convenient format for students. It is shown that their use is appropriate both during face-to-face and distance learning, at different stages of the knowledge acquisition process, both during and after school hours, and is convenient for both students and teachers. A number of algorithmic flowcharts have been developed for the study of chemistry in the tenth grade, in particular, for characterizing substances, composing names of organic substances in accordance with scientific nomenclature, and solving computational problems of different types. The authors present and analyze the results of a pedagogical study, which show that the use of algorithmic flowcharts in the study of chemistry in the experimental class allowed to improve the learning outcomes for students who had an initial level of academic achievement. At the same time, the use of these algorithms made it possible to significantly reduce the number of students who had an average level of academic achievement and raise them to a sufficient level, and thus significantly increase the number of students with a sufficient level of academic achievement; as well as to increase the percentage of students at a high level. In general, the results of the study and their analysis confirmed that working with algorithmic flowcharts contributes to the formation of positive dynamics in the teaching of chemistry among high school students, since regardless of the initial level of academic achievement, students who used algorithmic flowcharts achieved better results in the study of chemistry. This testifies to the high efficiency of this tool in the formation of subject competencies in chemistry, especially in the context of distance learning.

***Key words**: algorithmic approach, algorithmic flowcharts, chemistry education, distance learning, learning outcomes.*

УДК 372.851.2 +37.01+37.02+37.04+514
DOI 10.5281/zenodo.12191303

О. С. Чашечникова
ORCID ID 0000-0003-1101-5534
Т. Г. Безлюдна
Сумський державний педагогічний
університет імені А.С. Макаренка

СПЕЦИФІКА ОЗНАЙОМЛЕННЯ СУЧАСНИХ СТАРШОКЛАСНИКІВ ІЗ ЛОГІЧНОЮ ПОБУДОВОЮ ГЕОМЕТРІЇ НА АКСІОМАТИЧНІЙ ОСНОВІ

У статті розглянуто специфіку ознайомлення сучасних старшокласників із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі. Зазначено, що аксіоматичний метод широко застосовується у математиці, його розуміння позитивно впливає на розвиток мислення школярів. Засвоєння учнями систематичних курсів планіметрії та стереометрії викликає труднощі у школярів, і одна з причин те, що геометрія – єдина шкільна дисципліна, яка будується на дедуктивно-аксіоматичній основі, а тому висуваються достатньо високі вимоги до рівня розвитку логічного мислення учнів, абстрактного мислення та просторового мислення. Характерною рисою аксіоматичного методу є його абстрактність, і , нажаль, це вступає у протиріччя із психолого-педагогічними особливостями сучасних школярів, мислення яких називають мозаїчним, точковим, а розвитку у них здатності міркувати, ґрунтуючись на уявних моделях, заважає «залежність» від візуалізації.

Проаналізовано різні підходи до побудови та змісту аксіом стереометрії у шкільних підручниках. На основі аналізу пропонується авторське бачення представлення системи аксіом групи С. Зазначена важливість того, щоб у підручниках було достатньо завдань як на застосування аксіом, так і на усвідомлення їх сутності. Доцільно доповнювати завдання з основного підручника завданнями з інших, враховуючи відмінності у системах аксіом. Обґрунтовано, що ознайомлюючи школярів із аксіомами стереометрії, необхідно використовувати різноманітні наочність для конкретизації нових відомостей (моделі *просторових фігур, таблиці, схеми) та ІКТ для ілюстрації, супроводжувати пояснення діями з предметами і відповідними записами. При цьому важливо використати наочний посібник своєчасно, ілюструючи суть пояснення, залучаючи до роботи з посібником і пояснення самих учнів.*

***Ключові слова**: математика, геометрія, аксіоматичний метод, навчання геометрії, логічна побудова геометрії на аксіоматичній основі.*

Постановка проблеми. Проблема виникнення освітніх втрат з математики у сучасних умовах, нестача часу на вивчення математики знов породила запитання: чи дійсно необхідно знайомити учнів з побудовою геометрії на аксіоматичній основі (приклад такої побудови – у підручнику О. В. Погорєлова, який, по суті, зробив революцію у побудові шкільного курсу геометрії [16; 17]); чи не достатньо у сучасних умовах для більшості учнів знати лише ті твердження (означення, аксіоми, теореми) та ті формули, які вони мають використовувати в ході розв'язування саме тих задач, які найчастіше зустрічаються у змісті завдань ЗНО та НМТ. З іншого боку, розвиток так званого «штучного інтелекту» призводить до того, що у частини суспільства формується споживацьке відношення до навчання. Про те, чого більше приносить у життя штучний інтелект (ШІ) – користі або шкоди – сперечаються найвидатніші вчені та розробники. Дехто застерігає, що існує загроза: машини стануть високорозвиненими, а люди не зможуть за ними встигати, і ті почнуть розвиватися самі по собі. Інші вважають, що використання Ш І зменшує роль навчання у житті сучасної людини, тому що тепер частина «розумової роботи» може бути виконана за неї, а для цього немає необхідності здобувати теоретичні знання.

І тому ще більш актуальною стає дискусія, чи необхідно знайомити школярів із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі, або достатньо лише знати певні формули та теореми та вміти їх застосовувати для розв'язування простих задач, а все інше зможе зробити Ш І. Це не нова проблема. Навіть деякий час і відомі методисти притримувались думки, що немає необхідності вводити аксіоми на першому етапі вивчення геометрії, що аксіоматика в явному вигляді спочатку може бути відсутньою. У таких підручниках аксіоми «з'являються» поступово, коли «виникає необхідність», акцент робиться на наочно-інтуїтивні уявлення учнів. Цей підхід пропонують ті, хто вважає головною метою вивчення геометрії її практичне застосування.

Аксіоматика може бути введена на початку вивчення геометрії, тоді реалізується дедуктивний виклад курсу геометрії. О. В. Погорєлов, С. М. Чашечніков, І. Ф. Тесленко були прихильниками такого підходу, тому що найважливішою метою вивчення геометрії вважали розвиток в учнів логічного мислення, вміння доводити, обґрунтовувати. Можна припустити, що основну мету вивчення геометрії прихильники цього підходу вбачають у тому, щоб навчити учнів, студентів насамперед логічно мислити через навчання їх доводити, обґрунтовувати свої висновки, розмірковувати.

Здатність висловлювати свої думки послідовно, обґрунтовано важлива для кожної людини. Перші ж уроки математики можуть стати для учня школою логічного мислення. Вчитель математики привчає школярів обґрунтовано доводити або спростовувати твердження, навчає їх вибудовувати послідовний ланцюг міркувань.

Геометрія – єдина шкільна дисципліна, яка будується на дедуктивно-аксіоматичній основі і тому пред'являє підвищені вимоги до рівня розвитку логічного мислення школярів. В основі дедуктивно-аксіоматичного викладу геометрії лежить аксіоматичний метод.

Тому метою статті є на основі аналізу теоретичних джерел та практики навчання геометрії у сучасних умовах визначити специфіку ознайомлення старшокласників із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі.

Аналіз актуальних досліджень**.** Аксіоматичний метод формувався протягом розвитку математики як науки. Геометри визначають, що у зв'язку з аксіоматичною побудовою геометрії в першу чергу виникають питання, чи можливо: аксіому вивести за допомогою логічних міркувань з інших тверджень; спираючись на аксіоми, шляхом логічних міркувань вивести наслідки, що є запереченням один одного; доповнити існуючу систему аксіом новими аксіомами, які не є наслідками аксіом даної системи, і не суперечать аксіомам даної системи.

У розвитку аксіоматичного методу виділяють три етапи [9; 18]: від Евкліда до середини XIX сторіччя; період із середини XIX сторіччя пов'язаний з відкриттям М. Лобачевським неевклідової геометрії. Також в цей час активно створюються інші аксіоматики евклідової геометрії (Гільберта, Вейля та інших), а отже виникає новий погляд на сутність аксіоматичного методу (аксіоми – не самоочевидні істини, а твердження про початкові поняття, що приймаються без доведення і кладуться в основу теорії, з яких всі інші твердження доводяться), стимулювало розвиток поняття побудови систем аксіом (несуперечливість, повнота, незалежність); на початку XX сторіччя для подолання труднощів в обґрунтуванні математики Д. Гільберт запропонував свою теорію доведень, яка була названа метаматематикою.

Поступово аксіоми впроваджуються у шкільний курс геометрії. Перше видання підручника А. П. Кисельова вийшло у 1892 році (зміст було скорочено порівняно з відомими на той час підручниками), а у 1938 році, після виправлень та доповнень, внесених Н. О. Глаголєвим, підручник став на довгі роки, переживши реформи освіти, єдиним офіційним підручником геометрії (окремо «Планіметрія» та «Стереометрія») [11; 12; 13] вітчизняної середньої школи, що доповнювався збірником завдань з геометрії М. О. Рибкіна. Аксіоматична основа підручника – аксіоматика Д. Гільберта.

Але після чергової реформи математичної освіти у 1971 році підручниками геометрії для всієї країни стають підручники А. М. Колмогорова, О. Ф. Семеновича, Р. С. Черкасова (геометрія 6–8) [15] та В. М. Клопського, З. А. Скопеця, М. І. Ягодовського (геометрія 9–10) [14]. Ці підручники були написані так, що учень мав змогу працювати з ними і самостійно, гарно підібраний задачний матеріал сприяв ефективності навчання.

Аксіоми у підручнику А. М. Колмогорова та його авторського колективу формулювалися зрозуміло, у додатках до підручника було запропоновано матеріал щодо логічної побудови геометрії. Але «розпорошеність» аксіом по всьому підручнику створювало ситуацію, що у школярів виникало нерозуміння: чому одні зрозумілі твердження є аксіомами, а інші, також зрозумілі, ні. Це питання підняли у [23].

Наступними стали підручники О.В. Погорєлова [16; 17] та авторського колективу під керівництвом Л. С. Атанасяна [8].

Підручник О. В. Погорєлова визнаний науковцями класичним. Саме тому, працюючи над експертизою підручників геометрії для 7 класу у 2007 році, ми рівень науковості рукописів визначали, взявши за еталон саме цей підручник. У ньому компактно представлено систему аксіом, логічна побудова коректна і строго обґрунтована, витриманий принцип науковості (про це писали не лише науковці у галузі методики математики І.Ф.Тесленко, Л.Г.Чашечнікова, але й геометри, зокрема, С.М.Чашечніков) [19]. Отже, вже на початку вивчення планіметрії учням надається поняття про логічну побудову курсу на аксіоматичній основі.

Система аксіом О. В. Погорєлова складається з десяти аксіом планіметрії (п'ять груп) та трьох аксіом групи С. Зосередимо увагу саме на аксіомах групи С.

C_1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.

C_2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

C_3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Аксіоматика у підручнику Л. С. Атанасяна [5] близька до аксіоматики Д. Гільберта (містить 20 аксіом, які поділені на 5 груп [8]). Але у підручнику Л. С. Атанасяна аксіом більше (включено аксіоми, що стосуються поняття променя, напівплощини та напівпростору). Замість фрази «Хоч би якими були дві точки...» використовується «Через будь-які дві (три) точки...». Аксіоми у цьому шкільному підручнику було побудовано з метою подати матеріал більш спрощено для розуміння школяра, але на практиці розуміння деяких з них викликало труднощі в учнів. Серед аксіом Д. Гільберта є аксіоми конгруентності, аксіома паралельних, аксіоми неперервності.

У підручнику Л. С. Атанасяна та авторського колективу явно (але неповно) і доступно введено поняття про аксіоматичну побудову курсу (деякі твердження про властивості геометричних фігур приймаються як вихідні положення (аксіоми), на основі яких доводяться далі теореми і, взагалі, будується вся геометрія). Автори не ставили завдання побудови системи незалежних аксіом (аксіома у їх підручнику може бути доведена на основі інших аксіом, для спрощення викладу вона прийнята як аксіома, а не теорема). Система аксіом, безперечно, неповна, але достатня для побудови курсу планіметрії.

Отже, ці підручники створили підгрунтя для створення методичних підходів до ознайомлення школярів з логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі. Розуміння сутності аксіоматичного методу позитивно впливає на розвиток мислення школярів.

Виклад основного матеріалу. Аксіоматичний метод є цінним інструментом наукових досліджень, за допомогою якого вдається розкрити зв'язки між поняттями та математичними теоріями, викладання теорії стає математично строгим. Характерною рисою аксіоматичного методу є його абстрактність, і , нажаль, це вступає у протиріччя із психолого-педагогічними особливостями сучасних школярів, мислення яких називають мозаїчним, точковим, а розвитку у них здатності міркувати, грунтуючись на уявних моделях, заважає «залежність» від візуалізації.

Але ж дедуктивна схема викладення теорії полягає в наступному: 1) перераховуються основні (неозначувані) поняття; 2) за допомогою основних (неозначуваних) понять даються означення інших понять; 3) формулюються аксіоми (система аксіом) – як властивості основних понять та відношень; 4) на базі аксіом доводяться теореми.

Необхідно вже на початку вивчення геометрії надати учням інформацію про сутність аксіоматичного методу (кожне поняття повинно бути або внесено до списку не означуваних понять, або означене; кожне твердження повинно бути або внесено до списку аксіом, або доведене) та нагадувати про це систематично. На цьому етапі важливо залучити учнів до створення математичних довідників, де поступово вписуються аксіоми. Відмітимо, що учні намагаються уникати переписуванню від руки, тому доцільно їм пояснювати, що саме таким чином запам'ятовування відбувається з більшою швидкістю.

Нами було проведено опитування серед вчителів математики та запропоновані завдання на знання аксіом для учнів 7–11 класів (87 учнів) Улянівського ліцею Миколаївської селищної ради Сумського району Сумської області та 10 класу гімназії №1 м. Суми (36 учнів).

Запитання для вчителів

1. Чи є необхідність вводити аксіоми на початку вивчення геометрії?
2. Чи вимагаєте Ви, щоб учні знали формулювання аксіом напам'ять ?
3. Чи доцільний, на Вашу думку, аксіоматичний шлях побудови геометрії?

100% опитаних вчителів вважають, що знання аксіоматичної побудови геометрії є важливою основою вивчення предмету, адже система аксіом є фундаментом усієї будівлі геометрії [23]. Але, у процесі обговорення зазначають, що часто розуміння цього починається у багатьох учнів лише у старших класах, коли створені передумови для розвитку теоретичного мислення.

Завдання для учнів складалося з двох частин.

1. Відповісти на запитання:

Поясніть, що таке «аксіома»? (правильно відповіли 70% учнів).

Чим відрізняються аксіоми від теорем? (правильно відповіли 92% учнів).

Наведіть приклад використання аксіом для доведення теореми / розв'язування задачі (змогли відповісти 50 % учнів).

2. Завдання на формулювання аксіом (надається початок формулювання аксіоми – учень закінчує) (правильно відповіли 52% учнів).

Також було проведене тестування онлайн лише учнів 10 класів щодо знання формулювань аксіом планіметрії (взяло участь 64 учні у 2018 році та 48 учнів у 2022 році) та стереометрії (взяло участь 32 учні у 2019 році та 36 учнів у 2022 році).

Порівняння показало, що відбулося зростання відсотку учнів, що мають низький рівень знання формулювань аксіом планіметрії (на 2,08%) та аксіом групи С (на 4,17%).

Можна зробити висновок, що дистанційне навчання математики негативно вплинуло на підготовку учнів до сприймання ними побудови системи аксіом, на знання ними формулювань аксіом, на вміння їх застосовувати до доведення теорем та розв'язування задач. Ця проблема потребує вирішення. Адже для продуктивного вивчення геометрії необхідні відповідні рівні абстрактного мислення та просторового мислення школярів, які, в свою чергу, також розвиваються у процесі вивчення предмету.

Дискусії ведуться щодо того, на якому етапі доцільно розпочинати знайомство учнів з аксіоматичним методом та що є умовами успішного навчання.

Найпоширеніші точки зору:

– зробити систематичний курс аксіоматичним, чітко відокремивши його від пропедевтичного, що характеризується широким використанням досвіду та заснованої на ньому інтуїції;
– на жодному етапі навчання не відокремлювати логіку від інтуїції, а правильно поєднувати їх по-різному на різних ступенях навчання;
– побудувати в аксіоматичному стилі лише невеликий фрагмент теорії у старших класах, щоб на цьому матеріалі знайомити учнів із сучасним аксіоматичним методом, а весь курс будувати, не відокремлюючи логіку від інтуїції.

Вважаємо: необхідно знайомити учнів із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі, але залучаючи інтуїцію та спираючись на реальний досвід учнів.

Ознайомлення учнів з логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі є проблемою, яка потребує дослідження, починаючи з пропедевтичного курсу геометрії, але це предмет іншого дослідження. Тому зосередимся саме на навчанні геометрії у старшій школі.

Формулювання аксіом мають водночас задовольняти й вимогу науковості, й вимогу доступності. Так полегшується доведення більшості теорем і, крім того, «знімаються» запитання учнів про те, чому деякі «зрозумілі твердження» приймаються без доведення, а інші, також «зрозумілі твердження», необхідно доводити. Такий підхід, строгий облік введених у систематичному курсі основних понять і основних властивостей сприяє тому, щоб учні не намагалися використовувати в ході доведення всі відомі їм відомості (це також зазначено у [19]). Нами [21; 22; 23; 24] відмічалося: будуючи шкільний курс геометрії, слід обирати найбільш доцільну з врахуванням вікових особливостей учнів схему подання матеріалу. Аксіомами повинні обиратися твердження, істинність яких відома учням на основі їх практичного досвіду та знань з пропедевтичного курсу геометрії. Система аксіом повинна бути надлишковою та настільки «сильною», щоб кількість «очевидних» теорем була найменшою. Інакше знижується інтерес школярів до вивчення предмету через необхідність доводити те, що, на їх погляд, і так очевидно (приклад – третя ознака рівності трикутників).

Протягом трьох років учні, вивчаючі планіметрію, працювали у двовимірному просторі, оволоділи знаннями щодо властивостей фігур та відповідних метричних відношень, навчалися будувати плоскі фігури за допомогою креслярських інструментів, доводити, обґрунтовувати кроки розв'язування. Їх вміння – результати цілеспрямованої та наполегливої спільної праці вчителя та учнів.

При вивченні геометричного матеріалу у старшій школі відбувається перехід з двовимірного простору у тривимірний. Цей перехід потребує розвинених просторового, абстрактного, логічного мислення. У тривимірному просторі площина стає самостійною фігурою та одночасно носієм всіх плоских фігур з численними їх властивостями. Не для кожного учня просто уявити образ площини, ще важче уявити можливе розміщення двох, трьох і більше площин в цьому просторі, ще складніше побачити розміщення на цих площинах вже відомих плоских фігур [21; 22; 23; 24].

Вчителю необхідно пам’ятати, що цей процес просторової переорієнтації у розумі кожного учня є важким, за допомогою продуманої методики максимально допомогти йому у розвитку нових просторових уявлень. Нечіткість, розпливчастість просторових уявлень нерідко є причиною нерозуміння матеріалу стереометрії. Бажано використання моделей, стереометричного ящика та предметів із реального життя. Важливим є органічне поєднання просторових уявлень про властивості просторових фігур з суворо логічним обґрунтуванням їх існування, їх властивостей, а це можливо, якщо систематично поєднувати реальну наочність та виконувати логічне обґрунтування на основі використання аксіом.

Розглянемо підручники геометрії для 10 класу різних авторів (різних авторських колективів) щодо подання в них систем аксіом.

Основні властивості площин у просторі представлені аксіомами групи С, а ознайомленню з ними передувало повторення аксіом планіметрії. Потім розглядаються наслідки з аксіом стереометрії. Учні легко помічають аналогію у матеріалі планіметрії та стереометрії, але важливо також бачити відмінність у тлумаченнях та уявленнях таких образів, як «точка на площині» та «точка у просторі», «пряма на площині» та «пряма у просторі». Ці поняття у тривимірному просторі «перероджуються в нові образи».

І тут важливу роль грає те, як побудована система аксіом у підручнику, з яким працюють учні [21; 22; 23; 24].

Таблиця 1

Аксіоми групи С в різних підручниках

№	Автори	Аксіоми групи С
1	Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. [7]	**Аксіома A_1.** У будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії. **Аксіома A_2.** Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина і до того тільки одна. **Аксіома A_3.** Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині. **Аксіома A_4.** Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.
2	Бевз Г. П. , Бевз В. Г., Владімірова Н. Г., Владіміров В. М. [1; 2; 3]	**Аксіома C_1.** У просторі існує (принаймні одна) площина і точка, що не лежить у цій площині. **Аксіома C_2.** Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того тільки одну. **Аксіома C_3.** Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині. **Аксіома C_4.** Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.
3	Істер О.С. [10]	C_1. Яка б не була площина, існують точки, які їй належать, і які їй не належать. C_2. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині. C_3. Якщо дві різні площини мають одну спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку. C_4. Через будь – які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Продовження таблиці 1

4	Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І., Тарасенкова Н. А. [4]	1. Існують точки, що лежать у даній площині, і точки, що не лежать у ній. 2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну. 3. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині. 4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Важливо, що у підручнику Мерзляка А. Г. та інших є уточнення, що **у** будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії. Вважаємо: тоді чітко зрозуміло: аксіоми стереометрії включають в себе не лише аксіоми групи С, але й аксіоми планіметрії. Але дане формулювання є не аксіомою, а є важливим уточненням.

У всіх з розглянутих підручників площина задається через три точки, що не лежать на одній прямій. Отже, всі інші завдання (через пряму і точку, що їй не належать; через дві прямі, що перетинаються; через дві паралельні прямі) вважаються наслідками і мають бути доведені (це питання глибоко досліджено нами (2011) [21; 22; 23]).

Аксіома про перетин **двох різних** площин сформульована коректно у підручнику О. С. Істера та О. В. Єргіної [6; 10]. Аксіома 1 у підручнику авторського колективу під керівництвом М. І. Бурди сформульована більш коректно [4], ніж в інших підручниках, і є, на наш погляд, обов'язковою.

Узагальнюючи, вважаємо, що систему аксіом групи С доцільно представити так:

1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що не належать їй.
2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
3. Якщо дві **різні** точки прямої належать площині, то й кожна точка цієї прямої належить цій площині.
4. Якщо дві **різні** площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Важливо, щоб у підручниках було достатньо завдань як на застосування аксіом, так і на усвідомлення їх сутності. Для цього можливо доповнювати завдання з основного підручника завданнями з інших, враховуючи відмінності у системах аксіом.

Ознайомлюючи школярів із аксіомами стереометрії, необхідно використовувати різноманітні наочність для конкретизації нових відомостей (моделі просторових фігур, таблиці, схеми) та ІКТ для ілюстрації, супроводжувати пояснення діями з предметами і відповідними записами. При цьому важливо використати наочний посібник своєчасно, ілюструючи суть пояснення, залучаючи до роботи з посібником і пояснення самих учнів [21; 22; 23; 24]. Рисунки і записи на дошці треба виконувати грамотно, естетично. Необхідно організовувати роботу з наочними посібниками так, щоб учні самі оперували ними і супроводжували свої дії відповідними поясненнями, тоді ефективність засвоєння матеріалу буде вище. Онлайн-курси, використання презентацій, відео на *youtube* сприяють ефективному вивченню навчального матеріалу, якщо вони грамотно продумані не лише з точки зору змісту, але й враховують психолого-педагогічні особливості учнів конкретної групи.

Нами досліджено [23], що з метою розвитку здатності відхилятися від традиційних схем мислення доцільно запропонувати учням довести, що дві паралельні прямі також задають єдину площину. Сприяє формуванню спроможності швидко висувати ідеї, продукувати задум; тактика, коли повному та обґрунтованому доведенню передує виконання схем-ілюстрацій до доведення, які водночас можуть стати підказкою для учнів з недостатньо високим рівнем розвитку творчого мислення.

Формуванню просторової уяви сприяє виховання культури виконання графічних зображень. У ході вивчення планіметрії деякою мірою згладжуються неточності у зображенні прямих, що перетинаються, на рисунку 1 порівняно з рисунком 2 (відмічено у [23]).

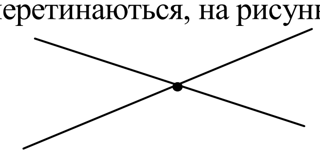

Рис. 1. Прямі перетинаються.

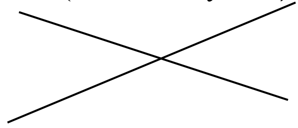

Рис. 2. Мимобіжні прямі.

Зображення у стереометрії вимагають більшої точності у даному випадку. Рисунок чітко ілюструє, що прямі перетинаються (рис.3), а на рис.4 може бути зображення двох мимобіжних прямих: спостерігач «знаходиться над площинами», яким належать дані прямі.

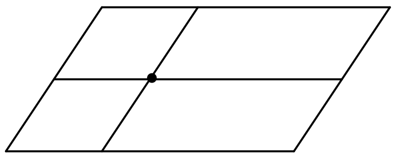

Рис. 3. Прямі, що перетинаються.

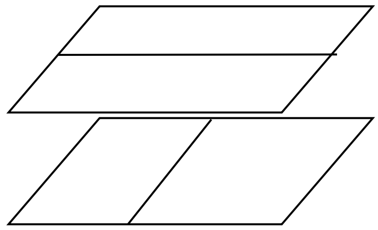

Рис. 4. Мимобіжні прямі.

Загальновідомо, що у підлітковому і ранньому юнацькому віці завершується формування когнітивних процесів, і перш за все мислення. Інтелект в своїх вищих проявах стає мовленнєвим, а мова інтелектуалізованою. Отже, учні цих вікових категорій мають бути готові до сприймання логічної побудови геометрії на аксіоматичній основі. А ознайомлення з логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі, в свою чергу, позитивно впливає на розвиток мислення.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Праця Евкліда була першою в історії людства науковою книгою: в ній геометрія була представлена як аксіоматична теорія. У навчанні геометрії знайшов відображення історичний процес формування аксіоматичного методу взагалі, який в основному проходить на полі геометрії. Заслуга в цьому належить видатній праці Евкліда «Начала», яка більше як на двадцять століть встановила не тільки канони геометричної науки, але і канони її викладання. Наступний етап – етап основ геометрії Д. Гільберта. На початку ХХ сторіччя – етап формально-аксіоматичного обґрунтування. Аксіоматичний метод широко застосовується у математиці, його розуміння позитивно впливає на розвиток мислення школярів. Засвоєння учнями систематичних курсів планіметрії та стереометрії викликає труднощі у школярів, і одна з причин те, що геометрія – єдина шкільна дисципліна, яка будується на дедуктивно-аксіоматичній основі, а тому висуваються достатно високи вимоги до рівня розвитку логічного мислення учнів. Високими є вимоги до рівня абстрактного мислення та просторового мислення.

Пропонуємо систему аксіом групи С доцільно представити так:

1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що належать їй.
2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
3. Якщо дві **різні** точки прямої належать площині, то й кожна точка цієї прямої належить цій площині.
4. Якщо дві **різні** площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Важливо, щоб у підручниках було достатньо завдань як на застосування аксіом, так і на усвідомлення їх сутності. Доцільно доповнювати завдання з основного підручника завданнями з інших, враховуючи відмінності у системах аксіом.

Ознайомлюючи школярів із аксіомами стереометрії, необхідно використовувати різноманітні наочність для конкретизації нових відомостей (моделі просторових фігур, таблиці, схеми) та ІКТ для ілюстрації, супроводжувати пояснення діями з предметами і відповідними записами. При цьому важливо використати наочний посібник своєчасно, ілюструючи суть пояснення, залучаючи до роботи з посібником і пояснення самих учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Бевз, Г. П., Бевз, В. Г., Владімірова, Н. Г., Владіміров В. М. (2010). Геометрія 10. Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень. Київ : Генеза. (Bevs, G. P., Bevs, V. G., Vladimirova, N. G., Vladimirov V. M. (2010). Geometry 10. Textbook for secondary schools: profile level. Kyiv: Heneza).
2. Бевз, Г. П., Бевз, В. Г., Владімірова, Н. Г. (2018). Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту. Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Київ : Освіта. (Bevs, G. P., Bevs, V. G., Vladimirova, N. G. (2018). Math. Algebra and beginnings of analysis and geometry. Standard level. Textbook for the 10th grade of institutions of general secondary education. Kyiv: Osvita).
3. Бевз, Г. П., Бевз, В. Г., Владімірова, Н. Г. (2019). Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Київ : Освіта. (Bevs, G. P., Bevs, V. G., Vladimirova, N. G. (2019). Math. Algebra and beginnings of analysis and geometry. Standard level: textbook for the 11th grade of institutions of general secondary education. Kyiv: Osvita).
4. Бурда, М. І., Колесник, Т. В., Мальований, Ю. І., Тарасенкова, Н. А. (2010). Математика 10: Рівень стандарт. Київ : Зодіак-Еко. (Burda, M. I., Kolesnyk, T. V., Malyovany, Y. I., Tarasenkova, N. A. (2010). Mathematics 10: Standard level. Kyiv: Zodiac-Eko).
5. Geometry. Grades 7–9: textbook. Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. (1989). Москва : Просвещение. (Geometry. Grades 7–9: textbook. L. S. Atanasyan, V. F. Butuzov, S. B. Kadomtsev and others (1989). Moscow: Prosveshchenye).
6. Геометрія: підручник для 10 класів загальноосвітніх навчальних закладів. О. С. Істер, О. В. Єргіна. Профільний рівень. (2018). Київ : Генеза. (Geometry: a tutorial for 10th grade of general education closing. O. S. Easter, O. V. Yergina. Profile level. (2018). Kyiv: Heneza).
7. Геометрія. 10 клас. Профільний рівень. А. Мерзляк, В. Полонський, Д. Номіровський, М. Якір (2018). Харків : Гімназія. (Geometry. Grade 10. Profile level. A. Merzlyak, V. Polonskyi, D. Nomirovskyi, M. Yakir (2018). Kharkiv: Himnaziia).
8. Гильберт, Д. (1948). Основания геометрии. Перевод с 7-го издания. Москва–Ленинград : ОГИЗ. (Hilbert, D. (1948). Foundations of geometry. Translation from the 7th edition. Moscow–Leningrad: OGIZ).
9. Ілляшенко, В. Я. (2012). Основи геометрії: Навчальний посібник для вищих навчальних закладів. Луцьк : РВВ «Вежа», Волинський національний університет імені Лесі Українки. (Ilyashenko, V. Ya. (2012). Basics of geometry: Education. manual for universities education closing. Lutsk: RVV "Vezha", Volyn National University named after Lesya Ukrainka).
10. Істер, О. С. (2018). Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Київ : Генеза. (Easter, O. S. (2018). Mathematics: (algebra and beginnings of analysis and geometry, standard level): Textbook for 10th grade of general secondary education institutions. Kyiv: Heneza).
11. Кисельов, А. (1966). Геометрія. Підручник та збірник задач. 8–9 клас. (Kiselyov, A. (1966). Geometry. Textbook and collection of problems. 8–9 grade).
12. Киселев, А. П. (1961). Геометрия : ч. 2 : Стереометрия. Москва : Учпедгиз. (Kiselev, A. P. (1961). Geometry: Part 2: Stereometry. Moscow: Uchpedgiz).
13. Киселев, А. П. (1974). Геометрия : ч. 2 : Стереометрия : для 9–10 классов, под ред. и с доп. Н. А. Глаголева. Москва : Просвещение. (Kiselev, A. P. (1974). Geometry: part 2: Stereometry: for grades 9–10, In. H. A. Glagoleva (Ed. and add.). Moscow: Prosveshchenye).

14. Клопський, В. М. , Скопець, З. А. , Ягодовський, М. І. (1978). Геометрія 9–10, за ред. З. А. Скопеца. (Klopskyi, V. M., Skopets, Z. A., Yagodovskyi, M. I. (1978). Geometry 9–10, In Z. A. Skopets (Ed.)).
15. Колмогоров, А. Н., Семенович, А. Ф., Черкасов, Р. С. (1979). Геометрия 6–8. Москва : Просвещение. (Kolmogorov, A. N., Semenovich, A. F., Cherkasov, R. S. (1979). Geometry 6–8. Moscow: Prosveshchenye).
16. Погорєлов, О. В. (2007). Геометрія. Планіметрія. Підручник для 7–9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Київ : Школяр. (Pogorelov, O. V. (2007). Geometry. Planimetry. Textbook for grades 7–9 of general educational institutions. Kyiv: Shkoliar).
17. Погорєлов, О. В. (2004). Геометрія. Стереометрія. Підручник для 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Київ : Школяр. (Pogorelov, O. V. (2004). Geometry. Stereometry. Textbook for grades 10–11 of general educational institutions. Kyiv: Shkoliar).
18. Стєганцева, П. Г., Гречнєва М. О. (2015). Основи математики. Основи геометрії: навчально-методичний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика». Запоріжжя: ЗНУ. (Stegantseva, P. G., Grechneva, M. O. (2015). Fundamentals of mathematics. Basics of geometry: teaching and methodical guide for higher education master's degree holders in the "Mathematics" specialty. Zaporizhzhia: ZNU).
19. Тесленко, И. Ф., Чашечников, С. М., Чашечникова, Л. И. (1986). Методика преподавания планиметрии. Київ : Радянська школа. (Teslenko, I. F., Chashechnikov, S. M., Chashechnikova, L. I. (1986). Method of teaching planimetry. Kyiv: Radianska shkola).
20. Чашечнікова, Л. Г., Чашечникова, О. С. (2010). Вивчення геометрії – школа логічного мислення. Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО–2010), м. Черкаси, 24–26 листопада 2010 р. Черкаси: ЧНУ імені Богдана Хмельницького (сс. 148–149). (Chashechnikova, L. G., Chashechnikova, O. S. (2010). The study of geometry is a school of logical thinking. Materials of the International Scientific and Methodological Conference "Problems of Mathematical Education" (PMO–2010), Cherkasy, November 24–26, 2010. Cherkasy: Bohdan Khmelnytsky National University (pp. 148–149)).
21. Чашечникова, О. С. (2008). Вплив індивідуальних особливостей учнів на засвоєння навчального матеріалу з математики. Математика, 19(463), 1–6. (Chashechnikova, O. S. (2008). The influence of individual characteristics of students on the assimilation of educational material in mathematics. Mathematics, 19(463), 1–6).
22. Чашечникова, О. С. (2011). Вплив особливостей оперування навчальним матеріалом на розвиток творчого мислення учнів. Математика в школі, 3, 38–45. (Chashechnikova, O. S. (2011). The influence of the peculiarities of handling educational material on the development of creative thinking of students. Mathematics in school, 3, 38–45).
23. Чашечникова, О. С. (2011). Теоретико-методичні основи формування і розвитку творчого мислення учнів в умовах диференційованого навчання математики (дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02). Суми. (Chashechnikova, O. S. (2011). Theoretical and methodological foundations of the formation and development of creative thinking of students in the conditions of differentiated teaching of mathematics. (DSc. abstract). Sumy).
24. Чашечникова, О. С. (2010). Шляхи розвитку творчого мислення в умовах профільного навчання математики. Математика в школі, 10, 33–36; 11, 33–37. (Chashechnikova, O. S. (2010). Ways of development of creative thinking in the conditions of specialized teaching of mathematics. Mathematics in school, 10, 33–36; 11, 33–37).

Chashechnikova O., Bezludna T. Specificity of familiarity of modern students with the logical structure of geometry on an axiomatic basis.

The article examines the specifics of familiarizing modern high school students with the logical construction of geometry on an axiomatic basis. It is noted that the axiomatic method is widely used in mathematics, its understanding has a positive effect on the development of schoolchildren's thinking. Students' assimilation of systematic courses of planimetry and stereometry causes difficulties for schoolchildren, and one of the reasons is that geometry is the *only school discipline that is built on a deductive-axiomatic basis, and therefore fairly high demands are placed on the level of development of students' logical thinking, abstract thinking and spatial thinking. A characteristic feature of the axiomatic method is its abstractness, and, unfortunately, this contradicts the psychological and pedagogical features of modern schoolchildren, whose thinking is called mosaic, point-based, and the development of their ability to reason based on imaginary models is hindered by "dependence" on visualization.*

Different approaches to the construction and content of axioms of stereometry in school textbooks are analyzed. Based on the analysis, the author's vision of the presentation of the system of axioms of group C is proposed. The importance of textbooks having enough tasks for both applying axioms and understanding their essence is noted. It is advisable to supplement tasks from the main textbook with tasks from others, taking into account the differences in the axiom systems. It is justified that when familiarizing schoolchildren with the axioms of stereometry, it is necessary to use various visualizations to specify new information (models of spatial figures, tables, diagrams) and ICT for illustration, to accompany the explanation with actions with objects and relevant records. At the same time, it is important to use the visual guide in a timely manner, illustrating the essence of the explanation, involving the students themselves in working with the guide and the explanation.

Key words: *mathematics, geometry, axiomatic method, learning geometry, logical construction of geometry on an axiomatic basis.*