

## ПРО ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНУ КОРЕКТНІСТЬ ДЕЯКИХ РІВНЯНЬ МЕХАНІКИ

Сергій ПОЖИДАЄВ ✉

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна  
spozhy2@ukr.net  
<https://orcid.org/0000-0002-7336-0256>

### АНОТАЦІЯ

**Формулювання проблеми.** При математичному описі деяких явищ класичної і прикладної механіки (далі – механіки) виникають незрозумілі розмірнісні явища. Наприклад, кутова швидкість може отримувати дві різні одиниці вимірювання, нормальне прискорення – три, а такі фізичні величини як момент сили і механічна робота отримують одну і ту саму одиницю ньютон-метр. З наукової точки зору такі явища є суперечностями, які слід усунути. Адже Природа єдина і не суперечлива, тому опис її явищ теж повинен бути не суперечливим. Кожна фізична величина (у тій чи іншій конкретній галузі) повинна мати лише одну когерентну одиницю, а кожна одиниця повинна характеризувала лише одну фізичну величину. Тому можна стверджувати, що математичний апарат механіки потребує вдосконалення.

**Матеріали і методи.** У одній з попередніх робіт автора було встановлено, що незрозумілі розмірнісні явища є наслідком розмірнісної некоректності математичних співвідношень, обумовленої їх нестрогістю. Зокрема, було з'ясовано, що загальновідомі фундаментальні залежності елементарної геометрії, які беруть свій початок ще від Архімеда і споконвіку вважались бездоганними аналітичними, насправді є математично нестрогими емпіричними і напівемпіричними виразами. Це спонукає застосувати аналіз розмірностей і для перевірки коректності рівнянь механіки. У даній роботі також застосовувались базові положення аналітичної механіки та закону збереження енергії.

**Результати.** Перевірка дев'ятнадцяти рівнянь механіки засвідчила, що більша їх частина некоректна - математично нестрога або не узгоджена із законом збереження енергії. Некоректні рівняння приведено до математично строгого вигляду і узгоджено із законом збереження енергії. З них випливає однозначна система одиниць виміру величин механіки, яка, зокрема, включає п'ять уточнених одиниць. Жодного випадку, коли одна і та ж величина має різні одиниці, або різні величини мають одну і ту ж одиницю, у цій системі одиниць не спостерігається.

**Висновки.** Встановлено, що існуючий математичний апарат класичної і прикладної механіки дійсно має істотні недоліки і потребує вдосконалення.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** рівняння механіки; розмірнісна коректність; колова швидкість; нормальне прискорення; моменти.

## ON THE PHYSICAL AND MATHEMATICAL CORRECTNESS OF SOME EQUATIONS OF MECHANICS

Sergey POZHIDAYEV ✉

National University of life and environmental sciences of Ukraine, Ukraine  
spozhy2@ukr.net  
<https://orcid.org/0000-0002-7336-0256>

### ABSTRACT

**Formulation of the problem.** In the mathematical description of some phenomena of classical and applied mechanics (after this referred to as mechanics), incomprehensible dimensional phenomena arise. For example, angular velocity can have two different units of measurement, normal acceleration - three, and such physical quantities as moment of force and mechanical

Для цитування:	Пожидаяев С. Про фізико-математичну коректність деяких рівнянь механіки. <i>Фізико-математична освіта</i> , 2024. Том 39. № 1. С. 49-55. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i1-07
	Пожидаяев, С. (2024). Про фізико-математичну коректність деяких рівнянь механіки. <i>Фізико-математична освіта</i> , 39(1), 49-55. <a href="https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-07">https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-07</a>
For citation:	Pozhidayev, S. (2024). On the physical and mathematical correctness of some equations of mechanics. <i>Physical and Mathematical Education</i> , 39(1), 49-55. <a href="https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-07">https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-07</a>
	Pozhidayev, S. (2024). Pro fizyko-matematychnu korektnist deiakykh rivnian mekhaniky [On the physical and mathematical correctness of some equations of mechanics]. <i>Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education</i> , 39(1), 49-55. <a href="https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-07">https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-07</a>

work get the same unit newton-meter. From a scientific point of view, such phenomena are contradictions that should be eliminated. After all, Nature is one and uncontroversial; therefore, the description of its phenomena must also be uncontroversial. Each physical quantity (in this or that particular field) should have only one coherent unit, and each unit should characterize only one physical quantity. Therefore, the mathematical apparatus of mechanics needs improvement.

**Materials and methods.** One of the author's previous works established that incomprehensible dimensional phenomena result from the dimensional incorrectness of mathematical ratios due to their laxity. In particular, it was found that the well-known fundamental dependences of elementary geometry, which date back to Archimedes and have been considered impeccable analytical since time immemorial, are mathematically loose empirical and semi-empirical expressions. That prompts us to apply dimensional analysis to check the correctness of mechanics equations. This work also applied the basic principles of analytical mechanics and the law of energy conservation.

**Results.** A review of the nineteen mechanics equations showed that most need to be corrected - mathematically loose or inconsistent with the energy conservation law. The incorrect equations were brought to a mathematically rigorous form and reconciled with the energy conservation law. They lead to an unambiguous system of units of measurement for mechanics, which, in particular, includes five refined units. In this system of units, there are no cases where the exact quantity has different units or different quantities have the same unit.

**Conclusions.** It was established that the existing mathematical apparatus of classical and applied mechanics has significant shortcomings and can be improved.

**KEYWORDS:** *equations of mechanics; dimensional correctness; wheel speed; normal acceleration; moments.*

## ВСТУП

**Постановка проблеми.** При математичному описі деяких явищ класичної і прикладної механіки (далі – механіки) виникають незрозумілі розмірнісні явища. Наприклад, позначення одиниці кутової швидкості має вигляд рад/с. Воно впливає з рівняння  $\omega = 2\pi/T$ , де одиницею кута  $2\pi$  є радіан, а одиницею періоду  $T$  – секунда. Але кутову швидкість можна визначити і за виразом  $\omega = v/r$ , де  $v$  – колова (тангенціальна) швидкість руху точки по колу, м/с, а  $r$  – радіус кола, м. У правій частині виразу отримуємо позначення одиниці кутової швидкості у вигляді 1/с, або, що те саме,  $s^{-1}$ . У ньому відсутнє позначення «рад», внаслідок чого залишається невідомою сутність процесу (що розглядається саме обертальний рух, а не лінійний, а може і зовсім не рух, а секундна подача рідини чи скорострільність зброї), і одиниця, за допомогою якої цей процес оцінюється – оберт, градус, радіан, метр, літр, постріл тощо.

Таким чином, позначення одиниці кутової швидкості  $s^{-1}$  неінформативне, тобто метрологічно неякісне. Воно таке ж непридатне для застосування, як і позначення одиниці швидкості руху автомобіля, записане у вигляді «год<sup>-1</sup>» без вказівки на одиницю виміру шляху – кілометр чи миля.

Але співвідношення  $\omega = v/r$ , яке породжує одиницю  $s^{-1}$ , реально існує, воно об'єктивно потрібне для механіки і надає правильне числове значення кутової швидкості. Підстав для того, щоб відмовитись від його застосування, немає. Упорядником Міжнародної системи одиниць (СІ) не залишилось нічого іншого, як капітулювати перед цими обставинами і дозволити застосовувати неякісне позначення  $s^{-1}$  нарівні з якісним позначенням рад/с.

Але легалізація позначення  $s^{-1}$  породила нову проблему: у двох різних фізичних величин (кутової швидкості та частоти періодичного процесу) виявились однаковими їх позначення  $s^{-1}$ . Застосування для одиниці частоти спеціальної назви герц суті справи не змінило.

З наукової точки зору кожна з описаних вище двох неоднозначностей являє собою суперечність, конфлікт двох взаємовиключних наукових істин. У математично строгій науці такого не повинно бути. Адже Природа несуперечлива, тому і опис її явищ повинен бути несуперечливим. Кожній величині (у одній і тій же галузі) повинна відповідати лише одна когерентна одиниця, а кожній когерентній одиниці – лише одна величина.

**Аналіз актуальних досліджень.** Аналогічні незрозумілі розмірнісні явища спостерігаються і в одиницях інших величин. У згаданих явищ є одна спільна риса – вони виникають у тих одиницях, у яких є або гіпотетично може бути якась кутова одиниця – радіан або стерадіан. Тому склалась думка, що незрозумілі явища обумовлені специфічними властивостями площинного і просторового кутів і їх одиниць.

Упорядники СІ пояснили, що одиницями площинного і просторового кутів нібито є число «один», тобто, що ці кути нібито є безрозмірними величинами - пункт 5.4.8 брошури (Newell & Tiesinga, 2019). На цій підставі п. 2.3.3 тієї ж брошури дозволяє застосовувати позначення кутових одиниць не обов'язково, а вибірково («при необхідності»).

Проте кожен окремий користувач системи одиниць може мати своє уявлення про «необхідність». Тому сегмент СІ, що стосується кутових величин, став суб'єктивним, неоднозначним, тобто схоластичним, ненауковим. Аналіз розмірностей у ньому став неможливим.

Такий недолік системи одиниць принципівий, він стримує розвиток прикладних наук. Наприклад, у теорії кочення еластичних коліс ще з середини минулого сторіччя проходять дискусії про «радіусну проблему» (Петрушов, 1963; Петров, 1986; Пожидаев, 2021a; Пожидаев, 2021b) тощо. Науковці не можуть дійти згоди, чи тотожні радіуси еластичного колеса, одиницею одного з яких є метр, а іншого – м/рад. За однозначного підходу до одиниці радіан цю проблему було б вирішено давно і переконливо. Але неоднозначність СІ зробила задачу нерозв'язною.

Відомо багато спроб усунути незрозумілі розмірнісні явища – (Хантлі, 1970; Широков, 1978; Коган, 2011; Митрохин, 2000; Mohr & Phillips, 2015; Mohr et al., 2022; Quincey, 2016, 2021; Quincey et al., 2019; Leonard, 2021) тощо. Автори цих робіт скрупульозно вивчали властивості площинного і просторового кутів, обговорювали їхній статус (розмірнісні вони чи безрозмірнісні), аналізували, чи відносяться вони до похідних величин чи не відносяться, чи можна їх ввести в клас основних величин чи не можна, і пропонували самі різні удосконалення кутових величин і правил поводження з ними. Детально аналізувати всі ці пропозиції немає сенсу, бо їхній зміст зводиться лише до різних способів маскування зовнішніх проявів проблеми.

**Метою роботи** є усунення незрозумілих розмірнісних явищ, що спостерігаються у рівняннях механіки.

**МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ**

У роботі (Пожидаєв, 2023) було висунуто і підтверджено наукову гіпотезу про те, що площинний і просторовий кути є звичайними розмірнісними величинами, які не мають ніяких специфічних властивостей і тому не можуть бути причиною появи незрозумілих розмірнісних явищ. Ці явища є сигналами системи одиниць про розмірнісну некоректність відповідних математичних співвідношень. Після їх приведення до коректного вигляду незрозумілі розмірнісні явища зникають. Цей факт є ознакою штучності і шкідливості вибіркового застосування позначень кутових одиниць. Їх слід застосовувати в обов'язковому порядку. Це відновлює однозначну об'єктивну диференціацію величин і можливість аналізу розмірностей математичних виразів, що включають кутові величини.

Дієвість такого аналізу продемонстрована перевіркою загальновідомих фундаментальних залежностей елементарної геометрії, які беруть свій початок ще від Архімеда і споконвіку вважались бездоганними аналітичними. Виявилось, що насправді вони є математично нестрогими емпіричними і напівемпіричними виразами.

Було також встановлено і причину появи неповносправної одиниці кутової швидкості  $c^{-1}$ : рівняння  $\omega = v/r$ , яке породжує цю одиницю, математичне нестроге. Для обчислення кутової швидкості слід застосовувати математично строге рівняння  $\omega = v/\rho$ , де  $\rho$  – радіус кривизни кола, м/рад.

Ці факти спонукають застосувати метод аналізу розмірностей і для перевірки та вдосконалення рівнянь механіки. У даній роботі також застосовувались положення аналітичної механіки та закону збереження енергії.

**РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ**

У колонці 4 таблиці 1 наведено дев'ятнадцять загальновідомих рівнянь класичної і прикладної механіки, а у колонках 3 і 5 - позначення одиниць відповідно лівих і правих частин цих рівнянь, отриманих за умови, що згадані позначення застосовуються в обов'язковому порядку.

**Таблиця 1. Деякі рівняння класичної і прикладної механіки (заливкою комірок виділено сумнівні рівняння і некоректні позначення одиниць вимірювання)**

№	Величина і позначення її одиниці, прописаної в CI		Відоме рівняння і позначення одиниці його правої частини		Уточнене рівняння і позначення одиниці його правої частини	
	Величина	Позначення	Рівняння	Позначення	Рівняння	Позначення
1	2	3	4	5	6	7
1	Колова швидкість	м/с	$v = \omega r$	м·рад/с	$v = \omega \rho$	м/с
2	Нормальне (доцентрове) прискорення $a$	м/с <sup>2</sup>	$a = v^2/r$	м/с <sup>2</sup>	$a_n = 1v^2/\rho$	м/с <sup>2</sup>
3			$a = v\omega$	м·рад/с <sup>2</sup>	$a_n = 1v\omega$	
4			$a = \omega^2 r$	м·рад <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	$a_n = 1\omega^2 \rho$	
5	Момент сили $M$	кг·м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup> , тобто Н·м	$M = Fr$	кг·м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup> , тобто Н·м	$M_n = Fr\rho$	кг·м <sup>2</sup> /(с <sup>2</sup> ·рад), тобто Н·м/рад або Дж/рад
6			$M = dW/d\theta$	кг·м <sup>2</sup> /(с <sup>2</sup> ·рад), тобто Н·м/рад або Дж/рад	Уточнення не потребують	
7			$M = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \omega} \right)$	кг·м <sup>2</sup> /с	Уточнення не потребує	
8	Момент кількості руху $L$ , кутовий момент $\Delta L$	кг·м <sup>2</sup> /с	$L = \partial E / \partial \omega$	кг·м <sup>2</sup> /(с·рад)	Уточнення не потребує	кг·м <sup>2</sup> /(с·рад), тобто Дж·с/рад
9			$L = m\omega r^2$	кг·м <sup>2</sup> ·рад/с	$L_n = m\omega \rho^2$	
10			$L = mvr$	кг·м <sup>2</sup> /с	$L_n = mvr\rho$	
11			$\Delta L = Mt$	кг·м <sup>2</sup> /с	$\Delta L_n = M_n t$	
12	Масовий момент інерції $I_m$	кг·м <sup>2</sup>	$I_m = r^2 dm$	кг·м <sup>2</sup>	$I_{mn} = \rho^2 dm$	кг·м <sup>2</sup> /рад <sup>2</sup> , тобто Дж/(рад·с) <sup>2</sup>
13			$I_m = 2E/\omega^2$	кг·м <sup>2</sup> /рад <sup>2</sup>	Уточнення не потребує	
14	Осьовий момент інерції площі $I_A$	м <sup>4</sup>	$I_A = r^2 dA$	м <sup>4</sup>	$I_{An} = \rho^2 dA$	м <sup>4</sup> /рад <sup>2</sup>
15	Момент опору поперечного перерізу $M_r$	м <sup>3</sup>	$M_r = I_A / r_{\max}$	м <sup>3</sup>	$M_{rn} = I_{An} / \rho_{\max}$	м <sup>3</sup> /рад
16	Механічне напруження $t$	кг/(м·с <sup>2</sup> ), тобто Па	$t = M/M_r$	кг/(м·с <sup>2</sup> ), тобто Па	$t_n = M_n/M_r$	кг/(м·с <sup>2</sup> ), тобто Па
17	Механічна робота моменту сили $W$	кг·м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup> , тобто Дж	$W = M\theta$	кг·м <sup>2</sup> ·рад/с <sup>2</sup> , тобто Дж·рад	$W_n = M_n \theta$	кг·м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup> , тобто Дж
18	Потужність у обертальному русі $N$	кг·м <sup>2</sup> /с <sup>3</sup> , тобто Вт	$N = M\omega$	кг·м <sup>2</sup> ·рад/с <sup>3</sup> , тобто Вт·рад	$N_n = M_n \omega$	кг·м <sup>2</sup> /с <sup>3</sup> , тобто Вт
19	Кінетична енергія в обертальному русі $E$	кг·м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup> , тобто Дж	$E = I_m \omega^2 / 2$	кг·м <sup>2</sup> ·рад <sup>2</sup> /с <sup>2</sup> , тобто Дж·рад <sup>2</sup>	$E_n = I_{mn} \omega^2 / 2$	кг·м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup> , тобто Дж

Джерело: авторська розробка.

**Рядок 1.** Рівняння  $v = \omega r$  розмірнісно некоректне, бо позначення одиниць його лівої частини (м/с, колонка 3) і правої частини (м·рад/с, колонка 5) не збігаються. Причина такого явища – некоректність застосування радіуса кола  $r$ , одиницею якого є метр, для взаємозв'язку між коловою  $v$  і кутовою  $\omega$  швидкостями (Пожидаєв, 2023). Для цього потрібно застосовувати радіус кривизни кола  $\rho$ , одиницею якого є м/рад. Тобто, для обчислення колової швидкості треба користуватись математично строгим (і завдяки цьому – розмірнісно коректним) рівнянням  $v = \omega \rho$ . Воно забезпечує отримання правильної одиниці колової швидкості м/с – колонка 7 рядка 1.

**Рядки 2, 3 і 4.** Одиницею нормального прискорення є м/с<sup>2</sup>. Проте така одиниця впливає лише з одного рівняння, наведеного у другому рядку. З рівнянь, наведених у рядках 3 і 4, випливають некоректні одиниці м·рад/с<sup>2</sup> і м·рад<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> – колонка 5 вказаних рядків. Це є ознакою розмірнісної некоректності рівнянь і означає, що з рядків 2, 3 і 4 випливає відразу три різні наукові істини, якими є три вказані одиниці прискорення. Причиною цього різнобою є неправомірність застосування у рівняннях радіуса кола  $r$ . У них повинен застосовуватись радіус кривизни  $\rho$ . Таким чином, рівняння, наведені у рядках 2 і 4, повинні мати вигляд  $a = v^2/\rho$  і  $a = \omega^2 \rho$  відповідно. З них обох випливає одна і та ж одиниця прискорення м·рад/с<sup>2</sup>, але вона теж некоректна. Таким чином, всі три рівняння ( $a = v^2/\rho$ ,  $a = v\omega$  і  $a = \omega^2 \rho$ ) призводять до отримання однієї і тієї ж некоректної одиниці прискорення м·рад/с<sup>2</sup>. Це означає, що рівняння вже стали узгодженими між собою, але все ще залишаються математично нестрогими і потребують додаткового аналізу.

Звернімося до поелементного опису процесу виведення загальноприйнятої формули нормального прискорення (Воронков, 1966). Виявляється, що на одному з етапів цього процесу у формулі виникає співмножник  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{[\sin(\Delta\phi/2)]/(\Delta\phi/2)\}$ , який дорівнює 1 рад<sup>-1</sup>. Оскільки його числове значення дорівнює одиниці, то цим співмножником було знехтувано. Але така дія неправомірна, бо разом з коефіцієнтом «1» з формули зникла його одиниця «рад<sup>-1</sup>». Відновлення співмножника 1 рад<sup>-1</sup> забезпечує математичну строгість всіх трьох варіантів формули нормального прискорення. Уточнені рівняння мають вигляд  $a_n = 1v^2/\rho$ ,  $a_n = 1v\omega$  і  $a_n = 1\omega^2 \rho$  відповідно, де одиницею коефіцієнта «1» є рад<sup>-1</sup>. З кожного рівняння випливає одна і та сама наукова істина – одиницею нормального прискорення є м/с<sup>2</sup>. Всі суперечності, що спостерігались у рядках 2, 3 і 4, усунуто.

**Рядки 5, 6 і 7.** У механіці застосовуються поняття моменту сили, моменту кількості руху та масового моменту інерції, формулювання яких завершилось у XVII і XVIII сторіччях. Але у XIX сторіччі стало відомо, що всі закони і поняття фізики є наслідками із закону збереження енергії. Внаслідок цього згадані закони і поняття потрібно було переглянути і привести у відповідність до цього найбільш фундаментального закону Природи. Поняття моментів повинні бути сформульовані як похідні від «материнського» поняття енергії (чи роботи), а одиниці моментів – як похідні від «материнської» одиниці енергії джоуль. Проте шановні фізики за два сторіччя так і не перейшли від слів до діла. Можливо, вони сподівались, що цим займуться механіки, а механіки очікували цього від фізиків. Як наслідок, поняття моментів і сьогодні залишаються сформульованими у категоріях, не пов'язаних із законом збереження енергії.

Наприклад, поняття моменту сили (як дубокут сили  $F$  на плече  $r$ , рядок 5 таблиці) являє собою звичайний постулат, який нічим не обґрунтований, але і ні в кого не викликає заперечень. Він був сформульований Галілеєм у XVII сторіччі на прикладі простих механізмів і тому був вузькотехнічним. За чотири останніх сторіччя його суть не переглядалась і не уточнювалась. Відбувалось лише ускладнення словесного формулювання шляхом надання йому якомога більш «наукоподібного» вигляду.

За таких обставин поняття моментів за визначенням не можуть бути фізично коректними, що і призводить до появи аномальних розмірнісних явищ. Найвідомішим з них є збіг одиниць моменту сили і механічної роботи (чи енергії). Всі так зі шкільних років звикли до цього збігу, що і не звертають на нього увагу, вважають, що саме так і повинно бути. У роботі (Хантлі, 1970) його вважають безневинним винятком з правил. Але у Природі винятків немає, тому їх не повинно бути і в математичних описах явищ Природи.

Збіг одиниць моменту сили і механічної роботи є прямою ознакою неузгодженості поняття моменту сили із законом збереження енергії. Це підтверджується і двома наступними фактами.

Момент сили можна визначати як частку від ділення механічної роботи  $dW$  на кут повороту  $d\theta$ :  $M = dW/d\theta$  – рядок 6 таблиці 1. З цього співвідношення випливає наступне загальнофізичне математично строгі визначення моменту сили, сформульоване у енергетичному просторі: момент сили являє собою першу похідну від механічної роботи  $W$  за кутом повороту  $\theta$ . Одиницею моменту у такому випадку є Дж/рад, тобто Н·м/рад. Така одиниця узгоджена з поняттям механічної роботи, але вона не збігається з прийнятою у механіці одиницею Н·м. Це ставить під сумнів коректність останньої.

У загальновідомому рівнянні Лагранжа 2-го роду, записаному для обертального руху, є фрагмент  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right)$ , де  $E$  – кінетична енергія;  $\dot{q}$  – перша похідна за часом від узагальненої координати  $q$ , якою є кут повороту (тобто  $\dot{q}$  – це кутова швидкість  $\omega$ );  $\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}$ , або, що те ж,  $\frac{\partial E}{\partial \omega}$  – момент кількості руху – рядок 7 таблиці 1. Фізичний зміст цього фрагменту – момент від сил інерції, що виникають у тілі при змінах швидкості його обертання. З нього теж випливає одиниця моменту сили Дж/рад, тобто Н·м/рад.

Таким чином, у питанні про одиницю моменту сили теж існує суперечність між двома науковими істинами – одиницями Н·м/рад та Н·м. Коректною єлід вважати першу з них, яка безпосередньо впливає з «материнських» понять механічної роботи та кінетичної енергії. А одиниця Н·м фізично некоректна.

Уточнимо поняття моменту сили і у силовому просторі. Момент сили характеризує обертальний ефект від впливу сили  $F$  на деяке тіло. Тому елементарна механічна робота  $Fds$ , виконана силою  $F$  на шляху  $ds$  (розташованому у напрямку дії сили) під час повороту тіла на деякий елементарний кут  $d\theta$ , може бути подана як механічна робота  $M_n d\theta$  моменту сили  $M_n$  на шляху  $d\theta$ :

$$Fds = M_n d\theta, \quad (1)$$

де  $M_n$  – позначення уточненого (оновленого) моменту сили.

З рівності (1) випливає загальнофізичне, математично строгі визначення моменту сили, сформульоване у силовому просторі:

$$M_n = F(ds/d\theta), \quad (2)$$

Воно означає, що момент сили – це добуток сили  $F$  на коефіцієнт  $ds/d\theta$ , що є відношенням елементарного лінійного переміщення  $ds$  точки, що відбувається в напрямку докладання сили  $F$ , до елементарного кута повороту  $d\theta$ , що відповідає згаданому переміщенню  $ds$ .

Відношення  $ds/d\theta$  – це своєрідний масштабний коефіцієнт перетворення енергії поступального руху у механічну роботу обертального руху. Він пов'язує значення прикладеної до тіла сили та створюваного нею моменту. Стосовно до важелів, з якими мав справу ще Архімед, відношення  $ds/d\theta$  чисельно дорівнює довжині важеля, що вважається плечем сили. Але одиницею цього «плеча» є не метр, а м/рад. Тобто це плече являє собою не радіус  $r$ , а радіус кривизни  $\rho$  – колонка 6 рядка 5 таблиці.

Таким чином, формулювання поняття моменту сили у категоріях закону збереження енергії дає такі позитивні наслідки:

- забезпечує отримання фізично коректної когерентної одиниці моменту сили Н·м/рад;
- усуває збіг одиниць моменту сили та механічної роботи;
- при обчисленні добутку моменту сили на кут повороту надає коректну одиницю механічної роботи Дж;
- завершує повну аналогію між фізико-математичними описами явищ механіки прямолінійного та обертального рухів.

**Рядки 8 - 11.** З фізико-математичної точки зору момент кількості руху являє собою першу похідну від кінетичної енергії  $E$  за кутовою швидкістю  $\omega$ :  $\partial E/\partial \omega$  – колонка 4 рядка 8 таблиці.

У науково-практичній діяльності момент кількості руху  $L$  і кутовий момент  $\Delta L$  обчислюють за іншими співвідношеннями, наведеними у колонці 4 рядків 9 – 11. З чотирьох співвідношень, наведених у рядках 8 - 11, впливають три різні одиниці, тобто три різні наукові істини - кг·м<sup>2</sup>/(с·рад), кг·м<sup>2</sup>·рад/с і кг·м<sup>2</sup>/с. Перша з них впливає безпосередньо з «материнського» поняття кінетичної енергії  $E$ , внаслідок чого коректною слід вважати саме її, а решту одиниць слід вважати фізично некоректними. Таким чином, одиниця кг·м<sup>2</sup>/с, прийнята сьогодні для моменту кількості руху і кутового моменту, є фізично некоректною, її слід виправити на одиницю кг·м<sup>2</sup>/(с·рад), або, що те саме, Дж·с/рад.

Внаслідок цього слід уточнити і рівняння, наведені у колонці 4 рядків 9 - 11. Для цього запишемо оновлену одиницю кг·м<sup>2</sup>/(с·рад) у трьох різних варіантах: (кг)·(рад/с)·(м/рад)<sup>2</sup>, (кг)·(м/с)·(м/рад) і ((кг·м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>·рад))·с. З них впливають аналітичні фізично строгі рівняння  $L_n = m\omega\rho^2$ ,  $L_n = mvr$  і  $\Delta L_n = M_n t$  відповідно, кожне з яких надає коректну одиницю кг·м<sup>2</sup>/(с·рад). Таким чином, всі суперечності, які існували між одиницями, отримуваними у рядках 8 - 11, усунуто.

**Рядки 12 і 13.** Під масовим моментом інерції  $I_m$  у механіці розуміється добуток маси точки  $dm$  на квадрат радіуса її обертання  $r$ :  $I_m = r^2 dm$ . Це поняття теж являє собою звичайну угоду, яка нічим не обґрунтована, але і ні в кого не викликає заперечень. З наведеного рівняння впливає одиниця масового моменту кг·м<sup>2</sup>. Але її застосування у процесі обчислення кінетичної енергії обертального руху призводить до отримання некоректної одиниці енергії Дж·рад<sup>2</sup> – див. колонку 5 рядка 19 таблиці. Це ознака неузгодженості одиниці масового моменту інерції кг·м<sup>2</sup> з одиницею енергії джоуль.

Для уточнення одиниці масового моменту інерції «прив'яжемо» її до «материнського» поняття кінетичної енергії. З виразу  $E = I_m \omega^2 / 2$  впливає рівняння зв'язку  $I_m = 2E/\omega^2$ . З нього, у свою чергу, впливає уточнена одиниця масового моменту інерції кг·м<sup>2</sup>/рад<sup>2</sup>. Таким чином, одиниця масового моменту інерції кг·м<sup>2</sup> (колонка 3 рядків 12 і 13) фізично некоректна, її слід виправити на одиницю кг·м<sup>2</sup>/рад<sup>2</sup> (або, що те саме, Дж/(рад·с<sup>2</sup>)), узгоджену з одиницею кінетичної енергії джоуль (колонка 7 тих же рядків).

Уточнену одиницю кг·м<sup>2</sup>/рад<sup>2</sup> можна записати у вигляді кг·(м/рад)<sup>2</sup>, де вираз у дужках є одиницею радіуса кривизни  $\rho$ . Таким чином, оновленим, фізично строгим поняттям масового моменту інерції точки, узгодженим з поняттям механічної енергії, є добуток маси точки  $dm$  на квадрат радіуса кривизни  $\rho$ :  $I_{mn} = \rho^2 dm$  – колонка 6 рядка 12 таблиці.

**Рядок 14.** Одиницею осьового моменту інерції площі  $I_A$  в прикладній механіці прийнято м<sup>4</sup>. Але цей момент є повною аналогією масового моменту інерції  $I_m$  – див. колонку 4 рядка 12. Тому не потребує доведення, що оновлене рівняння для обчислення моменту інерції площі  $I_{An}$  повинне мати вигляд  $I_{An} = \rho^2 dA$ , з якого випливає, що одиницею даного моменту є м<sup>4</sup>/рад<sup>2</sup>. Тобто, прийнята в прикладній механіці одиниця осьового моменту інерції м<sup>4</sup> є некоректною і її слід виправити на м<sup>4</sup>/рад<sup>2</sup>.

**Рядок 15.** Момент опору поперечного перерізу  $M_r$  визначають за співвідношенням  $M_r = I_A / r_{\max}$ , з якого випливає, що одиницею згаданого моменту є м<sup>3</sup>. Проте така одиниця вже існує - це одиниця об'єму м<sup>3</sup>. Таким чином, знову отримуємо «нешкідливий виняток з правил», якого у математично і фізично строгій науці не повинно бути. Момент опору поперечного перерізу повинен мати якусь іншу одиницю. Вона впливає з уточненого співвідношення для обчислення моменту опору поперечного перерізу  $M_{rn} = I_{An} / \rho_{\max}$  і має вигляд м<sup>3</sup>/рад. Коректність такої одиниці буде підтверджена результатом, отриманим у наступному рядку таблиці. Таким чином, одиниця моменту опору поперечного перерізу м<sup>3</sup> фізично некоректна, її слід виправити на одиницю м<sup>3</sup>/рад.

**Рядок 16.** Механічне напруження розраховують за відомим рівнянням прикладної механіки  $t = M/M_r$ , у яке входять розмірнісно некоректні величини  $M$  і  $M_r$ . Проте їхні некоректності взаємно компенсуються, завдяки чому результат розрахунку надає коректну одиницю кг/(м·с<sup>2</sup>), тобто паскаль. Замінивши величини  $M$  і  $M_r$  оновленими, розмірнісно коректними величинами  $M_n$  і  $M_{rn}$ , отримуємо уточнене рівняння  $t_n = M_n / M_{rn}$ , яке теж надає коректну одиницю механічного напруження паскаль. Ця обставина є підтвердженням правильності одиниці моменту опору поперечного перерізу м<sup>3</sup>/рад, отриманої у попередньому рядку таблиці.

**Рядки 17 і 18.** Обчислення механічної роботи і потужності моменту сили, виконані із застосуванням загальноприйнятого поняття моменту сили, призводять до отримання некоректних одиниць роботи і потужності Дж·рад і Вт·рад відповідно – колонка 5 згаданих рядків. Але застосування уточненого поняття моменту сили усуває ці вади – колонки 6 і 7 тих же рядків.

**Рядок 19.** Одиницею кінетичної енергії є джоуль, тобто  $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2$ . Як вже згадувалось, при застосуванні загальноприйнятої одиниці масового моменту інерції  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$  з рівняння  $E=I_m\omega^2/2$  впливає некоректна одиниця кінетичної енергії  $\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{рад}^2/\text{с}^2$ , тобто  $\text{Дж}\cdot\text{рад}^2$ . Застосування коректної одиниці масового моменту інерції  $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{рад}^2$  забезпечує отримання правильної одиниці кінетичної енергії  $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2$ , тобто Дж – колонка 7 рядка 19.

## ВИСНОВКИ

Встановлено, що існуючий математичний апарат класичної і прикладної механіки дійсно має істотні недоліки і потребує вдосконалення. А саме, більша частина з дев'ятнадцяти розглянутих рівнянь механіки математично нестрога або фізично некоректна. Рівняння для визначення кулової швидкості і нормального прискорення математично нестрогі через застосування у них поняття радіуса кола замість поняття радіуса кривизни. А рівняння для обчислення моментів фізично некоректні через їх неузгодженість із законом збереження енергії.

У даній роботі всі розмірнісно некоректні рівняння механіки приведено до математично строгого вигляду і узгоджено із законом збереження енергії. Жодного випадку, коли одна і та ж фізична величина має дві різні одиниці, або дві різні величини мають одну і ту ж одиницю, в уточненій сукупності рівнянь механіки не існує.

Таким чином, встановлено, що всі розмірнісні неузгодженості, які спостерігались у розглянутих рівняннях механіки, дійсно були ознакою недосконалості останніх. Аналіз розмірностей може і повинен застосовуватись для перевірки і вдосконалення математичних залежностей, які включають кутові величини.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Newell, D.B., & Tiesinga, E. (Eds.). (2019). *The International System of Units (SI)*. NIST Special Publication 330 2019 edition. <https://doi.org/10.6028/NIST.SP.330-2019>.
- Leonard, B.P. (2021). Proposal for the dimensionally consistent treatment of angle and solid angle by the International System of Units (SI). *Metrologia*, 58, 052001. <https://doi.org/10.1088/1681-7575/abe0fc>.
- Mohr, P.J., & Phillips, W.D. (2015). Dimensionless units in the SI. *Metrologia*, 52(1), 40–47. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/52/1/40>.
- Mohr, P.J., Shirley, E.I., Phillips, W.D., & Trott, M. (2022). On the dimension of angles and their units. *Metrologia*, 59(5), <https://doi.org/10.1088/1681-7575/ac7bc2>.
- Quincey, P. (2016). Natural units in physics, and the curious case of the radian. *Physics Education*, 51(6), <https://doi.org/10.1088/0031-9120/51/6/065012>.
- Quincey, P., Mohr, P. J., & Phillips, W. D. (2019). Angles are in herently neizer length mration nor dimensionless. *Metrologia*, 56(4), 043001. <https://doi.org/10.1088/1681-7575/ab27d7>.
- Quincey, P. (2021). Angles in the SI: a detailed proposal for solving the problem. *Metrologia*, 58, 053002. <https://doi.org/10/1088/1681-7575/ac023f>.
- Воронков, И.М. (1966). *Курс теоретической механики*. Наука.
- Коган, И.Ш. (2011). Физическая величина не должна иметь единицу  $\text{м}^{-1}$  или  $\text{с}^{-1}$ . *Законодательная и прикладная метрология*, 5, 43-49.
- Митрохин, А.Н. (2000). Математика и её роль в анализе размерностей и образовании единиц измерений. *Законодательная и прикладная метрология*, 5, 39-47.
- Петров, В.А. (1986). Узловые вопросы теории качения пневматического колеса. *Тракторы и сельхозмашины*, 8, 18-22.
- Петрушов, В.А. (1963). К вопросу о качении эластичного колеса по твердой опорной поверхности. *Автомобильная промышленность*, 2, 5-9.
- Пожидаев, С.П. (2021а). О теории качения и пятом колесе телеги. *Автомобильная промышленность*, 6, 19-27.
- Пожидаев, С.П. (2021б). О теории качения и пятом колесе телеги. *Автомобильная промышленность*, 7, 21-26.
- Пожидаев, С.П. (2023). Радіанна проблема в СІ – наукова містифікація? *Техніка і технології АПК*, 3, 28-33.
- Хантли, Г. (1970). *Анализ размерностей*. Мир.
- Широков, К.П. (1978). О статусе угловых единиц. *Измерительная техника*, 9, 30-33.

## REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

- Newell, D.B., & Tiesinga, E. (Eds.). (2019). *The International System of Units (SI)*. NIST Special Publication 330 2019 edition. <https://doi.org/10.6028/NIST.SP.330-2019>.
- Leonard, B.P. (2021). Proposal for the dimensionally consistent treatment of angle and solid angle by the International System of Units (SI). *Metrologia*, 58, 052001. <https://doi.org/10.1088/1681-7575/abe0fc>.
- Mohr, P.J., & Phillips, W.D. (2015). Dimensionless units in the SI. *Metrologia*, 52(1), 40–47. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/52/1/40>.
- Mohr, P.J., Shirley, E.I., Phillips, W.D., & Trott, M. (2022). On the dimension of angles and their units. *Metrologia*, 59(5), <https://doi.org/10.1088/1681-7575/ac7bc2>.
- Quincey, P. (2016). Natural units in physics, and the curious case of the radian. *Physics Education*, 51(6), <https://doi.org/10.1088/0031-9120/51/6/065012>.
- Quincey, P., Mohr, P. J., & Phillips, W. D. (2019). Angles are in herently neizer length mration nor dimensionless. *Metrologia*, 56(4), 043001. <https://doi.org/10.1088/1681-7575/ab27d7>.
- Quincey, P. (2021). Angles in the SI: a detailed proposal for solving the problem. *Metrologia*, 58, 053002. <https://doi.org/10/1088/1681-7575/ac023f>.
- Voronkov, I.M. (1966). *Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Course of theoretical mechanics]*. Nauka.
- Kogan, I.Sh. (2011). Fizicheskaya velichina ne dolzhna imet' yedinitu  $\text{m}^{-1}$  ili  $\text{s}^{-1}$  [A physical quantity should not have the unit  $\text{m}^{-1}$  or  $\text{s}^{-1}$ ]. *Zakonodatel'naya i prikladnaya metrologiya – Legislative and applied metrology*, 5, 43-49.
- Mitrokhin, A.N. (2000). Matematika i yeyo rol' v analize razmernostey i obrazovanii yedinit izmereniy [Mathematics and its role in the analysis of dimensions and the formation of units of measurement]. *Zakonodatel'naya i prikladnaya metrologiya – Legislative and applied metrology*, 5, 39-47.
- Petrov, V.A. (1986). Uzlovyye voprosy teorii kacheniya pnevmaticheskogo koleasa [Key issues in the theory of rolling of a pneumatic wheel]. *Traktory i sel'khoz mashiny – Tractors and agricultural machines*, 8, 18-22.

12. Petrushov, V.A. (1963). K voprosu o kachenii elastichnogo koleasa po tverдой opornoй poverkhnosti [On the issue of rolling an elastic wheel on a solid supporting surface]. *Avtomobil'naya promyshlennost' – Automotive industry*, 12, 5-9.
13. Pozhidayev, S.P. (2021a). O teorii kacheniya i pyatom kolese telegi [On the theory of rolling and the fifth wheel of the cart]. *Avtomobil'naya promyshlennost' – Automotive industry*, 6, 19-27.
14. Pozhidayev, S.P. (2021b). O teorii kacheniya i pyatom kolese telegi [On the theory of rolling and the fifth wheel of the cart]. *Avtomobil'naya promyshlennost' – Automotive industry*, 7, 21-26.
15. Pozhidayev, S.P. (2023). Radianna problema v SI – naukova mistyfikatsiya? [The radian problem in SI - a scientific hoax?]. *Tekhnika i tekhnolohiyi APK – Techniques and technologies of agricultural industry*, 3, 28-33. (in Ukrainian).
16. Huntley, G. (1970). *Analiz razmernostey [Dimensional analysis]*: Mir.
17. Shirokov, K.P. (1978). O statuse uglovykh yedynits [On the status of angular units]. *Izmeritel'naya tekhnika – Measuring technology*, 9, 30-33.

Матеріал надійшов до редакції 04.12.2023р.

