

## РІВНЯННЯ СИЛОВИХ ЛІНІЙ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ В ОКРЕМИХ ВИПАДКАХ

Костянтин АВДОНІН ✉

Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут, Україна  
avdonink13@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0001-6805-0870>

Олександр ЗУБКО

Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут, Україна  
azubko@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0002-4580-6919>

### АНОТАЦІЯ

У даній роботі здійснюється пошук рівнянь силових ліній електростатичного поля в явному вигляді, що можливо звичайно тільки в окремих випадках. Актуальність роботи обумовлена необхідністю доповнення методики викладення такої важливої теми курсу загальної фізики, як «Електростатика», в області засобів графічного зображення електростатичного поля, яке сприяє кращому розумінню даної теми. Знайдені і розглянуті випадки, для яких рівняння силових ліній існують в явному вигляді. Для кожного окремого випадку наведено приклад вигляду силових ліній електростатичного поля, який впливає з отриманих рівнянь, за допомогою пакету прикладних обчислюваних програм MathCAD. Побудову силових ліній електростатичного поля, звичайно, можна здійснювати користуючись тільки чисельними методами, спираючись на визначення дотичної до лінії, але такий підхід значно підвищує складність обчислювальних програм.

**Формулювання проблеми.** Силові лінії електростатичного поля у підручниках та навчальних посібниках з курсу загальної фізики малюють, спираючись на визначення силових ліній та формули, вирази для напруженості електростатичного поля, без отримання рівнянь силових ліній поля, тобто недостатньо обґрунтовано.

**Матеріали і методи.** Головними методами вирішення поставленої проблеми є: засоби пошуку розв'язків системи звичайних, нелінійних, диференціальних рівнянь та використання графічних операторів у середовищі прикладних обчислювальних програм MathCAD.

**Результати.** З'ясовано, що рівняння силових ліній в явному вигляді існують для електричного поля двох точкових зарядів та для електричного поля прямолінійної, рівномірно зарядженої нитки, скінченної довжини. Наведені приклади силових ліній, загальний вигляд яких узгоджується з відомими граничними умовами.

**Висновки.** Отримані рівняння силових ліній електростатичного поля дозволяють підсилити повноту викладення матеріалу розділу «Електростатика». Графіки силових ліній поля, побудовані за допомогою обчислювальних програм, підвищують ступінь доказовості викладення матеріалу та сприяють його розумінню.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** електростатичне поле; силові лінії; електричний диполь; рівняння.

Для цитування:	Авдонін К., Зубко О. Рівняння силових ліній електростатичного поля в окремих випадках. <i>Фізико-математична освіта</i> , 2024. Том 39. № 3. С. 7-11. DOI: <a href="https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-01">https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-01</a>
For citation:	Avdonin, K., & Zubko, O. (2024). Equation of lines of force of the electrostatic field in certain cases. <i>Physical and Mathematical Education</i> , 39(3), 7-11. <a href="https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-01">https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-01</a> Avdonin, K., & Zubko, O. (2024). Rivniannia sylovykh liniy elektrostatychnoho polia v okremykh vypadkakh [Equation of lines of force of the electrostatic field in certain cases]. <i>Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education</i> , 39(3), 7-11. <a href="https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-01">https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3-01</a>

## EQUATION OF LINES OF FORCE OF THE ELECTROSTATIC FIELD IN CERTAIN CASES

Kostiantyn AVDONIN ✉

Military Institute of Telecommunications and Informatization named after Heroes of Krut, Ukraine  
avdonink13@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0001-6805-0870>

Oleksandr ZUBKO

Military Institute of Telecommunications and Informatization named after Heroes of Krut, Ukraine  
azubko@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0002-4580-6919>

### ABSTRACT

In this work, the equations of the lines of force of the electrostatic field are searched in an explicit form, which is possible, of course, only in certain cases. The relevance of the work is due to the need to supplement the methodology of presenting such an important topic of the general physics course as «Electrostatics» in the field of means of graphic representation of the electrostatic field, which contributes to a better understanding of this topic. Cases were found and considered for which the equations of force lines exist in an explicit form. For each individual case, an example of the appearance of the lines of force of the electrostatic field, which follows from the obtained equations, is given using the package of applied computing programs MathCAD. The construction of power lines of the electrostatic field, of course, can be carried out using only numerical methods, based on the definition of the tangent to the line. Still, this approach significantly increases the complexity of computing programs.

**Formulation of the problem.** The lines of force of the electrostatic field in textbooks and teaching aids for the course of general physics draw, based on the definition of lines of force and formulas, expressions for the intensity of the electrostatic field, without obtaining the equations of the lines of force of the field, that is, it is insufficiently substantiated.

**Materials and methods.** The main methods of solving the problem are finding solutions to a system of ordinary, nonlinear, differential equations and using graphical operators in the environment of MathCAD applied computing programs.

**Results.** It was found that the equations of force lines exist in an explicit form for the electric field of two-point charges and for the electric field of a rectilinear, uniformly charged thread of finite length. Examples of lines of force are given, the general appearance of which is consistent with the known boundary conditions.

**Conclusions.** The obtained equations of the lines of force of the electrostatic field make it possible to strengthen the completeness of the presentation of the material in the "Electrostatics" section. Graphs of field lines of force, built with the help of computer programs, increase the level of proof of the presentation of the material and contribute to its understanding.

**KEYWORDS:** *electrostatic field; power lines; electric dipole; equation.*

### ВСТУП

**Постановка проблеми.** Викладення теми «Електростатика» супроводжується пояснювальними рисунками, на яких зображають силові лінії електростатичних полів. Але, загальне визначення силових ліній електростатичного поля, яке передує пояснювальним рисункам та формули для напруженостей електростатичних полів визначають вигляд силових ліній електростатичного неявию, що знижує рівень доказовості викладеного матеріалу.

**Аналіз актуальних досліджень.** У роботах (Кучерук et al., 2001; Воловик, 2005) при викладенні електростатики дається загальне визначення напруженості електростатичного поля, формула напруженості електростатичного поля одного точкового заряду, принцип суперпозиції електричних полів, на основі якого отримані загальні формули для знаходження напруженості електростатичного поля систем зарядів. Потім дається загальне визначення силової лінії електростатичного поля, без методу знаходження рівнянь силових ліній, і якісні рисунки для силових ліній електростатичного поля одного точкового заряду і силових ліній поля електричного диполю. У роботі (Андріящик et al., 2008) окрім якісного зображення силових ліній поля точкового заряду і диполя наведених якісний вигляд силових ліній електричного поля зарядженої провідної пластини, скінчених розмірів. У роботі (Петченко et al., 2007) детально розглядається взаємне розташування силових ліній і екіпотенціальних поверхонь, але приклади силових ліній електричних полів, зображені схематично. У роботі (Urone & Hinrichs, 2022) більша увага, ніж в інших роботах, приділена обґрунтуванню вигляду силових ліній електростатичного поля, але без застосування рівнянь силових ліній. У роботі (Owen, 1963) малюнки, які ілюструють силові лінії електричного поля, виконані від руки, тобто дуже якісно. У роботі (Purcell & Morin, 2013) шляхом чисельних розрахунків отримані і показані на рисунку силові лінії електростатичного поля двох точкових, різнойменних зарядів, різних за абсолютною величиною. У роботі (Jonassen, 1998) приведені якісні рисунки силових ліній електричного поля двох заряджених, провідних тіл, різної форми. У роботі (Sibley, 2021) зображені якісні рисунки силових ліній електричного поля двох однойменних, точкових зарядів, однакових за абсолютною величиною. У роботі (Munfaridah et al., 2021), яка є оглядовою статтею, узагальненні 24 емпіричних дослідження, що були проведені з 2002 по 2019 роки, однозначно доведено, що множинні представлення (multiple representations), іншими словами – малюнки, креслення, діаграми, графіки – позитивно впливають на розуміння студентами фізичних концепцій, а самостійна робота над множинними представленнями розвиває репрезентативну компетентність.

**Мета статті.** Як відомо з векторного аналізу, диференціальні рівняння силових ліній будь якого векторного поля (у даній роботі диференціальні рівняння силових ліній електростатичного поля), мають такий вигляд:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \quad (1)$$

де  $E_x$ ;  $E_y$ ;  $E_z$  – проекції вектора напруженості електричного поля на вісі координат.

Метою роботи є отримання рівнянь силових ліній електричного поля двох точкових зарядів та рівномірно зарядженої нитки скінченної довжини, шляхом знаходження розв'язків системи диференціальних рівнянь (1), після підстановки відомих проекцій напруженості електричного поля.

**МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ**

При знаходженні розв'язків системи з двох нелінійних, диференціальних першого порядку (1) був використаний метод виділення повного диференціалу. Приклади вигляду силових ліній одержані за допомогою тривимірної графіки з пакету прикладних обчислювальних програм MathCAD.

**РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ**

**1. Рівняння силових ліній для електричного поля двох точкових зарядів.** Позначимо через  $q_1$ ;  $q_2$  величини точкових зарядів, через  $l$  відстань між зарядами. Якщо вибрати початок відліку системи координат посередині між зарядами і розташувати заряди вздовж осі координат  $X$ , то проекції напруженості електричного поля мають вигляд:

$$E_x = \frac{q_1 \left( x - \frac{l}{2} \right)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1^3} + \frac{q_2 \left( x + \frac{l}{2} \right)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2^3}; E_y = \frac{q_1 y}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1^3} + \frac{q_2 y}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2^3}; E_z = \frac{q_1 z}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1^3} + \frac{q_2 z}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2^3}, \tag{2}$$

де  $r_1 = \sqrt{\left( x - \frac{l}{2} \right)^2 + y^2 + z^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{\left( x + \frac{l}{2} \right)^2 + y^2 + z^2}$ .

Підставляючи проекції (2) у систему рівнянь (1) маємо:

$$\begin{cases} dz \left( \frac{q_1 \left( x - \frac{l}{2} \right)}{r_1^3} + \frac{q_2 \left( x + \frac{l}{2} \right)}{r_2^3} \right) = dx \left( \frac{q_1 z}{r_1^3} + \frac{q_2 z}{r_2^3} \right) \\ dy \left( \frac{q_1 \left( x - \frac{l}{2} \right)}{r_1^3} + \frac{q_2 \left( x + \frac{l}{2} \right)}{r_2^3} \right) = dx \left( \frac{q_1 y}{r_1^3} + \frac{q_2 y}{r_2^3} \right) \end{cases} \tag{3}$$

Помножуючи перше рівняння системи (3) на  $z$ , друге рівняння на  $y$  та сумуючи їх одержимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0, \tag{4}$$

де  $f(x, y, z) = \frac{q_1 \left( x - \frac{l}{2} \right)}{\sqrt{\left( x - \frac{l}{2} \right)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q_2 \left( x + \frac{l}{2} \right)}{\sqrt{\left( x + \frac{l}{2} \right)^2 + y^2 + z^2}} = C_1; C_1 = const.$  (5)

Розділивши перше рівняння системи (3) на друге та проводячи інтегрування знаходимо:

$$z = C_2 y, \text{ де } C_2 = const. \tag{6}$$

Підставляючи залежність (6) координати  $z$  від координати  $y$  у функцію (5) маємо:

$$\frac{q_1 \left( x - \frac{l}{2} \right)}{\sqrt{\left( x - \frac{l}{2} \right)^2 + (1 + C_2^2) y^2}} + \frac{q_2 \left( x + \frac{l}{2} \right)}{\sqrt{\left( x + \frac{l}{2} \right)^2 + (1 + C_2^2) y^2}} = C_1. \tag{7}$$

Одержані рівності (6) та (7) це рівняння силових ліній поля електричного двох точкових зарядів.

На рисунках 1, 2 показаний вигляд силових ліній електричного поля двох точкових зарядів, відповідних рівнянням (6) та (7).

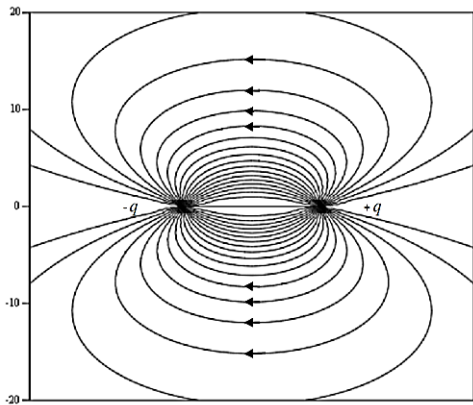


Рис. 1. Приклад силових ліній поля електричного диполя.  
Джерело: авторська розробка.

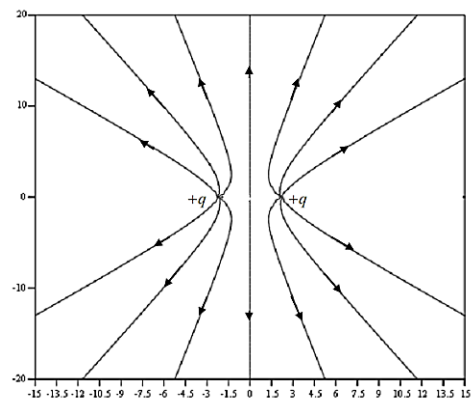


Рис. 2. Приклад силових ліній електричного поля двох однойменних, додатних зарядів.  
Джерело: авторська розробка.

**2. Рівняння силових ліній для електричного поля прямолінійної, рівномірно зарядженої нитки, скінченної довжини.** Позначимо через  $\tau$  абсолютну величину лінійної густини заряду нитки, через  $l$  довжину нитки. Якщо вибрати початок відліку системи координат посередині нитки і розташувати її вздовж осі координат  $Y$ , то проєкції напруженості електричного поля мають вигляд:

$$E_x = \frac{\tau x}{4\pi\epsilon_0\epsilon b^2} \left( \frac{y + \frac{l}{2}}{r_2} - \frac{y - \frac{l}{2}}{r_1} \right); \quad E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} - \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2}; \quad E_z = \frac{\tau z}{4\pi\epsilon_0\epsilon b^2} \left( \frac{y + \frac{l}{2}}{r_2} - \frac{y - \frac{l}{2}}{r_1} \right), \quad (8)$$

де  $r_1 = \sqrt{\left(y - \frac{l}{2}\right)^2 + b^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{\left(y + \frac{l}{2}\right)^2 + b^2}$ ,  $b = \sqrt{x^2 + z^2}$ .

Підставляючи проєкції (8) у систему рівнянь (1) маємо:

$$\begin{cases} dy \frac{x}{b^2} \left( \frac{y + \frac{l}{2}}{r_2} - \frac{y - \frac{l}{2}}{r_1} \right) = dx \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ dy \frac{z}{b^2} \left( \frac{y + \frac{l}{2}}{r_2} - \frac{y - \frac{l}{2}}{r_1} \right) = dz \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{cases} \quad (9)$$

Помножуючи перше рівняння системи (9) на  $X$ , друге рівняння на  $Z$  та сумуючи їх одержимо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0, \quad (10)$$

де

$$F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2} - \sqrt{x^2 + z^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2} = D_1; \quad D_1 = const. \quad (11)$$

Розділивши перше рівняння системи (9) на друге та проводячи інтегрування знаходимо:

$$z = D_2 x, \quad \text{де } D_2 = const. \quad (12)$$

Підставляючи залежність (12) координати  $z$  від координати  $x$  у функцію (11) маємо:

$$\sqrt{\left(y - \frac{l}{2}\right)^2 + (1 + D_2^2)x^2} - \sqrt{\left(y + \frac{l}{2}\right)^2 + (1 + D_2^2)x^2} = D_1. \quad (13)$$

Одержані рівності (12) та (13) це рівняння силових ліній електричного поля скінченної, рівномірно зарядженої нитки, які залежать від величини лінійної густини заряду неявним чином.

На рисунку 3 показаний вигляд силових ліній електричного поля зарядженої нитки, скінченної довжини, одержаних за допомогою рівнянь (12) і (13).

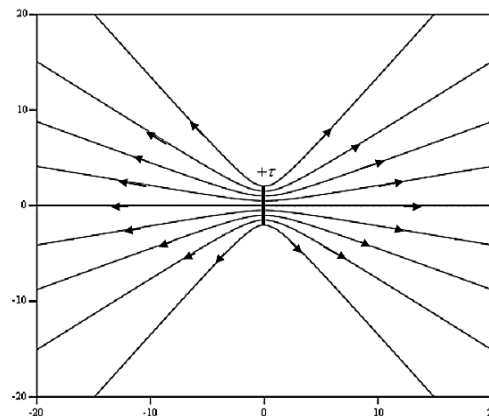


Рис. 3. Приклад силових ліній електричного поля зарядженої нитки скінченної довжини.

Джерело: авторська розробка.

Новизна отриманих у роботі результатів полягає у наступному: показано, що для електричного поля системи точкових зарядів та електричного поля неперервно розподілених зарядів, в окремих випадках, можна знайти рівняння силових ліній в явному вигляді та в наочній демонстрації простоти побудови силових ліній електричного поля, за допомогою отриманих рівнянь силових ліній.

## ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

1) У роботі показано, що в окремих випадках для електричного поля системи зарядів можна знайти рівняння силових ліній в явному вигляді. Знайдені рівняння силових ліній електростатичного поля двох точкових зарядів і рівномірно зарядженої нитки скінченної довжини. Застосування рівнянь силових ліній при викладенні матеріалу теми

«Електростатика» доповнює повноту і доказовість матеріалу, оскільки приклади зображень силових ліній студент може отримати самостійно, за допомогою обчислювальних програм, що буде сприяти підвищенню якості навчального процесу у закладах вищої освіти.

2) В якості одного з напрямів подальших досліджень можна запропонувати пошук рівнянь силових ліній електричного поля для інших систем систем точкових зарядів. Наприклад, для рівнянь електростатичного поля кубічної комірки, у вершинах якої знаходяться точкові заряди, та пошук рівнянь силових ліній електричного поля іонного кристалу. Іншим, перспективним напрямом є знаходження рівнянь силових ліній магнітного поля. Наприклад для магнітного поля колового струму, короткого соленоїда, що доповнить викладення матеріалу теми «Магнітне поле»

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Кучерук, І.М., Горбачук, І.Т., & Луцик, П.П. (2001). *Загальний курс фізики: Т. 2. Електрика і магнетизм*. Техніка.
2. Воловик, П.М. (2005). *Фізика для університетів. Повний курс в одному томі*. Ірпінь.
3. Андріяшчик, М.В., Вербицький, Б.І., & Король, А.М. (2008). *Курс фізики*. НВЦ «Фламенко».
4. Петченко, О.М., Сисоєв, А.С., Назаренко, Є.І., & Безуглий, А.В. (2007). *Загальні основи фізики*. ХНАМФ.
5. Urone, P.P., & Hinrichs, R. (2022) *College Physics 2e*. Rice University.
6. Owen, G.E. (1963) *Introduction to Electromagnetic Theory*. Allyn and Bacon.
7. Purcell, E., & Morin D. J. (2013) *Electricity and magnetism*. Cambridge University Press.
8. Jonassen, N. (1998) *Electrostatics*. Chapman & Hall.
9. Sibley, M.J.N. (2021) *Introduction to Electromagnetism: From Coulomb to Maxwell*. CRC Press.
10. Munfaridah, N., Avraamidou, L., & Goedhart, M. (2021) The Use of Multiple Representations in Undergraduate Physics Education: What Do we Know and Where Do we Go from Here? *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(1), em1934. <https://doi.org/10.29333/ejmste/9577>.

#### REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Kucheruk, I.M., Horbachuk, I.T., & Lutsyk, P.P. (2001). *Zahalnyi kurs fizyky: T. 2. Elektryka i mahnyetyzm [General course of physics: T. 2. Electricity and magnetism]*. Tekhnika.
2. Volovyk, P.M. (2005). *Fizyka dlia universytetiv [Physics for universities]*. Povnyi kurs v odnomu tomi. Irpin.
3. Andriashchik, M.V., Verbytskyi, B.I., & Korol, A.M. (2008). *Kurs fizyky [Physics course]*. NVTs «Flamenko».
4. Petchenko, O.M., Sysoiev, A.S., Nazarenko, Ye.I., & Bezuhlyi, A.V. (2007). *Zahalni osnovy fizyky [General basics of physics]*. KhNAMH.
5. Urone, P.P., & Hinrichs, R. (2022) *College Physics 2e*. Rice University.
6. Owen, G.E. (1963) *Introduction to Electromagnetic Theory*. Allyn and Bacon.
7. Purcell, E., & Morin D. J. (2013) *Electricity and magnetism*. Cambridge University Press.
8. Jonassen, N. (1998) *Electrostatics*. Chapman & Hall.
9. Sibley, M.J.N. (2021) *Introduction to Electromagnetism: From Coulomb to Maxwell*. CRC Press.
10. Munfaridah, N., Avraamidou, L., & Goedhart, M. (2021) The Use of Multiple Representations in Undergraduate Physics Education: What Do we Know and Where Do we Go from Here? *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(1), em1934. <https://doi.org/10.29333/ejmste/9577>.

Матеріал надійшов до редакції 24.02.2024р.

