самоорганизации и распада систем разной природы. Очерчены перспективы внедрения синергетических принципов в учебный процесс.
***Ключевые слова**: синергетика, образование, учебный процесс.*

SUMMARY
O. Hulay. Sinergistical principles in educating of building specialists.
The basic concepts of synergetics as a interdisciplinary science about a processes of origin, organization and disintegration of the systems of different nature are analysed in the article. The prospects of introduction of sinergistical principles in educational process are outlined.
Key words: sinergistic, education, educational process.

УДК 373.3:51

В. К. Кірман
Дніпропетровський обласний інститут
післядипломної педагогічної освіти,
Дніпропетровський національний університет

ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ ІНТЕРВАЛІВ ТА ЙОГО УЗАГАЛЬНЕНЬ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

У статті запропоновано послідовність викладу методу інтервалів для розв'язування нерівностей. Доведено можливість строгого обґрунтування методу інтервалів без використання неперервності функцій. Аналоги цих методів застосовано для аналізу графіків нерівностей з двома змінними. Розглянуто метод вивчення умов розміщення коренів квадратного тричлена, в якому також не використовується неперервність.
***Ключові слова**: метод інтервалів, розміщення коренів, рівні аргументації, поглиблене вивчення математики.*

Постановка проблеми. Розв'язування нерівностей посідає значне місце в курсі алгебри та початків аналізу загальноосвітньої школи. Нерівності проходять майже через усі теми шкільного курсу, мають широкі міжпредметні зв'язки, тому методика навчання розв'язування нерівностей розроблялася багатьма дослідниками та педагогами, серед яких: Г. П. Бевз, Н. Я. Віленкін, М. Л. Галицький, А. М. Гольдман, Л. І.Звавич, А. Ю. Карлащук, В. Г. Коваленко, В. М. Козира, Т. В. Колесник, Н. М. Кондратенко, В. Я. Кривошеєв, А. Г. Мерзляк, Є. П. Нелін, Д. А. Номировський, В. Б. Полонський, С. П. Семенець, З. І. Слепкань, О. В. Старосельцева, Т. М. Хмара, С. Я. Шварцбурд, М. І. Шкіль, М. С. Якір. Для кожної теми, як правило, будуються свої спеціальні прийоми розв'язування нерівностей. Це пов'язано передусім з тим класом функцій, вивчення якого є домінуючим у відповідній темі. Так, розглядаються квадратичні, дробово-лінійні, раціональні, тригонометричні, ірраціональні, степеневі, логарифмічні та комбіновані нерівності. У деяких випадках штучні прийоми розв'язування нерівностей є ефективними, водночас дуже важливим є пошук та навчання учнів універсальних методів розв'язування нерівностей, зокрема методу інтервалів.

Теоретичне обґрунтування методу інтервалів фактично базується на теоремі Больцано-Коші про нулі неперервної функції, що набуває на кінцях відрізка значення різних знаків, з якої випливає твердження про знакосталість неперервної функції на інтервалі, кінцями якого є нулі функції. Водночас метод інтервалів застосовується вже з початку 9 класу, коли взагалі неперервність не згадується або згадується лише на інтуїтивному рівні. Таким чином, виникає певна логічна колізія у структурі курсу математики, схожий до неї характер мають і проблеми обґрунтування необхідних і достатніх умов розташування коренів квадратного тричлена. Не менш складною є проблема обґрунтування схем побудови графіків нерівностей з двома змінними, яка узагальнює одновимірний метод інтервалів. Використання методу областей як аналога методу інтервалів повинно бути обґрунтовано на рівні знань учня відповідного класу.

Аналіз актуальних досліджень. У всіх відомих методичних дослідженнях обґрунтування методу інтервалу розглядається лише як наслідок теореми про знакосталість неперервної функції, тобто знов-таки як наслідок теореми Больцано-Коші. У той самий час неявно в деяких відомих навчальних посібниках [2; 3; 5] через систему задач проводиться частково обґрунтування ідеї методу інтервалів. У класичній роботі [8] проаналізовано методи навчання, що застосовуються під час формування вмінь розв’язувати нерівності.

Згідно з концепцією М. І. Шкіля, що реалізована разом з Т. М. Хмарою та Т. В. Колесник [9], метод інтервалів обґрунтовується лише після вивчення властивостей неперервних функцій. Є. П. Нелін [7] реалізує схематичний підхід до розв’язування нерівностей, при цьому під час аргументації методу інтервалів він уважає за потрібне спиратися просто на інтуїцію і повідомляти учням, що далі відповідні моменти будуть обґрунтовані, аналогічно відбувається зі схемами розміщення коренів квадратного тричлена.

А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировський, В. Б. Полонський, М. С. Якір [1; 6] у процесі висвітлення відповідних питань уважають за необхідне наводити точні формулювання, але при цьому саме поняття неперервної функції повинно розглядатися інтуїтивно. Лише за поглибленого вивчення математики в 11 класі пропонується проведення повних обґрунтувань.

Роботи, в яких описано дослідження ефективності різних схем пояснення учням змісту методу інтервалів, нам не відомі. Отже, існує суперечність між необхідністю якомога раннього ознайомлення з універсальними методами розв’язування нерівностей, аналізу квадратичної функції, дослідження нерівностей та систем з двома змінними та можливістю обґрунтувати відповідні методи на рівні знань учнів. Ці питання потребують дослідження.

Мета статті – побудувати схему викладу матеріалу щодо методу інтервалів у нерівностях, узагальнити його на двовимірний випадок, питання щодо розміщення коренів квадратного тричлена, який містить строгі обґрунтування методів для відповідних випадків, що спираються на фактичні знання та вікові особливості учнів.

Виклад основного матеріалу. Аналіз структури навчального матеріалу з математики приводить до ідеї виокремлення шести рівнів аргументації, які використовуються у шкільному курсі математики. Ми виділяємо експериментально-індуктивний (L1), *рівень аналогії (L2), наочно-інтуїтивний (L3), напівформальний (L4), формальний (L5), суперформальний (L6)* рівні аргументації [4]. Метод інтервалів для розв'язування нерівностей, як правило, пов'язують з теоремою про знакосталість неперервної функції, яка, у свою чергу, є наслідком теореми Больцано-Коші. Водночас, крім класів з поглибленим вивченням математики, строго ця теорема не вивчається, а у класах з поглибленим вивченням математики метод інтервалів з'являється набагато раніше, ніж поняття неперервності. Таким чином для обґрунтування методу інтервалів застосовуються рівні аргументації *L3–L4*. Незважаючи на те, що перші приклади застосування методу інтервалів, як правило, стосуються алгебраїчних нерівностей у сучасних підручниках, наприклад [1], виклад ідеї методу інтервалів знов-таки спирається на властивості неперервних функцій.

Неважко побачити, що для багатьох прикладів можлива аргументація більш високих рівнів. При цьому можна спиратися просто на властивості знакосталості функцій на певних проміжках. Дійсно, якщо розглядати функцію $\varphi_0(x)=x-a$, то очевидно, що $\varphi(x)>0$, якщо $x>a$ та $\varphi(x)<0$, якщо $x<a$. Тепер дуже просто доводиться той факт, що якщо $x_1<x_2$, то функція $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)$ на проміжках $(-\infty;x_1)$, $(x_1;x_2)$, $(x_2;+\infty)$ набуває значення одного знака. Очевидно, що ця ідея узагальнюється для функцій вигляду $\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$, а також для функцій вигляду $\frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ та $g(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами. Очевидно, що ідею методу інтервалів можна застосовувати для розв'язування нерівностей на зразок $f_1(x)\cdot\ldots\cdot f_k(x)>0$ на замиканні множини $\bigcup_{l=1}^{n} I_l$ в області визначення цього добутку, якщо на кожному з інтервалів I_l кожна з функцій f_j набуває значення одного знака. При цьому очевидно, що неперервність ніяк не використовується. Звернемо увагу на те, що більшість завдань на використання методу інтервалу мають саме таку або схожу структуру. Для більшості функцій, що фігурують у таких задачах, важливо знати насамперед проміжки знакосталості, які досліджуються елементарними методами. Так, якщо розглядаємо $p(x)=\sin x-\frac{1}{2}$, то з елементарних геометричних міркувань установлюємо, що $p(x)>0$, якщо $x\in\bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$. Аналогічно відбувається з виразами, що є добутками множників вигляду $h(ax+b)-c$, тут h – тригонометрична, логарифмічна, степенева або показникові функції.

Таким чином, вивчення методу інтервалів можна проводити двома паралельними лініями. Перша – з використанням строгих обґрунтувань, ідея яких описана вище, друга – з використанням ідеї неперервності з поступовим переходом на більш високі рівні аргументації.

Аналогом методу інтервалів для нерівностей з двома змінними стає метод областей. Нагадаємо, що множину точок площини G можна називати областю, якщо для будь-якої точки $P(x;y)$ з множини G до G входять точки деякого прямокутника з центром у $P(x;y)$. Якщо $f(x;y)$ неперервна всюди визначена на площині функція, то множина $D=\{(x,y): f(x;y)>0\}$ є областю (не обов’язково однозначною), або порожньою множиною. Узагальнює цей факт така відома теорема.

Теорема 1. Нехай на площині задано сукупність неперервних функцій $f_1(x;y)$, $f_2(x;y)$,…, $f_n(x;y)$. Нехай

$$D=\{(x,y): f_1(x;y)>0;\ f_2(x;y)>0;\ldots;\ f_n(x;y)>0\}.$$

Тоді множина D – область.

Доведення достатньо тривіальне. Дійсно, нехай $(x';y')\in D$, тоді з теореми про збереження знака неперервної функції для кожного $i\in\{1,\ldots,n\}$ знайдеться δ_i таке, що, якщо $|x-x'|<\varepsilon_i$ та $|y-y'|<\varepsilon_i$, то $f_i(x;y)>0$. Якщо розглянути $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$, то бачимо, що D містить усі точки (x,y), такі, що $|x-x'|<\varepsilon$ та $|y-y'|<\varepsilon$. Таким чином, D –область.

Очевидно, що доведення відповідних фактів не може бути проведено на рівні «шкільної» математики. Водночас для конкретних випадків, які найчастіше зустрічаються у шкільній практиці, можливі елементарні обґрунтування. З геометричних міркувань, наприклад, доводиться, що

$D=\{(x,y): f_1(x;y)>0;\ f_2(x;y)>0;\ldots;\ f_n(x;y)>0\}$ – область, якщо $f_1(x;y)$,…, $f_n(x;y)$ – лінійні функції від двох змінних. Найбільш відомий класичний приклад – множина $G=\{(x;y): x^2+y^2-r^2<0\}$, що складаються з усіх точок, що віддалені від початку координат, на відстань, яка менше за $|r|$.

Розглянемо інший приклад. Припустимо, що нам треба побудувати графік нерівності $\|x|-|y\|-2>0$. Спочатку будуємо графік рівняння $\|x|-|y\|-2=0$. Цей графік розбиває площину на п'ять областей – G, F, V, H, Q (рис. 1). Можна довести, що на кожній з цих областей функція $f(x,y)=\|x|-|y\|-2$, на кожній з цих областей зберігає знак. Приведемо тут схему доведення для «найскладнішої» області Q.

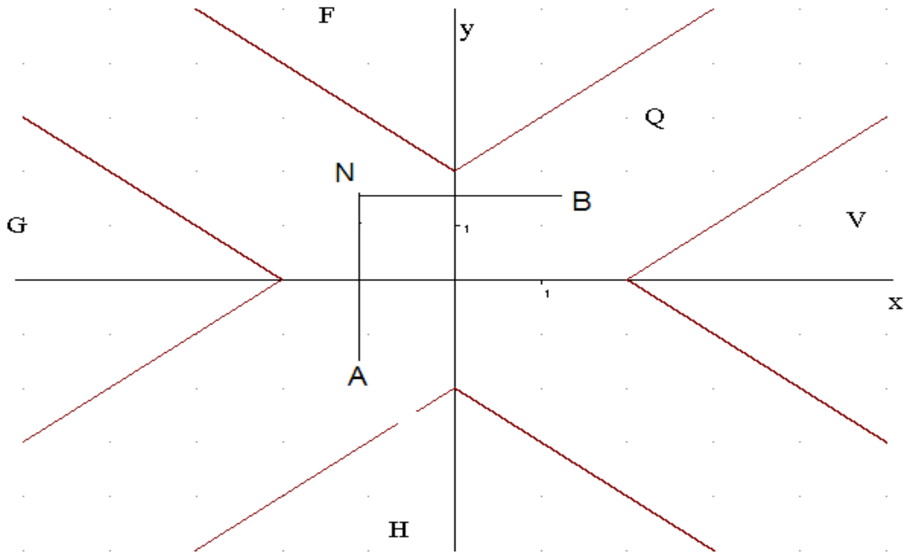

Рис. 1. Області, на які розбиває площину графік рівняння $\|x|-|y\|-2=0$

Перше допоміжне твердження, яке можна тут запропонувати довести – це те, що будь-які дві точки з Q можна сполучити ламаною з вертикальними або горизонтальними відрізками. Це достатньо очевидний інтуїтивно факт, але доведення його потребує певної математичної культури. Учитель повинен орієнтуватися на рівень підготовленості учнів для того, щоб вирішити, проводити з учнями це доведення чи залишатися на рівні аргументації на зразок *L3.* У класі з поглибленим вивченням математики доведення цього факту краще проводити у вигляді евристичної бесіди, головним лейтмотивом якої стає необхідність обґрунтування «очевидних» фактів. Фактично ця бесіда може стати продовженням дискусії щодо необхідності обґрунтування знакосталості всередині областей. Після того, як цей факт доведено, залишилося довести лише, що якщо точки є кінцями відрізка, що паралельний однією з координатних осей та не перетинає графік рівняння.

Без зменшення загальності доведемо, що у точках $A(x_A, y_A)$ та $N(x_N, y_N)$ функція $f(x,y)$ набуває значення одного знака, якщо $x_A \in (-2;0)$, тут $x_A = x_N$. Нехай $y \in [y_A; y_N]$. Тоді точка $(x_A; y)$ належить відрізку AN. Розглянемо значення нашої функції у цій точці. $f(x_A, y) = \left\| x_A \right| - |y\| - 2 = \left| -x_A - |y| \right| - 2$. Очевидно, що для кожної точки $(x_A; y)$ відрізка AN виконується подвійна нерівність

$$-2 + x_A < y < 2 - x_A.$$

Тому, якщо $y > 0$, то

$$f(x_A, y) = \left| -x_A - |y| \right| - 2 = \left| -x_A - y \right| - 2 = \left| x_A + y \right| - 2$$

Якщо $y > -x_A$, то $f(x_A, y) = |x_A + y| - 2 = x_A + y - 2 < 0$. Для випадку $y < -x_A$ маємо, що $f(x_A, y) = |x_A + y| - 2 = -x_A - y - 2 < -x_A - 2 < 0$. Через те, що $x_A > -2$. Ситуація, коли $x_A = -y$ також дає від'ємні значення функції. Випадок від'ємного y розглядається аналогічно. Насправді його можна і не розглядати, якщо враховувати симетрію.

Очевидно, що такий аналіз є дуже корисним, але технічно складним. Водночас йому можна запобігти, якщо дивитися на множину Q як на перетин чотирьох множин, що є розв'язками нерівностей $y < |x|$, $y > -|x|$, $x < |y|$, $x > -|y|$. Узагальнюючи, саме так можна стверджувати. Нехай $\Phi(x;y)$, $f_1(x;y)$, $f_2(x;y)$,..., $f_n(x;y)$ – усюди визначені функції двох змінних. Відомо, що графік кожної з $f_1(x;y)$, $f_2(x;y)$,..., $f_n(x;y)$ розбиває площину на дві області, одна з яких відповідає нерівності $f_k(x;y) > 0$ (тут $k = 1,...,n$). Нехай також нерівність $\Phi(x;y) > 0$ є наслідком кожної з нерівностей $f_k(x;y) > 0$. Тоді в області $D = \{(x,y): f_1(x;y) > 0;\ f_2(x;y) > 0; \ldots;\ f_n(x;y) > 0\}$ функція $\Phi(x;y)$ набуває значення одного знака. Тут, очевидно, ми повинні мати аналог теореми 1, де умови неперервності для функцій послабляються умовами існування відповідних областей.

Евристичний алгоритм, що спирається на цю схему, полягає в тому, що під час побудови графіка нерівності $\Phi(x;y) > 0$ будується графік рівняння $\Phi(x;y) = 0$, який розбиває площину на кілька областей, знак $\Phi(x;y)$ далі встановлюється методом пробної точки.

Схожі проблеми з обґрунтуванням методу інтервалу виникають під час спроб обґрунтувати підходи до розв'язування задач на розміщення коренів квадратного тричлена. Наприклад, коли ми розглядаємо найпростішу задачу на зразок знаходження умов, за яких число λ знаходиться між коренями квадратного тричлена $f(x)=x^2+px+q$, то легко отримаємо необхідну умову: $f(\lambda)<0$. У процесі доведення того, що вона є достатньою, доводиться існування $a<\lambda$ та $b>\lambda$ таких, що $f(a)>0$ та $f(b)>0$ (при цьому подається $f(x)=x^2\left(1+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}\right)$ та розглядаються x з дуже великі за абсолютною величиною). Далі за теоремою Больцано-Коші через те, що $f(a)>0$ та $f(\lambda)<0$ випливає існування кореня на інтервалі $(a;\lambda)$. Аналогічно існує корінь на інтервалі $(\lambda;b)$. Подоланням логічної колізії у викладі цього матеріалу до вивчення неперервності функції може стати теорема Больцано-Коші, сформульована лише для квадратичної функції: якщо квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ на кінцях відрізка $[\alpha;\beta]$ набуває значення різних знаків, то на інтервалі $(\alpha;\beta)$ знайдеться хоча б один нуль $f(x)$. Дійсно, у випадку недостатнього дискримінанта квадратична функція не може набувати значення різних знаків. Для додатного дискримінанта $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ тут можна вважати, що $x_1<x_2$. Тоді, використовуючи такі самі міркування, які описані вище під час обґрунтування методу інтервалів, маємо, що на кожному з інтервалів $(-\infty;x_1)$, (x_1,x_2), $(x_2;+\infty)$ функція $f(x)$ набуває значення одного знака, а тоді α та β не можуть належати одному інтервалу, і тоді між ними обов'язково буде корінь, що доводить теорему. Таким чином, для квадратного тричлена теорема Больцано-Коші стає прикладом застосування методу інтервалів, який у цьому випадку доводиться без ідеї неперервності.

Висновки. Отже, до вивчення властивостей неперервних функцій обґрунтовувати метод інтервалів можна не тільки на наочно-інтуїтивному, але й на формальному рівнях аргументації. Використовувати цю ж схему можна і під час вивчення розміщення коренів квадратичної функції. При цьому вдається сформулювати та доводити теорему Больцано-Коші для квадратного тричлена. Так само можна сформулювати та довести цю теорему для многочлена, розкладеного на незвідні множники над полем дійсних чисел. Аналог методу інтервалів та його обґрунтування корисно застосовувати для плоских двовимірних задач. Питання щодо ефективності запропонованих схем, у тому числі для продуктивності пропедевтичних задач, може бути досліджено шляхом проведення цілеспрямованого педагогічного експерименту.

ЛІТЕРАТУРА

1. Алгебра і початки аналізу : [підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : проф. рівень] / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2010. – 416 с.
2. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ для 10 класса : учеб. пособ. [для учащихся шк. и кл. с углубленным изучением математики] / Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. – 2-е изд., дораб. – М. : Просвещение, 1992. – 335 с.
3. Галицкий М. Л. Сборник задач по алгебре для 8–9 классов : учеб. пособ. [для учащихся шк. и кл. с углубленным изучением математики] / Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. – М. : Просвещение, 2009. – 302 с.
4. Кірман В. К. Рівні аргументації в процесі навчання математики / В. К. Кірман // Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики : міжнар. наук.-практ. конф. до 80-річчя з дня народж. докт. пед. наук, проф. З. І. Слєпкань : тези доп., 11–13 трав. 2011 р. – К., 2011. – С. 152–153.
5. Коваленко В. Г. Алгебра : эксперим. навч. посіб. [для 9 кл. шкіл з поглибленим вивченням математики і спеціалізованих шк. фіз.-мат. профілю] / Коваленко В. Г., Кривошеєв В. Я., Старосельцева О. В. – 2-ге вид. – К. : Освіта, 1996. – 288 с.
6. Мерзляк А. Г. Алгебра 9 : підруч. [для кл. з поглибленим вивченням математики] / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. – Х. : Гімназія, 2009. – 382 с.
7. НелінЄ. П. Алгебра і початки аналізу. Особливості поглибленого вивчення математики в 10 класі : метод. рек. / Є. П. Нелін. – Х. : Світ дитинства, 1992. – 112 с.
8. Слепкань З. И. Методика преподавания алгебры и начал анализа / З. И. Слепкань. – К. : Рад. шк., 1978. – 224 с.
9. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу : підруч. [для 10 кл. з поглибленим вивченням математики в серед. закл. освіти] / Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М. – К. : Освіта, 2004. – 318 с.

РЕЗЮМЕ

В. К. Кирман. Обоснование метода интервалов и его обобщений в школьном курсе математики.

В статье предложена последовательность изложения метода интервалов для решения неравенств. Доказана возможность строгого обоснования метода интервалов без использования непрерывности функций. Аналоги этих методов применены для анализа графиков неравенств с двумя переменными. Рассмотрен метод изучения условий расположения корней квадратичной функции, при котором также не используется непрерывность.

Ключевые слова: *метод интервалов, расположение корней, уровни аргументации, углубленное изучение математики.*

SUMMARY

V. Kirman. Rational method of intervals and its generalization in school mathematics.

The system of expounding the method of intervals for soloing inequalities is dealt with in the article. The possibility of correct basing the method of intervals without using functions continuity has been proved. The analogues of these methods are used for analyzing the graphs of inequalities with two variables. The method of studying the conditions of the location of a quadratic function roots has been considered, continuity not being used.

Key words: method of intervals, location of the roots, levels of reasoning, profound study of mathematics.