ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
(PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION)
p-ISSN: 2413-1571, e-ISSN: 2413-158X 2025, 40(1), https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i1-02
УДК: 517.5

ФАКТОРІАЛЬНІ МНОГОЧЛЕНИ І СТЕПЕНІ

Олександр ВИШНЕВЕЦЬКИЙ ✉
Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Україна
alexwish50@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-1757-0416

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Основною задачею сучасної вищої школи є розвиток природних здібностей та обдарувань здобувачів, формування компетентностей, розвиток критичного мислення та створення умов для забезпечення гармонійного розвитку здобувачів. Отже, постає проблема формування в здобувачів цілісної системи теоретичних відомостей і практичних навичок з різних дисциплін, що дозволить використовувати отримані знання для вирішення проблем сьогодення. Проте кількість навчального часу, відведеного на вивчення розділів вищої математики, невпинно зменшується. Тому актуалізується проблема викладання стандартного набору теорем (і, взагалі, розділів математики) за невелику кількість навчальних годин. При цьому бажано не переходити до простого переліку формулювань теорем, а зберегти викладання їх доведень, які, однак, повинні бути короткими. Метою статті є стисле викладення однієї з тем курсу вищої математики, а саме викладення теми «Інтерполяційний многочлен Ньютона».*

Матеріали і методи. *У дослідженні використовувався аналіз наукової літератури, зокрема теорем традиційного курсу вищої математики ЗВО (розділ «Математичний аналіз»), а також представлення факторіальних многочленів та факторіальних степенів.*

Результати. *У роботі подано виведення інтерполяційної формули Ньютона для многочленів і (одночасно) властивостей факторіальних многочленів, яке є набагато коротшим, ніж у відомих посібниках. Запропонований підхід використовує властивості многочленів та степенів. Також подано одне з узагальнень поняття факторіалу числа, яке додатково узагальнює поняття біноміального коефіцієнту.*

Висновки. *За використання описаного підходу викладання теми суттєво зменшується, що може бути корисним для вивчення вказаних тем у ЗВО в умовах обмежень навчального часу.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: факторіальні многочлени; формула Ньютона; оператор різниці; оператор зсуву; факторіальні степені.

ДЛЯ ЦИТУВАННЯ: Вишневецький О. Факторіальні многочлени і степені. *Фізико-математична освіта*, 2025. Том 40. № 1. С. 13-17. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i1-02.

FACTORIAL POLYNOMIALS AND POWERS

Oleksandr VYSHNEVETSKIY ✉
Kharkiv National Automobile and Highway University, Ukraine
alexwish50@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-1757-0416

ABSTRACT

Problem formulation. *The main task of modern higher education is to develop students' natural abilities and talents, form competencies, develop critical thinking, and create conditions for ensuring the harmonious development of students. Thus, the problem of forming a holistic system of theoretical knowledge and practical skills in various disciplines, which will allow students to use the acquired knowledge to solve current issues, arises. However, the amount of teaching time allocated to studying sections of higher mathematics is constantly decreasing. Therefore, the issue of teaching a standard set of theorems (and, in general, sections of mathematics) in a small number of teaching hours is becoming more relevant. In this case, it is advisable not to proceed to a simple list of theorem formulations but to preserve the teaching of their proofs, which should be short. The purpose of the article is a concise presentation of one of the topics of the higher mathematics course, namely, the presentation of the topic "Newton's Interpolation Polynomial."*

Materials and Methods. *The study used an analysis of scientific literature, particularly theorems of higher education institutions' traditional higher mathematics courses (section "Mathematical Analysis"), and the presentation of factorial polynomials and factorial powers.*

Results. *The paper presents a derivation of Newton's interpolation formula for polynomials and (simultaneously) the properties of factorial polynomials, which is much shorter than in known textbooks. The proposed approach uses the properties of polynomials and powers. One of the generalizations of the factorial of a number is also presented, generalizing the concept of the binomial coefficient.*

Conclusions. *Using the described approach, the teaching of the topic is significantly reduced, which can help study the specified topics in higher education institutions under conditions of limited study time.*

KEYWORDS: factorial polynomials; Newton formula; difference operator; shift operator; factorial powers.

FOR CITATION: Vyshnevetskiy, O. (2025). Factorial polynomials and powers. *Physical and Mathematical Education, 40*(1), 13-17. https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i1-02.

ВСТУП

Постановка проблеми. У навчальних планах здобувачів та аспірантів кількість навчального часу, відведеного на вивчення розділів вищої математики (як і багатьох інших дисциплін) за останні роки поступово зменшується. Тому постає питання викладення стандартного набору теорем (і, взагалі, розділів математики) за невелику кількість навчальних годин. При цьому бажано не переходити до простого переліку теорем, а зберегти викладення їх доведень, які, одначе, повинні бути короткими.

У даній роботі ми показуємо, як це зробити для викладання теми «Інтерполяційний многочлен Ньютона». Окрім цієї головної мети у статті наведене одне з узагальнень поняття факторіалу числа, яке також узагальнює поняття біноміального коефіцієнту.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Інтерполяційна формула Ньютона викладена і використана у значній кількості посібників з вищої математики, наприклад Abdon Atangana, Seda İğret Araz (2021), Hoffman J.D. (2001), Stoer J. and Bulirsch R. (1980), Naveen S., Parthiban V. (2024), Almutairi N. & Saber S. (2024), Atangana A. & Araz S. İ. (2020), Березин І. та

Жидков Н. (1962). Але її вивід зазвичай громіздкий, займає багато лекційного часу. Хоча у сучасних посібниках викладання коротше порівняно з докладними монографіями минулого, наприклад, Березин І., Жидков Н. (1962) або Гельфонд А.О. (1967), вищезгадане скорочення навчального часу триває. Тому питання лаконічного викладання є (і буде) актуальним. При цьому скорочене викладання повинно бути точним. Одним з перших прикладів такого викладання на українській мові є посібник Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. (2002), у якому весь курс вищої математики ВНЗ, включно з теорією ймовірностей, прикладами та задачами займає 624 сторінки. Окремі розділи вищої математики коротко викладені в роботі (Vyshnevetskiy, 2020).

Мета статті. Це стисле, але з повним доведенням, виведення інтерполяційної формули Ньютона. Для скорочення часу і обсягу виведення ми обмежуємося випадком, коли функція, що розкладається, є многочленом. Це дозволяє уникнути питань, пов'язаних з розглядом залишкового члена формули.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У дослідженні використовувався аналіз наукової літератури, зокрема теорем традиційного курсу вищої математики ЗВО (розділ «Математичний аналіз»), а також представлення факторіальних многочленів та факторіальних степенів.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Оператори Δ і E

Інтерполяція функції $f\left(x\right)$ змінної x — це визначення або оцінка значень цієї функції за відомими її значеннями в деяких точках. Метод Ньютона для поліноміальної інтерполяції дозволяє ефективно знайти інтерполяційний поліном для $f\left(x\right)$. Інтерполяційна формула Ньютона добре відома; у випадку, коли $f\left(x\right)$ – многочлен, її залишковий член є нулем. Наведемо короткий спосіб її одержання у цьому випадку.

Почнемо з означень. Нехай N – множина усіх натуральних чисел, $x = x(n)$ ($n \in N$) – довільна послідовність. Оператори різниці та зсуву послідовності визначаються наступним чином [10,11]: $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ (оператор різниці) та $Ex(n) = x(n+1)$ (оператор зсуву). Степені цих операторів визначаються індуктивно: $\Delta^0(x) = x$, $\Delta^{k+1}(x) = \Delta(\Delta^k(x))$ і $E^0(x) = x$, $E^{k+1}(x) = E(E^k(x))$ ($k \in N$).

Очевидно, $E^k x(n) = x(n+k)$. Одержимо формулу для $\Delta^k x(n)$. Нехай I - тотожний оператор, тобто $Ix = x$. Тоді $\Delta = E - I$ та $E = \Delta + I$. Тому

$$\Delta^k x(n) = (E - I)^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i E^{k-i} x(n)$$

$$\Delta^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i x(n+k-1)$$

Так само можна показати, що $E^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \Delta^{k-i} x(n)$

Оператор Δ відповідає оператору диференціювання D в диференціальному численні. Обидва оператора E та Δ, як і оператор D, є лінійними.

Найпростіші властивості визначеного інтеграла такі:

$$\int_a^b df\left(x\right) = f(b) - f(a),$$

$$d\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

Їх дискретні аналоги мають наступний вигляд.

Лема 1. Справджуються наступні твердження:

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0) \tag{1}$$

$$\Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x(k)\right) = x(n) \tag{2}$$

Доведення цих формул виходить з визначень. Наприклад, доведемо формулу (1):

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n-1) + x(n-1) - x(n-2) + \ldots + x(n_0+1) - x(n_0) = x(n) - x(n_0)$$

Оператор Δ діє на многочлен аналогічно оператору диференціювання D. А саме, для многочлена $p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k$ степеня k

$$\Delta p(n) = \left[a_0(n+1)^k + a_1(n+1)^{k-1} + \ldots + a_k\right] - \left[a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k\right] =$$
$$= a_0 k n^{k-1} + \left(\text{члени степеня меншого } (k-1)\right)$$

Так само можна показати, що

$$\Delta^2 p(n) = a_0 k(k-1) n^{k-2} + (\text{члени степеня меншого } (k-2))$$

Виконуючи цей процес k разів, отримаємо

$$\Delta^k p(n) = a_0 k!, \qquad \Delta^{k+i} p(n) = 0 \quad (i > 0)$$

2. Факторіальні многочлени

Наступне означення узагальнює поняття факторіалу натурального числа x на випадок довільного дійсного числа.

Для будь-якого дійсного x і натурального числа k назвемо k–им факторіалом x многочлен $x^{(k)} = x(x-1)\ldots(x-k+1)$.

Зокрема, якщо $x = n \in N$ і $n \geq k$, то

$$n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}, \; n^{(n)} = n!.$$

Таким чином, у випадку натурального числа $x \in N$ вказане узагальнення факторіалу включає в себе як традиційне означення факторіалу натурального числа, так і означення біноміальних коефіцієнтів.

Покажемо, що функція $x^{(k)}$ грає в численні різниць ту ж роль, що і многочлен x^k у диференціальному обчисленні. Для цього продовжимо дію операторів Δ і E з множини послідовностей на множину функцій дійсної змінної x : $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $Ef(x) = f(x+1)$.

Тоді

$$\Delta x(k) = (x+1)^{(k)} - x^{(k)},$$
$$Ex^{(k)} = (x+1)^{(k)}.$$

Теорема 1. Для будь-якого $k \in N$ маємо:

$$\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}, \tag{3}$$
$$\Delta^n x^{(k)} = k(k-1)\ldots(k-n+1)x^{(k-n)}, \; (k \geq n) \tag{4}$$

Доведення.

$$\Delta x^{(k)} = (x+1)^{(k)} - x^{(k)} = (x+1)x(x-1)\ldots(x-k+2) -$$
$$-x(x-1)\ldots(x-k+2)(x-k+1) = x(x-1)\ldots(x-k+2)\cdot k = kx^{(k-1)}$$

Твердження виходить n – кратним застосуванням формули (3).

Наприклад, при $n = 2$ отримуємо

$$\Delta^2 x^{(k)} = \Delta(\Delta x^{(k)}) = \Delta(kx^{(k-1)}) = k\Delta(x^{(k-1)}) = k(k-1)x^{(k-2)}.$$

При $k = n$ з (4) отримуємо $\Delta^k x^{(k)} = k!$

Покладемо $x^{(0)} = 1$ і для $k \in N$

$$x^{(-k)} = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+k-1)} \tag{5}$$

Теорема 2. Формули (3) і (4) вірні для будь-якого цілого числа k .

Доведення. При $k < 0$ твердження збігається з теоремою 1. Випадок $k = 0$ тривіальний, тому досить розглянути функцію (5) при $k \in N$.

Маємо

$$\Delta x^{(-k)} = \Delta\left(\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+k-1)}\right) =$$
$$= \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k)} - \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+k-2)(x+k-1)} =$$
$$= \frac{1}{(x+1)\ldots(x+k-1)}\left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x}\right) = \frac{-k}{x(x+1)\ldots(x+k-1)(x+k)} = -kx^{(-k-1)}$$

і формула (3) доведена повністю. Застосовуючи n разів останню формулу, отримаємо (4).

3. Факторіальні степені

Звичайні степені мають складні різниці. Але ці різниці прості для факторіальних степенів $x^{\underline{k}}$. Для будь-якого числа *x* і будь-якого $k \in N$ покладемо

$$x^{\underline{0}} = 1, \; x^{\underline{k}} = x(x-1)\ldots(x-k+1), \; x^{\underline{-k}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k)}$$

Факторіальні степені задовольняють правило додавання $x^{\underline{k+m}} = x^{\underline{k}}(x-k)^{\underline{m}}$.

Основна властивість факторіальних степенів:

$$\Delta x^{\underline{n}} = nx^{\underline{n-1}} \tag{6}$$

Доведення.

$$\Delta x^{\underline{n}} = (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} = (x+1)^{\underline{1+(n-1)}} - x^{\underline{(n-1)+1}} = (x+1)x^{\underline{(n-1)}} - x^{\underline{(n-1)}}(x-n+1) = nx^{\underline{n-1}}$$

Лема. Для будь-якого многочлена $P(x)$ його різниця $\Delta P(x)$ є многочленом, степінь якого на одиницю менша степені $P(x)$.

Доведення: індукція по степені n многочлена $P(x)$. При $n = 1$ різниця стала, оскільки $\Delta(ax+b) = a$. Нехай лема вже доведена для многочленів степеня, який менше чи дорівнює n і $P(x)=a_{n+1}x^{n+1}+a_n x^n+\ldots$ – многочлен степеня $n+1$. Тоді $\mathrm{P}(x)-a_{n+1}x^{\underline{n+1}}=Q(x)$ – многочлен степеня $\le n$ і $\Delta\mathrm{P}(x)-\Delta a_{n+1}x^{\underline{n+1}}=\Delta Q(x)$. За припущенням індукції многочлен $\Delta Q(x)$ має степінь $\le n-1$, а за формулою (6) многочлен $\Delta x^{\underline{n+1}}=(n+1)x^{\underline{n}}$ має степінь n.

Наслідок. Якщо $\Delta P(x)=0$, де $P(x)$ - многочлен, то $P(x)$ - константа.

Теорема (формула Ньютона для многочленів). Для будь-якого многочлена $P(x)$

$$P(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^k P(0)}{k!}x^{\underline{k}} \tag{7}$$

Зауважимо, що остання сума скінченна і тому є многочленом.

Доведення: індукція по степені n многочлена $P(x)$. При $n=1$ многочлен $P(x)=ax+b$, тоді $\Delta^0 P(0)=b$, $\Delta^1 P(0)=a$ і $\Delta^k P(x)=0$ при $k>1$. Тому сума в (7) є $ax+b=P(x)$, і рівність (7) доведена при $n=1$. Нехай формула (7) вже доведена для многочленів степеня n і многочлен $P(x)$ має степінь $n+1$. Тоді за припущенням індукції

$$\Delta P(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^k\Delta P(0)}{k!}x^{\underline{k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta^k P(0)}{(k-1)!}x^{\underline{k}}$$

Позначимо через $Q(x)$ праву частину в (7). Тоді

$$\Delta Q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^k P(0)}{k!}(x+1)^{\underline{k}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^k P(0)}{k!}x^{\underline{k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^k P(0)}{k!}\Delta x^{\underline{k}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^k P(0)}{k!}kx^{\underline{k-1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta^k P(0)}{(k-1)!}x^{\underline{k-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^k(\Delta P)(0)}{k!}x^{\underline{k}}=\Delta P(x)$$

Тому

$$\Delta(P(x)-Q(x))=0 \text{ і } P(x)=Q(x)+c$$

для деякого числа c. А оскільки $P(0)=Q(0)$, то ці многочлени однакові: $P(x)=Q(x)$. Теорема доведена.

Зауважимо, що доведення формули Ньютона у загальному випадку (не тільки для многочленів) вимагає розгляду залишкового члену формули і суттєво збільшує як обсяг необхідного часу, так і складність доведення. Тому розгляд цього випадку в межах відведеного програмою часу вдається провести лише зрідка, наприклад, для сильних студентів, або перенести на самостійну роботу з використанням відповідних посібників.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

В даній роботі запропоноване коротке викладення (але з повним доведенням) інтерполяційної формули Ньютона для многочленів і (одночасно) властивостей факторіальних многочленів. Це може бути корисним для вивчення вказаних тем у ЗВО в умовах обмеженого часу, який відведений на викладання цих питань. Окрім того, наведений метод викладання дозволяє узагальнити традиційне поняття факторіалу натурального числа на випадок довільного дійсного числа, причому це узагальнення, в свою чергу, включає поняття біноміального коефіцієнту.

Вдосконалення викладання завжди є і буде важливим питанням. Поступове зменшення кількості учбового часу, відведеного на вивчення розділів вищої математики (і багатьох інших дисциплін), яке (нажаль) має місце за останні роки, робить актуальними подальші дослідження в сфері скороченого (але за можливості – з доведеннями) викладання вищої математики як у ЗВО, так і у інших навчальних закладах. Можливість вивчення при цьому узагальнень відомих понять є додатковим позитивним ефектом нових способів викладання учбових дисциплін.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Abdon, A., & Seda, İ. A. (2021). *New Numerical Scheme with Newton Polynomial: Theory, Methods, and Applications*. Academic Press. https://doi.org/10.1016/C2020-0-02711-8.
2. Almutairi, N., & Saber, S. (2024). Application of a time-fractal fractional derivative with a power-law kernel to the Burke-Shaw system based on Newton's interpolation polynomials. *Methods X*, 12, 102510. https://doi.org/10.1016/j.mex.2023.102510.
3. Atangana, A., & Araz, S. İ. (2020). New numerical method for ordinary differential equations: Newton polynomial. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 372, 112622. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112622.
4. Hoffman, J.D. (2001). *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Taylor & Francis, Boca Raton-London-New York-Singapore.
5. Naveen, S., & Parthiban, V. (2024). Application of Newton's polynomial interpolation scheme for variable order fractional derivative with power-law kernel. *Sci. Rep* 14, 16090. https://doi.org/10.1038/s41598-024-66494-z.
6. Stoer, J., & Bulirsch, R. (1980). *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, New York.
7. Vyshnevetskiy, O. L. (2014). *Дифференциальные уравнения*, «Lambert Academic Publishing», Saarbrücken, Germany.
8. Vyshnevetskiy, O. L. (2020). *Ordinary differential equations for students. Short and simple*. Beau Bassin: Lambert Academic Publishing.
9. Zatorsky, R. A., & Goy, T. P. (2013). Generalized factorial powers and some of its application. *Carpathian Herald of the Shevchenko Scientific Society*. 1(21).
10. Березин, И.С., & Жидков, Н.П. (1962). *Методы вычислений*, т.1, М., Физматгиз.
11. Гельфонд, А.О. (1967). *Исчисление конечных разностей*. М., Физматгиз.
12. Дюженкова, Л.І., Дюженкова, О.Ю., & Михалін, Г.О. (2002). *Вища математика: Приклади і задачі*. К.: Видавничий центр «Академія».

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Abdon, A., & Seda, İ. A. (2021). *New Numerical Scheme with Newton Polynomial: Theory, Methods, and Applications*. Academic Press. https://doi.org/10.1016/C2020-0-02711-8.

2. Almutairi, N., & Saber, S. (2024). Application of a time-fractal fractional derivative with a power-law kernel to the Burke-Shaw system based on Newton's interpolation polynomials. *Methods X*, 12, 102510. https://doi.org/10.1016/j.mex.2023.102510.
3. Atangana, A., & Araz, S. İ. (2020). New numerical method for ordinary differential equations: Newton polynomial. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 372, 112622. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112622.
4. Hoffman, J.D. (2001). *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Taylor & Francis, Boca Raton-London-New York-Singapore.
5. Naveen, S., & Parthiban, V. (2024). Application of Newton's polynomial interpolation scheme for variable order fractional derivative with power-law kernel. *Sci. Rep* 14, 16090. https://doi.org/10.1038/s41598-024-66494-z.
6. Stoer, J., & Bulirsch, R. (1980). *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, New York.
7. Vyshnevetskiy, O. L. (2014). *Дифференциальные уравнения*, «Lambert Academic Publishing», Saarbrücken, Germany.
8. Vyshnevetskiy, O. L. (2020). *Ordinary differential equations for students. Short and simple*. Beau Bassin: Lambert Academic Publishing.
9. Zatorsky, R. A., & Goy, T. P. (2013). Generalized factorial powers and some of its application. *Carpathian Herald of the Shevchenko Scientific Society*. 1(21).
10. Berezin, I.S., & Zhydkov, N.P. (1962). *Metody vychislenij*, v.1, M., Fizmatgiz.
11. Gel'fond, A.O. (1967). *Calculation of finite differences*. M., Fizmatgiz.
12. Duzenkova, L.I., Duzenkova, O.U., & Mykhalin, G.O. (2002). *Vyscha matematyka: Pryklady I zadachi*. K.: Vydavnychnyj centr «Akademia». (in Ukrainian).

Матеріал надійшов до редакції 02.12.2024р.