УДК 378.016:517
DOI 10.5281/zenodo.8025561

В. В. Корольський
ORCID ID 0000-0002-7409-4201
О. В. Тураєва
ORCID ID 0009-0001-5707-6001
Криворізький державний педагогічний університет

ГЕНЕРАЦІЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ТА КОМБІНАЦІЇ РЯДІВ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

Метою дослідження є геометрична інтерпретація числових рядів, процес їх генерації за допомогою геометричної моделі, отримання обчислень точкової, лінійної, квадратурної та кубатурної геометричної інтерпретації числових рядів. Об'єкт дослідження – числові ряди. Предмет дослідження – генерація числових рядів за допомогою параметрів геометричної моделі. Під час дослідження використовувались методи аналізу і синтезу, порівняння, моделювання, графічний метод.

Результати дослідження: продемонстровано процес генерації членів числових рядів за допомогою геометричної інтерпретації; показано алгоритм генерації числових рядів з використанням квадрата, розташованого в декартовій системі координат, за допомогою якого можна створювати числові ряди з подальшою можливістю візуалізації членів ряду; розкрито можливість використання різних способів генерації одного й того ж числового ряду, пов'язаного з точковою, лінійною, квадратурною та кубатурною геометричними інтерпретаціями.

Проведене дослідження показало, що геометричні інтерпретації створюють сприятливі умови для сприйняття навчального матеріалу, поглиблення знань, реалізації нестандартного підходу; одержані ряди можна використовувати при вивченні розділу «Ряди» студентам спеціальностей фізико-математичних факультетів педагогічних закладів вищої освіти, а також учням старших класів на факультативах, спецкурсах або під час підготовки до олімпіади.

Метою подальших досліджень є створення задачника «Числові ряди. Практичний курс» з використанням різноманітних геометричних моделей для студентів спеціальності «014 Середня освіта (Математика)». А також задачника, який можна пропонувати для використання на факультативних заняттях і при проведенні математичних олімпіад серед учнів ліцею.

Ключові слова: *числовий ряд, геометрична інтерпретація, теорія рядів, генерація числових рядів, геометрична модель, математичний аналіз, задача, геометричний об'єкт.*

Постановка проблеми. Ряди – це один з основних розділів математичного аналізу. Ряди мають широке коло теоретичного і практичного застосування. Теорія розвитку і практичного застосування числових рядів має досить глибокі корені. Проте для глибшого розуміння розділу математичного аналізу «Ряди» варто звернути увагу на їх геометричну інтерпретацію. З метою підвищення ефективності засвоєння знань та активізації пізнавального інтересу студентів під час організації навчального процесу розробляються різноманітні підходи до подання матеріалу викладачем. Одним з ефективних підходів є використання геометричної інтерпретації та моделювання [8].

При вивченні курсу математичного аналізу геометричні інтерпретацію набувають широкого застосування. Але, при вивченні розділу «Ряди», в літературі зустрічається лише теоретичний матеріал, приклади розв'язання різноманітних задач та методи їх розв'язання. Задач з використанням геометричних інтерпретацій немає. Таким чином, на нашу думку, генерація та дослідження числових рядів за допомогою геометричної інтерпретації є важливою, цікавою та неповністю дослідженою темою.

Аналіз актуальних досліджень. Теорія рядів розвивалася у роботах таких науковців: Н. Абель, І. Бернуллі, Я. Бернуллі, Б. Больцано, К. Вейєрштрасс, К. Гаусс, Ж. Д'Аламбер, Л. Ейлер, О. Коші, Ж. Лагранж, К. Маклорен, Б. Ріман, Б. Тейлор та інші.

Генерації числових рядів за допомогою геометричної інтерпретації присвячено ряд публікацій В. Бобирь [1; 2; 3], С. Габ [6; 7], В. Корольського [1; 6; 7; 8; 9; 10; 11], А. Римар [10], А. Христюк [2; 3].

Мета статті – знаходження числових рядів за допомогою геометричної інтерпретації їх членів, створення низки задач, які можуть бути використані при вивченні розділу «Числові ряди», а також у якості олімпіадних задач для учнів ліцею.

Виклад основного матеріалу. Генерація та дослідження числових рядів ґрунтується на використанні геометричних образів (лінії, площі, об'єми), пов'язаних з послідовностями геометричних об'єктів, вписаних у квадрат з параметром $a = 1$, представленим на рис. 1.

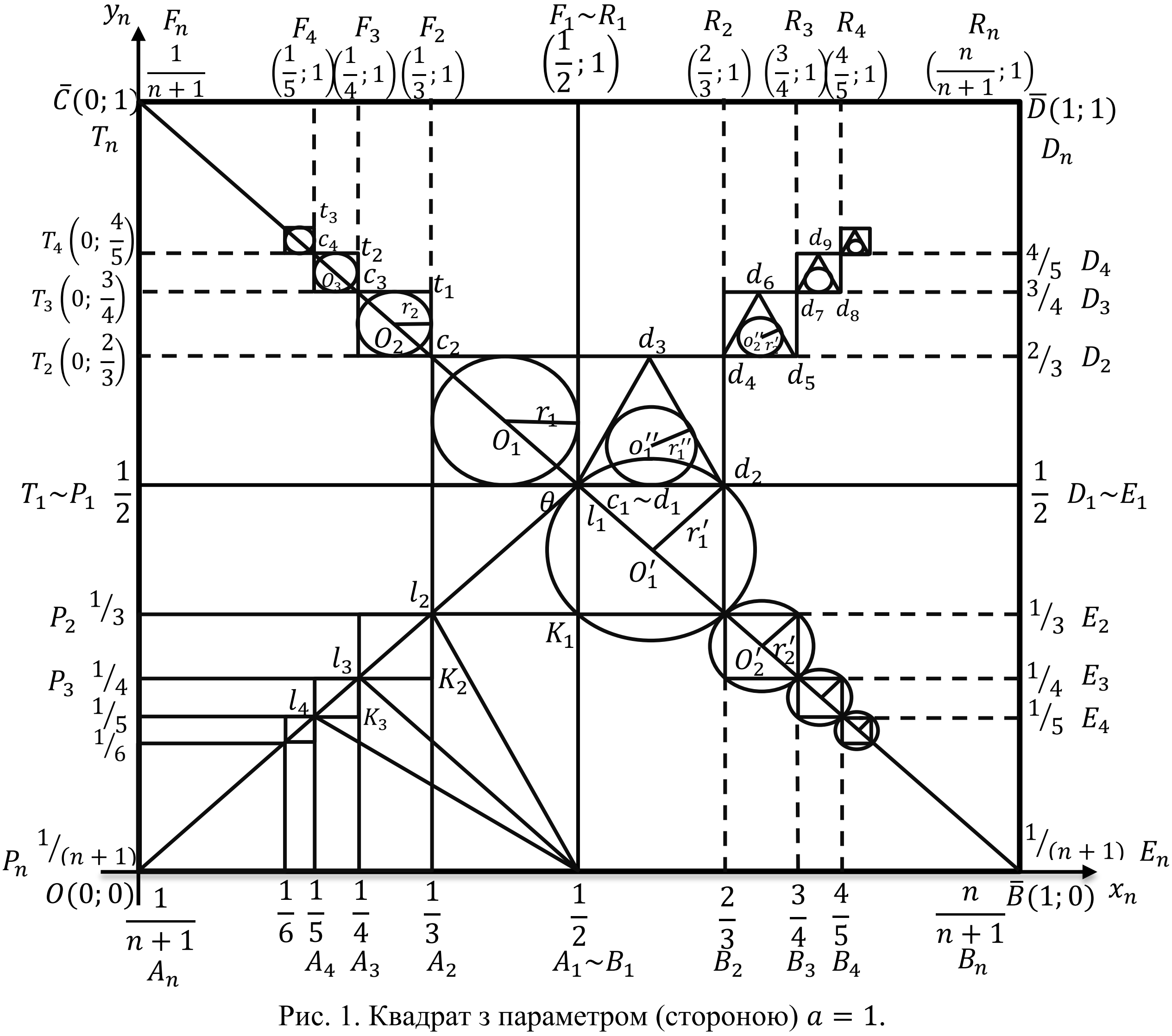

Рис. 1. Квадрат з параметром (стороною) $a = 1$.

Спочатку розглянемо задачі на генерацію числових рядів, пов'язаних з точковою геометричною інтерпретацією.

Задача 1. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точки A_n.

Точка A_n, розподілена на половині сторони квадрата $|\overline{A_1 O}|$ за законом $\frac{1}{n+1}$ і має координати $A_n\left(\frac{1}{n+1}; 0\right)$, тому ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Аналогічно можна знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ будуть координати точок: $B_n\left(\frac{n}{n+1}; 0\right)$, $E_n\left(1; \frac{1}{n+1}\right)$, $P_n\left(0; \frac{1}{n+1}\right)$, $T_n\left(0; \frac{n}{n+1}\right)$, $D_n\left(1; \frac{n}{n+1}\right)$, $R_n\left(\frac{n}{n+1}; 1\right)$, $F_n\left(\frac{n}{n+1}; 1\right)$

Задача 2. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точки K_n.

Координати точки K_n по вісі Ox співпадають з координатами точки A_n, а по вісі Oу – E_n, але починаючи з другого члену, тому має координати $K_n\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+2}\right)$. Шукані ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}.$$

Аналогічно можна знайти координати точок: $l_n\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1}\right)$, $c_n\left(\frac{1}{n+1}; \frac{n}{n+1}\right)$

Задача 3. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точки O_n.

Точка O_n знаходиться посередині між точками по осі Ox A_n і A_{n+1}, по осі Oу – T_n і T_{n+1}, тому має координати $O_n\left(\frac{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}{2}; \frac{\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2(n+1)(n+2)}; \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right)$. Шукані ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Аналогічно знайдемо координати точки O_n':

$$O_n'\left(\frac{\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}}{2}; \frac{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2(n+1)(n+2)}; \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right)$$

Задача 4. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точки O_n''.

O_n'' – центр вписаного кола у рівнобедрений трикутник. По осі Ox точка O_n'' знаходиться посередині між точками B_n і B_{n+1}, а по осі Oу знаходиться між точками D_n і D_{n+1} і ділить відрізок D_nD_{n+1} у певному відношенні. Знайдемо це відношення.

Розглянемо квадрат зі стороною a (рис.2).

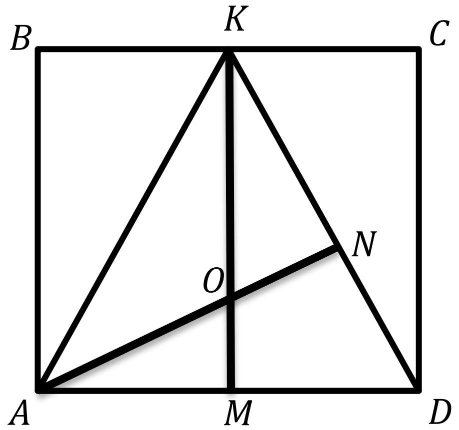

Рис. 2. Квадрат зі стороною a.

K – середина BC, тому ΔAKD – рівнобедрений. Центр вписаного кола у трикутник лежить на перетині бісектрис. Тому проведемо бісектриси AN і KM. Точка O – центр вписаного кола. Знайдемо відношення $\frac{OM}{OK}$.

За властивістю бісектриси $\frac{OM}{OK} = \frac{AM}{AK}$. $AM = \frac{a}{2}$, $AB = a, BK = \frac{a}{2}$, тоді за теоремою Піфагора $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2}$, $AK = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$$\frac{OM}{OK} = \frac{AM}{AB}, \frac{OM}{OK} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Знайдемо координати точки O по осі Oy за формулою поділу відрізку у заданому відношенні: $y_O = \frac{y_M+\lambda y_K}{1+\lambda}$, тому координати точки матимуть вид:

$$O_n''\left(\frac{\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}}{2}; \frac{\frac{n}{n+1}+\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{n+1}{n+2}}{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}\right).$$

$\frac{\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}}{2} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$,

$\frac{\frac{n}{n+1}+\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{n+1}{n+2}}{1+\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{\frac{5n^2+10n+\sqrt{5}n^2+\sqrt{5}n+\sqrt{5}n+\sqrt{5}}{5(n+1)(n+2)}}{\frac{5+\sqrt{5}}{5}} = \frac{(5+\sqrt{5})n^2+2(5+\sqrt{5})n+\sqrt{5}}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt{5})} = \frac{(5+\sqrt{5})n^2+2(5+\sqrt{5})n}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt{5})} + \frac{\sqrt{5}}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt{5})} = \frac{(5+\sqrt{5})(n^2+2n)}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt{5})} + \frac{\sqrt{5}(5-\sqrt{5})}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{5\sqrt{5}-5}{20(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{4(n+1)(n+2)}$.

Отже координати точки $O_n''\left(\frac{1}{2(n+1)(n+2)}; \frac{n}{n+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{4(n+1)(n+2)}\right)$.

Шукані ряди будуть мати вид:

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{4(n+1)(n+2)}\right)$.

Далі розглянемо приклади генерації числових рядів, пов'язаних з лінійною геометричною інтерпретацією членів рядів.

Задача 5. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_nA_{n+1}}|$.

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{A_nA_{n+1}}|$за формулою обчислення відстані між двома точками:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \qquad (1)$$

де $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ [4].

$A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right), A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};0\right)$, тоді відстань між точками:

$$|\overline{A_nA_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)^2+(0-0)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} = \left|-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_nA_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Розв'яжемо цю задачу іншим способом. Знайдемо довжину відрізка як довжину дуги плоскої кривої.

Коли крива задана в прямокутних координатах рівнянням $y = f(x)$, де функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, то довжина цієї кривої дорівнює:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f(x)\right)^2} \quad [12]. \qquad (2)$$

У нашому випадку точки A_n і A_{n+1} розташовані на прямій $y = 0$, тоді $y' = 0$.

За формулою довжини кривої отримаємо:

$$|\overline{A_nA_{n+1}}| = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{1+0^2}dx = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} dx = x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_nA_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Як бачимо, шуканий ряд ідентичний ряду, одержаному першим способом.

Аналогічно за формулами (1) або (2) можна згенерувати такі ряди: $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{B_nB_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{E_nE_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{D_nD_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{T_nT_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_nR_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{F_nF_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{P_nP_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 6. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_1l_{n+1}}|$.

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{A_1l_{n+1}}|$за формулою (1).

$A_1\left(\frac{1}{2};0\right), l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$, тоді:

$$\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}-0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{n}{2(n+2)}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2} = \sqrt{\frac{n^2}{4(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{n^2+4}{4(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{2|n+2|} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}$.

Розв'яжемо цю задачу іншим способом. Знайдемо довжину відрізка як довжину дуги плоскої кривої за формулою (2).

Складемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \text{ [4]}, \quad (3)$$

де $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ координати точок, які належать прямій.

У нашому випадку $A_1\left(\frac{1}{2};0\right), l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$, тоді рівняння прямої матиме вид:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}} = \frac{y-0}{\frac{1}{n+2}-0};$$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{-\frac{n}{2(n+2)}} = \frac{y}{\frac{1}{n+2}};$$

$$\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(n+2)}{-n} = y(n+2);$$

$$2x-1 = -ny;$$

$$y = -\frac{2}{n}x+\frac{1}{n}.$$

Для знаходження довжини кривої знайдемо похідну: $y' = -\frac{2}{n}$.

$$\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right| = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(-\frac{2}{n}\right)^2}\,dx = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{n^2+4}{n^2}}\,dx = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\,dx = \frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\cdot x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\cdot$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\cdot\frac{n}{2(n+2)} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}$.

Як бачимо, шуканий ряд ідентичний ряду, одержаному першим способом.

Наступним кроком розглянемо приклади одержання числових рядів з квадратурною геометричною інтерпретацією їх членів.

Задача 7. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_n P_{n+1} l_{n+1}}$.

Бачимо з рис. 1, що $\Delta P_n P_{n+1} l_{n+1}$ прямокутний з катетами $\left|\overline{P_n P_{n+1}}\right|$ і $\left|\overline{P_{n+1} l_{n+1}}\right|$.

Знайдемо площу трикутника за формулою:

$$S = \frac{ab}{2} \text{ [4]}, \quad (4)$$

де a і b – катети прямокутного трикутника.

$\left|\overline{P_n P_{n+1}}\right|$ ми вже знаходили у задачі 5: $\left|\overline{P_n P_{n+1}}\right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Аналогічно знайдемо $\left|\overline{P_{n+1} l_{n+1}}\right|$ за формулою (1):

$P_{n+1}\left(0;\frac{1}{n+2}\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$, тоді $\left|\overline{P_{n+1} l_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(n+2)^2}} = \frac{1}{n+2}$.

Тоді $S = \frac{\left|\overline{P_n P_{n+1}}\right|\cdot\left|\overline{P_{n+1} l_{n+1}}\right|}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{n+2} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_n P_{n+1} l_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}$.

Розв'яжемо цю задачу іншим способом. Застосуємо геометричний зміст визначеного інтегралу:

$$S=\int_a^b\big(f_1(x)-f_2(x)\big)dx,\ [12] \tag{5}$$

де $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ – криві, якими обмежена фігура зверху і знизу.

Щоб знайти площу фігури за допомогою інтеграла складемо рівняння прямої $P_n l_{n+1}$ за формулою (3):

$$\frac{x-0}{\frac{1}{n+2}-0}=\frac{y-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}},$$
$$x(n+2)=\frac{y(n+1)-1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{n+1-n-2},$$
$$x(n+2)=-(y(n+1)-1)(n+2),$$
$$x=-y(n+1)+1,$$
$$y=-\frac{x}{n+1}+\frac{1}{n+1}.$$

Тоді за формулою (5) маємо:

$$S=\int_0^{\frac{1}{n+2}}\left(-\frac{x}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)dx=-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{n+2}}+\frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}\cdot x\Big|_0^{\frac{1}{n+2}}=-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{n+2}=-\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)(n+2)^2}=\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta P_nP_{n+1}l_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}$.

Як бачимо обидва способи дали однаковий варіант.

Далі розглянемо задачу на генерацію числових рядів, пов’язаних з кубатурною геометричною інтерпретацією.

Задача 8. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$, де V_n – об’єми послідовності тіл обертання прямих $\overline{A_nl_{n+1}}$навколо осі Ox.

Нехай навколо осі Ox обертається прямокутний $\Delta A_nA_{n+1}l_{n+1}$, в результаті чого утвориться конус.

Знайдемо об’єм конуса за формулою:

$$S=\frac{1}{3}\pi r^2h \tag{6}$$

У нашому випадку $r=|\overline{A_{n+1}l_{n+1}}|$, $h=|\overline{A_nA_{n+1}}|$.

$|\overline{A_nA_{n+1}}|$ ми вже знаходили у задачі 5: $|\overline{A_nA_{n+1}}|=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Знайдемо $|\overline{A_{n+1}l_{n+1}}|$ за формулою (1), де $A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$, тоді:

$$|\overline{A_{n+1}l_{n+1}}|=\sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+2}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}-0\right)^2}=\frac{1}{n+2}.$$
$$S=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{n+2}\right)^2\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{\pi}{3(n+1)(n+2)^3}.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}V_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3(n+1)(n+2)^3}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом – за допомогою інтеграла:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx\ \ [12]. \tag{7}$$

Складемо рівняння прямої A_nl_{n+1} за формулою (3):

$A_1\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$, тоді

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}}=\frac{y-0}{\frac{1}{n+2}-0},$$
$$\frac{x(n+1)-1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{-1}=y(n+2),$$
$$y=-x(n+1)+1.$$

Тоді $V=\pi\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}(-x(n+1)+1)^2dx=\pi\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}(1-2x(n+1)+x^2(n+1)^2)dx=$

$$\pi\left(x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}-2(n+1)\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}+(n+1)^2\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\right)=\pi\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-(n+1)\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)+\right.$$

$$\frac{(n+1)^2}{3}\left(\frac{1}{(n+1)^3}-\frac{1}{(n+2)^3}\right)\Bigg)=\pi\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{(n+1)\big((n+2)^2-(n+1)^2\big)}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{(n+1)^2\big((n+2)^3-(n+1)^3\big)}{3(n+1)^3(n+2)^3}\right)=$$
$$\pi\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)^2}+\frac{3n^2+9n+7}{3(n+1)(n+2)^3}\right)=\pi\frac{3(n+2)^2-3(2n+3)(n+2)+3n^2+9n+7}{3(n+1)(n+2)^3}=$$
$$\pi\frac{3n^2+12n+12-6n^2-12n-9n-18+3n^2+9n+7}{3(n+1)(n+2)^3}=\frac{\pi}{3(n+1)(n+2)^3}.$$

Отже, шуканий ряд повністю збігається з рядом, отриманим першим способом $\sum_{n=1}^{\infty}V_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3(n+1)(n+2)^3}$.

Окрім запропонованих задач, цими та іншими методами нами було розв'язано ще понад 60 задач на генерацію числових рядів, пов'язаних з послідовностями геометричних об'єктів, вписаних у квадрат з параметром $a=1$, представленим на рис. 1., які доцільно використовувати для створення задач як для студентів фізико-математичного факультету, так і для учнів старших класів на факультативах, спецкурсах і під час підготовки до олімпіад.

Отримані числові ряди демонструють послідовності величин відрізків різних ліній, які розташовані в декартовій системі координат у межах квадрата зі стороною $a=1$. Візуально на рис. 1 видно відрізки за різними комбінаціями, які складають різні геометричні фігури: трикутники, квадрати, кола. Послідовності цих фігур та їх окремих параметрів становлять геометричні інтерпретації певних числових рядів. Предметом подальших досліджень може бути створення низки задач для практичного застосування у школах і на фізико-математичних факультетах; дослідження швидкості збігання частинних сум S_n до значення суми ряду S в залежності від зростання «n» [5].

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Запропонований алгоритм генерації числових рядів за допомогою квадрата, розташованого в декартовій системі координат дозволяє генерувати числові ряди з можливістю візуалізації членів ряду. Отримані ряди доцільно використовувати при вивченні розділу «Ряди» студентам спеціальностей фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

Так як ряди з лінійною геометричною інтерпретацією можна одержати за допомогою відомих шкільних формул, то їх можна рекомендувати і для учнів старших класів на факультативних заняттях, спецкурсах, під час підготовки до олімпіад.

Метою подальших досліджень є створення задачника «Числові ряди. Практичний курс» з використанням різноманітних геометричних моделей для студентів спеціальності «014 Середня освіта (Математика)». А також задачника, який можна пропонувати для використання на факультативних заняттях і при проведенні математичних олімпіад серед учнів ліцею.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Бобирь, В. Д., Корольський В. В. (2019). Застосування ІКТ при вивченні числових та степеневих рядів. Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Матеріали тез Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених (Чернігів, 27 листопада 2019 р.). (Bobyr, V. D., Korolskiy, V. V. (2019). The use of ICT in the study of numerical and power series. A step into science: research in the field of natural and mathematical disciplines and their teaching methods: Materials theses All-Ukrainian scientific and practical conference of students, graduate students and young scientists (Chernihiv, Nov. 27, 2019).
2. Бобирь, В. Д., Христюк, А. М. (2019). Зв'язок рядів арифметичної прогресії та гармонічних рядів. Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019 р.) (Черкаси, 11-12 квітня 2019 р.). Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Є. І. (Bobyr, V. D., Hrystiuk, A. M. (2019). The relationship between the Актуальні питання природничо-математичної освіти. 2022. Випуск 2(20) 38 series of arithmetic progression and harmonic series. Materials of the International Scientific and Methodical Conference "Problems of Mathematical Education" (PMO – 2019) (Cherkasy, Apr. 11-12, 2019). Cherkasy: Ed. FOP Gordienko E. I.).

3. Бобирь, В. Д., Христюк, А. М. (2019). Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів. X Міжнародна конференція молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики» (Дніпро, 7 березня 2019 р.). (Bobyr, V. D., Hrystiuk, A. M. (2019). Implementation of the didactic principle of visuality in the study of number series. 10th International Conference of Young Scientists "Young Scientists 2019 – from Theory to Practice" (Dnipro, Mar. 7, 2019). Dnipro.
4. Городецький, В. В., Боднарук, С. Б., Довгей, Ж. І., Лучко, В. С. (2021). Основи аналітичної геометрії в теоремах і задачах. Чернівці. (Horodetsky, V. V., Bodnaruk, S. B., Dovgei, Z. I., Luchko, V. S. (2021). Fundamentals of analytic geometry in theorems and problems. Chernivtsi).
5. Дзигарська, Н. С., Корольський, В. В., Тураєва, О. В.(2022). Генерація числових рядів з використанням послідовностей геометричних об’єктів, вписаних у квадрат з параметром $a = 1$ в системі координат Oxy. Наукові записки молодих учених, 10. (Dzyharska N. S., Korolskiy V. V., Turaieva O. V. (2022). Generation of numerical series using sequences of geometric objects inscribed in a square with parameter $a = 1$ in the Oxy coordinate system. Scientific notes of young scientists, 10).
6. Корольський, В. В., Габ, С. С. (2018). Лінійна, квадратурна та куботурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання. Новітні комп’ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XVI. Кривий Ріг (сс. 67–73). (Korolskiy, V. V., Gab, S. S. (2018). Linear, quadrature and cuboidal geometric interpretation of numerical series by means of modeling. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XVI. Kryvyi Rih (pp. 67–73)).
7. Корольський, В. В. Габ, С. С. (2018). Числові ряди, які пов’язані з параметрами додекаедра. Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання»: науковий журнал, В. В. Корольський (ред.). Том 42. Кривий Ріг (сс. 39–45). (Korolskiy V. V., Gab S. S. (2018). Numerical series related to the parameters of the dodecahedron. Bulletin of the International Research Center "Man: Language, Culture, Cognition": scientific journal, V. V. Korolskiy (Ed.). Volume 42. Kryvyi Rih (pp. 39–45)).
8. Корольський, В. В. (2017). Геометрична інтерпретація числових рядів. Новітні комп’ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XV. Кривий Ріг (сс. 57–63). (Korolskiy, V. V. (2017). Geometric interpretation of numerical series. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XV. Kryvyi Rih (pp. 57–63)).
9. Корольський, В. В. (2018). Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії. Новітні комп’ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XVI. Кривий Ріг (сс. 59–66). (Korolskiy, V. V. (2018). Geometric interpretation of a numerical series of arithmetic progression. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XVI. Kryvyi Rih (pp. 59–66)).
10. Корольський, В. В., Римар, А. І. (2022). Геометрична інтерпретація числових рядів, пов’язаних з державною символікою. Актуальні питання природничо-математичної освіти, 2(20), 29–38. (Korolskiy, V. V., Rymar, A. I. (2022) Geometric interpretation of numerical series associated with state symbols. Topical issues of natural science and mathematics education, 2(20), pp. 29–38).
11. Корольський, В. В., Шокалюк, С. В., Мельниченко, Ю. А. (2018). Теоретико-методичні засади геометричного моделювання числових рядів. Фізико-математична освіта, 4(18), сс. 81–89. (Korolskiy, V. V., Shokaluk, S. V., Melnychenko, Y. A. (2018). Theoretical and methodological foundations of geometric modeling of numerical series. Physical and mathematical education, 4(18), 81–89).
12. Шкіль, М. І. (1981). Математичний аналіз, ч. ІІ: Посібник для педагогічних інститутів. Київ: Вища школа. Головне видавництво. (Schkil, M. I. (1981). Mathematical analysis, part II: Manual for pedagogues. institutes. Kyiv: Vyshcha shkola. Main publishing house).

Korolskiy V. V., Turaieva O. V. Generation and study of numerical series with the help of geometric model and combination of series.

Summary. *The purpose of the study is the geometric interpretation of numerical series, the process of their generation using a geometric model, obtaining calculations of point, linear, quadrature and cubic geometric interpretation of numerical series. The object of research is numerical series. The subject of the study is the generation of numerical series using the parameters of a geometric model. During the research, the methods of analysis and synthesis, comparison, modeling, graphic method were used.*

Research results: the process of generating members of numerical series using geometric interpretation is demonstrated; the algorithm for generating numerical series using a square located in the Cartesian coordinate system is shown, with the help of which it is possible to create numerical series with the subsequent possibility of visualizing the members of the series; the possibility of using different methods of generating the same numerical series associated with point, linear, quadrature and cubature geometric interpretations is revealed.

The conducted research showed that geometric interpretations create favorable conditions for the perception of educational material, deepening of knowledge, implementation of a non-standard approach; the obtained series can be used when studying the "Series" section for students of physics-mathematical faculties of pedagogical universities, as well as for high school students in electives, special courses or during preparation for the Olympiad.

The goal of further research is to create a problem book "Numerical series. Practical course" using various geometric models for students of the specialty "014 Secondary Education (Mathematics)". And also a problem book that can be offered for use in optional classes and when conducting mathematical Olympiads among lyceum students.

Key words: *number series, geometric interpretation, series theory, generation of number series, geometric model, mathematical analysis, problem, geometric object.*

УДК 373.5.016:57:[37.018.43:004.4]
DOI 10.5281/zenodo.8025428

М. П. Москаленко
ORCID ID 0000-0002-0580-9314
Л. П. Міронець
ORCID ID 0000-0002-9741-7157
В. М. Торяник
ORCID ID 0000-0003-0590-1345
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

ФОРМУВАННЯ ЕКОЛОГІЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ БІОЛОГІЇ У 6 КЛАСАХ ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Стаття присвячена проблемі формування однієї з одинадцяти ключових компетентностей, визначених в Державному стандарті базової середньої освіти. Мета статті полягає в обґрунтуванні методичних засад формування екологічної компетентності учнів під час навчання біології у 6 класі закладів загальної середньої освіти. У статті зазначено, що під час розв'язання даної проблеми доцільно опиратися на модель системи формування екологічної компетентності школярів. В процесі підготовки статті використано загальноприйняті методи дослідження (аналіз, синтез, систематизація, класифікація, порівняння та узагальнення) для встановлення ступеня розробленості проблеми та аналізу навчальної програми для загальноосвітніх навчальних закладів «Біологія 6-9 класи». Визначено, що основні зусилля вчителів біології з точки зору досягнення певного рівня сформованості екологічної компетентності в учнів 6 класу, спрямовані на орієнтування