означення функції гальмувало, деякий час, розвиток математичної науки та її застосування [59, с. 236].

Загалом, наукові дослідження Л. Ейлера сприяли розвитку математичного аналізу. Математичний аналіз він розглядав як науку про функції і наголошував, що «весь аналіз нескінченно малих обертається навколо змінних кількостей та їх функцій». Вчений допускав введення в математичний аналіз різних типів функцій: «явних» і «неявних», заданих аналітично і графічно, тригонометричних, показникових, логарифмічних.

Розвиваючи точку зору Л. Ейлера, М. І. Лобачевський у праці «Про зникнення тригонометричних рядків» (1834 р.) зауважує, що функцією від *x* треба називати певне число, яке змінюється зі зміною самого *x*. Ця функціональна залежність може бути задана аналітичною формулою, за допомогою якої можна випробовувати всі числа і вибрати одне з них, або існувати і залишатися невідомою [28, с. 43].

Відомий німецький математик П. Діріхле (1837 р.) в основу загального означення функції поклав ідею відповідності. Автор пояснює, що змінна *y* є функцією незалежної змінної *x*, якщо існує відповідність, задана словесно, таблично, графічно або аналітично, при якій кожному значенню *x*, з деякого числового проміжка, відповідає певне значення *y*.

Прикладом загального означення функції може слугувати відома в математиці іменна функція Діріхле:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & якщо \quad x-раціональне\\ 0, & якщо \quad x-ірраціональне.\end{cases}$$

Подальше вдосконалення пояснення сутності поняття функції пов'язане з теоретико-множинним підходом до аналізу математичних знань. Починаючи з другої половини XIX століття для означення функції використовують ідею відповідності, доповнену ідеєю множин: «Якщо кожному елементу *x* множини *M* поставлено у відповідність деякий елемент *y* множини *N*, то кажуть, що на множині *M* задана функція $y=f(x)$, або, що множина *M* відображається на множину *N*» [2, с. 124–125].

Розвиток поняття функції у минулому столітті відбувався у таких практично орієнтованих напрямках: дослідження функцій, які виходять за рамки класичного означення терміна (наприклад дельта-функція П. Дірака), вивчення «функцій області», за допомогою яких описують фізичну сутність розглядуваних явищ і процесів (М. Гюнтер), застосування функцій до розв'язування задач математичної фізики (Г. Шилов), подальший розвиток узагальненої теорії функцій та її частинних випадків (С. Соболєв).

З урахуванням еволюційних аспектів розвитку й розширення спектру досліджень проблематики функціональної залежності можна виділити декілька підходів до теперішнього тлумачення поняття функції наведених у шкільних підручниках з алгебри і початків аналізу та посібниках з математичного аналізу.

1. Функція розглядається як функціональна залежність змінних величин: «Залежність змінної *y* від змінної *x* називається функцією, якщо кожному значенню *x* відповідає єдине значення *y*» [38, с. 12]; «залежність, за якої кожному числу *x* із множини D за певним законом відповідає одне дійсне число *y*, і записують *y* = *f* *(x)*» [11, с. 10]; «Величина *y* називається функцією змінної величини *x* в області визначення *D*, якщо кожному

значенню *x* з цієї області відповідає одне відповідне значення величини *y*» [8, с. 25].

2. Функція визначається як відповідність або відношення між певними множинами: «Функцією $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами *D* і *E*, за якої кожному значенню змінної *x* відповідає одне й тільки одне значення змінної *y*» [25]; функція – це «відповідність, при якій кожному значенню змінної *x* з деякої множини *D* відповідає єдине значення змінної *y*» [5, с. 8].

3. Функція розглядається як закон, правило відповідності між множинами: «Нехай задано дві змінні *x* та *y* з областями зміни *D* та *E*. Припустимо, що змінна *x* може набувати без будь-яких обмежень довільних значень з множини *D*. Тоді змінна *y* називається функцією від змінної *x* на області її зміни *D*, якщо за деяким законом чи правилом кожному значенню *x* з множини *D* ставиться у відповідність одне визначене значення *y* з множини *E*» [63, с. 40].

Організаційною формою вивчення функціональних залежностей і способів задання функцій може бути **інтеграція знань**. В якості практичного застосування поняття функції наведемо приклади функціональних залежностей, наведені у діючих підручниках з алгебри і початків аналізу та системного курсу математичного аналізу:

- площі круга як функції від його радіуса ($S = \pi r^2$);

- відстані, яку пролітає вільно падаюче тіло в пустоті, від часу падіння ($s = \frac{1}{2} \cdot gt^2$);

- температури повітря в даному місці, вимірюючи її через кожну годину впродовж доби, від часу тощо [8, с. 26–27];

- часу скачування інформації від її розмірів і продуктивності комп’ютера;

- рекомендованої добової тривалості сну дитини від віку x ($x<18; t=16-\frac{x}{2}$);

- опору провідника від температури в градусах ($R=R_0(1+a(t-t_0))$;

- доходу виробництва A від ціни P реалізованої продукції і обсягу продажу O ($A=P\cdot O$) [5, с. 7];

- молярної концентрації розчиненої речовини від кількості розчиненої речовини та об'єму розчину ($C_B=\frac{n_B}{V}$, де n_B – число молів, V – об'єм розчину);

- роздільної здатності телескопа від діаметра об'єктива ($r=\frac{140}{D}$, де r – кутова роздільна здатність телескопа у секундах, D – діаметр об'єктива у міліметрах) [6, с. 15];

- врожайності від площі посіву, кількості внесених добрив, використання сучасної агрономії тощо.

Методика вивчення способів задання функцій передбачає демонстрацію їх на прикладах з різних сфер науки і практики.

Використанням прикладів з математики, наприклад, правил:«Кожному цілому числу поставити у відповідність його квадрат» [5, с. 9]; «Кожному числу поставити у відповідність квадрат цього числа, зменшений на 10» [19, с. 10]; функція *f(x)* – «ціла частина від числа *x*» або «найбільше ціле число, яке не перевищує *x*» [63, с. 41], можна пояснити сутність словесного способу задання функціональної залежності.

У природничих і технічних науках залежність між величинами часто встановлюється експериментально або під час спостережень. В таких випадках доцільно користуватися табличним способом задання функції. Табличний спосіб зручний при обчисленнях, коли область визначення функції складається із числа точок. Для прикладу наведемо табличне задання залежності рекомендованого добового сну дитини як функцію від віку x за даними експерименту (табл. 2.1) [8, с. 28]:

Таблиця 2.1

Залежність рекомендованої добової тривалості сну дитини від віку

t	13	12	11	10	9	8	7,5
x	6	8	10	12	14	16	17

Аналітичний спосіб вважають основним із способів задання функції. Він характеризується стислістю, компактністю задання, можливістю обчислення значення функції для будь-якого значення незалежної змінної з області її визначення, можливістю застосувати до даної функції апарат алгебри й математичного аналізу. Моделями аналітичного задання функцій виступають алгебраїчні формули функціональних залежностей: площі квадрата від його сторони ($S = a^2$); довжини кола від його радіуса ($C = 2\pi R$); змінної y від незалежної змінної x ($y = 2x + 3$) тощо.

Поряд із зазначеними позитивними особливостями, аналітичний спосіб не досить наочний і, часто надто громісткий в обчисленнях. Просте і наочне уявлення про якісну поведінку функції дає графічне представлення функціональної залежності. В цьому контексті зауважимо, що графіком функції (в системі декартових прямокутних координат) називають множину всіх точок, абсциси яких є значеннями незалежної змінної, а ординати – відповідними значеннями функції [8, с. 16; 10, с. 29].

Важливим складником підвищення ефективності навчання математики виступає **інтегрована форма проведення занять або їхніх фрагментів**. Наведемо план-конспект одного з розроблених занять (додаток Ґ).

Поняття функції об’єднує елементарні функції та функції, які виходять за межі елементарних. З-поміж елементарних функцій, які вивчаються на рівні стандарту виділяють: степеневу, показникову, логарифмічну, тригонометричні. Організаційною формою їх вивчення може бути **комбінований урок**. На нашу думку, ефективно використати такий алгортитм засвоєння компетенцій:

1) пропедевтичні відомості (історія, мотивація введення);

2) означення, графік, властивості;

3) приклади застосування в реальних процесах;

4) приклади розв’язування навчальних і прикладних задач;

5) контроль і корекція навчальних досягнень.

Розглянемо детальніше внутрішні форми організації навчальної діяльності учнів під час вивчення степеневої функції.

1. Лекція з елементами бесіди. Степенева функція базується на понятті степеня. Степені з натуральними показниками використовували ще в античні часи з геометричною прив’язкою, наприклад, для обчислення площ та об’ємів. Пояснювали, що a^2 – це площа квадрата зі стороною a, a^3 – об’єм куба з ребром a. Пізніше почали використовувати степені з дробовим та ірраціональним показником (Н. Орем, XIV ст.), з дробовим та цілим від’ємним показником (І. Ньютон, XVII ст.). Математичне тлумачення степеня як добутку довільної кількості множників дав у XVII ст. Р. Декарт. Він також увів позначення квадратного кореня, а фламандський математик С. Стевін на початку XVII століття запропонував розуміти під $a^{\frac{1}{n}}$ корінь $\sqrt[n]{a}$.

У сучасному курсі алгебри і початків аналізу під степеневою функцією розуміють функцію, задану формулою $y = x^{\alpha}$, де α – дане число, а x – аргумент [5, с. 40]. Область її визначення залежить від того, яким числом є α: натуральним, цілим, раціональним чи ірраціональним, тобто степенева функція поєднує в собі декілька різних видів функцій.

2. Фронтальна робота з підручником. На схематичному рисунку (рис. 2.1), запропонованому Г. Бевзом та В. Бевз, показано співвідношення між деякими видами функцій: функція $y = x$ (функція 1) є видовою до родових лінійної і степеневої функцій; функція $y = x^2$ (функція 2) є водночас квадратичною і степеневою; функція $y = x^{-1}$ (функція 3) є оберненою пропорційністю і степеневою [5, с. 43].

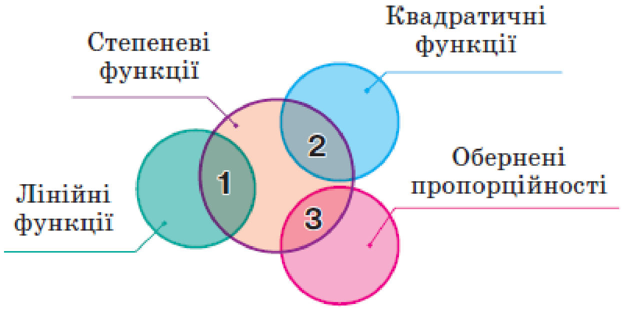


Рис. 2.1. Ілюстрація до завдання

3. Колективна евристична діяльність. За прикладами графіків різних степеневих функцій прочитати їх властивості (рис. 2.2)

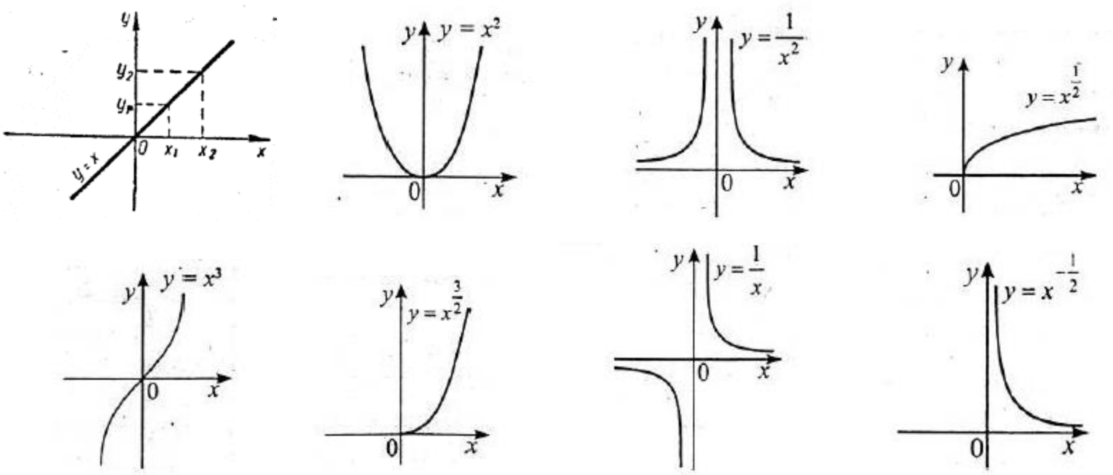


Рис. 2.2 Ілюстрація до завдання

4. Повідомлення вчителя. Властивості степеневої функції використовують про розв'язуванні рівнянь, доведенні тотожностей, в диференціальному та інтегральному численні, а також в астрономії, комбінаториці. Степені з основою 10 використовується як експоненціальний запис в науці, для позначення дуже великих або малих чисел.

5. Закріплення вивченого матеріалу фронтальною формою «Виконаємо разом». Наприклад, № 175 «Обчисліть значення функції $y = x^{\frac{2}{3}}$ у точках: 0, 1, 8, 1000»; № 193 «Побудуйте схематично графік функції $y = x^{-2}$»; № 206 «Розв'яжіть рівняння $x^{-1,5} = 8$».

6. Самостійна робота. «Обчисліть, не користуючись калькулятором: $9 \cdot 3^{-2}$»; «Спростіть вираз: $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy}$»; «Розв’яжіть графічно рівняння: $x^3 = 2 - x$» [5, с. 47].

7. Виконання творчих завдань. Наприклад: «На конкретних прикладах зі сфер фінансів, екології, здорового способу життя тощо, наведіть приклади різних способів задання функцій» [5, с. 47].

8. Контрольно-рефлексійна форма діяльності учнів під рубрикою: «Скарбничка досягнень і набутих компетентностей» [5, с. 48, 49].

Комбінований урок за темою «Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їхніх графіків» доцільно провести поєднуючи **колективну і групову форми** діяльності. Колективна форма передбачає фронтальне дослідження біля дошки функції заданої формулою у = $8/(x^2 + 4)$. Навчальні групи розподілено за ролями: науковці, педагоги, програмісти, референти, філологи. Предметом дослідження є «Функція», програмою дослідження – загальна схема дослідження функції і побудова її графіка. Види діяльності представлені у листку самоконтролю, який заповнюють після закінчення роботи (табл. 2.2)

Таблиця 2.2

Листок самоконтролю

№	Завдання	Учні			
1.	Таблиця-тест				
2.	Самостійна робота (дослідження графіка)				
3.	Колективна робота (побудова графіка)				
4.	Самостійна робота (побудова графіка)				
5.	Всього				

Синергія організаційних форм навчання за алгоритмом: **індивідуальна форма → групова форма → колективна форма** може ефективно використовуватися для підвищення якості освітнього процесу. Для прикладу наведемо фрагмент «змагання» між філологами і математиками – як колективний захист індивідуальних і групових навчально-пошукових проєктів з теми «Похідна та її практичне застосування», який можна застосувати на рівні стандарту.

Проєктне завдання для груп: «За фольклорними метафорами встановити, про яку властивість функції йдеться» представлено в додатку Д.

Фрагментами **уроку застосування знань, умінь та навичок** за темою: «Застосування похідної до дослідження функції та побудови графіків» виступають: виступ перед відкритим мікрофоном, математичний диктант, робота за таблицею, робота в гетерогенних групах по 4-5 осіб (учні з різним рівнем навчальних досягнень), презентація робіт [49], представлено в додатку Е.

Окремою формою проведення уроків застосування знань, умінь і навичок виступають **уроки розв'язування задач і вправ**. Як правило вони поєднують різні організаційні форми навчання:

- колективну або фронтальну під час вироблення алгоритму розв'язання певного типу задач і показового застосування його;

- колективну або фронтальну під час розв'язування задач рубрики «Виконаємо разом»;

- індивідуальну або групову під час самостійного розв'язання задач.

Продемонструємо викладене вище на прикладах, акцентуючи увагу на засвоєнні предметних компетенцій і формуванні певних компетентностей, наприклад, формування вмінь оперувати числовою інформацією, працювати за певним алгоритмом як основи набуття ключових компетентностей: інноваційність, інформаційно-комунікаційна, математична, навчальна та ін. (додаток Е).

Урок узагальнення та систематизації знань та вмінь учнів за темою «Похідна» можна провести, використовуючи колективну і групову зайнятості учнів, у формі «Мандрівки в країну похідних». Гаслом уроку виступає вислів «Люди вчаться на своїх помилках і знаходять інші шляхи вирішення проблем», обладнанням і наочністю – презентація, мультимедійна дошка, плакати із формулами.

Серед умовних станцій **віртуальної мандрівки**:

1. «Означення похідної». Завдання: Доповніть речення до означення похідної. Похідною функції називається … приросту функції $\Delta f(x)$ до … Δx, за умови $\Delta x \to 0$

2. «Похідна елементарної функції. Правила знаходження похідних». Гра-ланцюжок: на плакаті заповнити таблицю похідних. Гра «Мозковий штурм»: знаходять значення похідних, що з'являються на слайдах.

3. «Використання похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей». Розв'язування вправ у навчальних групах.

4. «Геометричний та механічний зміст похідної. Рівняння дотичної». Фронтальне опитування, колективне розв'язування вправ.

5. «Похідна складеної функції». Завдання: доповніть формулу знаходження складеної функції $(f(g(u(x)))'=$ … та знайдіть значення похідних.

6. «Підсумкова». Кожен бажаючий учень вказує на користь проведеного уроку та які недоліки в знаннях він скорегував під час цього уроку.

7. «Домашнє завдання». Підготуватися до написання контрольної роботи. За бажанням учні, що мають недоліки у знаннях з даної теми, отримують індивідуальні завдання.

Складовою частиною **уроку контролю рівня навчальних компетенцій може бути індивідуальна форма діяльності у формі тестів**. Однією з форм тестування є вибір правильного варіанту відповіді із запропонованих. Наведемо приклад.

1. Для якої з наведених функцій справедлива рівність $f'(1) = -1$?

А.	Б.	В.	Г.	Д.
$f(x)$=x^2+1	$f(x)$=x^2-1	$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}}$	$f(x)$=x^3	$f(x)=\sqrt{x}$

2. Точка рухається за законом $S(t)=1+2t^2$ (м). Знайдіть швидкість руху точки в момент t= 1 с.

А.	Б.	В.	Г.	Д.
2 м/с	**3 м/с**	4 м/с	4,5 м/с	5 м/с

3. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до параболи

$y = x^2+x$ у точці з абсцисою x_0.

А.	Б.	В.	Г.	Д.
$\mathbf{2x_0+1}$	$2x_0$	$8x_0$	1	$2x_0+2$

4. Дотична до графіка $y= f(x)$ у точці з абсцисою x_0 утворює з додатним напрямом осі Ox кут 45^0. Знайдіть

А.	Б.	В.	Г.	Д.
-1	0	**1**	-2	2

В якості засобу контролю і рефлексії можна використати **колективне усне опитування**, актуалізуючи тим самим питання про «усний рахунок» в умовах старшої школи, представлення контрольних завдань у форматі ЗНО. Наведемо приклади таких завдань.

Знайти похідні функцій (усно):

	1	2	3	4
	$y=3x^2-5x+6$	$y=\lg x$	$y=7^{2x+1}$	$y=x^{\pi}$
	$y=(2x+1)^3$	$y=(1-3x)^5$	$y=\sqrt{x-2}$	y = (3x+2)^{50};
	$y=\cos^2 x+\sin^2 x$	$y=\cos 3x$	$y=\cos^2 x$	$y=-2x^3+3\cos x$
	$y=\sqrt{\sin x}$	$y=e^{2x}$	$y=x^2\cos x$	$y=tg2x$
	$y=\frac{1}{x^9}$	$y=\sqrt{\sin 2x}$	$y=\sin^2 x^3$	$y=ctg\frac{x}{3}$

Вплинути на традиційний процес навчання, підвищити його ефективність, спрямувати на розвиток особистості учня покликане використання сучасних технологій навчання. Віднесемо до таких: проблемне навчання, проєктне навчання, інтерактивне навчання, використання ігрових, інформаційних технологій та ін. Навчальний процес характеризується високою інтенсивністю, підвищеним інтересом, отримані знання відзначаються глибиною, міцністю, дієвістю.

Проблемний виклад навчального матеріалу покладено в основу шкільних підручників з математики, зокрема в систему задач і запитань. Варто зважати, що у житті дуже часто потрібно вирішити деяке питання у найкоротший термін або з найменшими витратами, кажуть, знайти оптимальне розв’язання. При вивчення теми «Найбільше і найменше значення функції на відрізку» проблемними можуть бути завдання «організувати доставку товару найкоротшим шляхом або виготовити певну річ, витративши на це найменшу кількість матеріалу», оскільки питання про знаходження оптимального розв’язання цікавило людей завжди.

Колективною проблемою може бути задача з оповідання Л. Толстого «Чи багато людині землі потрібно». Одного разу доля звела його з купцем, який розповів йому про те, що їде від башкирців, в яких за тисячі рублів купив багато землі. Вирішив Пахом і собі поїхати.

Добравшись до башкирців і обдарувавши їх подарунками, попросив у них дозволу купити землю. Старійшина дозволив йому і сказав, що ціна у них – тисяча рублів за день. «Як це?» - питає селянин. «А так, - відповідають йому. – Скільки за день обійдеш – вся твоя буде. Тільки одна умова – щоб до заходу сонця прийшов на те місце, з якого вийшов».

Погодився Пахом, і з самого ранку виїхав у степ. Бажання захопити побільше землі було дуже великим.

Якиї ях подолав Пахом? Яку плоп обіг? На малюнку зображений шлях, який пройшов Пахом (рис. 2.3). Ми бачимо, що йшов він по прямокутнику, периметр якого 40 км, S = 78 км^2.

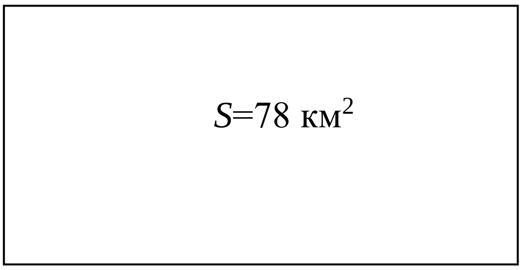


Рис. 2.3. Ілюстрація до завдання

Можна було б пройти той самий шлях, але площа була б більшою. Як це зробити? Якби селянин йшов по квадрату із стороною 10 км, то S = 100 км^2.

Нехай x км – одна сторона, (20 – x) – друга сторона. Тоді $S = x(20 - x) = 20x - x^2$; $S'(x) = 20 - 2x$. $S'(x) = 0$, якщо $20 - 2x = 0$, $x = 10$.

Відповідь. З усіх прямокутників з периметром 40 верст найбільшу площу має квадрат зі стороною 10 верст. Якби селянин рухався по квадрату то пройшов би площу 100 верст [34].

Групово-колективною формою розв’язання проблем може виступати інтерактивна технологія «мозковий штурм». Наприклад, об’єднаним у навчальні групи по 5 учнів у кожній, їм потрібно продемонструвати вміння використовувати теоретичний матеріал під час розв’язування вправ. Обговорення запитань, що виникають відбувається шляхом колективного обдумування – «мозкового штурму». На дошці записуються умови завдань, щоб під час обдумування та пошуку розв’язання їх бачили учні.

Завдання. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=x^3–3x^2–x–9$, якщо дотична паралельна прямій y = -4x–8. Усі учасники «штурму» мають право висувати свої ідеї щодо розв’язування завдань. Коли учні групи з’ясовують, що ідей достатньо, їх висування припиняється. Подані ідеї аналізуються у групах. Після обговорення група учнів зупиняється на одному зі способів розв’язування – раціональнішому з їх точки зору. Якщо хтось із групи не погоджується з вибраним способом, то він має право самостійно розв’язувати задачу. Кожна група захищає свій спосіб розв’язування, учні обирають найраціональніший [65].

Підсумовуючи викладене зауважимо, що ефективність компетентнісного вивчення функціональної змістової лінії забезпечується оптимізацією використання широкого спектру організаційних, зокрема колективних, групових, індивідуальних форм навчання.

2.2. Форми формування навчально-пізнавальної компетентності та розвитку творчого мислення учнів під час виконання обчислень, перетворення виразів та навчання розв’язуванню різних типів рівнянь

У процесі вивчення навчального матеріалу курсу «Алгебри і початків аналізу» продовжують розвиватися змістові лінії тотожних перетворень, рівнянь і нерівностей, функціональна змістова лінія та ін. Вивчення рівнянь і нерівностей поєднується з вивченням і використанням властивостей тригонометричних, показникової, логарифмічної, степеневої функцій, а також відбувається у вигляді самостійних навчальних тем.

Програмою рівня стандарту передбачено навчання вмінню учнів розв’язувати такі типи рівнянь: найпростіші тригонометричні рівняння в темі «Тригонометричні функції» 10 класу; найпростіші показникові та логарифмічні рівняння в темі «Показникова та логарифмічна функції» 11 класу [35].

Навчання учнів розв’язуванню рівнянь в курсі алгебри і початків аналізу проявляється в реалізації освітніх функцій, пов’язаних з:

- навчанням старшокласників (засвоєння, визначених Державним стандартом і навчальною програмою предметних компетенцій, способів навчальної діяльності, формування вмінь моделювати реальні ситуації за допомогою певних типів рівнянь);

- вихованням особистості (формування наукового світогляду, виховання всебічно розвиненої самоактуалізованої особистості як суб’єкта навчально-математичної діяльності, життєдіяльності й життєтворчості);

- розвитком особистості (розвиток пізнавального інтересу, креативності мислення, здібностей, пам’яті, просторового уявлення і уяви);

- здійсненням оперативного контролю за рівнем засвоєних знань (визначення рівня загального й математичного розвитку учня та стану засвоєння навчального матеріалу, оцінка й самооцінка вмінь розв’язувати окремі типи рівнянь).

Акцентуємо увагу на деяких напрямках цієї діяльності. Зауважимо також, що на нашу думку, **оптимальним є такий логічний ряд використання форм навчання**: теоретичне заняття (теоретичні відомості про тип рівняння, алгоритм його розв’язання, напрямки практичного застосування) → комбінований урок (теоретичні відомості, схема розв’язання окремого типу рівняння, розв’язування типових рівнянь) → практичне заняття (урок застосування знань, умінь і навичок, урок-практикум з розв’язування вправ, виконання навчальних проєктів).

1. Виконання обчислень, рівносильних перетворень виразів в процесі розв’язування різних типів рівнянь як основа формування математичної (процедурної, технологічної, методологічної) та навчальної ключових компетентностей.

Приклад 1. Визначити, який знак має вираз: $\sin 140^0 \cdot tg(-105^0)$.

Колективне розв’язання. Для $x \in (90^0;180^0)$ функція синус набирає додатних значень, тобто $\sin 140^0 > 0$; для $x \in (-180^0;90^0)$ функція тангенс набирає також додатних значень, тому $tg(-105^0) > 0$.

Добуток двох додатних чисел є число додатне.

Отже, $\sin 140^0 \cdot tg(-105^0) > 0$.

Групова або індивідуальна форма навчання. Розв’язати №№ 231, 232, 235 [5, с. 57].

Приклад 2. Спростити вираз: $\sin\alpha - tg\alpha\cdot\cos\alpha$

Фронтальне розв’язання під рубрикою «Виконаємо разом».

$$\sin\alpha - tg\alpha\cdot\cos\alpha = \sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha = \sin\alpha - \sin\alpha = 0$$

Колективна форма: «Виконаємо усно». Розв’язати №№ 293–295 [5, с. Ґ68].

Групова форма роботи: «Виконаємо в парах». Розв’язати №№ 298, 303 [5, с. 69].

Приклад 3. Довести тотожність: а) $\frac{1}{1-tg^2\alpha} - \frac{1}{1-ctg^2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha}$.

Колективне розв’язання. Використовуючи формули, які пов’язують тригонометричні функції одного аргументу $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ та рівносильні перетворення, змінимо ліву частину рівності так:

$$\frac{1}{1-tg^2\alpha} - \frac{1}{1-ctg^2\alpha} = \frac{1}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} - \frac{1}{1-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha}.$$

Одержаний вираз дорівнює виразу, який стоїть у правій частині вихідної рівності. Тобто, задана рівність є тотожністю.

Тотожність доведена.

Колективна форма: «Виконаємо усно». Розв’язування типових вправ №№ 415–418 [5, с. 95].

Групова форма роботи: «Виконаємо в парах». Розв’язати №№ 446–448 [5, с. 98].

Самостійна індивідуальна робота. Розв’язування №№ 456–458 [5, с. 99].

Індивідуальне практичне завдання № 461 [, с. 99].

Приклад 4. Розв’язати ірраціональне рівняння методом рівносильних перетворень: $\sqrt{15-3x} - 1 = x$.

Колективне розв'язання. Виконання цього завдання передбачає послідовність мисленнєвих операцій: аналіз заданої умови, представлення рівняння у вигляді нової аналітичної моделі, перетворення в межах нової моделі, запис розв'язку, трансляція його на умову завдання.

Нехай $f(x) = 15 - 3x$, $g(x) = x + 1$. Розв'яжемо рівняння методом рівносильних перетворень, врахувавши монотонність функцій і, що рівняння $\sqrt{f(x)} = g(x)$ рівносильне системі (нова аналітична модель)

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Тобто, вихідне рівняння можна записати такою системою:

$$\begin{cases} 15 - 3x = (x + 1)^2, \\ x + 1 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + 3x - 15 = 0, \\ x \geq -1; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 5x - 14 = 0, \\ x \geq -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7, \text{ або } x = 2, \\ x \geq -1. \text{ Звідси } x = 2. \end{cases}$$

Відповідь: 2.

Групова або індивідуальна форма зайнятості. Розв'язування №№ 203–205 [5, с. 46].

2. Розв'язування рівнянь і нерівностей за допомогою певних евристик як основа виховання знаннєвої інноваційної творчої особистості, здатної самореалізовуватися впродовж життя, яка критично підходить до рівня своїх інтелектуальних досягнень, формування вміння конструювання подальших власних знань на основі особистого досвіду й евристичної діяльності.

Евристичний алгоритм розв'язання певного типу рівняння складається з основних послідовних правил (евристик, приписів) побудови відповідних моделей задачної ситуації, які називають «творчими етапами». Оскільки кожне рівняння відмінне від іншого, тому до його розв'язання треба підходити творчо, тобто для кожного рівняння складати свій алгоритм розв'язання. Найбільш загальний підхід до розв'язування рівнянь передбачає виконання таких евристичних правил: аналіз структури умови завдання, як вербальної моделі задачної ситуації; створення наочної моделі задачної ситуації (блок-схема, таблиця, матриця); побудова математичної (аналітичної, розв'язуючої) моделі – рівняння певного типу; розв'язання задачі в межах побудованої математичної моделі (еквівалентні перетворення) та отримання розв'язку математичної моделі; інтерпритація отриманого розв'язку на вихідну задачну ситуацію (вибір тих розв'язків, які задовільняють рівняння, подане в умові задачі) [54].

Приклад 1. Розв'язати рівняння $|x - 3| + |x - 4| = 1$.

Фронтальне розв'язання. Один із способів розв'язання цього завдання передбачає виконання учнями послідовних евристичних приписів:

- аналізу початкової аналітичної моделі – умови рівняння з урахуванням геометричного тлумачення модуля числа;

- інтуїтивного представлення ситуації та побудову геометричної моделі;

- вміння робити умовиводи, від умови переходити до виконання вимог.

Реалізуємо цей алгоритм.

Дано рівняння $|x - 3| + |x - 4| = 1$. Умова завдання вказує на те, що x – координата точки, сума відстаней від якої до точок 3 і 4 дорівнює 1.

Побудуємо геометричну модель (рис. 2.4).

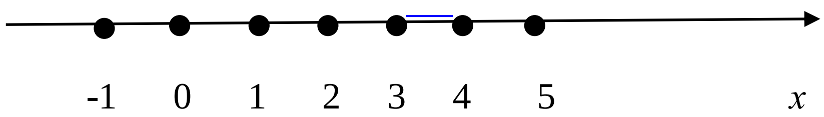


Рис. 2.4. Ілюстрація до завдання

У межах цієї моделі встановлюємо, що таку властивість мають всі точки і тільки вони з проміжку [3; 4].

Транслюючи цей висновок на початкову умову можна стверджувати, що вихідне рівняння має безліч розв'язків і його задавольняє кожне значення $x \in [3; 4]$.

Відповідь: [3; 4].

Колективна або групова форма зайнятості. Розв’язання № 1073 [5, с. 241].

Індивідуальне творче завдання: « Найпростіші рівняння з модулями та способи їх розв’язання».

3. Навчаючи учнів розв’язуванню тригонометричних рівнянь педагогу треба звертати увагу на математичні та практичні вміння мислити креативно, латерально, нестандартно. Реалізуються вони в процесі розв’язування тригонометричних рівнянь різноманітними способами. Серед них виділимо: спосіб розкладання на множники, спосіб зведення рівняння до однієї тригонометричної функції, метод заміни змінних, метод зведення тригонометричного рівняння до однорідного, графічні методи (за допомогою графіків функцій, одиничного кола).

Приклад. Розв’язати тригонометричне рівняння способом розкладання на множники $\cos 6x + 2\cos 2x = 0$, використовуючи формули форзацу підручника Є. Неліна для 10 класу [38].

Колективне розв’язання. Творчі етапи розв’язування цього рівняння передбачають такі пізнавально-практичні дії: виконання рівносильних перетворень, використання формули синуси косинусів, винесення спільного множника за дужки, розв’язування найпростіших рівнянь, оцінку і запис результату.

$\cos 6x + 2\cos 2x = 0$; $\cos 6x + \cos 2x + \cos 2x = 0$; $2\cos 4x \cdot \cos 2x + \cos 2x = 0$.

$\cos 2x \cdot (2\cos 4x + 1) = 0$. Звідси одержуємо:

1) $\cos 2x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, де n – ціле.

2) $(2\cos 4x + 1) = 0$; $\cos 4x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, де k – ціле.

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, де n – ціле; $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, де k – ціле.

4. Формування вмінь аналізувати, порівнювати, узагальнювати, систематизувати, працювати за алгоритмом та ін. в процесі розв’язування

показникових рівнянь як основа набуття математичної, інноваційної та навчальної ключових компетентностей.

Важлива умова розв’язування показникових рівнянь – є зведення їх до найпростіших, потім, після використання властивості монотонності показникової функції – до лінійного, квадратного або ін., тобто:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Серед основних способів розв’язування показникових рівнянь на базовому рівні Г. Бевз та В. Бевз називають: зведення лівої і правої частин рівняння до степенів з однаковими основами, уведення нової змінної, використання функціонально-графічного методу [7, с. 15].

Деталізуємо на прикладах **колективного розв’язування** застосування кожного з цих методів з урахуванням специфіки використання операційного блоку системи розвитку творчого мислення учнів.

Приклад 1. Розв’язати рівняння: $2^{x^2-7x+12} = 1$.

Розв’язання. $2^{x^2-7x+12} = 1$. Оскільки $2^0 = 1$, то в результаті рівносильних перетворень і використання властивості показникової функції одержимо:

$2^{x^2-7x+12} = 1$; $x^2 - 7x + 12 = 1$; $x^2 - 7x + 11 = 0$. Коренями зведеного квадратного рівняння є $x_1 = 3; x_2 = 4$.

Відповідь: 3; 4.

Приклад 2. Розв’язати рівняння: $2 \cdot 3^x + 3^{x+2} = 11 \cdot 3^{x^2}$.

Розв’язання. Використавши властивості степеня зведемо обидві частини рівняння до степеня з основою 3.

$2 \cdot 3^x + 3^{x+2} = 11 \cdot 3^{x^2}$; $2 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 11 \cdot 3^{x^2}$; $11 \cdot 3^x = 11 \cdot 3^{x^2}$; $3^x = 3^{x^2}$;

$x = x^2$. Звідси: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

Відповідь: 0; 1.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $4^{x+1} + 4^{x-2} = 260$.

Розв’язання. $4^{x+1}+4^{x-2}=260$. Винесемо за дужки в лівій частині множник 4^{x-2}. $4^{x+1}+4^{x-2}=260$; $4^{x-2}\cdot(4^3+1)=260$; $4^{x-2}\cdot 65=260$; $4^{x-2}=4$; $x-2=1$; $x=1$.

Відповідь: 1.

Приклад 4. Розв’язати рівняння $9\cdot 8^x-18\cdot 4^x-2\cdot 2^x+4=0$ [67, с. 125].

Розв’язання. $9\cdot 8^x-18\cdot 4^x-2\cdot 2^x+4=0$.

Запишемо задане рівняння в такому вигляді:

$9\cdot\left(2^x\right)^3-18\cdot\left(2^x\right)^2-2\cdot 2^x+4=0$.

Введемо нову змінну $y=2^x$ і одержимо кубічне рівняння:

$9y^3-18y^2-2y+4=0$.

Один із коренів цього рівняння міститься серед дільників вільного члена, це $y_1=2$; два інші – протилежні числа $y_{2/3}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: 2; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Приклад 5. Розв’язати рівняння $8^{5-x}=7^{x-5}$.

Розв’язання. Прологарифмуємо обидві частини цього рівняння за основою 8, тоді перетворимо за властивостями логарифмів. Одержимо лінійне рівняння.

$8^{5-x}=7^{x-5}$; $\log_8 8^{5-x}=\log_8 7^{x-5}$; $(5 - \mathrm{x})\cdot\log_8 8=(x-5)\cdot\log_8 7$;

$5+5\cdot\log_8 7=x\cdot(1+\log_8 7)$; $x=\dfrac{5+5\log_8 7}{1+\log_8 7}$; звідси $x=\dfrac{5\cdot(1+\log_8 7)}{1+\log_8 7}$, тобто $x=5$.

Відповідь: 5.

Завдань для **групової та індивідуальної** роботи у підручниках різних авторів є достатня кількість. Наведемо приклад креативного завдання № 90 на використання функціонально-графічного методу із підручника 11 класу Г. Бевза та В. Бевз: «Розв’яжіть нерівність $2^{ч}>-x=3$, використовуючи зображені на рис. 2.5 [7, с. 21].

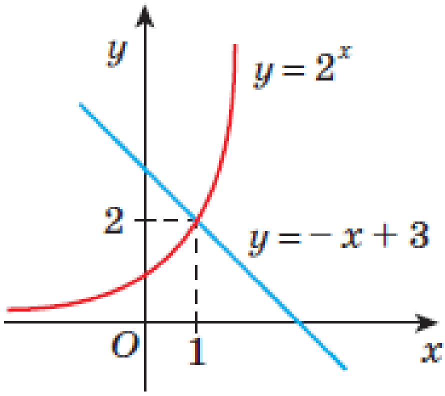


Рис. 2.5. Ілюстрація до завдання

5. Навчання учнів розв'язуванню логарифмічних рівнянь доцільно провести системно та інноваційно, акцентуючи увагу на структурованість змісту і навчально-пізнавальної діяльності учнів та створюючи широке поле для творчого розвитку, креативного і латерального мислення.

З-поміж способів розв'язування логарифмічних рівнянь в курсі алгебри і початків аналізу виділимо: за означенням логарифма, за властивостями логарифмів і логарифмічної функції, методом заміни змінних, логарифмуванням або потенціюванням частин рівняння, графічний метод.

Наведемо приклади розв'язування логарифмічних рівнянь, використовуючи **колективну форму навчання «Виконаємо разом».**

Приклад 1. Розв'язати логарифмічне рівняння за означенням логарифма $\log_2\left(x^2+4x+3\right)=3$.

Розв'язання. Розв'язуючи логарифмічне рівняння за означенням логарифма можна запропонувати учням таку алгоритмічну структурну схему (рис. 2.6):

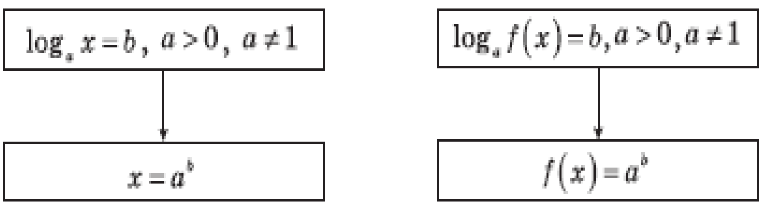


Рис. 2.6. Ілюстрація до завдання

а) $\log_2(x^2+4x+3)=3$. За означенням логарифма одержуємо: $x^2+4x+3=2^3$. Після перетворень маємо квадратне рівняння $x^2+4x-5=0$. Його коренями є числа 1 і -5.

Проведемо перевірку.

$\log_2(x^2+4x+3)=3$; $\log_2(1^2+4\cdot1+3)=3$; $\log_2 8=3$.

$\log_2(x^2+4x+3)=3$; $\log_2((-5)^2+4\cdot(-5)+3)=3$; $\log_2 8=3$.

Відповідь: -5; 1.

Приклад 2. Розв’язати логарифмічне рівняння за властивостями логарифмів і логарифмічної функції з «креативною умовою»

$\log_3(x+3)-\log_3(x-1)=1-\log_3(4-x)$.

Розв’язання. Перейдемо до рівнянь-наслідків:

$\log_3(x+3)-\log_3(x-1)=1-\log_3(4-x)$;

$\log_3((x+3)\cdot(4-x))=\log_3(3\div(x-1))$;

$(x+3)\cdot(4-x)=3\cdot(x-1)$; $x^2+2x-15=0$; Звідси: $x_1=-5$; $x_1=3$.

Перевірка. $x_1=-5$; $\log_3(-5+3)-\log_3(-5-1)=1-\log_3(4+5)$ не має змісту, тому $x_1=-5$ – сторонній корінь.

$x_1=3$; $\log_3(3+3)-\log_3(3-1)=1-\log_3(4-3)$; 1=1. $x_1=3$ – корінь рівняння.

Відповідь: 3.

Приклад 3. Розв’язати логарифмічне рівняння методом заміни змінних

$\log_2^2 x+\log_2 x-2=0$.

Розв’язання. $\log_2^2 x+\log_2 x-2=0$. Областю визначення рівняння є множина додатних чисел. Введемо нову змінну $y=\log_2 x$. Відносно цієї змінної одержуємо нову модель початкового рівняння – квадратне рівняння:

$y^2+y-2=0$. Коренями цього рівняння є числа 1 і -2.

Повернемося до заміни: $\log_2 x=1$; $x=2$. $\log_2 x=-2$; $x=\frac{1}{4}$.

Відповідь: 2; $\frac{1}{4}$.

Вправи для **самостійної форми роботи**: №№ 158–162 [7].

2.3. Організаційні форми формування практичної компетентності в процесі вивчення геометрії

Практична компетентність учнів старшої школи формується в процесі розв’язування задач. У загальному випадку при вивченні математики можна виділити такі типи задач:

- математичні задачі – задачі, взяті з реального світу або сформульовані в межах самого предмета, що розв’язуються методами математики;

- навчальні задачі – завдання, сформульовані у вигляді навчальної проблеми, вирішення якої передбачає активну розумову діяльність, що спирається на наявні в учня знання та уміння застосовувати їх на практиці.

Організаційними формами компетентнісного розв’язування задач виступають:

1) колективне вироблення алгоритму розв’язання задачі;

2) фронтальне розв’язування типових задач на основі напрацьованого алгоритму;

3) колективне і групове розв’язування задач;

4) самостійна робота, індивідуальне розв’язування задач;

5) креативна синергетична діяльність, яка включає окремі форми навчальної зайнятості учнів, визначені підручниками, зокрема, під рубриками:

- «Практичне завдання» (наприклад, № 687, № 752) [7], «Життєва математика» (№ 7.51) [19];

- «Вияви свою компетентність» (№ 5.16, №№ 7.16–7.17, №№ 10.22–10.25) [39], «Проявіть компетентність» (№№ 648–651) [11];

- «Самостійна робота», «Тематичні тести» [5; 7]; «Тестові завдання» [11].

Формування узагальнених способів дій під час розв’язування навчальних задач з геометрії має відбуватися за певним алгоритмом, який дозволяв би планувати та контролювати навчальні дії і враховувати методичні особливості задач з нижчим рівнем змістового теоретичного узагальнення (основних, базових, типових).

Система навчальних дій в процесі розв’язування навчальних задач з позицій розвивальної математичної освіти виглядає так:

1) постановка навчальної задачі на основі базової (прикладної, практичної, математичної);

2) змістовий аналіз навчальної задачі з метою знаходження деякого загального відношення, що характерне для типових математичних задач;

3) моделювання виділеного загального відношення, формування змістових абстракцій і узагальнень для типових задачних ситуацій за допомогою логічних схем і знаково-символьних форм;

4) створення навчальної моделі способу розв’язування типових задач як ієрархії логіко-математичних дій і операцій між побудованими графічними та знаково-символьними моделями;

5) конструювання системи частинних задач і змістове планування їх розв’язування в контексті створеного загального способу;

6) контроль, аналіз і корекція виконаних навчальних дій;

7) оцінка рівня засвоєння загального способу розв’язування поставленої навчальної задачі (змістова, процесуальна, референтна) [57, с. 132–133].

Навчальною програмою визначаються три етапи розв’язування прикладних задач:

1) формалізація (перехід від ситуації, описаної в задачі, до формальної математичної моделі цієї ситуації, і від неї — до чітко сформульованої математичної задачі), створення математичної моделі даної задачі;

2) розв’язування задачі у межах побудованої моделі;

3) інтерпретація одержаного розв’язання задачі та застосування його до вихідної ситуації.

В основі розв’язування навчальної геометричної задачі лежить створення математичної моделі потрібного математичного об’єкту, її дослідження та розв’язання.

Послідовність і правила побудови відповідних моделей, як зазначає Р. Ріжняк, визначаються «евристичним алгоритмом». Евристичний алгоритм процесу розв’язання задачі складається з основних евристик (приписів), що визначатимуть моменти створення чергової моделі. Кожна задача вимагає власного творчого підходу до свого розв’язання. Тому загального підходу навіть у вигляді загальноприйнятих правил (евристик) щодо аналізу та розв’язання задач немає. Найбільш загальним підходом до розв’язування текстових задач на сьогодні є:

1) аналіз структури умови задачі у вигляді певної моделі (схеми) чи послідовності моделей;

2) створення математичної моделі задачі (зазвичай у вигляді числового виразу, рівняння чи системи рівнянь);

3) перетворення математичної моделі відомими засобами та отримання розв’язку математичної моделі задачі;

4) трансляція розв’язків моделі задачі на її умову [54, с. 81–82].

Наведемо нижче приклади, розробленої нами, системи задач, які розв’язуються методом математичного моделювання.

Задача 1. Стереометрична задача на доведення.

Доведіть, що коли площина перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу [4, с. 75].

Розв’язання.

1) Умовою задачі дано дві паралельні прямі a і b, площину α, причому пряма a перетинаю площину α. Ставиться вимога: «Довести, що друга пряма b також перетинає площину α».

2) Геометричною моделлю виступають дві площини, що перетинаються, одна з яких побудована на двох паралельних, які, в свою чергу, перетинають першу площину. Наочна модель має такий вигляд (рис. 2.7).

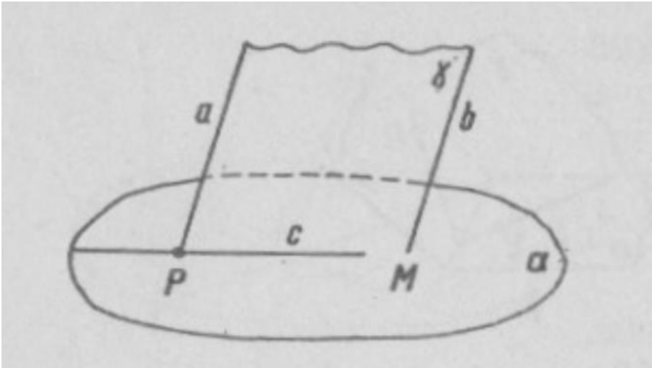


Рис. 2.7. Ілюстрація до завдання

3) Проведемо доведення на основі визначеної геометричної моделі.

Уявимо, що пряма a перетинає площину α в точці Р. Існує площина γ, що проходить через дві паралельні прямі a і b. Точка Р належить двом площинам α і γ, тому що ці площини перетинаються по якійсь прямій c, що проходить через точку Р. Пряма c лежить у площині паралельних прямих a і b і перетинає першу з них, тому вона перетинає і пряму b в деякій точці М. Ця точка лежить на прямій c і,отже, на площині α. Вона лежить і на прямій b. Ніяка інша точка прямої b площині α не належить, бо інакше вся пряма в лежала б у площині α і тоді площини α і γ мали б ще одну спільну пряму b, що неможливо. Тому, пряма b і площина α мають тільки одну спільну точку М, тобто b і α перетинаються.

4) Екстраполюючи результат доведення на умову задачі, треба не обмежуватися доведенням того, що пряма b і площина α мають спільну точку, а довести, що вони не мають інших спільних точок, і що пряма b не лежить у площині α.

Задача 2. Стереометрична задача на обчислення площі перерізу конуса, паралельного основі.

Конус перетинає площина β, що паралельна основі, на відстані d = 3 см від вершини. Обчислити площу перерізу, якщо радіус основи конуса R = 6 см, а висота H = 9 см.

Розв'язання.

1) Нехай β – площина, що паралельна площині основи конуса й перетинає його. Використовуючи перетворення гомотетії відносно вершини конуса можна одержуємо, що перерізом кола площиною є круг, а перерізом бічної поверхні – коло з центрами на осі конуса. За даними задачі нам треба знайти площу цього круга.

2) Графічною наочною моделлю задачі буде плоский рисунок (рис. 2.8)

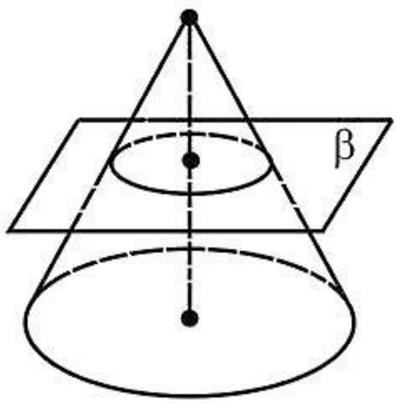


Рис. 2.8. Ілюстрація до завдання

Математичною моделлю перерізу є круг. Після знаходження радіуса круга математична задача зводиться до обчислення його площі.

3) Переріз конуса утримується із основи конуса перетворенням гомотетії відносно вершини конуса з коефіцієнтом гомотетії k = $\frac{d}{H}$. Тому радіус кола в перерізі r = R$\frac{d}{H}$.

Отже, площа перерізу S = $\pi R^2 \cdot (\frac{d}{H})^2$ – ця формула є алгебраїчною моделлю площі перерізу.

Оскільки, d = 3 см, R = 6 см, H = 9 см, то S = $3{,}14 \cdot 6^2 \cdot (\frac{3}{9})^2 \approx 12,\ 6$ (см^2).

4) Відповідь: площа перерізу площиною паралельною основі дорівнює приблизно 12,6 см^2.

Задача 3. При кожному ударі серце людини виштовхує 175 см^3 крові. Серце робить 75 ударів за одну хвилину. Кубічну посудину яких розмірів потрібно було б мати, щоб вмістити кількість крові, яку перекачує серце за добу? [50, с. 88].

Розв’язання.

1) Інформація, наведена у вербальній моделі задачі (тексті) дозволяє визначити об’єм крові, яку перекачує серце за одну добу як добуток заданих числових значень величин. Цей об’єм заповнює деяку кубічну посудину. Розміри куба однакові, то треба фактично знайти за відомим об’ємом ребро куба.

2) Математичною моделлю шуканої посудини буде куб. Тоді реальна задача транслюється у математичну: «Обчислити довжину ребра куба за відомим об’ємом».

3) Розв’яжемо задачу в межах визначеної моделі.

Позначимо ребро шуканої посудини за x. Тоді маємо:

$x^3 = 175 \cdot 75 \cdot 60 \cdot 24$, тобто ребро куба має дорівнювати 260 см, або 2,6 м.

Відповідь: 2,6 м.

4) Інтерпритація одержаного результату. Кубічна посудина, зазначена в умові задачі, повинна мати розміри 2,6 м × 2,6 м × 2,6 м.

Задача 4. За допомогою мірної стрічки виміряли довжину кола предмета круглої форми з точністю до 1 мм і отримали результат – 41,8 см. Визначте діаметр цього предмета.

Розв’язування цієї задачі підтверджує думку про те, що в процесі застосування математики на практиці, з різних причин виникає потреба використання замість точних, але складних математичних формул, наближених, але відносно простих формул. Якщо при побудові математичної моделі значною мірою спотворена реальна ситуація, то нераціонально домагатися точного розв’язку.

1) За умовою задачі предмет круглої форми з відомою довжиною. Задана також точність вимірювання. Вимогою реальної задача є визначення діаметра цього предмета.

2) Математичною моделлю вимірюваного предмета є коло. Реальна задача набирає математичного вигляду: «За відомою довжиною кола, виміряною з певною точністю, обчислити його діаметр».

3) Під час розв'язування цієї задачі в межах визначеної моделі. Тобто при 41,8 на $\pi \approx 3, 14$, необхідно обмежитися першим десятковим знаком після коми, тобто: $41{,}8 : 3{,}14 \approx 13, 3$ (см).

Відповідь: 13,3 см.

4) Інтерпритація одержаного результату. Діаметр предмета круглої форми дорівнює 13,3 см, довжину якого виміряно з точністю до 1 мм.

У наведеному записі розв'язання цієї задачі ми не виділяли всі етапи, визначені алгоритмом. Як відмічає В. Швець, на практиці таке розділення, як правило, не виконується і розглядається як цілісний процес [67, с. 20].

2.4. Форми використання історичного матеріалу

Компетентнісний підхід та гуманізація освітньої галузі зумовлюють методологічну переорієнтацію процесу навчання математики, яка передбачає не тільки засвоєння суто предметних компетенцій, а й формування всебічно розвиненої, соціально активної особистості, що володіє системою загальнокультурних знань, науковою ерудицією, здатна до творчості й саморозвитку. Одним з ефективних засобів реалізації цього завдання виступає використання історичного матеріалу.

Особливості методики використання історичного матеріалу під час вивчення математики у старшій школі пов'язані з такими факторами:

- недостатньою увагою до вивчення історичних фактів, подій та процесів, малою кількістю виділеного часу, внаслідок чого цей матеріал вивчається епізодично, синхронно з основним програмовим матеріалом або у позаурочний час;

- відбором змісту історичного матеріалу, який би відповідав віковим особливостям школярів, рівню їхніх знань та інтересів;

- концентричним принципом вивчення навчального матеріалу, який передбачає повторюваність навчального матеріалу в ускладненому вигляді на наступному рівні навчання (наприклад, під час вивчення ірраціональних рівнянь вчителю треба повторити тлумачення сутності рівняння та історії раніше розглянутих рівнянь – першого степеня, квадратних);

- різним підходом до висвітлення фактів історії у шкільних підручниках, що спонукає школярів до активної самостійної пізнавальної діяльності (наприклад, у підручнику Є. П. Неліна після кожного розділу подаються «Відомості з історії» [38; 39], у підручнику А. Г. Мерзляка та ін. для 10 класу є тільки два повідомлення історичного характеру: «Львівська математична школа» та «Ставай Остроградським» [31, с. 44, 99], див. також № 233 у підручнику Г. П. Бевза та ін. «Підготуйте презентацію про вченого-енциклопедиста Абу Райхана Аль-Біруні, який запропонував розглядати тригонометрію на одиничному колі [5, с. 57]);

- представленням історичного матеріалу в інформаційно-популярному або науково-теоретичному викладі, у формі пропедевтичних історичних задач, задач практичного характеру, формул тощо.

Учителю важливо враховувати поступальний зв’язок у генезі математичних знань, які виникають з потреб практики і після деяких узагальнень, побудови чіткої, аргументованої математичної теорії знову повертаються до розв’язання практичних проблем якісно вищого рівня. Діалектичний напрям цієї еволюції описується логічним ланцюжком: «Життєва історична реальність → проблемна ситуація → проблемна задача → відображення і розв’язування її в математичних образах, вироблення єдиних підходів, алгоритмів вирішення → застосування до розв’язування системи компетентнісно орієнтованих (практичних і прикладних) задач».

Методичними формами ознайомлення старшокласників з історією математики виступають:

- спеціальні уроки з історії математики або фрагменти звичайних уроків математики;

- інформаційні хвилинки, повідомлення, відступи на уроках або інших заходах;

- повідомлення у вигляді історичних відомостей, гіпотез, задач;

- математичні гуртки, факультативи, курси за вибором;

- позаурочні масові заходи: наукові конференції, математичні вечори, інтелектуальні конкурси та змагання;

- самостійна робота школярів: написання доповідей, рефератів, складання задач;

- самоосвітня пошуково-пізнавальна діяльність: опрацювання науково-історичної літератури, словників, Інтернет-джерел;

- навчальна та наукова-дослідницька робота учнів: виконання проектів, укладання історичних та тлумачних тематичних словників, підготовка мультимедійних презентацій тощо.

Використання історичного матеріалу здійснюється синхронно з вивчення основного навчального матеріалу. Історичні екскурси вчитель може проводити на різних етапах уроків математики і з різною метою. Зокрема:

- перед вивченням нової теми історичні відступи сприяють визначенню кола навчальних питань теми, мотивації навчання, підвищенню інтересу до вивчення теми, створенню проблемної ситуації тощо;

- у процесі вивчення навчальної теми історичні екскурси використовуються як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів та доповнення до основного навчального матеріалу;

- на етапі закріплення навчальної теми – з метою узагальнення та систематизації вивченого матеріалу.

Конкретизуємо викладене вище на прикладах.

Інформаційні історичні відступи можливо проводити як на початку уроку, так і в будь-якій іншій його частині. Присвячені вони можуть бути історії одного алгебраїчного поняття, визначній календарній математичній події, біографії видатного вченого-математика, цікавим історичним фактам з теми заняття, прикладам історичних математичних задач та ін.

Навчання учнів розв’язуванню ірраціональних та показникових рівнянь бажано доповнити історичним фактажем про засновника алгебри рівнянь ал-Хорезмі, про історію рівнянь, про історію введення степеня і кореня. Зміст цих інформаційних хвилинок може бути таким.

Тематична інформаційна хвилинка: Ал-Хорезмі Абу Абдалла Мухаммед ібн Муса ал-Маджусі (787– бл. 850 рр.) – засновник алгебри [13].

Зміст інформаційної хвилинки. Дослідження прізвища відомого арабського вченого IX століття вказує, що слово «Хорезмі» означає місце народження, частка «ал» в арабській мові не перекладається, її пишуть для милозвучності. Слово «Ібн» (син) означає, що батька вченого звали Муса, а «Абу» (батько), що він сам є батьком Абдалли. Отже, йдеться про Мухаммеда Хорезмського, сина Муси, батька Абдалли, вихідця з маджусів – послідовників релігії вогнепоклонників.

У дитинстві Мухаммед ал-Хорезмі багато читав, займався самоосвітою, вивчив перську, арабську, давньотюркську мови, санскрит. Щоб поповнити знання, багато подорожував. У 25 років він досяг Багдада, де на той час уже діяв науковий центр, своєрідна академія наук – «Будинок мудрості». При ньому працювали астрономічна обсерваторія і велика бібліотека. Тут молодий Хорезмі вивчив давньогрецьку мову, твори Архімеда, Евкліда, Аполлонія, став одним з кращих учених Середнього Сходу. Він проводить важливі астрономічні дослідження, керує вимірюванням довжин земного меридіана і дістає для його дуги в 1° величину 111 851 м, що досить близько до сучасних даних – 110 938 м.

Наукову славу принесли Хорезмі його математичні праці: трактати «Про індійську лічбу» і «Коротка книжка про числення ал-джабр і алмукабали». В першій з них вчений популяризував відкриття індійських математиків – десяткову позиційну систему числення як основу арифметики. Французький математик П. Лаплас з цього приводу писав: «Думка подавати всі числа небагатьма знаками, надаючи їм, крім значення за формою, ще значення за місцем, настільки проста, що саме через цю простоту важко оцінити, наскільки вона дивовижна. Як нелегко прийти до цього, ми бачимо ясно на прикладі найвидатніших геніїв грецької вченості – Архімеда і Аполлонія, від яких ця думка залишилася прихованою». Латинізована форма прізвища вченого Algorismus, або Algoritmus, означала тоді всю систему десяткової позиційної арифметики. І в сучасній математиці поняття алгоритму залишається одним з фундаментальних понять, означає інструкцію про виконання в певному порядку деякої системи операцій, за допомогою яких розв’язуються задачі певного класу.

Від назви другого трактату походить назва одного з основних розділів математики – алгебри. В ньому представлено початки алгебраїчного числення – правила алгебраїчних перетворень, дії з одночленами і многочленами, включаючи правила «ал-джабр» (відновлення) – перенесення від’ємних членів рівняння з однієї частини в іншу, так щоб в обох частинах були тільки додатні члени, і «ал-мукабала» (протиставлення) – знищення якогось члена в одній частині рівняння і відповідне знищення тотожного йому члена в іншій частині рівняння.

Математику Мухаммед ал-Хорезмі розглядав як потужне знаряддя полегшення праці людей та розвитку культури. На підтвердження цього у книзі наведено короткі відомості про дії з алгебраїчними виразами, приклади алгебраїчного розв’язання трикутників, велику добірку практичних задач на поділ спадщини.

Алгебраїчні трактати відзначаються зрозумілістю, чіткістю і ясністю викладу, тісним зв’язком змісту матеріалу з практичним життям людей. Вони мали великий вплив на поширення і розвиток математичних знань у світі та формування відомих математиків.

Тематична інформація: Степінь і корінь.

Зміст тематичної інформації. Поняття степеня з натуральним показником виникло вже в Стародавній Греції для розв'язування геометричних задач на обчислення площі квадрата – $S = a^2$ – площа квадрата зі стороною a та об'єму тіла – $V = a^3$ – об'єм куба з ребром a. Звідси походять і сучасні назви «квадрат» і «куб» цих степенів.

У XIV столітті французький математик Н. Орем почав використовувати степені з дробовим та ірраціональним показником. У XV столітті інший французький математик Н. Шюке розглядав степені з від'ємними і нульовим показником. У XVII столітті І. Ньютон увів до наукового обігу поняття степеня з дробовим та цілим від'ємним показником.

Сучасне математичне тлумачення степеня як добутку довільної кількості множників $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$ належить Р. Декарту і датоване XVII ст.

Геометричного тлумачення надавали також квадратним і кубічним кореням. Для того, щоб знайти квадратний корінь, говорили, що треба знайти сторону квадрата за даною його площею.

Позначення квадратного кореня у вигляді знака V здійснив чеський учений К. Рудольф у XVII столітті. Р. Декарт додав до нього горизонтальну риску, а знаки $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$ були введені І. Ньютоном у праці «Універсальна арифметика» (1707 р.). Фламандський математик С. Стевін на початку XVII століття запропонував розуміти під $(a)^{1/n}$ корінь $\sqrt[n]{a}$.

Терміни «радикал» і «корінь», уведені в XII столітті, походять від лат. *radicalis* – корінний, *radix* – корінь (У «Началах» Евкліда слово *radix* означало також сторону) [20, с. 275].

Календарно-бібліографічне повідомлення: Михайло Кравчук – видатний український математик і педагог.

Зміст повідомлення. Михайло Пилипович Кравчук народився у с. Човниці поблизу Луцька 30 вересня 1892 року. У 1910 році закінчив із золотою медаллю Луцьку гімназію, згодом фізико-математичний факультет університету св. Володимира. В 1917 році Михайло Кравчук стає членом українського наукового товариства в Києві, а через рік – приват-доцентом Київського університету. З 1919 по 1921 роки він працює вчителем, пізніше директором школи в с. Саварці Богуславського району Київської області, пише підручник з алгебри і геометрії для 6–7-х класів. Повернувшись до Києва, займається викладацькою діяльністю. В 1924 році захистив докторську дисертацію. З 1925 року М. Кравчук – дійсний член НТШ, з 29 червня 1929 року – дійсний член Всеукраїнської Академії наук. З 1935 року М. Кравчук – співробітник Українського науково-дослідного інституту педагогіки. 23 серпня 1938 року академіка М. Кравчука заарештували за звинуваченням в українському буржуазному націоналізмі і засудили до 20 років ув'язнення. 3 березня 1942 року М. П. Кравчука не стало.

М. Кравчук як вчений-математик займався вивченням наближених обчислень, розробкою теорії і методики ірраціональних чисел, теорії подібності, дослідженням пропедевтики похідної й інтеграла шляхом розгляду лінійної і квадратичної функцій, пропонував вимірювання геометричних величин (площ, об’ємів, поверхонь) вводити за допомогою визначеного інтеграла.

М. Кравчук як педагог вважав, що початковий курс математичного аналізу має бути пропедевтичним, побудованим на мінімальному функціональному матеріалі; завдання цього курсу – насамперед ознайомити учнів з ідеями і методами математичного аналізу, а не з його обґрунтуванням і викладом деталей. Він брав участь у складанні програм, написанні підручників, розробці україномовних математичних рекомендацій щодо впровадження алгебраїчної та геометричної термінології [30, с. 40–44].

До особливостей використання історичного матеріалу в процесі вивчення математики аналізу треба віднести використання навчальних задач світоглядного й історичного характеру. Розглянемо тексти деяких з них, наведені у підручнику Г. Бевза та В. Бевз для 10 класу:

- № 234. «На малюнку 53 зображено промисловий вітрогенератор – пристрій для перетворення кінетичної енергії вітру на електричну.

1) Встановіть, на який із поданих нижче кутів може повернутися лопать *A* вітрогенератора, щоб перейти на місце лопаті *B*.
а) 3360°; б) –4440°; в) 6240°; г) –8720°.

2) Дізнайтеся більше про: а) історію вітряків та їх використання; б) розвиток вітроенергетики в Україні; в) «зелені» тарифи на електричну енергію.

- № 254. «Циркова арена у формі круга з'явилася у Лондоні в кінці VIII ст. Її діаметр – 42 фути – було обрано таким чином, щоб для вершника, який скаче на коні, створювалася оптимальна відцентрова сила (мал. 56). Зараз усі арени стаціонарних цирків мають саме такі розміри арени. Національний цирк України – один із найстаріших стаціонарних цирків в Україні. Його купол спирається на кільце діаметром 42,3 м. Знайдіть: а) площу циркової арени ($S1$) і довжину її кола ($l1$); б) довжину кільця ($l2$), на яке спирається купол Національного цирку України, та площу відповідного круга ($S2$); в) у скільки разів площа циркової арени $S1$ менша від площі $S2$.

- № 255. «Задача Сунь-Цзи. Знайдіть число, яке від ділення на 3 має в остачі 2, а від ділення на 5 має в остачі 3, нарешті від ділення на 7 – остача 2» [5, с. 57, 59].

Історичні задачі наведені також В. Бевз у «Практикумі з історії математики [2, с. 151–153].

Враховуючи те, що використання історичного матеріалу під час систематизованого вивчення предмета носить епізодичний характер, значна частина цієї роботи переноситься на позаурочну діяльність.

2.5. Позаурочні форми навчання математики

Ефективними формами позаурочної зайнятості учнів старшої школи з математики можуть бути математичні гуртки, факультативи, курси за вибором, елективні курси, масові науково-популярні заходи, науково-дослідницька діяльність, реальне й віртуальне спілкування тощо.

Акцентуємо увагу на перспективних формах навчально-пізнавальної діяльності учнів та розроблених нами методичних матеріалах.

Особливої актуальності набуває зараз метод проектного навчання, за якого учні набувають знань і навичок у процесі планування й виконання практичних завдань (проектів), які поступово ускладнюються. З-поміж навчальних проектів з математики виділяють: інформаційні проекти (наприклад, «З історії границь, похідної і диференціала», «Найвідоміші математики про диференціальне числення», «Математичні цікавинки» та ін.); пошуково-дослідницькі (наприклад, «Математика в фізиці», «Похідна в реальній геометрії», «Математика – минуле, сьогодення і перспективи» та ін.); творчі проекти (наприклад, «Цікавий задачник», ілюстрування задач «Намалюймо задачу», «Математична газета», та ін.); проекти – постановки ігрових вистав, ділових ігор (наприклад, «Як виникла похідна?», «Похідна у моєму житті») [9; 14; 44].

Однією з тем колективної проектної науково-дослідної роботи з конкретною індивідуально-груповою участю може бути: «Укласти історико-математичний термінологічний словник алгебри і початків аналізу».

За своєю структурою цей словник може бути подібним до інших термінологічних галузевих чи тематичних словників. За характером діяльності укладання словника виконує міждисциплінарну функцію; тут явно проявляються міжпредметні зв’язки з історією, культурологією, філологією, природничими науками.

До структури словникових статей доцільно ввести: назву терміна, етимологічні корені, означення поняття, час виникнення та прізвище першовідкривача, етапи еволюції розвитку, сфера використання та ін. Наведемо приклади варіантів словникових статей.

Функція (від лат. *functio* – діяльність, виконання) – одне з основних понять математики, що характеризує залежність одних змінних величин від інших. Термін вперше увів Г. Лейбніц у 1692 р. Використовували у Стародавній Греції для складання таблиць залежностей, у XVII ст. для потреб аналітичної геометрії і механіки. Працювали над розвитком вчення про функціональну залежність І. Ньютон, Й. Бернуллі, О Коші, Л. Ейлер, П. Діріхле та ін. За допомогою функцій описують особливості природи та реального світу в процесі історичного розвитку і у всіх взаємозв'язках.

Похідна (від франц. *derivée* «похідна») – відноситься до фундаментальних понять математичного аналізу. Під похідною даної функції розуміють границю відношення приросту функції до приросту незалежної змінної при довільному прямуванні цього приросту до нуля. Вперше поняття та сучасне позначення y', f' ввів у 1797 році французький математик Ж. Л. Лагранж. І. Ньютон називав похідну функції флюксією, а саму функцію – флюентою і розв'язував дві основні задачі: визначення швидкості руху в даний момент часу і визначення пройденого шляху за заданою швидкістю і проміжком часу. Подальший розвиток похідної пов'язують з іменами Л. Ейлера, Б. Больцано, О. Коші, К. Веєрштрасса, М. Остроградського та ін., Похідна використовується в різних сферах науки, техніки і суспільного життя.

Ейлер Леонард (1707–1783) – відомий швейцарський, німецький і російський математик і механік. Зробив значний внесок у розвиток і популяризацію диференціального й інтегрального числення. У книзі «Інтегральне числення» (1768–1769 рр.) представляючи інтегральне числення в існуючому дотепер вигляді, наводить різні методи обчислення інтегралів функцій, розглядає питання інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Автор 866 наукових публікацій з математичного аналізу, диференціальної геометрії, теорії чисел, теорії графів, наближених обчислень та ін.

Ми можемо запропонувати проєктну роботу для групи успішних учнів 11 класу: «Спланувати, підготувати й провести науково-практичну конференцію та тему: «Історія розвитку математичної науки в Україні»». До плану конференції доцільно включити перелік таких питань.

1. Витоки математичної культури на українських землях (твір монаха Кирика «Ученіе им же в дети человеку числа всіх лет» (1108 р.), «Правда Руська»; «Изборник Святослава» (1073 р.).

2. Розвиток математичної науки й освіти на Україні в XIV–XIX століттях (братські школи, Острозька та Львівська школи, Києво-Могилянська Академія, Львівський та Київський університети).

3. Передумови створення національної української академії наук. Математично-природописна секція Наукового товариства ім. Т. Шевченка.

4. Наукові досягнення М. Кравчука, М. Остроградського та В. Буняковського.

5. Науково-педагогічні та методичні ідеї в працях математиків Наукового товариства ім. Т. Шевченка (П. Огоновського, В. Левицького, М. Чайковського, М. П. Кравчука, М. Зарицького та ін.).

6. Становлення і розвиток функціонального аналізу. Львівська математична школа (С. Банах).

7. Використання історичного матеріалу в шкільній математичній науці. (на прикладах матеріалів підручників з алгебри і початків аналізу).

8. Цікаві історичні математичні задачі народознавчого характеру.

Важливим напрямом профілізації шкільного курсу математики і удосконалення методики викладання предмету є розробка індивідуальних освітніх програм (елективні курси, курси за вибором, додаткові заняття за вибором), модульних курсів та ін.

Елективні курси (*elect* – вибір), як зазначає О. Савицька, – це курси профільного доповнення, які поглиблюють та розширюють межі профільних предметів, розвивають і доповнюють їх зміст [56, с. 219].

Елективні курси, як правило, носять авторський характер. Нами розроблено й апробовано програму елективного курсу для 11 класу за темою «Теоретична й прикладна сутність рівнянь».

Мета елективного курсу полягає в розширенні, узагальненні й систематизації знань учнів про рівняння, формування практичних компетенції їх розв'язання та з'ясування ролі і значення рівнянь у розв'язанні практичних потреб людини.

Програмою передбачено проведення 36 занять (вісімнадцять двогодинних тем), зміст яких включає такий перелік питань: 1. Алгебра – наука про рівняння. Історичні витоки поняття та його еволюція. 2. Класифікації рівнянь. 3. Алгебраїчні рівняння. 4. Трансцендентні рівняння. 5. Рівняння з модулями. 6. Рівняння з параметрами. 7. Розв'язування рівнянь математичних олімпіад. 8. Класичні методи розв'язування рівнянь різних типів. 9. Розв'язування рівнянь – місце для творчості. Розв'язування нестандартних рівнянь. 10. Рівняння в теоретико-множинній концепції. 11. Рівняння і диференціальне та інтегральне числення. 12. Рівняння з елементами комбінаторики. 13. Рівняння і розширення знань про число. 14. Рівняння з комплексними числами. 15. Розв'язування рівнянь Міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру». 16. Розв'язування прикладних задач за допомогою рівнянь. 17. Теорія, методика і практика рівнянь в іменах відомих вчених. 18. Науково-практична конференція: «Теоретична й прикладна сутність рівнянь».

Використання інформаційно-комунікаційних технологій, дидактичних відео/аудіо матеріалів, таблиць, схем у поєднанні з сучасними електронними засобами навчання і комунікації, зокрема, інтерактивним мультимедійним комплексом, що об'єднує інтерактивну дошку, мультимедійний проектор і персональний комп'ютер викладача, дозволяє оптимізувати процес навчання і викладання, сприяє ефектному та ефективному проведенню уроків. Однією з форм інформаційно-комунікаційних технологій виступають мультимедійні презентації, флеш анімації, скрайбінг-технології та ін. Тематика презентації з використанням історичних відомостей, фактів та задач може бути різноманітною. Наведемо, для прикладу, тематику презентацій включеної до курсу «Алгебри і початків аналізу» теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики».

1. Зародження і розвиток комбінаторики як теоретичної і практичної науки.

2. Видатні імена в комбінаториці (Д. Кардано, П. Ферма, Б. Паскаль, Г. Лейбніц, Я. Берніллі).

3. Комбінаторні задачі Л. Ейлера (задача про хід коня, задача семи мостів, побудова греко-латинських квадратів, узагальнені перестановки, розбиття, поєднання і розміщення з умовами).

4. Першовитоки та еволюція теорії ймовірностей (азартні ігри, гральні кубики, математичне сподівання).

5. Вклад українських вчених у розвиток теорії ймовірностей (Б. Гнєденко, В. Королюк, М. Жалдак).

6. Зародження й використання засобів і методів математичної статистики.

7. Використання сучасних електронних засобів у комбінаториці, теорії ймовірностей та математичній статистиці.

8. Проблеми та історична перспектива комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики.

Висновки до розділу 2

Спектр організаційно-педагогічних форм компетентнісного навчання у старшій школі є досить широким і виступає основою для засвоєння ключових та предметних компетенцій учнів і творчої діяльності вчителя математики.

Основною формою засвоєння знань, умінь і навичок функціональної змістової лінії є урок. Нами представлені у розділі різні типи уроків.

Форми формування навчально-пізнавальної компетентності та розвитку творчого мислення учнів під час виконання обчислень, перетворення виразів та навчання розв'язуванню різних типів рівнянь: теоретичне заняття (теоретичні відомості про тип рівняння, алгоритм його розв'язання, напрямки практичного застосування), комбінований урок (теоретичні відомості, схема розв'язання окремого типу рівняння, розв'язування типових рівнянь), практичне заняття (урок застосування знань, умінь і навичок, урок-практикум з розв'язування вправ, виконання навчальних проєктів).

Організаційними формами формування практичної компетентності у процесі навчання геометрії виступають: колективне вироблення алгоритму розв'язання задачі; фронтальне розв'язування типових задач на основі напрацьованого алгоритму; колективне і групове розв'язування задач; самостійна робота, індивідуальне розв'язування задач; креативна синергетична діяльність, яка включає окремі форми навчальної зайнятості учнів, визначені підручниками, зокрема, під рубриками «Практичне завдання, «Життєва математика», «Вияви свою компетентність», «Самостійна робота», «Тематичні тести».

Формами ознайомлення старшокласників з історією математики виступають: спеціальні уроки з історії математики або фрагменти звичайних уроків математики; інформаційні хвилинки, повідомлення, відступи на уроках або інших заходах; повідомлення у вигляді історичних відомостей, гіпотез, задач; математичні гуртки, факультативи, курси за вибором; позаурочні масові заходи: наукові конференції, математичні вечори, інтелектуальні конкурси та змагання; самостійна робота школярів: написання доповідей, рефератів, складання задач; самоосвітня пошуково-пізнавальна діяльність: опрацювання науково-історичної літератури, словників, Інтернет-джерел; навчальна та наукова-дослідницька робота учнів: виконання проектів, укладання історичних та тлумачних тематичних словників, підготовка мультимедійних презентацій тощо.

Ефективними формами позаурочної зайнятості учнів старшої школи з математики можуть бути математичні гуртки, факультативи, курси за вибором, елективні курси, масові науково-популярні заходи, науково-дослідницька діяльність, реальне й віртуальне спілкування тощо.

ВИСНОВКИ

У роботі проаналізовано методичні особливості різних форм навчання математики учнів класів гуманітарних профілів старшої школи. За результатами дослідження можна зробити висновки.

1. Процес навчання математики у класах гуманітарного профілю реалізується з позицій диференційованого, рівневого і компетентнісного підходів. Диференційований підхід як засіб реалізації компетентнісного навчання математики у старшій школі забезпечується можливістю оптимального вибору відповідного професійного профіля.

2. Навчання математики учнів гуманітарних класів здійснюється за програмою рівня стандарту. Зміст навчального матеріалу створює можливості для диференційованого вивчення математики, формування математичної і ключових компетентностей, набуття практичних навичок розв’язувати прикладні задачі тощо.

3. Спектр організаційно-педагогічних форм компетентнісного навчання у старшій школі є досить широким і виступає основою для творчої діяльності вчителя математики. Ефективними практичними організаційно-педагогічними формами компетентнісного навчання математики у старшій школі є: сучасний урок, елементами якого виступають перспективні форми навчання, система позаурочної роботи, яка включає індивідуальні заняття та консультації, виконання самостійних творчих завдань, заходи громадської участі.

4. У дослідженні розглянуто методичні особливості навчання математики учнів класів гуманітарних профілів, зокрема: оптимізацію організаційних форм навчання в процесі компетентнісного вивчення функціональної змістової лінії; форми формування навчально-пізнавальної компетентності та розвитку творчого мислення учнів під час виконання обчислень, перетворення виразів та навчання розв’язуванню різних типів рівнянь; організаційні форми формування практичної компетентності в

процесі вивчення геометрії; форми використання історичного матеріалу; позаурочні форми навчання математики.

5. Результативність компетентнісного вивчення предмета забезпечується оптимізацією використання широкого спектру організаційних, зокрема колективних, групових, індивідуальних форм навчання.

Перспективи подальших досліджень пов’язані з виробленням цілісної науково-педагогічної системи навчання математики учнів класів гуманітарних профілів, яка б відповідала вимогам сьогодення, удосконаленням методики сучасного уроку, систематизацією напрацьованого педагогічного досвіду, зокрема на основі дистанційних технологій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ачкан В. В. Використання прикладних задач у процесі вивчення похідної у курсі алгебри та початків аналізу в класах різних профілів. *Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету*. Педагогічні науки : зб. наук. пр. 2014. Вип.1. С. 12–23.

2. Бевз В. Г. Практикум з історії математики : навч. посіб. Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2004. 312 с.

3. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів : монографія. Київ : НПУ ім. Драгоманова, 2005. 360 с.

4. Бевз Г. П. Методика розв’язування стереометричних задач. Київ : Рад. школа, 1988. 192 с.

5. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.

6. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.

7. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.

8. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. М. : Наука, 1971. 736 с.

9. Боднар Г. Я. Навчально-виховний проект «Похідна у нашому житті». URL : http://bibrkaschool.org.ua/script/regis/upload/files/Zastosuvannya-_pokhiidnoï.docx (дата звернення : 14.03.2020).

10. Бугай А. С. Короткий тлумачний математичний словник. Київ : Рад школа, 1964. 428 с.

11. Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І, Тарасенкова Н. А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту):

підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Київ : УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.

12. Ващуленко О. П. Формування предметних і ключових компетентностей учнів основної школи у процесі навчання геометрії. *Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі* : метод. посіб. / О. І. Глобін та ін. Київ : Педагогічна думка, 2015. С. 167–206.

13. Видатні особистості. Ал-Хорезмі. URL : http://novopetrivske-osoba.edukit.mk.ua/vidatni_matematiki/al-horezmi/ (дата звернення : 14.03.2020).

14. Воєвода А. Л., Струк С. М. Застосування методу проектів у процесі навчання алгебри і початків аналізу. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців* : методологія, теорія, досвід, проблеми. 2014. Вип. 38. С. 213–217.

15. Гоменюк Г. В. Концептуальна модель компетентісно орієнтованого навчання алгебри учнів основної школи. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова*. Серія 3 : Фізика і математика у вищій і середній школі. 2014. Вип. 14. С. 87–93.

16. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти (чинний від 2011–11–23). URL : http://old.mon.gov.ua/uaqueste/often-red/state-standards/ (дата звернення : 14.03.2020).

17. Дичківська І. М. Інноваційні педагогічні технології : навч. посіб. Київ : Академвидав, 2004. 352 с.

18. Зіненко І. М. Особливості вивчення математики в старшій профільній школі за умов впровадження компетентнісного підходу. *Проблеми сучасної педагогічної освіти*. *Педагогіка і психологія*. 2013. Вип. 40(1). С. 135–140.

19. Істер О. С. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2018. 384 с.

20. Колмогоров А. М. та ін. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10–11 кл. серед. шк. Київ : Освіта, 1994. 350 с.

21. Коменський Я. А. Велика дидактика. *Закони добре організованої школи. Історія зарубіжної педагогіки* : хрестоматія / Є. І. Коваленко. Київ : Центр учбової літ-ри, 2006. С. 155–185.

22. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики : метод. посіб. для вчителів / автор-упор. Г. Ф. Зверєва. Харків, 2009. 81 с.

23. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі : метод. посіб. / О. І. Глобін та ін. Київ : Педагогічна думка, 2015. 245 с.

24. Кучеренко І. Класно-урочна система Я. Коменського: становлення й історія розвитку. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету*. 2012. Ч. 3. С. 158–165.

25. Лекція № 7. Тема: Поняття функціональної залежності. Способи задання та властивості функцій. URL : https://aekmatem.pl.ua/wp-content/uploads/2015/06/L7.pdf (дата звернення : 14.03.2020).

26. Лист МОН № 1/9-415 від 03.07.18 року: «Щодо вивчення у закладах загальної середньої освіти навчальних предметів у 2018/2019 навчальному році». URL : https://ru.osvita.ua/legislation/Ser_osv/61466// (дата звернення : 14.03.2020).

27. Лист № 1/11-5966 від 01.07.2019 року: «Щодо методичних рекомендацій про викладання навчальних предметів у закладах загальної середньої освіти у 2019/2020 навчальному році». URL : http://ru.osvita.ua/legislation/Ser_osv/65024/ (дата звернення : 14.03.2020).

28. Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений : в 5 т. М., Л. : Гостехиздат, 1951. Т.V. 535 с.

29. Лов'янова І. В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі: теоретичний аспект : монографія. Черкаси : Видавець Чабаненко Ю. А., 2014. 368 с.

30. Маланюк М. П., Возняк Г. П. Стежини до коренів істини. Тернопіль, 1993. 62 с.

31. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А, Полонський В. Б, Якір М. С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 256 с.

32. Мерзляк А. Г. та ін. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2019. 208 с.

33. Мойсеюк Н. Є. Педагогіка : навч. посібник. Київ : ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика», 2009. 656 с.

34. Моріна Н. Конспект уроку на тему «Найбільше і найменше значення функції на відрізку». URL : https://academia.in.ua/конспекти/конспект-уроку-на-тему-найбільше-і-найменше-значення-функції-на-відрізку (дата звернення : 14.03.2020).

35. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів рівень стандарту. URL : https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (дата звернення : 14.03.2020).

36. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL : https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (дата звернення : 14.03.2020).

37. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL : https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (дата звернення : 14.03.2020).

38. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 328 с.

39. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 204 с.

40. Островерхова Н. М. Урок як соціально-педагогічна система. *Освіта та розвиток обдарованої особистості*. 2014. № 2. С. 9–14.

41. Онищук В. А. Урок в современной школе. Москва : Просвещение, 1981. 191 с.

42. Оновлення програм для базової середньої освіти URL : https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/kolegiya-mon-26-travnya.pdf (дата звернення : 14.03.2020).

43. Онопрієнко О. В., Листопад Н. П, Скворцова С. О. Компетентнісний підхід до навчання математики. Київ : Редакції газет з дошкільної та початкової освіти, 2014. 128 с.

44. Онопрієнко О. Проекти на уроках математики. *Учитель початкової школи*. 2017. № 2. С. 7–9.

45. Плясенко Є. О. Форми навчання математики учнів 10-11 класів гуманітарних профілів. *Студентська звітна конференція* : Матеріали наукових молодих науковців. Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2020. Випуск 14. Том 1. С. 49.

46. Плясенко Є. О., Шишенко І. В. Проблема підготовки майбутніх учителів фізико-математичних дисциплін до навчання математики учнів класів гуманітарних профілів *Організаційно-методологічне забезпечення підготовки фахівців: тенденції, проблеми та шляхи їх вирішення (з нагоди 90- річчя ХНАДУ* : матеріали Всеукраїнської науково-методичної інтернет - конференції (м. Харків, 18 листопада 2020 року). Харків, 2020.

47. Про освіту : Закон України від 05.09.2017р. № 2145-19. *Відомості Верховної Ради України*. 2017. № 38–39. Ст. 380.

48. Прошкін В. В., Панішева О. В. Застосування системи формування готовності майбутніх учителів математики до роботи в класах гуманітарного

профілю. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*. 2015. № 9 (53). С. 399–409.

49. Пруднікова Л. О. Застосування похідної до дослідження функцій та побудови графіків. URL : http://osvita.ua/school/lessons_summary/math/39839/ (дата звернення : 14.03.2020).

50. Прус А., Швець В. Прикладна спрямованість стереометрії: 10–11 кл. Київ : Шк. світ, 2007. 128 с.

51. Прус А. В., Сверчевська І. А. Вчимося розв’язувати задачі зі стереометрії. Геометричні тіла у тестових завданнях : навч. посіб. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. 32 с.

52. Подласый И. П. Педагогика. Новый курс. М : ВЛАДОС, 2000. 574 с.

53. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія. Харків : Факт, 2005. 360 с.

54. Ріжняк Р. Моделювання розв’язування текстових математичних задач: інноваційний підхід. *Наукові записки КДПУ ім. В. Винниченка*. Серія : Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. 2015. Вип. 7. С. 80–87.

55. Розуменко А. О., Плясенко Є. О. До питання про використання наочності при вивченні стереометрії. *Інтеграція освіти, науки та бізнесу в сучасному середовищі: літні диспути*: матеріали ІІ Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (м. Дніпро, 17-18 серпня 2020 р.). Дніпро, 2020. С. 403.

56. Савицька О. С. Особливості впровадження елективних курсів в систему профільної технологічної освіти. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова*. Серія 5. Педагогічні науки : реалії та перспективи. 2012. Вип. 31. С. 217–222.

57. Семенець С. П. Теорія задач розвивальної математичної освіти. *Евристика і дидактика точних наук*. 2008. № 30. С. 130–134.

58. Сікорський П. Проблема диференційованого навчання математики у ПТНЗ. *Дидактика, методика і технології навчання. Педагогіка і психологія професійної освіти*. 2013. №3. С. 31–38.

59. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.

60. Словник української мови : в 11 т. / гол. ред. І. К. Білодід. Київ : Наук. думка, 1970–1980. Т. 1–11.

61. Субін Ю. П. Реалізація компетентнісного підходу на уроках математики. URL : https://vseosvita.ua/library/realizacia-kompetentnisnogo-pidhodu-na-urokah-matematiki-materiali-auditornoi-praktiki-7385 (дата звернення : 14.03.2020).

62. Томусяк А. А., Трохименко В. С. Математичний аналіз. Вінниця, 1999. 488 с.

63. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. М. : Наука, 1968. Т. 1. 440 с.

64. Фіцула М. М. Педагогіка : навч. посіб. Тернопіль : «Навчальна книга – Богдан», 1997. 192 с.

65. Хмельницька Л. К. Похідна. URL : http://osvita.ua/school/lessons_summary/math/25459/ (дата звернення : 14.03.2020).

66. Чкана Я. О., Шишенко І. В. Реалії математичної підготовки учнів-гуманітаріїв у сучасній українській старшій школі. *Science and Education a New Dimension*. Pedagogy and Psychology. 2019. Вип. VII (77). С. 14–17.

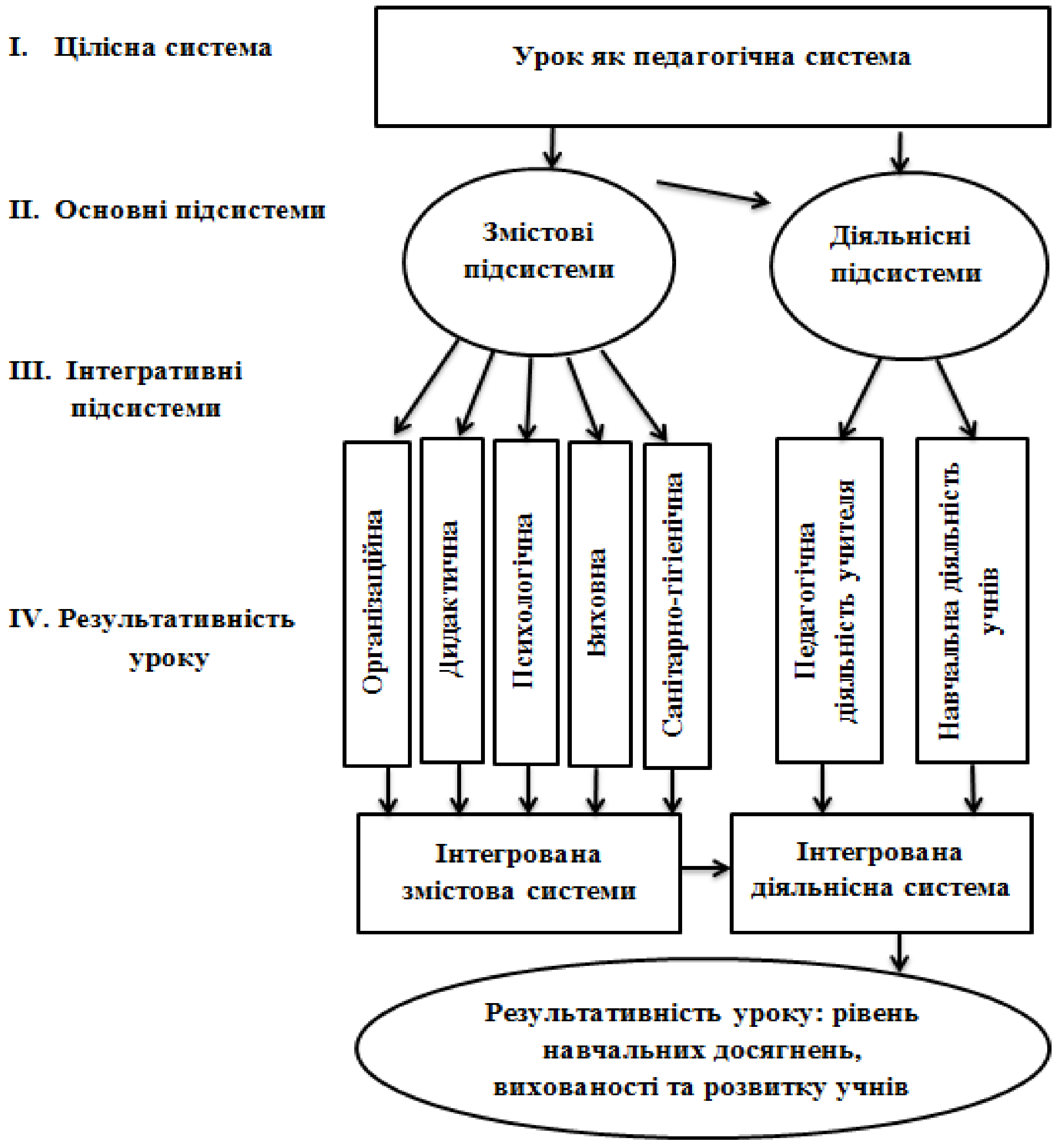
67. Швець В. О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики учнів. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*: міжнар. зб. наук. праць. Донецьк : Фірма ТЕАН, 2009. Вип. 32. С. 16–23.

68. Шишенко І. В. Методи та форми організації навчання математики, спрямовані на активізацію пізнавальної діяльності учнів класів гуманітарних профілів. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова*. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі. 2014. № 14. С. 118−126.

ДОДАТКИ

Додаток А

Структурно-змістова модель уроку як педагогічної системи



Додаток Б

Таблиця Б.1

Формування деяких ключових компетентностей в процесі вивчення математики старшої школи

№ з/п	Ключова компетентність	Компоненти
1	**2**	**3**
1.	Математична компетентність	***Уміння:*** оперувати числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та в просторі; встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо); розв'язувати математичні і прикладні задачі; будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях. ***Ставлення:*** усвідомлення значення математики для суспільного життя, розвитку держави, успішного вивчення інших дисциплін. ***Навчальні ресурси:*** математичні і прикладні задачі.
2.	Інформаційно-цифрова компетентність	***Уміння:*** структурувати дані; працювати за алгоритмом та складати алгоритми; визначати достатність даних та доводити справедливість тверджень; використовувати різні знакові системи; знаходити, оцінювати та працювати з інформацією.
		Ставлення: критичне осмислення інформації та джерел її отримання; усвідомлення важливості інформаційно-комунікаційних технологій для ефективного розв'язування математичних і прикладних задач. Навчальні ресурси: візуалізація даних, в т. ч. за допомогою програмних засобів.

Продовження табл. Б.1

1	2	3
3.	Уміння вчитися впродовж життя	Уміння: визначати мету, завдання навчальної діяльності та підбирати і застосовувати потрібні знання, вміння і способи діяльності для їх реалізації; організовувати та планувати свою навчальну діяльність; моделювати власну освітню траєкторію, аналізувати, контролювати, коригувати та оцінювати результати своєї навчальної діяльності; доводити правильність власного судження або визнавати помилковість. Ставлення: усвідомлення власних освітніх потреб та цінності нових знань і вмінь; мотивація у пізнанні світу та розуміння важливості вчитися впродовж життя; прагнення до вдосконалення результатів своєї діяльності. Навчальні ресурси: моделювання власної освітньої траєкторії; статистична інформація; історичні задачі; завдання ймовірнісного змісту.

Додаток В

Таблиця В.1.

Розподіл навчального матеріалу за рівневим розкладом

№	Розділ навчального матеріалу	Розподіл годин
Рівень стандарту		
1.	Функції, їхні властивості та графіки	15
2.	Тригонометричні функції	18
3.	Похідна та її застосування	14
4.	Показникова та логарифмічна функції	16
5.	Інтеграл та його застосування	10
6.	Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики	10
Профільний рівень		
1.	Функції, многочлени, рівняння і нерівності	36
2.	Степенева функція	30
3.	Тригонометричні функції	34
4.	Тригонометричні рівняння і нерівності	32
5.	Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування	54
6.	Показникова та логарифмічна функції	40
7.	Інтеграл та його застосування	30
8.	Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей	30
9.	Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація	30
Профільний рівень (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу)		
1.	Степенева функція	24
2.	Тригонометричні функції	42
3.	Тригонометричні рівняння і нерівності	42
4.	Числові послідовності	12
5.	Границя та неперервність функції	18
6.	Похідна та її застосування	50
7.	Показникова та логарифмічна функції	36
8.	Інтеграл та його застосування	30
9.	Елементи теорії ймовірностей	36
10.	Комплексні числа та многочлени	34

Додаток Г

Таблиця Г.1.

Розподіл навчального матеріалу за рівневим розкладом

№	Розділ навчального матеріалу	Розподіл годин
Рівень стандарту		
1.	Паралельність прямих і площин у просторі	17
2.	Перпендикулярність прямих і площин у просторі	17
3.	Координати і вектори	10
4.	Многогранники	14
5.	Тіла обертання	12
6.	Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл	11
Профільний рівень		
1.	Вступ до стереометрії	15
2.	Паралельність прямих і площин у просторі	24
3.	Перпендикулярність прямих і площин у просторі	26
4.	Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі	22
5.	Многогранники	24
6.	Тіла обертання	21
7.	Об’єми многогранників	8
8.	Об’єми та площі поверхонь тіл обертання	16
Профільний рівень (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу)		
1.	Вступ до стереометрії	15
2.	Паралельність прямих і площин у просторі	24
3.	Перпендикулярність прямих і площин у просторі	26
4.	Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі	22
5.	Многогранники	20
6.	Елементи геометрії тетраедра	11
7.	Тіла обертання	18
8.	Об’єми многогранників	14
9.	Об’єми та площі поверхонь тіл обертання	14

Додаток Ґ

Фрагмент уроку з теми «Похідна як засіб розв'язання практичних потреб людини»

Тема: Похідна як засіб розв'язання практичних потреб людини.

Мета: Сформувати в учнів уявлення про похідну як засіб розв'язання практичних потреб людини; розвивати кругозір, показувати практичне значення математичних знань; виховувати працелюбність, формувати інтерес до вивчення математики.

Обладнання і матеріали: добірка довідкової математичної літератури, слайди комп'ютерної презентації, мультимедійний комплекс.

План заняття

I. Організація класу, постановка навчальних завдань.

2. Ознайомлення зі структурою і завданнями заняття.

II. Повторення й узагальнення навчального матеріалу курсу.

1. Усне фронтальне опитування: Які задачі приводять до введення похідної? Що називають «похідною функції в точці»? Назвіть основну умову існування похідної? Яку функцію називають диференційованою в точці?

2. Математична естафета. 1) Продовжити числовий ряд: 2, 4, 6, …; 12, 18, …; ½, 2/3, ¾, 4/5, 5/6, …; 1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, …; -1, 1, 3, 3, 3, … .

2) Записати число, до якого «наближається» значення виразу, якщо n необмежено збільшується: $1/n$; $-5/n$; $1 + 1/n$; $(3n – 2)/n$; $(n + 1)/n$.

3) Обчислити приріст функції в точці, якщо: $f(x) = 2x – 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}3$; $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

3. Робота в навчальних групах. Виконати завдання, записати відповідь у чисту таблицю, звірити результати з відповідями у «Контрольному листку вчителя» (табл. 2.2).

Таблиця Ґ.1

Контрольний листок вчителя

Завдання	І група	ІІ група	ІІІ група
Обчислити границю функції	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{2-3x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-2}{2x+3}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$
Обчислити приріст функції	$f(x) = 5x - 1$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}3$;	$f(x) = 2x + 1$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}3$;	$f(x) = 3x + 2$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}3$;
Знайти $\Delta f(x_0)/\Delta x$	$f(x) = 2x$	$f(x) = 3x$	$f(x) = 4x$
Знайти похідну	$f(x) = 2x + 1$	$f(x) = 2x - 1$	$f(x) = 2x + 3$

ІІІ. Проєктна навчальна діяльність.

Презентація і захист навчальних проєктів, виконаних навчальними групами. Форма роботи – поєднання інтерактивних технологій «Мікрофон», «Розмова в колі», «Захисти свою думку».

Назви навчальних груп і тематика самостійних дослідницьких завдань:

«Історики» – З історії похідної: факти, події, прізвища (Підготовка доповіді).

«Філологи» – Тлумачення основних понять. Спектр значень слів-термінів в українській мові (Укладання умовного словника).

«Теоретики» – Теоретичні передумови похідної (Розробка методичних рекомендацій: блок-схеми навчального матеріалу, приклади задач).

«Практики» – Задачі фізики, геометрії, економіки, що приводять до поняття похідної (Підготовка навчального буклету).

«Айтішники» – Похідна і розв’язання практичних потреб людини (Підготовка мультимедійних презентацій).

ІV. Фронтальне розв’язування «підступних» цікавих задач-запитань.

- Чи може зростаюча послідовність мати найбільший член?

- Чи вірно, що спадна послідовність має найменший член?

- Чи має границю лінійна функція при нескінченному зростанні аргумента?

- Чи можна стверджувати про існування границі суми функцій в точці, якщо кожна з них має границю в цій точці?

- Чи можна стверджувати про існування границі суми функцій в точці, якщо хоча б одна з них має границю в цій точці?

- Навести приклад функції, необмеженої на множині дійсних чисел, яка має розрив в одній точці.

- Чи можна стверджувати, що функція диференційована в точці неперервна в цій точці?

- Яке слово реалізує значення «Збільшення в розмірах, в кількості, в потужності і т. ін.»?

- Чи вірно твердження, що похідна є границею?

V. Оцінка проведеного заняття, підведення підсумків.

Технологія «Відкритий мікрофон»: висловити свою думку про об’єктивну необхідність введення похідної як засобу розв’язання практичних потреб людини, дати оцінку проведеному заняттю і рівню отриманих компетенцій.

Додаток Д

Проєктне завдання для груп: «За фольклорними метафорами встановити про яку властивість функції йдеться»

Таблиця Д.1

Фольклорні метафори і властивості функцій

Означення функції, що зростає	Більше хліба в полі, більше і в коморі. Більшають діти — більшають і клопоти
Означення функції, що спадає	Багато диму — мало тепла. Грім гучний, а дощик малий. Хто високо літає — той низько сідає.
Графік функції, що не зростає	Камінь угору не котиться ні в яку пору.
Функція ні парна, ні непарна	Ні риба ні м’ясо. Ні швець ні кравець.
Не будь-яка критична точка є точкою екстремуму	На всіх деревах є листя, та не всі плодоносять. Не все те золото, що блищить. Не з кожної хмари дощ
Визначення зростання функції за допомогою похідної	За доброю дружиною (похідна) і чоловік добрий (функція)
Точки максимуму	Липень – маківка літа, січень – шапка зими. Найсолодші грона висять найвище
Диференціювання функції	Дубовий гай вітру не боїться. Хоч у терновий вогонь його клади, а він не горить. Загадка. Всі пани скинули жупани, а один пан не скинув жупан. (Листяні дерева і сосна)

Додаток Е

Фрагмент уроку застосування знань, умінь та навичок за темою «Застосування похідної до дослідження функції та побудови графіків»

Для роботи в **навчальних групах** виноситься завдання: «Дослідіть функцію і побудуйте їх графік $y = x^4 - 4x^2$»:

- учні першої групи (сильніші) працюють самостійно, перевірка проводиться за листом самоперевірки (рис. Е.1);

- учні другої групи (середні) працюють самостійно, спираючись на підказку (на дошці - алгоритм роботи).

- учні найслабшої групи працюють за корекційними картками та допомогою вчителя.

Приклад 1. Знайти область визначення функції: $y = \log_2(x^2 - 3x - 4)$.

Колективне розв’язання. Область визначення логарифмічної функції – множина всіх додатних дійсних чисел. Тому функція $y = \log_2(x^2 - 3x - 4)$ визначена для всіх значень x, при яких $x^2 - 3x - 4 > 0$. Розв’язком квадратної нерівності і одночасно областю визначення вихідної функції буде об’єднання інтервалів

$$D(y) = (-\infty; 1) \cup (4; \infty).$$

Вправи для самостійної роботи із підручника Є. Неліна та О. Долгової №№ 4.1.2; 4.1.3; 4.1.4 [39, с. 54].

Приклад 2. Знайти область значень функції $y = 8 - 3\sin x$.

Колективне розв’язання. Областю значень базової функції $y = \sin x$ є проміжок [-1; 1], тобто $-1 \le \sin x \le 1$.

Помножимо усі частини подвійної нерівності на -3, а потім додамо до них число 8. Одержимо: $-1 \le \sin x \le 1$, $3 \ge -3\sin x \ge -3$, $-3 \le -3\sin x \le 3$, $5 \le 8 - 3\sin x \le 11$. Областю визначення функції $y = 8 - 3\sin x$ є проміжок [5; 11].

Лист самоперевірки

$y = x^4 - 4x^2$

1. Д(у) = R

2. Знайдемо точки перетину графіка з осями координат

$y = 0$; $x^4 - 4x^2 = 0$; $x^2(x^2 - 4) = 0$; $x = 0$; $x^2 - 4 = 0$; $x = -2$, $x = 2$

3. $y(x) = x^4 - 4x^2$

$y(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2$

$y(-x) = y(x)$

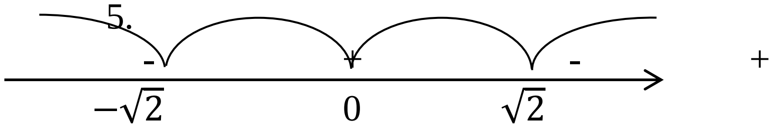
Функція парна, неперіодична.

4. $y' = (x^4 - 4x^2)' = 4x^3 - 8x$

$4x^3 - 8x = 0$; $4x(x^2 - 2) = 0$

$x = 0, x = -\sqrt{2}$; $x = \sqrt{2}$- стаціонарні точки

5.



$y'(2) = 4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 = 16 > 0$

$y'(1) = 4 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1 = -4 < 0$

$y'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1) = 4 > 0$

$y'(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 8 \cdot (-2) = -16 < 0$

x	-∞; $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$; 0	0	0; $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$; +∞
$y'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$y(x)$	↘	−4 *min*	↗	0 *max*	↘	−4 *Tin*	↗

$y(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 4(-\sqrt{2})^2 = -4$, $y(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^2 = 0$, $y(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4(\sqrt{2})^2 = -4$

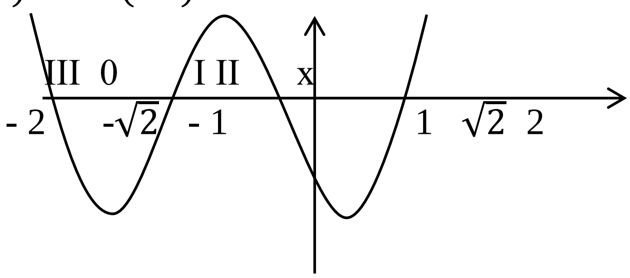


Рис. Е.1. Ілюстрація до завдання

Вправи для самостійної роботи із підручника Г. Бевза та В. Бевз: №№364; 365 [5, с. 83].

Приклад 3. Знайти значення похідної даної функції в зазначеній точці: а) $f(x) = x^2 + 5$, $x_0 = -2$; б) $f(x) = 2e^x + 3x$, $x_0 = \ln 2$; в) $f(x) = 3x^2 - \ln x$, $x_0 = 2$.

Колективне розв'язання. а) Знайдемо похідну функції $f'(x) = (x^2 + 5)' = (x^2)' + 5' = 2x$ Тоді, обчислимо значення похідної в точці $x_0 = -2$: $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$;

б) $f'(x) = (2e^x + 3x)' = 2 \cdot (e^x)' + 3 = 2e^x + 3$, $f'(\ln 2) = 2e^{\ln 2} + 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$;

в) $f'(x) = (3x^2 - \ln x)' = 6x - \frac{1}{x}$, $f'(2) = 12 - \frac{1}{2} = 11{,}5$.

Вправи для самостійної роботи із підручника О. Істер: №№ 20.11; 20.12; 20.17–20.20 [19, с. 186].

Приклад 4. Знайти найменше значення функції $y = x + \frac{36}{x}$, де x належить інтервалу (0; 10).

Колективне розв'язання. 1) Знайдемо похідну $y' = 1 - \frac{36}{x} = \frac{x - 36}{x^2} = \frac{(x-6)(x+6)}{x^2}$.

2) Із точок $x_1 = 6$, $x_2 = -6$ інтервалу (0; 10) належить точка $x = 6$.

При переході через цю точку похідна змінює знак з «–» на «+» ($y'(1) = -35$, $y'(7) = \frac{13}{49}$).

3) Точка $x = 6$ є точкою мінімуму, тому $f_{min.} = f(6) = 12$.

Вправи для самостійної роботи із підручника М. Бурди та ін.: № 484 [11, с. 158].

Приклад 5. Дослідити функцію $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ і побудувати її графік.

Колективне розв'язання. Схема дослідження функції на рівні вимог Державного стандарту представлена у підручниках, зокрема, Г. Бевза та В. Бевз [5, с. 136].

1). Область визначення функції $D(f) = R$.

2). Функція задана многочленом – вона ні парна ні непарна, крім того вона не є періодичною.

3). Знайдемо точки перетину з осями координат.

При $x = 0$, $y = 4$, А (0; 4).

Для $f(x) = 0$, $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. Розкладемо многочлен на множники:

$x^3 - 3x^2 + 4 = (x^2 - 4x + 4) \cdot (x+1) = 0$. Звідси:

$x^2 - 4x + 4 = 0$ або $x + 1 = 0$; $x = 2$ або $x = -1$

Точки перетину з віссю абсцис: В (-1; 0) и С (2; 0).

4). Дослідимо функцію на монотонність та знайдемо екстремуми та екстремальні значення. Для цього знайдемо похідну, критичні точки і заповнимо таблицю (табл. Е.1):

$y' = 3x^2 - 6x$. $3x^2 - 6x = 0$; $x = 0$ або $x = 2$.

Таблиця Е.1

x	$(-\infty;\ 0)$	0	(0; 2)	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	Зростає	Максимум $f(0) = 4$	Спадає	Мінімум $f(2) = 0$	Зростає

5). Побудуємо графік функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ (рис. Е.2).

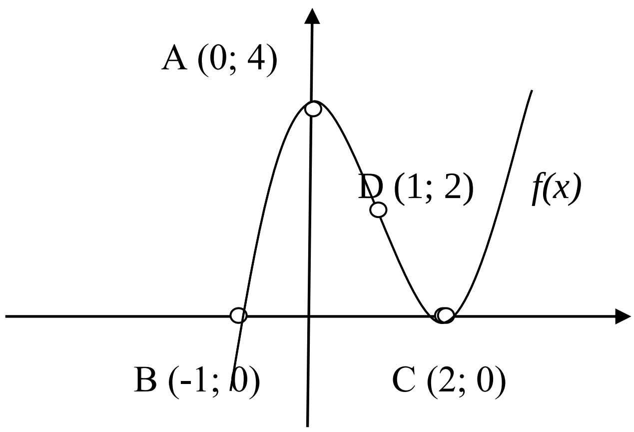


Рис. Е.2. Ілюстрація до завдання

Вправи для самостійної роботи із підручника А. Мерзляка та ін.: №№ 25.1; 25.2 [31, с. 133].