

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка  
Фізико-математичний факультет  
Кафедра математики

**БОРЯК Олександр Валерійович**

**РОЗВИТОК КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ  
ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ**

Спеціальність 014 Середня освіта  
Освітньо-професійна програма Математика  
Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота  
на здобуття освітнього ступеню магістра

Науковий керівник  
\_\_\_\_\_ М. Г. Друшляк,  
кандидат фізико-математичних наук, доцент  
кафедри математики

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ року

Виконавець

\_\_\_\_\_ О. В. Боряк

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ року

Суми 2020

## ЗМІСТ

|  |           |
|--|-----------|
| <b>ВСТУП .....</b>   | <b>3</b>  |
| <b>РОЗДІЛ 1. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ РОЗВИТКУ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ .....</b> | <b>7</b>  |
| 1.1. Феномен критичного мислення у науково-педагогічних дослідженнях .....   | 7         |
| 1.2. Технології критичного мислення .....  | 15        |
| 1.3. Прийоми розвитку критичного мислення учнів старшої школи .....  | 21        |
| <b>РОЗДІЛ 2. РОЗВИТОК КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ .....</b>                  | <b>32</b> |
| 2.1. Некоректні задачі у шкільному курсі математики .....  | 32        |
| 2.2. Аналіз підручників з теми дослідження .....   | 40        |
| 2.3. Використання некоректних задач для розвитку критичного мислення учнів старшої школи .....                               | 44        |
| <b>ВИСНОВКИ .....</b>  | <b>47</b> |
| <b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>  | <b>50</b> |

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Реформування системи загальної середньої освіти в Україні набуває нових обертів, виходить на шабель учнівсько-центрованого підходу в навчанні. Стрімке зростання обсягу інформації, розвиток комп'ютерних технологій, на думку В. Дацюка, вимагає пошуку та впровадження нових методів і прийомів у методиці навчання математики. Виходячи з Державної національної програми «Освіта», закону України «Про освіту» та Державного стандарту, основною метою освітньої галузі «Математика» є формування в учнів математичної компетентності. Крім того В. Дацюк акцентує увагу на розвитку здатності чітко та аргументовано формулювати і висловлювати свої судження; забезпеченні інтелектуального розвитку учнів [11, с. 25]. Сучасні реалії вимагають від школи виховання творчої особистості, здатної до самостійного мислення, генерування оригінальних ідей, прийняття нестандартних рішень. Методична робота вчителя математики – це планомірний та цілеспрямований процес, метою якого є сформувати в учнів уміння виділяти головне, аналізувати, систематизувати інформацію, робити висновки [11, с. 25], тобто розвивати критичне мислення учнів.

Дослідженню критичного мислення, на думку В. Дацюка, присвячено праці багатьох науковців. Цей феномен у своїх наукових працях досліджували Дж. Брунер, Л. Виготський, Д. Дьюї, Д. Клустер, А. Кроуфорд, М. Ліпман, Д. Макінстер, С. Метьюз, Р. Пауль, Ж. Піаже, Д. Халперн та інші науковці [11, с. 26].

Ідея розвитку критичного мислення для української дидактики і методики навчання є достатньо новою. В Україні інтерес до розвитку критичного мислення як освітньої інновації з'явився наприкінці ХХ століття, завдяки дослідженням О. Тягло (1996 р.). Науковець акцентував увагу на важливості і значущості розвитку критичного мислення в умовах інформаційного суспільства [39]. Вивченню цього питання приділяють

значну увагу також українські учені І. Бондарчук, Т. Воропай, О. Пошетун, С. Терно, Л. Терлецька та інші.

Сьогодні очевидно, що критичне мислення означає не негативність суджень або критику, а розумний виважений розгляд різноманітності підходів для винесення обґрунтованих рішень.

Актуальність проблеми, її недостатня прикладна розробленість зумовили вибір теми магістерського дослідження «**Розвиток критичного мислення учнів старшої школи при вивченні математики**».

**Мета дослідження** – описати методи та засоби розвитку критичного мислення учнів старшої школи при розв’язуванні некоректних задач.

Згідно з метою дослідження було визначено такі **завдання**:

1. Проаналізувати й узагальнити науково-теоретичні дослідження про особливості розвитку критичного мислення учнів старшої школи взагалі та на уроках математики, зокрема, в психолого-педагогічній літературі.

2. Проаналізувати актуальний стан програмово-методичного забезпечення (програм, підручників) з теми дослідження.

3. Дослідити особливості використання прийомів розв’язування некоректних задач учнями старшої школи в процесі розвитку критичного мислення.

4. Провести аналіз завдань ЗНО у контексті визначення тих завдань, розв’язування яких сприяє розвитку критичного мислення.

**Об’єктом** дослідження є процес навчання математики учнів закладів загальної середньої освіти.

**Предмет** дослідження – процес розвитку критичного мислення учнів старшої школи при вивченні математики.

**Методи дослідження.** Для досягнення мети та розв’язання поставлених завдань використано наступні методи:

- теоретичні: вивчення, аналіз і узагальнення психолого-педагогічної й спеціальної методичної літератури з предмету дослідження для з’ясування науково-теоретичних засад розвитку критичного мислення старшокласників;

аналіз програм, підручників з математики з метою обґрунтування прийомів розвитку критичного мислення на уроках математики;

- емпіричні: цілеспрямоване спостереження за процесом розвитку критичного мислення старшокласників на уроках математики під час розв'язування некоректних задач у закладах загальної середньої освіти; вивчення й узагальнення педагогічного досвіду для обґрунтування напрямів (прийомів) розвитку критичного мислення обраної категорії школярів на уроках математики.

**Практичне значення здобутих результатів** полягає у розробці методичних прийомів розвитку критичного мислення під час розв'язування некоректних задач.

Одержані в дослідженні результати можуть бути використані у освітньому процесі навчання старшокласників математиці, у процесі розробки навчальних програм з математики, тестових завдань з ЗНО, для вдосконалення методики навчання математики в старших класах закладів загальної середньої освіти.

**Структура та обсяг магістерської роботи.** Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел

У вступі розглянуто актуальність роботи, визначено об'єкт, предмет, мету та завдання дослідження.

У першому розділі «Психолого-педагогічні основи розвитку критичного мислення учнів старшої школи при вивченні математики» розглянуто феномен критичного мислення у науково-педагогічних дослідженнях; проаналізовано навчальні програм та підручники з теми дослідження; опрацьовано технології критичного мислення; визначено прийоми розвитку критичного мислення в учнів старшої школи.

У другому розділі «Розвиток критичного мислення учнів старшої школи при розв'язанні некоректних задач» досліджено місце некоректних задач у шкільному курсі математики; зроблено аналіз підручників з алгебри та геометрії для 10-11 класів на виявлення кількості некоректних задач;

обґрунтовано доцільність використання некоректних задач для розвитку критичного мислення учнів старшої школи.

**Апробація результатів дослідження.** Основні положення і висновки дослідження висвітлено у тезах Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ\*плюс – 2020. Форум молодих дослідників» (м. Суми, 12.11.2020 р.) [3] та матеріалах результатів наукових досліджень молодих науковців 2020 р. [4].

Загальний обсяг магістерської роботи – 54 сторінки. Список використаних джерел включає 46 найменувань. У тексті містяться 6 таблиць, 10 рисунків.

Робота буде корисною студентам педагогічних спеціальностей та вчителям математики закладів загальної середньої освіти.

# РОЗДІЛ 1

## ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ

### РОЗВИТКУ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ

### ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

#### 1.1. Феномен критичного мислення у науково-педагогічних дослідженнях

Сучасний світ потребує від людини, як відмічає О. Барболіна, умінь і навичок розв'язувати складні проблеми. Крім того стає необхідністю навчатися критично ставитись до обставин, порівнювати альтернативні точки зору та приймати зважені рішення. Перед сучасним учителем ставиться задача розвитку в процесі навчання й виховання учнів здатності критично мислити [1, с. 190].

Проаналізуємо зміст понять «критичність» та «критичне мислення» за результатами аналізу психолого-педагогічної літератури.

Критичність (грец. *Kritike* – мистецтво розбирати, судити) – процес усвідомлення власних помилок, вміння оцінювати свої думки, зважувати доказувати за і проти, висувати гіпотези і піддавати ці гіпотези всебічній перевірці [6].

Сьогодні в різних наукових джерелах можна знайти різні визначення критичного мислення. Джуді А.Браус і Девід Вуд визначають критичне мислення як розумне рефлексивне мислення, сфокусоване на вирішенні того, у що вірити і робити. Критичне мислення, на їхню думку, це пошук здорового глузду – як розсудити об'єктивно і вчинити логічно з урахуванням як своєї точки зору, так і інших думок, вміння відмовитися від власних упереджень [18].

Дайана Халперн визначає критичне мислення у своїй роботі «Психологія критичного мислення» наступним чином: «... використання таких когнітивних навичок і стратегій, які збільшують ймовірність

отримання бажаного результату. Відрізняється виваженістю, логічністю і цілеспрямованістю. Інше визначення – спрямоване мислення [42].

Попри всю різноманітність цих та інших визначень критичного мислення можна побачити в них близький сенс. Критичне мислення означає мислення оціночне, рефлексивне. Це відкрите мислення, що не приймає догм, що розвивається шляхом накладення нової інформації на життєвий особистий досвід.

В цьому і є відмінність критичного мислення від мислення творчого, яке не передбачає оцінковості, а передбачає продукування нових ідей, дуже часто виходять за рамки життєвого досвіду, зовнішніх правил і норм. Однак провести чітку межу між критичним мисленням і творчим складно. Можна сказати, що критичне мислення – це відправна точка для розвитку творчого мислення, більш того, і критичне і творче мислення розвиваються в синтезі, взаємообумовлено.

Для того, щоб учень міг скористатися своїми можливостями критичного мислителя, важливо, щоб він розвивав в собі ряд важливих якостей, серед яких Д. Халперн виділяє: *Готовність до планування*. Думки часто виникають хаотично. Важливо упорядкувати їх, вирішити, в якій послідовності їх викласти. Впорядкованість думки – ознака впевненості.

*Гнучкість*. Якщо учень не готовий сприймати ідеї інших, він ніколи сам не зможе стати генератором ідей, думок. Гнучкість дозволяє почекати з винесенням судження, поки учень не буде володіти різноманітною інформацією.

*Наполегливість*. Часто, стикаючись з важким завданням, ми вирішуємо відкласти її рішення на потім. Виробляючи наполегливість в напрузі розуму, учень обов'язково доб'ється набагато кращих результатів в навчанні.

*Готовність виправляти помилки*. Критично мисляча людина буде намагатися не виправдати свої неправильні рішення, а зробити правильні для себе висновки, скористатися цією помилкою для продовження навчання.

Усвідомлення. Д. Халперн вважає, що це дуже важлива якість, яке передбачає вміння спостерігати за собою в процесі розумової діяльності, відслідковувати хід міркувань [42].

Пошук компромісних рішень. Важливо, щоб прийняті рішення могли сприйняти інші люди, інакше ці рішення так і залишаться на рівні висловлювань.

Девід Клустер, професор, викладач американської літератури, виділяє п'ять пунктів при визначенні критичного мислення.

По-перше, критичне мислення є самостійне мислення. Коли заняття будується на принципах критичного мислення, кожен формулює свої ідеї, оцінки, переконання незалежно від інших. Ніхто не може думати критично за нас, ми робимо це виключно для самих себе. Отже, мислення може бути критичним тільки тоді, коли носить індивідуальний характер. Учні повинні мати достатньо волі, щоб думати власною головою і самостійно вирішувати навіть найскладніші питання.

Критичне мислення не повинно бути абсолютно оригінальним: ми маємо право прийняти ідею або переконання іншої людини як свої власні. Нам навіть приємно погоджуватися з чужими думками – це немов підтверджує нашу правоту. Критично мисляча людина не так уже й рідко розділяє чийсь точку зору. Самостійність, таким чином, є перша і, можливо, найважливіша характеристика критичного мислення.

По-друге, інформація є відправним, а аж ніяк не кінцевим пунктом критичного мислення. Знання створює мотивування, без якої людина не може мислити критично. Як іноді кажуть, «важко думати головою». Щоб породити складну думку, потрібно переробити гору «сировини» – фактів, ідей, текстів, теорій, даних, концепцій. Мислити критично можна в будь-якому віці: не тільки у студентів, але навіть у першокласників накопичено для цього достатньо життєвого досвіду і знань. Зрозуміло, розумові здібності дітей будуть удосконалюватися при навчанні, але навіть малюки здатні думати критично і цілком самостійно. У своїй пізнавальній діяльності учні та

вчителі, письменники і вчені піддають кожен новий факт критичного обмірковування. Саме завдяки критичному мисленню традиційний процес пізнання знаходить індивідуальність і стає осмисленим, безперервним і продуктивним.

По-третє, критичне мислення починається з постановки питань і з'ясування проблем, які потрібно вирішити. справжній пізнавальний [21].

У ході проведеного дослідження нами було з'ясовано та узагальнено визначення поняття «критичне мислення». Ми вважаємо, що критичне мислення – це система суджень, яка використовується для аналізу речей і подій з формулюванням обґрунтованих висновків і дозволяє виносити обґрунтовані оцінки, інтерпретації, а також застосовувати отримані результати до ситуацій і проблем. У загальному значенні під критичним мисленням мається на увазі мислення вищого рівня, ніж мислення до критичне. Цим визначенням ми і будемо оперувати у межах дослідження.

Критичне мислення, як уточнює Т Зверова, це продуктивна й позитивна розумова діяльність, що характеризується:

- здатністю людини самостійно аналізувати інформацію;
- умінням бачити помилки або логічні порушення у твердженнях;
- умінням аргументувати свої думки, змінювати їх, якщо вони неправильні;
- наявністю розумної долі скепсису, сумнівів;
- прагненням до пошуку оптимальних рішень;
- принциповістю, сміливістю у відстоюванні своїх позицій;
- відкритістю до сприймання інших поглядів [14, с. 179].

Технологія розвитку критичного мислення вирізняється з-поміж інноваційних педагогічних ідей вдалим поєднанням проблемності і продуктивності навчання з технологічністю уроку, ефективними методами і прийомами.

Головна мета технології розвитку критичного мислення – розвиток інтелектуальних здібностей учня, що дозволяють йому вчитися самостійно.

Виділяють наступні завдання технології «Розвитку критичного мислення», – необхідно навчити школярів:

- виділяти причинно-наслідкові зв'язки;
- розглядати нові ідеї і знання в контексті вже наявних;
- відкидати непотрібну або неправильну інформацію;
- розуміти, як різні частини інформації пов'язані між собою;
- виділяти помилки в міркуваннях;
- робити висновок про те, чиї конкретно ціннісні орієнтації, інтереси, ідейні установки відображають текст або говорить людина;
- уникати категоричності у твердженнях;
- бути чесним у своїх міркуваннях;
- визначати помилкові стереотипи, що ведуть до неправильних висновків;
- виявляти упереджені ставлення, думку і судження;
- уміти відрізнити факт, який завжди можна перевірити, від припущення і особистої думки;
- ставити під сумнів логічну непослідовність усній або письмовій мові;
- відокремлювати головне від несуттєвого в тексті або в мові і вміти акцентувати увагу на першому [22].

Критичне мислення – здатність аналізувати інформацію з позиції логіки, вміння виносити обґрунтовані судження, рішення і застосовувати отримані результати як до стандартних, так і нестандартних ситуацій, питань і проблем.

У контексті навчання математики виділимо наступні структурні компоненти критичного мислення (рис.1.1).

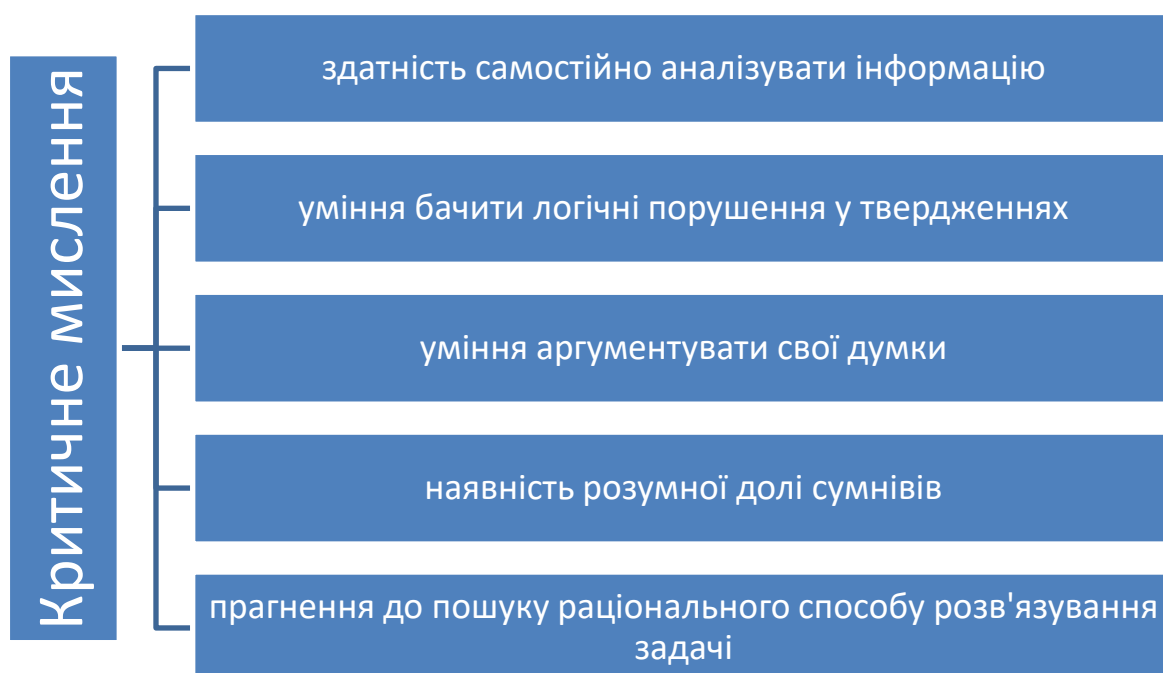


Рис. 1.1. Структурні компоненти критичного мислення

Розробці технології розвитку критичного мислення, як відмічає Т. Зверова, присвятили свої наукові дослідження такі видатні вчені як Л. Брунер, Д. Вертч, Л. Виготський, Дж. Дьюї, М. Коул [14, с. 179].

В Україні вперше проблема розвитку критичного мислення була піднята харківським дослідником О. Тягло, дослідження якого продовжили українські вчені О. Белкіна, М. Красовицький, Ю. Стежко [1, с. 190].

Суть і мета застосування технології критичного мислення, на думку О. Барболіної, визначає наступне: освіта не дається вчителем, вона одержується самим учнем. Виходячи з цього, учитель має сам оволодіти новим мисленням. Зокрема відповідним чином сприймаючи зміст навчального матеріалу, обираючи й застосовуючи саме ті методи й прийоми навчання, які сприятимуть розвитку критичного мислення учнів [1, с. 190].

Проблема розвитку критичного мислення є досить актуальною для підвищення якості математичної освіти. Аналіз результатів проходження учнями зовнішнього незалежного оцінювання свідчить про те, що дуже часто причиною незадовільного результату є не відсутність фактичних знань учнів з предмета, а саме нездатність школяра самостійно проаналізувати умову

завдання, осмислити її, скласти план розв'язування задачі, знайти оптимальний спосіб розв'язання, спираючись на власний досвід, тобто здійснити ту розумову діяльність, яка визначає здатність людини критично мислити.

Особливостями навчального процесу, побудованого на принципах розвитку критичного мислення, є:

- використання завдань, розв'язання яких потребує мислення вищого рівня;
- навчальний процес організовується як дослідження учнями певної теми, яке здійснюється шляхом інтерактивної взаємодії між ними;
- результатом навчання є не засвоєння фактів і чужих думок, а вироблення власних суджень з даної теми;
- здійснення оцінювання результатів із використанням зворотного зв'язку «учні – учитель»;
- освітній процес потребує від учнів достатніх навичок оперування доведеннями;
- учні повинні бути вмотивовані до обговорення проблеми [6].

Підтримуючи позицію Ю. Січкара, Д. Бабюка, констатуємо, що вивчення математики надає широкі можливості для розвитку критичного мислення учнів шляхом використання її інструментарію. І навпаки, приділяючи увагу спеціальним методам розвитку критичного мислення учнів, можна очікувати кращих результатів у розв'язуванні математичних задач [32, с. 280].

Критичне мислення – це необхідна навичка і життєво важливий ресурс сучасної людини. Воно базується на законах логіки та на розумінні психологічних процесів, які протікають у нашій свідомості. Н. Євтушенко у [12] розглядала основні методи розвитку логічного мислення учнів. Спеціальну увагу авторка приділила ролі нестандартних логічних задач у шкільному курсі математики.

Критичне мислення – це мислення вищого порядку; воно спирається на отриману інформацію, усвідомлене сприйняття власної розумової діяльності в оточуючому інтелектуальному середовищі. Однак, рівень критичності визначається не тільки запасом знань, а й особистісними якостями, інтелектом. Так Г. Силенюк у роботі [31] систематизувала поняття та визначення інтелекту, а також схарактеризувала його роль у пізнавальних здібностях учнів.

Необхідною умовою роботи з розвитку інтелектуальних здібностей особистості є організація власної навчально-пізнавальної діяльності учнів. З метою розвитку креативної, всебічно розвиненої, творчої особистості учня на уроках математики потрібно створювати умови, які б стимулювали його постійно самовдосконалюватися, висувати нові, нестандартні ідеї, відстоювати власну думку, самостійно вирішувати і проблеми навчальної діяльності. Необхідно формувати позитивну самооцінку та розвивати критичне мислення учнів. З метою створення сприятливих умов для формування математичної компетентності учнів учителям варто шукати ефективні емоційні стимули, які викликають позитивні навчальні прагнення учнів, на чому наголошує О. Матяш у роботі [21].

Значну роль у здатності критично мислити відіграють емоції, тому неабияка увага приділяється розвитку емоційного інтелекту. На уроках розвитку критичного мислення необхідно обов'язково знаходити час для креативу, адже вміння генерувати нові ідеї і критично їх осмислювати – чи не основний показник успішності людини. У роботі О. Буковська звернула увагу на необхідність учнів самостійно та нестандартно мислити, прогнозувати результати, виявляти творчий підхід до розв'язування поставлених завдань [8]. Адже розкриття творчого потенціалу, створення оптимальних умов для самореалізації особистості, тобто розвиток креативності учнів є одним із пріоритетів сучасної освіти.

Один із етапів уроку розвитку критичного мислення передбачає розвиток внутрішньої мотивації до вивчення конкретної теми та предмета в

цілому. Саме проблемі мотивації навчання математики присвячено доробок Н. Модягіної [25]. Авторка звертає увагу на необхідність учителя використати всі можливості, щоб підготувати учня до свідомого навчання, застосовуючи всеохоплюючу особистісно мисленнєву мотивацію. Вектор успіху учням задають вчителі, тому не можна нехтувати впливом математичних дисциплін на розвиток маленької людини.

У роботі С. Скворцова поділилась досвідом пошуку шляхів позитивної мотивації учнів до навчання математики [33]. Авторка розглядає ігрову модель навчання математики, де засвоєння нової інформації відбувається через оперування в уяві образами абстрактних понять. На думку педагога, це учню зробити легше, ніж оперувати образами реальних об'єктів, тому, що їх конкретні деталі, композиційна складність суттєво гальмують даний процес.

Всі вищезгадані результати досліджень орієнтовані на вчителя математики з метою їх практичного застосування у професійно-педагогічній діяльності. Дані матеріали можуть бути використані як одна із ланок алгоритму процесу впровадження переходу від навчання, переважно орієнтованого на запам'ятовування, до навчання, спрямованого на розвиток самостійного свідомого критичного мислення учнів.

## **1.2. Технології критичного мислення**

Розвиток критичного мислення є одним з наскрізних завдань навчально-виховного процесу у новій українській школі. Перед учителем постає завдання підготувати та провести урок, який розвиває критичне мислення учнів. О. Пометун зауважує, що для цього слід пам'ятати, що критичне мислення – це неупереджене дослідження предмету або проблеми. Тому урок варто починати, на її думку, з того, що учні мають з'ясувати: що вони вже про це знають; що їм слід вивчити; які запитання постають перед нами у зв'язку з темою уроку. Далі навчальний процес учитель має організувати так, аби учні вільно виявляли факти, розглядали варіанти

розв'язання проблеми, а наприкінці дійшли до підкріпленого фактами осмислення власної позиції щодо поставлених запитань. Щоб підготувати та провести урок з розвитку критичного мислення вчитель має створювати атмосферу позитивної взаємодії учнів, розумітися в тому, які форми й методи навчання ефективніші на певному етапі уроку, а ще – і це принципово важливо – самому мислити критично [29].

Традиційно, на уроці розвитку критичного мислення виділяють три етапи, що відповідають тим компонентам навчання, які виділяли Ж. Піаже і його послідовники (рис.1.2).

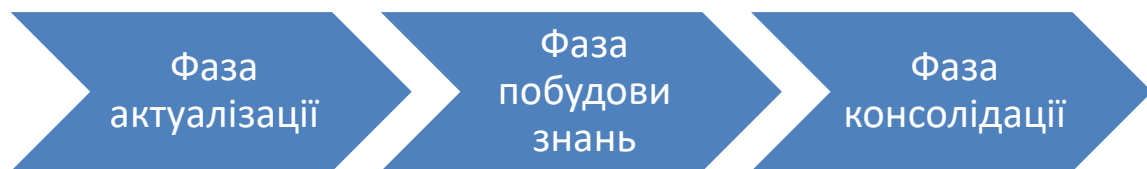


Рис. 1.2. Етапи уроку розвитку критичного мислення за Ж. Піаже

*Фаза актуалізації (передбачення)*, під час якої педагог спрямовує учнів на те, щоб вони думали над темою, яку починають вивчати і формулювали запитання. Фаза актуалізації має на меті: актуалізувати у пам'яті учнів вже наявні знання; неформальним шляхом оцінити те, що вони вже знають; встановити цілі навчання; зосередити увагу учнів на темі; представити контекст для того, щоб вони зрозуміли нові ідеї.

*Фаза побудови знань*, під час якої вчитель підводить учнів до постановки питань, пошуку, осмислення матеріалу, відповідей на попередні питання, визначення нових питань і намагання відповісти на них. Ця фаза відбувається в основній частині уроку й має на меті: порівняти очікування учнів з тим, що вивчається; переглянути очікування й висловити нові; відстежити процеси мислення, перебіг думок учнів; зробити висновки і узагальнення щодо матеріалу; поєднати зміст уроку з особистим досвідом учнів; поставити запитання до вивченого на уроці матеріалу.

*Фаза консолідації*, під час цієї фази вчитель прагне, щоб учні відрефлексували те, про що дізналися і запитали себе, що це означає для них, як це змінює їхні попередні уявлення, зрештою як вони зможуть це використовувати. Ця фаза має на меті: узагальнити основні ідеї; інтерпретувати визначені ідеї; обмінятися думками; виявити особисте ставлення [29].

В українській сучасній методичній літературі, щодо підготовки уроку з розвитку критичного мислення, зазначається, що такий урок має складатись із трьох етапів (рис.1.3).

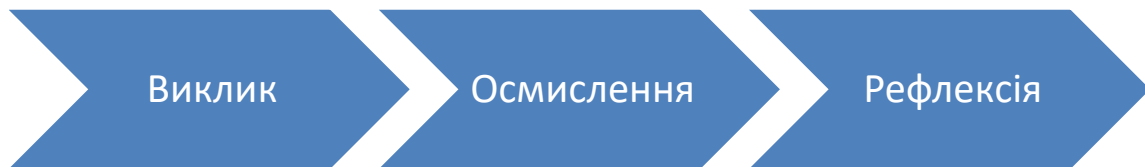


Рис.1.3. Етапи уроку розвитку критичного мислення за Ж. Піаже

*Етап 1. Виклик.* Мета – формування особистого інтересу для отримання інформації. Учні мають подумати та розповісти іншим про те, що вони знають з обраної теми для обговорення – так отримані раніше знання усвідомлюються і стають базою для засвоєння нових. Задача вчителя на цьому етапі – узагальнити знання дітей, допомогти кожному визначити «своє особисте знання» і основні цілі для отримання нових.

*Етап 2. Осмислення.* Діти знайомляться з новою інформацією. При цьому вони мають відслідкувати своє розуміння і записувати у вигляді питань те, що вони не зрозуміли – для того, щоб пізніше заповнити ці «білі плями». Після ознайомлення з інформацією кожен учень має сказати про те, які орієнтири чи фрази чи слова допомогли йому зрозуміти інформацію, а які, навпаки, заплутували. Головний принцип етапу осмислення – вчитель має давати учням установку на індивідуальні пошуки інформації з подальшим груповим обговоренням та аналізом.

*Етап 3. Рефлексія.* Учні мають обдумати те, що вони дізналися та як включити нові поняття в свої уявлення; обговорити, як це змінило їхні думки, бачення, поведінку [28].

Реалізація завдань кожного етапу передбачає використання різноманітних технологій. О. Пометун виділила наступний перелік [28].

На етапі *Виклик* дослідниця виділяє такі технології як кластер, асоціативний куц, дерево передбачень, таблиця «Знаємо – Хочемо дізнатися – Дізнались», мозковий штурм, робота в парах, кошик ідей, правильні і неправильні судження, мультиголосування, передбачення на основі опорних слів, діаграма Венна.

На етапі *Осмислення* (основна частина уроку) – карта поняття, читаємо в парах/запитуємо (узагальнюємо) в парах, «тонкі» і «товсті» запитання, подвійний щоденник, читання з маркуванням, опорні слова, т-таблиця, картографування тексту, концептуальна таблиця, спитайте у автора, ажурна пилка (мозаїка), навчаючи вчуся, дискусія.

На етапі *Рефлексія* (підбиття підсумків) – сенкан, кластер, займи позицію, бортовий журнал, таблиця «Знаємо – Хочемо дізнатися – Дізнались», концептуальна таблиця, «плюс – мінус – цікаво» (ПМЦ), шкала думок, ПРЕС (Інтерактивний метод який надає можливість навчитися аргументовано, в чіткій і стислій формі формулювати і висловлювати свою думку з дискусійного питання), риб'яча кістка.

Перелік методів розвитку критичного мислення достатньо великий. Добирати їх учителю слід з огляду на мету, завдання, зміст уроку. Крім того, слід зважати на особливості цих методів, адже на певних етапах уроку вони є ефективнішими, а отже, доречнішими. Учитель має опонувати якомога більше методів розвитку критичного мислення і бути обізнаним з особливостями їх ефективного застосування. Найпоширеніші методи розвитку критичного мислення подано на рис. 1.4.

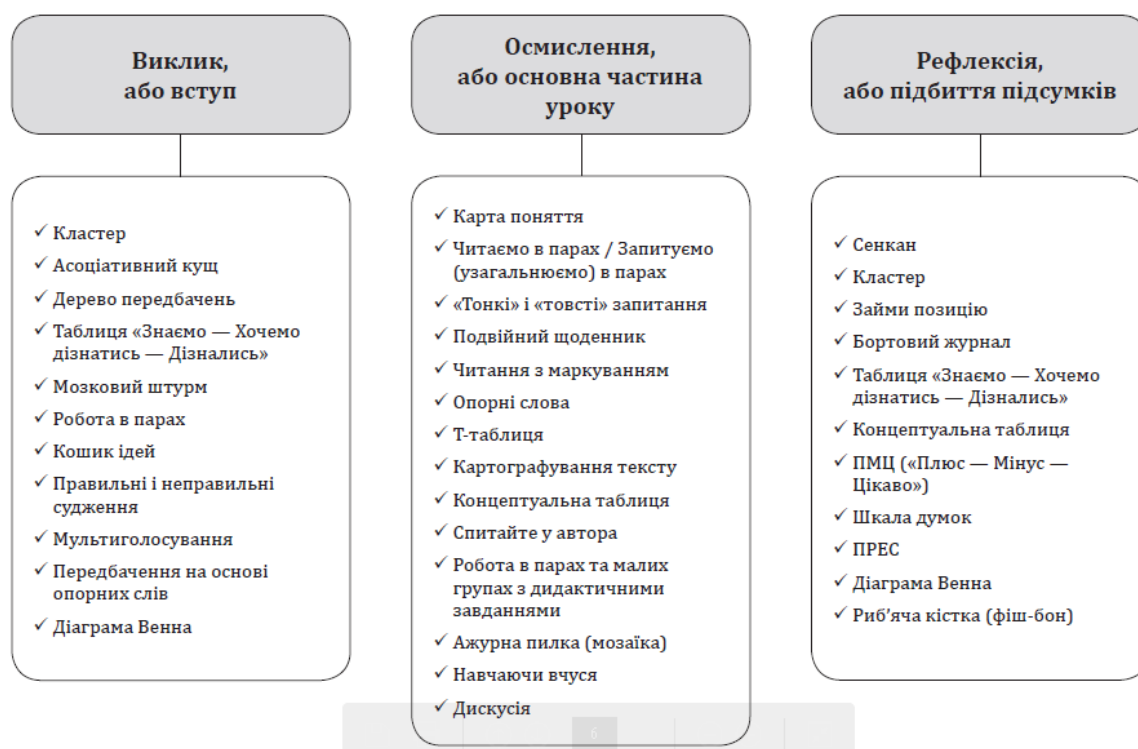


Рис. 1.4. Найпоширеніші методи розвитку критичного мислення

Аби учні мали змогу розвивати критичне мислення, у школі слід системно змінити всі компоненти освітнього процесу. Зупинімося на кількох з них.

Завдання уроку. Формування мисленнєвих операцій високого рівня і відповідних ціннісних орієнтацій в учнів – довіри до результатів власних розумових зусиль, інтелектуальної мужності, відкритості до різноманіття думок тощо – має стати частиною цілепокладання уроку незалежно від навчального предмету, який учні вивчають.

Організація навчання. Аби формувати критичне мислення як соціальне, слід залучати учнів до обговорення і відстоювання своїх думок в інтерактивному спілкуванні з однокласниками. А отже, структура і методика уроку набувають специфічних технологічних характеристик. Змінюється “палітра” методів і засобів навчання – вчитель має віддавати перевагу тим, що дають змогу розвивати критичне мислення учнів.

Контроль і корегування результатів. Способи й методи контролю мають виявляти не лише рівень навчальних досягнень з того чи того навчального предмету, а й опанування учнем умінь і навичок критичного мислення. Такий контроль потрібен для подальшого їх корегування.

Практика вивчення конкретного предмету може змінюватись поетапно. І одним з найважливіших етапів є внесення системних змін в організацію навчання. Слушно у цьому випадку є думка Ю. Бикової, яка наголошує на доцільності у навчанні математики застосування наступних прийомів:

*Асоціації.* Вчитель пропонує учням по черзі висловитися, про те, які асоціації в них викликає основне поняття уроку. Цим самим учні зможуть «увійти» в тему, згадати те, що вони чули.

*Мозковий штурм* (до 7 хвилин). Прийом починається постановкою перед учнями чітко сформульованого проблемного питання, яке дає змогу висувати багато версій для відповіді. Усі ідеї для вирішення записуються на дошці та обговорюються в подальшому. Під час процесу учитель може спонукати дітей змінювати думки один одного.

*Кластер.* Прийом подібний до мозкового штурму, для його застосування потрібно до 5 хв. Він передбачає виокремлення смислових одиниць тексту й графічне оформлення їх у певному порядку у вигляді грона. Кластери допомагають учням у ситуаціях, коли під час письмової роботи запас думок вичерпується. Система кластерів охоплює більшу кількість інформації, ніж ви б могли отримати за звичайної письмової роботи.

Продуктивним прийомом є й *обговорення пропонованого проблемного запитання в парах* або з використанням прийому «2-4 – всі разом» (до 7-8 хв.). Використовуючи цей прийом, учитель формує запитання та дає учням 1-2 хвилини часу для продумування можливих відповідей або індивідуальних розв'язань. Далі об'єднує учнів у пари і просить їх обговорити свої ідеї один з одним, потім об'єднує учнів у четвірки, де вони обговорюють уже отримані розв'язки та дають відповідь на загал [2, с. 13].

Автори посібника «Технології розвитку критичного мислення учнів» [37], відзначають, що вчителі математики часто вірять, що оскільки їх предмет містить мало тексту, то в ньому не можуть використовуватися читання та письмо для критичного мислення. Але трьохфазна модель є дуже ефективною, забезпечуючи активацію вже набутих знань та розвиток нового словникового запасу, не говорячи вже про творчий інтерес у фазі актуалізації.

Як свідчить аналіз літературних джерел, передового практичного досвіду, більшість уроків, що розроблені досвідченими вчителями математики в Україні містять перераховані три етапи, на кожному з яких використовуються підібрані ними інтерактивні технології. Вважаємо, якщо на уроці математики буде методично грамотно підібрана система вправ, яка змусить учнів пригадати необхідні знання з даної теми, виділити підзадачі до конкретної задачі, знайти власне вирішення проблеми та обґрунтувати, довести правильність розв'язання; коли у процесі розв'язування задачі будь-яка думка буде перевірятися і відточуватися, що може спричинити суперечку, обговорення, заперечення і обмін думками з іншими, то такий урок приречений розвивати критичне мислення на уроках математики.

### **1.3. Прийоми розвитку критичного мислення учнів старшої школи**

Сучасна педагогіка багата цілим арсеналом інтерактивних підходів, серед яких можна виділити наступні: творчі завдання, робота в малих групах, навчальні ігри (рольові ігри, імітації, ділові ігри й дидактичні ігри), розминки, вивчення й закріплення нового матеріалу (інтерактивна лекція, робота з наочними приладдя, відео – і аудіо матеріалами, «учень у ролі вчителя», «кожний учить кожного», мозаїка (ажурна пилка), використання питань, Сократівський діалог), обговорення складних і дискусійних питань і проблем («Займи позицію (шкала думок)»), Попс-Формула, проєктивні

техніки, «Один – удвох – усі разом», «Переміни позицію», «Карусель», «Дискусія в стилі телевізійного ток-шоу», дебати), розв'язання проблем («Дерево рішень», «Мозковий штурм»), рефлексія.

Під творчими завданнями розуміють такі навчальні завдання, які вимагають від учнів не простого відтворення інформації, а творчості, оскільки завдання містять більший або менший елемент невідомості й мають, як правило, кілька підходів. Творче завдання становить зміст, основу будь-якого інтерактивного метода. Творче завдання надає зміст навчанню, мотивує учнів і відповідає таким критеріям: не має однозначної й односкладової відповіді або розв'язку; є практичним і корисним для учнів; пов'язане з життям учнів; викликає інтерес в учнів; максимально служить меті навчання. Розглянемо деякі з них які на нашу думку є найбільш обґрунтованими для розвитку критичного мислення на уроках математики в старших класах.

**Розминка** (відкриваємо «схринуку мудрості»). Замінює організаційний момент. Головна функція – створення сприятливого мікроклімату для творчості. Один з підходів до організації – обговорення девізу уроку, а найчастіше – «крилатих фраз», які можуть не бути пов'язані з темою уроку. Активізує спілкування не тільки вчителя й учнів, а особистостей: «Сьогодні на уроці математики ми будемо працювати разом і я розраховую на вашу підтримку і допомогу. Кожному з вас я хочу побажати щоб ви на цьому уроці були: «У» – усміхненими, «С» – спокійними, «П» – прогресивними, «І» – інтерактивними, «Х» – хоробрими».

**«Базовий аркуш»**. Це необхідний атрибут при вивченні нового матеріалу. На першому ж уроці він вивішується на стенд. У ньому перелічені основні поняття, формулювання, і формули, які зобов'язано повинен знати кожний учень. Наприклад при розв'язанні задач зі стереометрії необхідно знати аксіоми стереометрії.

Аксіоми стереометрії та наслідки з них

1. Якщо  $\beta$  не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.
2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.
3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і до того ж тільки одну [36].



Рис. 1.5. Аксиоми стереометрії

**Аналіз.** Аналіз це вихідна розумова операція, з якої починається процес мислення. Для його здійснення потрібно розкласти ідею або об'єкт на складові частини. Наприклад, повертаючись до теми прямих та площини в просторі у межах якої розглядаються підтеми:

1. Прямі в просторі;
2. Взаємне розміщення прямої та площини;
3. Паралельність прямих та площин;

4. Перпендикулярність прямих і площин;
5. Перпендикуляр і похила;
6. Взаємне розміщення площин;
7. Перпендикулярність площин.

Прийом *«Інсерт»*. При читанні тексту проти кожного абзацу учні на полях олівцем розташовують позначки. Учні знають, що позначки повинні бути наступні: «v» – якщо те, що вони читають, відповідає тому, що вони знають; «-» – якщо те, що вони читають, суперечить тому, що вони вже знали, або думали, що знали; «+» – якщо те, що вони читають, є для них новим; «?» – якщо те, що вони читають, незрозуміло, або вони хотіли бо держати докладніші відомості з даного питання. Даний прийом вимагає від учня не звичного пасивного читання, активного і уважного. Він зобов'язує не просто читати, а вчитуватися в текст, відстежувати власне розуміння в процесі читання тексту або сприйняття будь-якої іншої інформації. На практиці учні просто пропускають те, що не зрозуміли. І в даному випадку маркувальний знак «питання» зобов'язує їх бути уважними і відзначати незрозуміле.

Під час читання учні формулюють питання для своїх товаришів і знають що їм теж прийдеться відповідати на їхні питання. Отже, така робота сприяє більш кращому засвоєнню теоретичного матеріалу Питання, складені учнями по тій або іншій темі, привчають їх усвідомлювати що знання, одержані на уроці, не кінцеві, що багато чого залишається «за кадром».

*Прийом «Асоціативний куш»*. Асоціація спонукає до вільного і відкритого мислення. При складанні асоціативного куща учні дотримуються таких правил:

Записують в центрі ключове слово чи фразу, виділяють її певним образом.

Записують будь-які слова чи фрази, які спадають на думку.

Ставлять знаки питання біля частин куща, в яких є невпевненість.

Записують всі ідеї, які з'являються.

Після заповнення «куща» учні визначають проблеми чи теми, для розгляду яких необхідна додаткова інформація. Це педагогічний прийом, який розвиває варіантність мислення, здатність установлювати всебічні зв'язки й відносини досліджуваної теми (поняття, явище, подія). Використовують на початку вивчення теми з метою актуалізації знань та наприкінці – для систематизації знань, на етапах актуалізації і рефлексії, а також під час групової роботи.

Приклад використання прийому «Асоціативного куща» на уроці математики в 11 класі під час вивчення теми «Логарифмічна функція». Ключовим словом «Асоціативного куща» є логірифм. Учні по черзі заповнюють «гілочки» куща. Потім розкривають зміст (рис. 1.6).

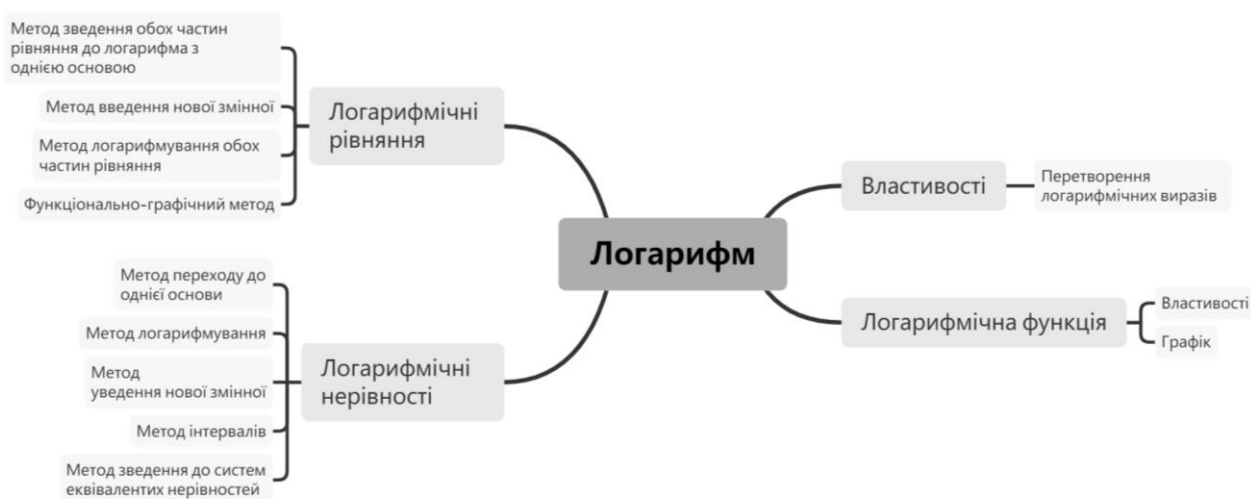


Рис.1 6. Асоціативний кущ з теми «Логарифмічна функція»

**Прийом «Ромашка» Блума** застосовую при вивченні нового матеріалу. Прийом «Ромашка» Блума допомагає учням краще опанувати темою, яку вивчаємо.

З метою усвідомлення і осмислення знань застосовую прийом **«Концептуальна таблиця»**.

**Прийом «Лови помилку»**. Це універсальний прийом. Він може використовуватися й у роботі із групою, і в індивідуальній роботі. А також на

різних етапах уроку: на початку – при розв’язуванні усних вправах або при повторенні у середині уроку – при закріпленні матеріалу, на стадії осмислення наприкінці уроку – при підведенні підсумків, на стадії рефлексії. Учні шукають помилку, краще разом. Вони сперечаються, радяться, а коли приходять до якоїсь думки, вибирають спікера й пропонують свій аргументований варіант відповіді. Приклад використання прийому «Лови помилку» на уроці алгебри в 11 класі під час вивчення теми «Логарифмічні рівняння та нерівності».

Усно. Знайти помилку:

$$1. \log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x), \quad x^2 - 4x - 5 = 7 - 3x,$$

$$x^2 - x - 12 = 0, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = -3.$$

Відповідь: 4; -3.

Рис. 1.7. Приклад використання прийому «Лови помилку» на уроці алгебри в 11 класі

Помилка полягає в тому що основа логарифма повинна бути додатною, але це в завданні не враховується.

Методики «розірваного ланцюжка», пошуку аналогій, висновків.

Приклад використання прийому «Розірваного ланцюжка» при вивченні теми «Логарифмічні рівняння та нерівності» (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1.

**Приклад використання прийому «Розірваного ланцюжка» при вивченні теми «Логарифмічні рівняння та нерівності»**

| Встановити відповідність: |                  |   |                 |
|---------------------------|------------------|---|-----------------|
| 1                         | $\log_3(-x) = 4$ | А | -64             |
| 2                         | $\log_4 x = -3$  | Б | $\frac{1}{64}$  |
| 3                         | $\log_3 x = -4$  | В | $-\frac{1}{64}$ |
| 4                         | $\log_4(-x) = 3$ | Г | $\frac{1}{81}$  |
|                           |                  | Д | -81             |

«*Наведи порядок*». Учням роздаються розрізні прямокутники, в яких переплутані формули, записані приклади до розв'язування і розв'язки, тощо і пропонується навести порядок.

«*Ключові терміни*». Виписуються на окремі листи слова (фрази) з означень, властивостей, формулювань, які демонструються перед класом в свідомо порушеній послідовності. Після знайомства з текстом учням пропонується відновити порушену послідовність. Такий прийом сприяє розвитку уваги і логічного мислення, спонукає більш уважно вивчати означення, властивості, теореми.

«*Математичне доміно*». Звичайна картонна картка розділяється на дві частини. В одній записуються завдання, а в іншій відповідь на те завдання, яке записане на іншій кістянці доміно. Використовуються доміно для індивідуальної, групової і колективної роботи (таблиця 1.2).

Таблиця 1.2.

### Математичне доміно

| <i>Приклад картки-доміно:</i>         |                          |
|---------------------------------------|--------------------------|
| $\log_9 x < \frac{1}{2}$              | (0; 9)                   |
| $\log_{\frac{1}{3}} x > -2$           | (9; $+\infty$ )          |
| $\log_{\frac{1}{9}} x < -\frac{1}{2}$ | $(\frac{1}{3}; +\infty)$ |
| $\log_{\frac{1}{9}} x < \frac{1}{2}$  | (0; 3)                   |
|                                       | (3; $+\infty$ )          |

Підтримуючи думку О. Барболіної, відмічаємо, що однією з характеристик критичного мислення є вміння людини бачити логічні порушення у твердженнях. Тому одним із напрямів розвитку критичного мислення, за поглядами О. Барболіної, є розвиток логічного (правильного) мислення, яке характеризується визначеністю, несуперечливістю, послідовністю й обґрунтованістю. Формувати вміння мислити логічно неможливо без розв'язання логічних задач [1, с. 195]. В. Суцанський у статті [40] зазначає: «Щоб розв'язати логічну задачу, треба докладно

проаналізувати умови, які пов'язують твердження, що розглядаються в задачі, і вказати послідовність міркувань, за допомогою яких відкидаються інші можливі варіанти відповіді».

У логічних математичних задачах зазвичай використовують способи, що заганяють неухважних у глухий кут:

- розглядають задачі зі складною побудовою міркувань, використовують додаткові дані в умові задачі, щоб відволікти від правильної відповіді;
- вносять плутанину в одиниці вимірів;
- використовують поняття, з якими учні ще не знайомі;
- створюють завдання, які потребують знань конкретних величин або формул.

Ефективними прийомами розвитку критичного мислення школярів є задачі-пастки, що сприяють уважному, критичному сприйманню завдання й можливої відповіді. Існує декілька різновидів задач-пасток:

- при формулюванні завдання пропонуємо неправильну відповідь. Учні вислуховують відповіді однокласників і варіант учителя. Вони порівнюють власну відповідь та відповіді інших й обирають правильну. Це забезпечує виховання звички довіряти собі не менше, ніж іншим.
- завдання, що не мають розв'язку, виховують не стандартне, а самостійне ставлення до завдання, в той час коли учні-виконавці відразу починають діяти за певним алгоритмом, шаблоном.
- завдання, що формують уміння учнів відшукувати необхідну інформацію: завдання, у яких недостатньо даних, або завдання, у яких запитання ставлять учні, а відповідає вчитель.

Розв'язування перелічених вище типів математичних задач найбільш сприятиме розвитку критичного мислення учнів, сформує в них відповідальне, осмислене ставлення до навчання. Оволодівши знаннями та навичками критичного мислення, учні завжди зможуть зрозуміло

висловлювати свої думки, неоднозначність у формулюванні тверджень, безсистемність в обробці інформації. Вони швидко зможуть знайти раціональне зерно у інформації, що надходить, знайдуть найкоротший і правильний шлях виправлення помилок, будуть здатні розв'язувати будь-які складні проблеми [41].

Існують три рівні завдань на розвиток критичного мислення учнів:

– завдання першого рівня, спрямовані на запам'ятовування інформації (вони можуть розпочинатися словами: «чому», «як», «перерахуйте», «оберіть», «поясніть, чому» тощо) та на її розуміння (починаються словами: «порівняйте», «перефразуйте», «яка головна ідея» тощо);

– завдання другого рівня, спрямовані на розвиток уміння аналізувати інформацію (починаються словами: «який висновок можна зробити», «як довести», «сформулюйте відмінності», «що спільного» тощо) та знаходити її застосування (починаються словами: «яким чином ви б скористалися», «який спосіб обрали б», «що можна змінити» тощо);

– завдання третього рівня, що сприяють розвитку вміння оцінювати інформацію (починаються словами: «ви згодні з», «яка ваша думка про», «яким чином ви б довели» тощо) та формуванню творчих здібностей учнів (починаються словами: «яким чином покращити», «запропонуйте альтернативу», «спрогнозуйте наслідки» тощо).

Розв'язання таких систем вправ з одного боку сприяє розвитку критичного мислення учнів, а з іншого – оптимізує процес вивчення навчального матеріалу, в даному випадку – стереометричного [17].

Розглянемо особливості розв'язування математичних задач із використанням елементів технології розвитку критичного мислення, що вивчається. Розв'язуючи задачу, необхідно пам'ятати, що під час використання елементів технології розвитку критичного мислення головним є процес, а не результат. Тому важливим є не стільки зміст задачі, а організація процесу її розв'язання.

Головними ознаками критичного мислення учнів під час розв'язання задач вважаємо такі вміння: робити логічні висновки; приймати обґрунтовані рішення; давати оцінку отриманій інформації й розумовому процесу; бути спрямованим на результат.

Існують різноманітні методи навчання розв'язування задач та вправ: наслідування, спроб та помилок, поступового ускладнення, евристичних наставлянь тощо. Серед них найбільше відповідають технології розвитку критичного мислення метод спроб та помилок і метод евристичних наставлянь.

Під час використання методу спроб та помилок організуємо роботу над задачею таким чином, щоб кожен учень мав змогу висловити свою думку, висунути гіпотезу, обрати найбільш раціональний спосіб розв'язування, скласти його план, міг звернутися по допомогу до вчителя чи інших учнів, до речі, принциповим є те, щоб школярі усвідомлювали необхідність розв'язання кожної запропонованої задачі.

Розглянемо конкретний приклад. *Задача: протягом року завод двічі збільшував випуск продукції на однакове число відсотків. На початку року завод випускав 1200 виробів, а наприкінці року – 1587 виробів. Розв'язання даної задачі відбувається на уроці повторення навчального матеріалу, тобто вибір способу її розв'язання не є очевидним.*

Перед розв'язанням задачі ставимо таке запитання: «Як перефразувати той факт, що збільшення відбувалося на однакове число відсотків?». Відповідь: збільшення відбувалося в однакове число разів. Це може підказати учням, що розв'язання задачі може відбутися способами, не пов'язаними з відсотками. Хтось з учнів скористається універсальним способом розв'язання задач на відсотки, двічі склавши пропорцію, позначивши через  $x$  кількість відсотків, на які відбувалося збільшення. Хтось скористається формулою складних відсотків:  $A_n = A_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$ . А хтось перекладе умову задачі мовою геометричної прогресії: знайти знаменник геометричної прогресії. Кожен з учнів презентує обраний ним спосіб розв'язання задачі. Після цього ставимо до всіх учнів

такі запитання: – Який спосіб є більш раціональним за кількістю дій? – Який більш простий у плані обчислення? – Який спосіб не вимагає спеціальних знань? – Який спосіб ви обираєте для себе й чому? Хтось з учнів залишиться при своїй думці, для когось аргументи опонента виявляться більш переконливими.

При такому підході до розв'язування задачі виконуються умови, які спонукають учнів до критичного мислення [27]:

- мислення носить індивідуальний характер;
- учні усвідомлюють, що від них очкується висловлення власних думок та ідей;
- школярі мають можливість для обміну думками;
- учні розуміють, що одна й та сама проблема може мати декілька розв'язань, тому вони повинні підкріпити своє рішення переконливими аргументами;
- школярі навчаються прислухатися до думок інших, оцінювати й аналізувати їх;
- у результаті спілкування учні можуть поглибити свою позицію або змінити її. Суть методу евристичних наставлянь полягає в тому, що під час пошуку плану розв'язання важкої задачі учням пропонують систему наставлянь чи навідних запитань [24].

Метод евристичних наставлянь – найефективніший під час розв'язування нетипових задач. Розглянемо приклад його використання.

Аналіз використання такого методу показав, що побудований таким чином процес розв'язування даної задачі вимагає від учнів уміння мислити нестандартно, логічно, указує на існування альтернативних способів розв'язання систем рівнянь, викликає в учнів здивування своєю непередбачуваністю, демонструє міжпредметні зв'язки, тобто цілком відповідає вимогам технології розвитку критичного мислення.

## РОЗДІЛ 2

### РОЗВИТОК КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ

#### 2.1. Некоректні задачі у шкільному курсі математики

Термін «задача», зазначає А. Воевода, використовується в житті і науці дуже широко і має багато різних значень. Тому дотепер не існує загальноприйнятого означення поняття «задача». У психології поняття «задачі» характеризує спрямованість і мету діяльності людини, досягнення результату якої здійснюється певними засобами. У філософії задачу розглядають як системний об'єкт, основною характеристикою якого є цілісність. Математики визначають задачу через її структурні елементи (В. Брадїс, Я. Вішін, І. Ганчев, А. Ньюелл, В. Реп'єв, А. Столяр, Л. Фрідман) [9, с. 45].

У дослідженні А. Воевода оперує думками науковців щодо окресленого питання. Так, наприклад, педагог-методист А. Столяр під задачею (у широкому значенні) розуміє вимогу відшукування області істинності. Російський вчений у галузі педагогічної та математичної психології Л. Фрідман виділяє структурні елементи задачі: умову і вимогу, числові дані і шукане [9, с. 45].

Крім того аналогічну точку зору на поняття задачі висловлено болгарським математиком методистом І. Ганчевим, який ввів поняття «область розв'язування задачі», «система розв'язків задачі» [9, с. 45].

Зокрема, на думку американського вченого Ф. Вольфа, якщо термін «задача» розуміти досить широко, (зокрема включити в число завдань і будь-яку обчислювальну вправу, і будь-яку теорему, яку треба довести, якщо вважати завданням встановлення тих чи інших ознак досліджуваного математичного поняття і відбір серед них тих, які характеризують це поняття

тощо), то стане зрозумілим вислів «...заняття математикою полягає у розв'язуванні задач...» [9, с. 45].

В українській методиці навчання математики, констає А. Воєвода, задача (за Г. Бевзом) розглядається як будь-яка вимога обчислити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, що стосується просторових форм чи кількісних відношень, або запитання, рівносильне такій вимозі [9, с. 45].

За А. Воєводою, розв'язати задачу – означає виконати те, що вимагається в задачі. В українській мові (на відміну від російської та деяких інших мов) існує істотна відмінність між поняттями «розв'язок», «розв'язання», «розв'язування».

Розв'язок – це кінцевий результат процесу розв'язування, відповідь або частина відповіді. (Але «розв'язок» не можна ототожнювати з «відповіддю». Ми записуємо одну відповідь, хоча задача має кілька розв'язків. Відповідь дають і тоді, коли задача не має розв'язків).

Розв'язання – це логічна конструкція, сукупність усіх міркувань, що приводять до потрібного висновку.

Розв'язування – процес міркувань, який може бути усним і письмовим, самостійним і колективним тощо [9, с. 45].

Дослідниця відмічає різноманітні класифікації задач: за їх призначенням – тренувальні і розвивальні, за наявністю алгоритму розв'язування – стандартні і нестандартні, за характером вимог – задачі на обчислення (поділяються на текстові і приклади), на побудову, на доведення і на дослідження [9, с. 45].

Радянський психолог В. Крутецький за характером умови наводить таку класифікацію задач:

1. *Задачі з несформованою умовою.* В умові задачі є всі дані, але запитання лише мається на увазі.

У завданнях цієї серії ні прямо, ні опосередковано не формулюється запитання, яке логічно випливає з даних в задачі математичних відносин

визначається, чи можна сформулювати запитання, чи сприймається логіка наданих в задачі відносин і залежностей, чи розуміє учень їх сутність.

Подібного типу завдання застосовувалися в психологічному дослідженні Л. Добраєвим, але зовсім з іншою метою: виявити характер асоціацій, що покладені в основі складання рівнянь. Для нас сенс серії ґрунтується в тому, що вона дозволяє з'ясувати, як сприймає задачу учень, чи бачить він в ній лише сукупність розрізнення непов'язаних даних (які ще потрібно спеціально пов'язати) або завдання для нього спочатку існує як комплекс взаємопов'язаних величин. У першому випадку слід очікувати, що учень, як правило, не буде усвідомлювати прихованого запитання, у всякому випадку не буде усвідомлювати його відразу; якщо ж учень швидко розуміє основні відносини задачі, то він буде бачити приховане запитання, яке завжди з'являється з цих відносин.

2. *Задачі з надмірною умовою.* В умові задано зайві дані, непотрібні для розв'язування, які «приховують» необхідні для виконання завдання дані.

3. *Задачі з неповною умовою.* В умові таких задач відсутні деякі дані, необхідні для розв'язування задачі, а отже дати конкретну відповідь на запитання завдання не завжди можливо.

4. *Задачі з суперечливою умовою* – містять в умові суперечність між даними [9, с. 45–46].

У власному дослідженні А. Воєвода акцентує увагу на класифікації американського педагога Д. Пойа, однак він не розглядає задачі з несформованою умовою. У своїх рекомендаціях «Як розв'язувати задачу» вчений першими пунктами поставив запитання: Чи можливо задовольнити умову? Чи достатня умова для визначення невідомого? Або недостатня? Або надмірна? Або суперечлива? [9, с. 46].

Український методист Г. Бевз задачі на обчислення і побудову залежно від кількості розв'язків, як окреслює А. Воєвода, поділяє на визначені і невизначені. Задачі, які мають тільки один розв'язок, він називає визначеними. Якщо ж задача має два або більше розв'язків – невизначеними.

Крім визначених і невизначених, учений за характером умови також розглядає задачі із зайвими даними, задачі з суперечливими даними (іноді їх називають перевизначеними), задачі з додатковими обмеженнями, задачі з послабленими вимогами [9, с. 46].

Привертає увагу дослідниці також точка зору З. Слєпканя, який невизначеними вважає тільки ті задачі, які мають безліч розв'язків, а задачі, які мають скінчену множину розв'язків називає визначеними.

Часто учні, студенти і вчителі математики вживають терміни «правильна задача», «неправильна задача». Тлумачення цих термінів знаходимо в працях Л. Фрідмана. На його думку, правильна задача має одночасно задовольняти таким вимогам [9, с. 46].

1. Усі вказані в задачі елементи предметної області (об'єкти) мають існувати. Задача «Змішали 10 л 60%-ої соляної кислоти з 4 л 95%-ої кислоти. Якої міцності утвориться суміш?» є неправильною, бо з хімії відомо, що міцність соляної кислоти не може бути вищою за 42%.

2. Усі вказані в задачі відношення мають бути дійсно визначені для тих елементів предметної області, для яких ці відношення задані в умовах задачі.

3. Область визначення кожної із заданих в задачі змінних має бути непорожньою.

4. Усі твердження, задані в умові задачі, мають бути істинними.

5. Всі висловлення, встановлення істинності яких складає вимогу задачі, повинні міститися у вигляді відповідних висловлювальних форм в умові задачі. Наведемо приклад задачі [17, с. 31], яка порушує цю вимогу: «Стоїть триповерховий будинок, а в цьому будинку на кожному поверсі вісім вікон. На даху два дахові віконця і два комини. На кожному поверсі живе по двоє квартирантів. А тепер, панове, скажіть мені, в якому році померла бабуня двірника?» (Я. Гашек. «Пригоди бравого вояка Швейка»).

У цілому, погоджуючись з міркуваннями А. Воеводи, зазначимо, що третя вимога звужує множину правильних задач, бо за нею всі задачі, в яких область допустимих значень кожної із заданих змінних є порожньою –

неправильні. Д. Пойа зауважує: «Правильно поставлена задача має містити всі необхідні дані, жодне з яких не повинно бути зайвим; її умова повинна бути достатньою, не містити суперечливих і надлишкових даних» [9, с. 46].

З цієї точки зору «правильно поставлену задачу» можна розглядати як «коректну задачу». В процесі аналізу і розв'язування задач більш доцільно використовувати терміни «коректна (коректно поставлена) задача», «некоректна (некоректно поставлена) задача». Поняття коректності задачі, яке відносилось лише до крайових задач математичної фізики, вперше ввів Ж. Адамар у 1923 році. Він вважав, що коректність постановки задачі забезпечується виконанням двох умов: існуванням розв'язку і його єдиністю [9, с. 46].

Теорія некоректних задач, зауважує А. Босак, є однією з незвичних за стилем математичної діяльності галуззю сучасних математичних досліджень, адже більшість практичних проблем вимагають прийняття рішень в умовах невизначеності або суперечностей в системі даних. Над вивченням теорії некоректних задач, констатує А. Босак, працювали такі дослідники, як Ж. Адамар, Т. Безусова, В. Іванов, М. Лаврентьєв, А. Тихонов, Н. Яремко та ін. [7, с. 84].

Уперше означення поняття «некоректно поставлена задача» з'явилося у 1943 році в роботах російського радянського математика А. Тихонова. В подальшому зв'язок понять коректної і некоректної задачі був уточнений. «Практично всі математичні задачі полягають у тому, що за вихідними даними ( $u$ ) шукається розв'язок ( $z$ ). При цьому вважається, що  $u$  і  $z$  пов'язані залежністю  $z=R(u)$ » [39].

Спираючись на думки А. Воєводи, окреслюємо, що задача називається коректною або коректно поставленою, якщо виконуються умови:

1. Задача має розв'язок при будь-яких допустимих вихідних значеннях змінної ( $u$ ) (існування розв'язку).
2. Кожним вихідним даним ( $u$ ) відповідає тільки один розв'язок ( $z$ ) (єдиність розв'язку).

3. Розв'язок стійкий. Задача називається некоректною або некоректно поставленою, якщо не виконується хоча б одна з цих умов [9, с. 46].

Зміст *першої вимоги* полягає в тому, відмічає А. Воевода, що серед вихідних даних не повинно бути суперечливих, тобто таких, які б виключали можливість розв'язування задачі. *Друга вимога* означає, що вихідних даних достатньо для однозначного розв'язання задачі. Вимога однозначності розв'язку задачі виключає існування надлишкових даних, зокрема й несуперечливих. *Третя вимога* полягає в наступному. Якщо  $u_1$  і  $u_2$  – два різних набори вихідних даних, міра відхилення яких один від одного достатньо мала, то міра відхилення розв'язків  $z_1$  і  $z_2$  менша будь-якої наперед заданої точності. При порушенні третьої вимоги як завгодно малі зміни вихідних даних можуть викликати великі відхилення у розв'язку. Відповідно до даного означення, некоректними задачами можна вважати ті, які не мають розв'язку, або мають більше одного розв'язку (невизначені задачі) або процедура знаходження розв'язку нестійка [9, с. 46].

Дослідження задачі на коректність за Адамаром-Тихоновим передбачає проведення глибокого аналізу всіх складових компонентів задачі. Розкриття змісту поняття «коректна задача», як констатує А. Воевода, в теорії некоректних задач і в методиці навчання учнів математики мають певні відмінності, оскільки в шкільному курсі математики рівень строгості означень окремих понять з точки зору вищої математики дещо нижчий. Наприклад, означення паралельних прямих в 7 класі шкільного курсу геометрії подається таким чином: дві прямі називаються паралельними, якщо вони не перетинаються. Строге і повне означення паралельних прямих з'являється лише в 10 класі, коли вводиться неозначуване поняття площини [9, с. 46].

Деякі науковці-методисти, узагальнює А. Воевода, розрізняють терміни «коректна задача» і «коректно поставлена задача». Задача вважається коректною, якщо вона має розв'язки (один або кілька), а задача поставлена коректно, якщо не містить суперечностей. Відповідно, некоректна задача – це

задача, яка містить протиріччя, або має недостачу даних. При цьому коректність постановки задачі означає її однозначну (скінченнозначну) розв'язність або повноту і несуперечливість умов [9, с. 47].

Існує також погляд на коректність задачі в шкільному курсі математики з точки зору однозначної визначеності множини розв'язків задачі. В цьому сенсі, якщо множина розв'язків порожня, то задача розв'язків немає, але вона коректна, оскільки розв'язок існує і множина розв'язків однозначно визначена. Задачу, яка має більше одного розв'язку також можна вважати коректною, бо множина її розв'язків визначена однозначно. При такому підході до некоректних можна віднести задачі з несформульованою вимогою або невизначеними компонентами задачі.

За класифікацією Ю. Колягіна це задачі типу (XYZT) з невідомими чотирма компонентами [15, с. 59-64]. В цьому контексті задачі за класифікацією В. Крутецького (з несформованою, неповною, надмірною, суперечливою умовою), можна віднести до некоректних задач. Близько по змісту до коректності задач є розгляд Г. Бевзом, М. Буловацьким, Д. Пойа задач з неповними, суперечливими і надлишковими даними. Щоб уникнути в подальшому розбіжностей, приймемо означення коректних і некоректних задач за Адамаром-Тихоновим за основне з деякими зауваженнями.

1. Коректність задачі поняття відносне, пов'язане з усіма компонентами задачі. Тому першу умову коректності задачі в шкільному курсі математики (існування її розв'язку) будемо розуміти так: якщо множина розв'язків порожня – задача розв'язків немає, але вона коректна, оскільки розв'язок існує і визначений однозначно. Так, задачу «Розв'язати рівняння»  $x^2 + x = -1$  будемо вважати коректною. (Дискримінант рівняння від'ємний, то на множині дійсних чисел це квадратне рівняння немає коренів, але розв'язок існує і визначений однозначно). В нашому розумінні, розв'язок задачі не існує, якщо суперечність закладена в самій умові або умова невизначена, недостатня, або в задачі описується ситуація, що не відповідає дійсності (Г. Бевз називає їх нереальними). Такою, наприклад, є задача з новели

українського письменника Степана Васильченка «Мужицька арифметика» (1911): «Селянин мав перевезти із міста в село 50 ламп з тією умовою, що за кожну привезену лампу йому заплатять по 5 коп., а за кожну розбиту з нього вирахують 1 крб. 20 коп. При перевезенні три лампи розбилось. Скільки заробив селянин за перевезення ламп?» Розв'язавши задачу, бачимо, що селянин не заробив, а втратив би 1 крб. 10 к.

2. Визнання задачі некоректною не означає неможливість її розв'язання в подальшому. Некоректна задача часто дає поштовх до розвитку мислення, приводить до певних відкриттів.

Основні типи некоректних задач (за кількістю можливих розв'язків, повнотою даних та їх сумісністю).

*Задачі, які мають більше одного розв'язку (багатоваріантні).* З вершини ромба проведені дві висоти, відстань між основами яких вдвоє менше діагоналі ромба. Знайти величини кутів ромба. В умові задачі не вказано, з вершини якого кута (тупого чи гострого) проведено висоти, з якою діагоналлю ромба (більшою чи меншою) порівнюється відстань між основами висот. Розв'язування таких задач вимагає від учня розгляду кількох різних випадків (за А. Тихоновим – перехід до повної системи коректних задач). Насправді, мова йде не про недолік задачі, а про включення в розв'язування елементів дослідження, що сприяє розвитку гнучкості мислення. До таких задач можна віднести й геометричні задачі на побудову.

Серед зазначених А. Воєвода акцентує увагу на наступних:

*Задачі з недостатчею даних.* В трикутнику довжина однієї сторони дорівнює 10 см, а другої 8 см. Знайти довжину третьої сторони. На перший погляд може здатись, що задача розв'язку немає, бо в умові відсутні необхідні дані. Однак її розв'язання потребує більш глибокого аналізу даних, а також пошукової активності учнів. Позначивши невідому третю сторону  $a$ , використаємо нерівність трикутника. Матимемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a < 10 + 8 \\ 10 < a + 8 \end{cases}. \text{Отже, відповідь: } 2 < a < 18.$$

*Задачі із зайвими даними.* Під «зайвими даними» будемо розуміти дані в задачі, які впливають з інших, наявних в умові. В прямокутному трикутнику катети дорівнюють 9 см і 40 см, а гіпотенуза дорівнює 41 см. Знайти його площу. За формулою площі прямокутного трикутника маємо:  $S = \frac{1}{2} * 9 * 40 = 180 \text{ см}^2$ . Отже, гіпотенуза зайва. Однак, без з'ясування питання: «Чи буде в прямокутному трикутнику з катетами 9 см і 40 см гіпотенуза дорівнювати 41 см?» розв'язання задачі не можна вважати повним.

*Задачі, які містять протиріччя (суперечливі).* Бічна поверхня трикутної піраміди дорівнює  $S$ , а кожне з бічних ребер дорівнює 1. Знайти плоскі кути при вершині, знаючи, що вони утворюють арифметичну прогресію, різниця якої дорівнює  $3\pi$ . Задача некоректна, оскільки така піраміда не існує. Отже, сума плоских кутів при вершині піраміди більша за  $2\pi$ , що неможливо [9, с. 47–48]. Метою розв'язування таких задач є доведення відсутності їх розв'язку. Застосування подібних задач сприяє розвитку критичності мислення.

*Задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами.* Дослідіть з допомогою графіка залежність кількості коренів рівняння  $x^2 + x + a = 0$  від  $a$ , де  $a$  – будь-яке число. Розв'язування задачі вимагає дослідницької діяльності, встановлення характеру залежності результатів від значень параметрів [9, с. 48].

Аналіз наявності чи відсутності некоректних задач у текстах підручників з алгебри та геометрії для 10-11 класів закладів загальної середньої освіти буде подано в наступному підрозділі.

## **2.2. Аналіз підручників з теми дослідження**

Нами було проаналізовано підручники з алгебри та геометрії для 10-11 класів:

1. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2010. – 415 с.;

2. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 352 с.;

3. Мерзляк А. Г. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018. – 240 с.;

4. Мерзляк А. Г. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 204 с.;

Нами було складено перелік некоректних задач, які ми подаємо в таблиці 2.1.

*Таблиця 2.1.*

### Некоректні задачі. Алгебра, 10 клас

| Приклад  | Тип некоректних задач                 |
|--|---------------------------------------|
| Вершини В,С рівнобедреного трикутника $\Delta ABC$ , $AB = AC$ лежать на параболі $y = x^2$ . Точка А має координати $(0;2)$ . Кут А в трикутнику дорівнює $120^\circ$ , сторона ВС паралельна вісі ОХ. Знайти, площу $\Delta ABC$ . | <i>Задачі багатоваріантні</i>         |
| В трикутнику $\Delta ABC$ , бісектриса $AA_1$ продовжується за основу на відрізок $A_1E$ і т.Е з'єднується з т.С. Знайти кут $\angle ACE$ , якщо кут $\angle ACB=47^\circ$ , кут $\angle BAC=62^\circ$ .                             | <i>Задачі з недостатчею даних</i>     |
| Через вершину А прямокутника ABCD проведена пряма АК, перпендикулярна до його площини. Відстань від К до вершин прямокутника В,С і D дорівнюють 3м, 9м, і 7м відповідно. Знайти сторону АК.  | <i>Задачі, які містять протиріччя</i> |

|   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| Дві сторони трикутника дорівнюють 48см і 28см. Знайти периметр трикутника.                              | <i>Задачі з недостатчею даних</i>     |
| Побудувати графік функції<br>$y = 3^{\frac{1}{\log_x 3} - 2}$ , при $x \leq 0$ .                        | <i>Задачі, які містять протиріччя</i> |
| Корні рівняння $x^2 + px + q = 0$ – цілі числа, відмінні від 0. Довести, що $p^2 + (q - 1)^2$ – просте. | <i>Задачі, які містять протиріччя</i> |
| Довести, що квадрат зі стороною 8 не можна повністю покрити двома колами з діаметром 9.                 | <i>Задачі, які містять протиріччя</i> |

Нами було проаналізовано завдання зовнішнього незалежного оцінювання за останні роки на предмет наявності некоректних задач різних видів, які ми подаємо у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2.

### Некоректні задачі. ЗНО, 11 клас

| Приклад  | Тип   | Рік проведення |
|--|---|----------------|
| $\frac{1}{2}(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 6 - 5a - 2a^2$<br>Знайдіть найменше значення $a$ , при якому має розв'язки рівняння.  | <i>Задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами</i> | 2011           |
| Розв'яжіть в залежності від параметра $a$<br>$\sqrt{2x + 15}(\sqrt{x^2 + 18x + 81} - \sqrt{x^2 - 10x + 25}) = a\sqrt{2x + 15}$   | <i>Задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами</i> | 2012           |
| Знайдіть значення параметра $a$ , при якому корінь рівняння $\lg(\sin 5\pi x) = \sqrt{16 + a - x}$ належить проміжку $[\frac{3}{2}; 2]$  | <i>Задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами</i> | 2013           |
| Знайдіть усі від'ємні значення параметра $a$ , при яких система рівнянь<br>$\begin{cases} 2\sqrt{y^2 - 4y + 4} + 3 x  = 11 - y \\ 25x^2 - 20ax = y^2 - 4a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок. | <i>Задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами</i> | 2014           |

|   |  |      |
|---|--|------|
| Розв'яжіть рівняння<br>$\frac{\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2-2\sqrt{2a}}}{5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x} = 0$ залежно від значень параметра $a$ .  | Задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами | 2016 |
| Розв'яжіть систему рівнянь<br>$\begin{cases}  x - y  =  x - a  \\ \lg(y - a) - \lg(4a^2 + x - x^2) \end{cases}$ залежно від значень параметра $a$ .   | Задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами | 2017 |
| Розв'яжіть нерівність<br>$\frac{\log_a x}{x^2+(a-4)x+4-2a} \leq 0$ залежно від значень параметра $a$ .  | Задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами | 2018 |
| Задано систему нерівностей<br>$\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2(\pi a)+\cos(2\pi a)+x} > a \end{cases}$ визначте всі розв'язки системи залежно від $a$ . | Задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами | 2019 |
| Задано рівняння<br>$(5^{2x+1} - 25^x - 20)(\sqrt{ax} - 6 - \sqrt{a - 2x}) = 0$ визначте всі розв'язки рівняння залежно від $a$ .  | Задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами | 2020 |

Було з'ясовано, що такий вид некоректних задач, як задачі з алгебраїчними та геометричними параметрами, представлено, при цьому рівень їхньої складності вищий, ніж у задач з коректною умовою.

Проаналізувавши завдання з ЗНО тестового рівня було з'ясовано, що некоректні завдання відсутні зовсім.

В шкільних підручниках і посібниках некоректні задачі зустрічаються рідко. Проведений нами аналіз діючих підручників з алгебри 10-11 класів показав, що частка таких задач у загальній масі задачного матеріалу не перевищує 3-4 %, а з геометрії цей показник – 5-6 %.

На основі аналізу навчально-методичної літератури нами виокремлено основні типи некоректних задач які найбільш поширені – *задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами* (за кількістю можливих розв'язків, повнотою даних та їх сумісністю).

### 2.3. Використання некоректних задач для розвитку критичного мислення учнів старшої школи

Визнання задачі некоректною, відмічає А. Босак, не означає неможливість її розв'язання в подальшому. Некоректна задача часто дає поштовх до розвитку мислення, приводить до певних відкриттів. У шкільних підручниках і посібниках некоректні задачі зустрічаються рідко. Починати роботу з подібними задачами слід з введення задач з зайвими даними, попереджаючи учнів про наявність цих даних і пропонуючи їм знайти такі дані. Поступово, зазначає дослідниця, можна переходити від простих задач до задач з неявно помітними зайвими даними. Коли учні отримують деякі навички роботи з такими задачами, можна перестати попереджати їх про наявність зайвих даних, чергуючи некоректні задачі з традиційними [7, с. 85].

Наведемо приклад задачі.

Задача 1. В прямокутнику сторони дорівнюють 8,4 см і 3,9 см, а периметр 24,6 см. Знайти площу прямокутника. Зайвими даними можна вважати одну з сторін прямокутника або його периметр. Оскільки учням для обчислення площі прямокутника потрібні довжини суміжних сторін, а вони дані в умові  $S = a * b = 8,4 * 3,9 = 32,76 \text{ см}^2$ , то можна виділити периметр як зайві дані. Перевіримо чи значення задовольняє умову задачі, бо в іншому випадку задача не мала б розв'язку:  $P = (8,4 + 3,9) * 2 = 24,6 \text{ см}$ .

Отже, задача некоректно поставлена.

На певному етапі запропоновані учням задачі з зайвою умовою стають суперечливими. Використання таких задач поступово повинно привчити школярів до того, що виявлене в умові зайве не слід ігнорувати, а необхідно перевіряти умову на суперечливість.

Задача 2. В паралелограмі сторони 3 см і 5 см, а висота 4 см. Знайти площу паралелограма. Провівши висоту до кожної зі сторін паралелограма отримаємо дві різних відповіді:  $S_1 = a * h_a = 3 * 4 = 12 \text{ см}^2$ ,  $S_2 = b * h_b = 5 * 4 = 20 \text{ см}^2$ . Тобто розглядаємо два випадки розв'язку задачі. Між іншим,

висота довжиною 4 см може бути опущена лише на сторону паралелограма довжиною 3 см, тому що в іншому випадку перпендикуляр до прямої виявляється довшим за похилу, проведеної до цієї ж прямої з тієї ж точки. Інакше кажучи, при розгляді другого випадку умова задачі стає суперечливою. Відповідь одна:  $12 \text{ см}^2$ .

Після подібних задач можна перейти до розв'язування задач з недостатніми даними. Першими задачами з відсутніми даними можуть стати задачі, умова яких вимагає розгляду декількох випадків. Всебічне вивчення умови сприятиме формуванню якостей критичного мислення. Коли учні будуть потенційно готові до багатоваріантності умови і захочуть шукати всі можливі альтернативи, їм слід запропонувати задачі, що не мають однозначного розв'язання без істотних додаткових умов [36].

Задача 3. Дано паралелограм ABCD. Бісектриси його кутів A і D ділять сторону BC на три рівні частини. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.

#### Розв'язання

Позначимо точку перетину бісектрис через M, а точки перетину бісектрис AM і DM зі стороною BC через N і K відповідно. Залежно від розташування точки M відносно прямої CD можливі два варіанти для креслення.

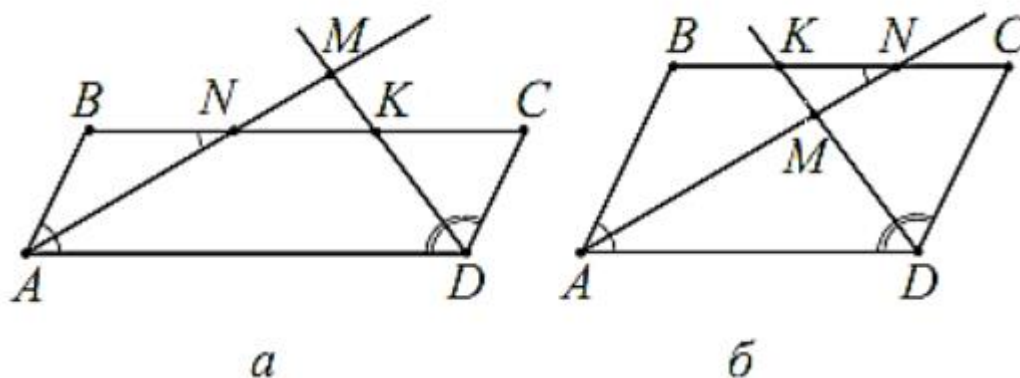


Рис.2.1. Рисунок до задачі 3

Нехай точка  $M$  розташована поза паралелограмом. Так як бісектриса  $AM$  відсікає від паралелограма рівнобедрений трикутник  $ABN$  (рис. 2.1).

а) то  $AB=BN=NK=KC=x$ .

Периметр паралелограма дорівнює 40см, тому з рівняння:

$$2(x+3x)=40, \text{ знаходимо } x=5.$$

Отже,  $AB=5$ ,  $BC=15$ (см).

б) З рівняння  $2(2x+3x)=40$ , знаходимо  $x=4$ ,

Отже  $AB=8$  і  $BC=8+4=12$  см.

Відповідь: 5см, 15 см або 8 см, 12 см.

Розв'язування некоректних задач дає нам уявлення про такі поняття, як існування, єдність та стійкість розв'язку, а також сприяє розвитку критичного мислення, формуванню готовності до дослідницької діяльності, розвитку творчих здібностей, пізнавальної активності, а також дає уявлення про практичне застосування математичних знань у житті.

У межах нашого дослідженнями виділили наступні особливості шкільного курсу математики, які сприяють розвитку критичного мислення старшокласників:

1. Навчання математики забезпечує формування в учнів цілісних уявлень про природу і про навколишній світ. Побудова навчального процесу з математики (алгебри та геометрії) відповідає циклу наукового пізнання.

2. У математиці є аналітичний підхід: критичний погляд на проблемні ситуації, що виникають при розгляді математичних явищ і процесів; аналіз одержаних відповідей вирішених завдань на істинність і відповідність дійсності; обов'язкова оцінка результатів практичних робіт.

3. При навчанні математики використовуються різні засоби, із використанням яких можна ефективно розвивати критичне мислення учнів (задачі-помилки, задачі із зайвими або недостатніми даними тощо).

4. Математика нерозривно пов'язана з реальним життям. Тому розвивати критичне мислення можна на ситуаціях, які виникають і вирішуються учнями в повсякденному житті.

## ВИСНОВКИ

Під час ґрунтованого аналізу й узагальнення науково-теоретичних досліджень про особливості розвитку критичного мислення учнів старшої школи взагалі та на уроках математики, зокрема, в психолого-педагогічній літературі було з'ясовано, що критичне мислення – складне й багаторівневе явище. Мислити критично означає вільно використовувати розумові стратегії та операції високого рівня для формулювання обґрунтованих висновків і оцінок, прийняття рішень. Результат – раціональне використання часу, ефективна робота з джерелами інформації, вміння організувати цю інформацію так, щоб зберегти її ціннісну сутність. Характерною особливістю цього типу мислення є те, що процес міркування нестандартний, відсутній готовий взірець розв'язку. Проблемність забезпечує внутрішню мотивацію навчальної діяльності учнів; спонукає вчителя ознайомити школярів із правилами критичного мислення; потребує використання проблемних методів навчання та інтерактивних занять, а також орієнтує на письмове викладення розв'язків задач та організацію осмислення цих розв'язків. А це означає, що наслідком навчання через критичне мислення виступають особистісні зміни учнів та студентів, тобто їхній розвиток: вони перебудовують свій досвід, здобувають нові знання та способи розв'язування проблемних задач.

У межах проведеного дослідження нами було узагальнено визначення поняття. У межах дослідження ми оперуємо поняттям відповідно до якого *критичне мислення* – це мислення вищого порядку; воно спирається на отриману інформацію, усвідомлене сприйняття власної розумової діяльності в оточуючому інтелектуальному середовищі. Однак рівень критичності визначається не тільки запасом знань, а й особистісними якостями, установками, переконаннями. Критичність особистості повинна бути напружена перш за все на самого себе: на аналіз і оцінку своїх можливостей, особистісних якостей, вчинків, поведінки в цілому.

Отже, компонентами критичного мислення можна вважати:

- уміння урівноважувати у своїй свідомості різні точки зору;
- уміння піддавати ідею м'якому скепсису;
- об'єднання активного й інтерактивного процесу;
- перевірка окремих ідей на можливість їх використання;
- моделювання систем доказів, на основі яких базуються різні точки зору в разі;
- переоцінка та переосмислення понять та інформації;
- здатність знайти необхідну інформацію та використовувати її самостійно під час прийняття рішення.

Таким чином, критичне мислення – це складний ментальний процес, який починається із залучення інформації і закінчується прийняттям рішення.

Для кращого розвитку критичного мислення існують спеціальні тренінги, де кожен може спробувати змоделювати заняття з розвитку критичного мислення з використанням конкретних методів, прийомів.

Серед найбільш ефективних прийомів, які сприяють розвитку критичного мислення, на думку авторів, є асоціації, мозковий штурм, кластери. Було з'ясовано, що ефективними засобами розвитку критичного мислення школярів є задачі-пастки, що сприяють уважному, критичному сприйманню завдання й можливої відповіді.

Вчителі, в переважній більшості, намагаються уникати використання некоректних задач на уроках математики, не дивлячись на те, що розв'язування деяких з них могло б сприяти розвитку критичного мислення, формуванню готовності до дослідницької діяльності, розвитку творчих здібностей, пізнавальної активності, формуванню готовності до практичного використання математики в житті.

Некоректною вважатимемо задачу, яка містить протиріччя, або має недостачу даних. При цьому коректність постановки задачі означає її

однозначну (скінченнозначну) розв'язність або повноту і несуперечливість умов.

В шкільному курсі математики з метою розвитку критичного мислення можна використовувати такі види некоректних задач: задачі, які мають більше одного розв'язку (багатоваріантні); задачі з недостатчею даних; задачі із зайвими даними; задачі, які містять протиріччя (суперечливі); задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами.

Проаналізувавши актуальний стан програмово-методичного забезпечення (програм, підручників) з теми дослідження, було з'ясовано, що в шкільних підручниках і посібниках некоректні задачі зустрічаються рідко. Проведений нами аналіз діючих підручників з алгебри 10-11 класів показав, що частка таких задач у загальній масі задачного матеріалу не перевищує 3-4 %, а з геометрії цей показник – 5-6 %. За результатами проведеного аналізу нами виокремлено основні типи некоректних задач, які найбільш поширені, – задачі з алгебраїчними або геометричними параметрами (за кількістю можливих розв'язків, повнотою даних та їх сумісністю).

Ми вважаємо, що включення некоректних задач у зміст уроку суттєво змінює методику роботи з коректними задачами, оскільки вимагає доповнення структурного аналізу її умови й критичним аналізом: на повноту використання усіх даних в ході розв'язування задачі, перевірку отриманого результату на відповідність вихідним даним, тощо.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барболіна О. С. Розвиток критичного мислення учнів шляхом розв'язання математичних задач. Таврійський вісник освіти. 2016. № 4 (56). С. 190-196. Режим доступу: [http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis\\_nbuv/cgiirbis\\_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE\\_FILE\\_DOWNLOAD=1&Image\\_file\\_name=PDF/Tvo\\_2016\\_4\\_38.pdf](http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/Tvo_2016_4_38.pdf)
2. Бикова Ю. О. Прийоми розвитку критичного мислення на уроках математики. *Методичний пошук. Розвиток критичного мислення учнів на уроках математики*. 2018. Вип. 8. С. 11–15.
3. Бондарук І. П. Формування критичного мислення учнів у процесі навчання історії: навчально-методичний посібник. Біла Церква: КОІПОПК, 2013. 107 с.
4. Боряк О. В. Засоби розвитку критичного мислення учнів. Всеукраїнська науково-методична інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ\*плюс – 2020. Форум молодих дослідників». м. Суми, 12.11.2020 р. С. 10–15.
5. Боряк О. В. Феномен критичного мислення у педагогічних дослідженнях. *Студентська звітна конференція*. 2020. Вип.14. С. 7–11.
6. Браус Дж., Вуд Д. Инвайронментальное образование в школах: Пер. с англ. Вашингтон: НААЕЕ, 1994. 130 с.
7. Босак А. Є. Роль та місце некоректних задач у процесі розвитку критичного мислення учнів. *Методичний пошук. Розвиток критичного мислення учнів на уроках математики*. 2018. Вип. 8. С. 84–89.
8. Буковська О. Розвиток креативного мислення учнів на уроках математики. *Математика в рідній школі*. 2018. № 9. С. 9–17.

9. Воєвода А.Л. Місце та роль некоректних задач в шкільному курсі математики. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, 2014, II(18), Issue: 37, С.45–48.
10. Гін А. О. Прийоми педагогічної техніки. Харків: Веста: Видавництво «Ранок», 2007. 176 с.
11. Дацюк В. А. Формування критичного мислення школярів на уроках геометрії як засіб підвищення математичних знань. *Методичний пошук. Розвиток критичного мислення учнів на уроках математики*. 2018. Вип. 8. С. 25–29.
12. Євтушенко Т. М. Чому креативне мислення це необхідна навичка? Режим доступу: <https://high.itstep.org/2018/04/23/chomu-kry-ty-chne-my-slennya-tse-neobhidna-navy-chka-ta-yaki-buvayut-metody-ky-yiyi-rozvy-tku/>
13. Євтушенко Н. Розвиток логічного мислення учнів під час навчання математики. *Математика в рідній школі*. 2016. № 12. С. 10–14.
14. Зверова Т. І. Задачі на дослідження з тригонометрії як засіб розвитку критичного мислення учнів. *Методичний пошук. Розвиток критичного мислення учнів на уроках математики*. 2018. Вип. 8. С. 179–184.
15. Козира В. М. Технологія розвитку критичного мислення у навчальному процесі: навчально-методичний посібник для вчителів. Тернопіль: ТОКІППО, 2017. 60 с.
16. Критичне мислення: характеристика, вправи на розвиток критичного мислення. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://etwinning.com.ua/content/files/659841.pdf>
17. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968. 432 с.
18. Курнос Л. Б. Розвиток критичного мислення учнів на уроках англійської мови. Режим доступу: [http:// nbuv.gov.ua > j-pdf > Tvo\\_20...](http://nbuv.gov.ua/j-pdf/Tvo_20...)
19. Макаренко В. М. Як опанувати технологію формування критичного мислення. Х: Основа, 2008. 56 с.

20. Маркова І. С., Біловол Г. О. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика. Розвиток критичного мислення. Х: Основа, 2007.
21. Матяш О. І. Геометрична компетентність як складова математичної компетентності учнів. *Математика в рідній школі*. 2016. № 3. С. 28–32.
22. Матяш О. І. Путівник по сторінках фахових журналів вчителя математики. Вінниця, 2008. 114 с.
23. Методы и приемы технологии критического мышления на уроках математики [Електронний ресурс]. Режим доступу до ресурсу: <https://infourok.ru/metodi-i-priemi-tehnologii-kriticheskogo-mishleniya-na-urokahmatematiki-879484.html>.
24. Методичні прийоми на етапі рефлексії [Електронний ресурс]. Режим доступу: [http://domanska.ucoz.ua/publ/metodichni\\_prijomi\\_na\\_etapi\\_refleksiji/1-1-0-5](http://domanska.ucoz.ua/publ/metodichni_prijomi_na_etapi_refleksiji/1-1-0-5).
25. Модягіна Н. Несподівані аспекти мотивації навчання математики. *Математика в рідній школі*. 2016. № 2. С. 31–35.
26. Павлова О. Д. Технологии развития критического мышления. Режим доступу: [http://schoolplusnet.com/up\\_portfolio/2016-2-2-09-57-06\\_file\\_826.doc](http://schoolplusnet.com/up_portfolio/2016-2-2-09-57-06_file_826.doc).
27. Палієва С. Формування критичного мислення на уроках математики. *Математика в рідній школі*. 2017. № 10. С. 15–19
28. Пометун О. І., Пироженко Л. В. Сучасний урок: інтерактивні технології навчання : Наук.-метод. посібн. К. : А.С.К., 2004. 194 с.
29. Пометун О. І. Як розвивати критичне мислення в учнів (з прикладом уроку) [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://nus.org.ua/articles/krytychne-myslennya-2/>.
30. Сидоркін Є. Формування інформаційної компетентності учнів засобами комп'ютерних технологій. *Рідна школа*. 2014. №4-5. С. 53–56.

31. Силенюк Г. Интеллект, його природа та структура. *Математика в рідній школі*. 2015. № 3. С. 38–43.
32. Січкарь Ю. Ф., Бабюк Д. О. Розвиток просторового і критичного мислення учнів у процесі вивчення піраміди за допомогою сервісу LEARNINGAPPS.ORG. *Методичний пошук. Розвиток критичного мислення учнів на уроках математики*. 2018. Вип. 8. С. 282–286.
33. Скворцова С. Вдала мотивація – запорука успіху. *Математика в рідній школі*. 2015. № 5. С. 18–20.
34. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике : метод. Пособие. К.: Рад. школа, 1983. 192 с.
35. Терно С. О. Розвиток критичного мислення старшокласників у процесі навчання історії. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2011. 275 с.
36. Технологии и формы развития критического мышления на уроках математики [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2016/03/31/tehnologii-i-formy-razvitiyakriticheskogo-myshleniya-na-urokah>.
37. Технології розвитку критичного мислення учнів. К.: Вид-во «Плеяди», 2006. 220 с.
38. Тягло А. В., Воропай Т. С. Критическое мышление: проблема мирового образования XXI века. *Постметодика*. 2001. № 3 (35). С. 19–20.
39. Тягло О. В. Критичне мислення: Навчальний посібник. Х.: Основа, 2008. 189 с.
40. Усне опитування – нові старі прийоми [Електронний ресурс]. Режим доступу: [http://osvita.ua/school/lessons\\_summary/proftech/42893/](http://osvita.ua/school/lessons_summary/proftech/42893/)
41. Формування історичного світогляду учнів шляхом розвитку критичного мислення [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://gayvoroninnovacii.blogspot.com/2015/01/2.html>
42. Халперн Д. Психология критического мышления: 4-е международное изд. СПб.: Питер, 2000. 512 с.

43. Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003. 216 с.

44. Чаплак Я. Роль критичного мислення у творчих пошуках «внутрішнього камертону душі» особистості. 2011. № 4. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://web.snauka.ru/issues/2011/08/1516>

45. Чашечникова О. С. Дослідження рівнів розвитку математичних здібностей близнюків. *Актуальні проблеми розвитку творчої особистості в процесі вивчення математики та інформатики*. Суми, 1997. С. 40–42

46. European pedagogical studies/ Асоц. ректорів пед. ун-тів Європи. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2015, Вип. 5–6.