ОБГРУНТУВАННЯ ОДНОЗНАЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

Інеса ПЕСОЦЬКА, Іван МОРОЗ

Методологія розв'язування рівнянь Максвелла для дослідження магнітного поля в курсі електродинаміки у підготовці вчителя фізики.

Methodology of ground of nicety of decisions of equalizations of Maxwell is examined for magnetic-field in a course an electrodynamics at preparation of teachers of physics.

Постановка проблеми. Силову характеристику магнітного поля електричних струмів (вектор індукції $\vec{B}$), зосереджених в обмеженій області простору, можна дослідити різними способами: наприклад, за законом Біо-Савара-Лапласа, за теоремою про циркуляцію цього вектора, або – через векторний потенціал. У свою чергу, вирази для векторного потенціалу $\vec{A}$ магнітного поля, при заданому розподілі струмів, можна розрахувати за допомогою рівнянь Пуассона і Лапласа або безпосереднім інтегруванням [1-4]. Причому останній вираз, очевидно, слід розглядати, як розв'язок рівнянь Пуассона і Лапласа [4, 7].

Як відомо, рівняння Пуассона і Лапласа є рівняннями в частинних похідних другого порядку, які допускають у загальному випадку незліченну кількість лінійно незалежних розв'язків для потенціалу, а значить і для вектора індукції магнітного поля. Тому необхідно обґрунтувати питання про те, як із величезної кількості лінійно незалежних рішень, які задовольняють рівнянням Пуассона і Лапласа, вибрати одне єдине, яке відповідає заданій конфігурації струмів.

Аналіз навчальних посібників для ВНЗ [1-3, 6-9]) і актуальних досліджень, виконаний нами, а також в [5], показує що це питання залишилося поза увагою методичної науки, не висвітлене у навчальній літературі і не завжди розглядається в лекційній практиці, що є абсолютно необґрунтованим.

Тому **в даній статті** пропонується до розгляду один із можливих варіантів обґрунтування вибору єдиного розв'язку рівнянь Пуассона і Лапласа, що відповідає конкретній конфігурації струмів, яке викладач повинен виконати під час читання лекцій з теми «Стаціонарне магнітне поле», оскільки відсутність такого обґрунтування призводить до догматизму в сприйнятті матеріалу.

Виклад основного матеріалу. Для вирішення питання про вказане обґрунтування однозначності розв'язків рівнянь Максвелла необхідно скористатися наступними, відомими студентам, теоретичними відомостями.

1. Магнітне поле за наявності струмів провідності, провідників і діелектриків описується системою рівнянь:

$$rot\vec{B} = \mu\mu_0\vec{j} \text{ (або } rot\vec{H} = \vec{j}\text{) і } div\vec{B} = 0 \text{ ,}$$

де μ - магнітна проникність речовини, яка формальним чином враховує наявність у ньому молекулярних струмів, $\vec{j}$ - об'ємна густина струмів провідності, μ_0 - магнітна стала, $\vec{H}$ - напруженість магнітного поля, яка пов'язана з індукцією поля матеріальним рівнянням $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$.

2. Для векторів $\vec{B}$ і $\vec{H}$, що характеризують електричне поле, справедливі, так звані, граничні умови, які визначають поведінку їх нормальних і тангенціальних складових на межі середовищ з різною магнітною проникністю.

3. Індукція магнітного поля виражається через векторний потенціал наступним чином: $\vec{B} = rot\vec{A}$.

4. Взаємодія електричних зарядів виражається через вектори, що характеризують поле:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\vec{H}dV \text{ .} \qquad \text{(I)}$$

Останній вираз дає можливість стверджувати, що в кожній одиниці об'єму магнітного поля локалізована енергія: $u = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}$, тобто енергія взаємодії струмів зосереджена у магнітному полі.

5. Для магнітного поля справедливий принцип суперпозиції.

Отже, нехай задана система тіл, серед яких є як провідники з відомим розподілом струмів, так і інші речовини з відомою магнітною проникністю, за допомогою якої враховується молекулярні струми, які завжди існують в атомах та молекулах. Таким чином, будемо вважати, що в кожній точці простору відома густина струмів провідності і магнітна проникність речовини. Доведемо, що магнітне поле, заданої системи молекулярних струмів і струмів провідності, описується єдиним набором характеристик поля $\vec{A}$, $\vec{B}$ і $\vec{H}$, які задовольняють рівнянням Максвелла і граничним умовам. Доведення будемо вести від протилежного, тобто припустимо, що існує декілька різних виразів для векторного потенціалу, напруженості та індукції магнітного поля, створеного сукупністю вказаної системи струмів.

Усі величини, які відносяться до деякого одного набору характеристик поля, позначимо одним штрихом, а до деякого іншого - двома штрихами. Для першого набору характеристик маємо:

$$\vec{B}' = rot\vec{A}'; \quad rot\vec{H}' = \vec{j}; \quad div\vec{B}' = 0. \qquad \text{(II)}$$

Аналогічним рівнянням задовольняє другий набір характеристик поля:

$$\vec{B}'' = rot\vec{A}''; \quad rot\vec{H}'' = \vec{j}; \quad div\vec{B}'' = 0. \qquad \text{(III)}$$

Використовуючи принцип суперпозиції, можна вважати, що поле, яке описується, наприклад, величинами $\vec{A}'$, $\vec{B}'$ і $\vec{H}'$ є суперпозицією поля $\vec{A}''$, $\vec{B}''$ і $\vec{H}''$, і деякого третього поля $\vec{A}$, $\vec{B}$ і $\vec{H}$, яке умовно назвемо різницевим полем:

$$\vec{B} = \vec{B}' - \vec{B}''; \quad \vec{H} = \vec{H}' - \vec{H}''; \quad \vec{A} = \vec{A}' - \vec{A}''$$

і запишемо рівняння, яким задовольняє різницеве поле:

$$\vec{B} = rot\vec{A}; \quad rot\vec{H} = 0; \quad div\vec{B} = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Якщо наше припущення про можливість існування різних розв'язків рівнянь Максвелла вірне, тобто можливе існування різних полів, які відповідають заданій конфігурації струмів, то з кожним із цих полів має бути пов'язана енергія, яка визначається виразом (I) і, отже, енергія різницевого поля повинна дорівнювати:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\vec{H}dV = \frac{1}{2}\int_V \frac{B^2}{\mu\mu_0}dV\,. \qquad \text{(V)}$$

Виконаємо перетворення правої частини, використовуючи відому формулу векторного аналізу, яка для векторів $\vec{H}$ і $\vec{A}$ матиме вигляд:

$$div[\vec{A}\vec{H}] = \vec{H}rot\vec{A} - \vec{A}rot\vec{H}\,.$$

Тому вираз (V) запишемо таким чином:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}rot\vec{H}dV + \frac{1}{2}\int_V div[\vec{A}\vec{H}]dV.$$

Перший інтеграл у правій частині дорівнює нулю (див. (IV)), тому маємо:

$$W = \frac{1}{2}\int_V div[\vec{A}\vec{H}]dV.$$

До інтегралу у правій частині застосуємо формулу Остроградського-Гаусса:

$$W = \frac{1}{2}\int_V div[\vec{A}\vec{H}]dV = \frac{1}{2}\oint_S [\vec{A}\vec{H}]d\vec{S}\,, \qquad \text{(VI)}$$

де *S* – замкнута поверхня, яка охоплює об'єм *V*.

У формулі Остроградського-Гаусса (VI) у правій частині поверхня інтегрування – довільна, але вона повинна охоплювати об'єм, за яким виконується інтегрування. Це може бути як власна поверхня виділеного об'єму *V*, так і поверхня незрівнянно більша за його власну поверхню (але обов'язково її охоплювати).

Розширивши межі інтегрування в (VI) на весь простір, який зайнятий магнітним полем, ми можемо знайти всю енергію різницевого поля, тобто інтегрування в (VI) виконуємо по всьому об'єму, включаючи і нескінченно віддалені точки. Систему тіл із струмами провідності і молекулярними струмами, які існують в обмеженій частині простору, по відношенню до дуже віддалених точок, можна розглядати як магнітний момент, що знаходиться у центрі сфери нескінченно великого радіусу. Потенціал $\vec{A}$ поля магнітного моменту зменшується не повільніше ніж $1/R^2$, де R – відстань від точки, де зосереджений магнітний момент, до точки спостереження (поверхні сфери). Модуль вектора $\vec{H}$ магнітного моменту зменшується не повільніше, ніж $1/R^3$. Отже, їх добуток зменшується не повільніше, ніж $1/R^5$, тоді як поверхня росте не швидше ніж $\sim R^2$. Тому інтеграл $\frac{1}{2}\oint_S \left[\vec{A}\vec{H}\right] d\vec{S}$ по нескінченно віддаленій поверхні дорівнює нулю. Рівність нулю цього інтегралу на поверхні, що обмежує поле, означає, що енергія різницевого поля дорівнює нулю:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\vec{B}dV = \frac{1}{2}\int \mu\mu_0 B^2 dV = 0 .$$

Оскільки квадратична функція B^2 не може бути від'ємною, то в будь-якій точці різницевого поля величина B^2, а, отже, і B дорівнює нулю. Таким чином, різницевого поля не існує, а тому:

$$\vec{B}' = \vec{B}''; \qquad \vec{H}' = \vec{H}''; \qquad \vec{A}' = \vec{A}'' .$$

Таким чином, наше припущення про можливе існування безлічі розв'язків рівнянь Пуассона і Лапласа, які задовольняють рівнянь Максвелла і граничним умовам, для заданої конфігурації струмів виявляється невірним, що і визначає твердження: **розв'язок, який задовольняє рівнянням поля і граничним умовам, є єдиним**.

Висновки: 1. Розглянута методика обґрунтування однозначності розв'язків рівнянь Максвелла ставить остаточну точку у формуванні уявлень студентів про властивості магнітного поля та методи його розрахунку і в запропонованому (чи іншому) варіанті обов'язково повинна використовуватися викладачами в лекційному курсі, оскільки без такого обґрунтування студенти повинні прийняти «на віру» розв’язок задачі про обчислення характеристик поля.

2. Оскільки вектор напруженості $\vec{E}$ електричного поля виражається через скалярний потенціал (φ), а останній, як і векторний потенціал $\vec{A}$ магнітного поля, визначається розв’язками рівнянь Пуассона і Лапласа, то, очевидно, залишається невирішеним питання і про методичне обґрунтування у навчальному процесі підготовки вчителів фізики однозначності розв’язків рівнянь Максвелла і для електричного поля, а в загальнішому випадку - і для електромагнітного поля.

Література

1. Бредов М.М. Классическая электродинамика / М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. – М.: Наука, 1985. – 400 с.

2. Тамм И.Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М.: Наука, 1966. – 624 с.

3. Мултановский В.В. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика / В.В. Мултановский, А.С. Василевский. – М.: Просвещение, 2006, – 352 с.

4. Мороз І.О. Основи електродинаміки. Магнітостатика: навчальний посібник (гриф МОН України лист №1/11-6715 від 21 липня 2010 р.) / І.О. Мороз. – Суми: Видавництво «МакДен», 2011. – 162 с.

5. Коновал О.А. Теоретичні та методичні основи вивчення електродинаміки на засадах теорії відносності: монографія / О.А. Коновал; Міністерство освіти і науки України; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2009. – 346 с.

6. Сивухин Д.В. Общий курс физики : / Д.В. Сивухин. Электричество – Т. III. – М.: Наука, 1977. – 688 с.

7. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм / А.Н. Матвеев. – М. Высшая школа, 1983. – 463 с.

8. В.И. Белодед. Электродинамика: / В.И. Белодед. М. Инфа-М. Новое знание, 2011. – 208 с.

9. А.М. Сомов. Электродинамика / В.В. Старостин, С.Д. Бенеславский. – М. Горячая линия – Телеком. 2011. – 198 с.