позволит избежать сложных предложений и однообразных формулировок, а также способствует быстрому запоминанию определений русском языке. Установлено, что наиболее эффективной является лекция с применением обратной связи. Такой формат занятия создает дополнительную мотивацию у слушателей, позволяет преподавателю не только контролировать усвоение слушателями материала лекции, но и соответственно регулировать его количество и сложность. Учитывая особенности национальной поведения иностранных граждан, заметное влияние на качество лекционного занятия должны ораторские и организаторские способности преподавателя.

Ключевые слова: *высшее медицинское образование Украины, иностранные слушатели подготовительного отделения, лекции, математика, физика.*

Kisileva T. A., Fomenko O. Z. Features lectures in mathematics and physics to foreign students of the preparatory Department as a basic course for the discipline «Medical and biological physics» (for example, SE «Dnipropetrovsk medical Academy Ministry of health of Ukraine»)

The main factors affecting the quality of Russian-language lectures of mathematics and physics for foreign students of medical school preparatory department are observed in the article. It was discovered and analyzed the most problematic aspects of listening and note-taking during lectures. The presence of student's basic knowledge on the subject of lectures and personal interest significantly increase the level of mastering the terminology and new language conceptual apparatus. It was found the necessity of using adapted educational-methodological manual, which shall contain dictionary (English, French), clearly structured and concise statement of the material. The widespread use of diagrams and drawings gives ability avoid complex sentences and repetitive wording and promotes rapid memorization of definitions in Russian. It was found that the most effective use of lecture feedback. This format creates additional motivation classes in the audience, not only allows the teacher to monitor students mastering the material lectures, but also to regulate the quantity and complexity. The significant impact on the quality of lectures are oratorical and organizational skills of teacher, especially given the peculiarities of national conduct of foreigners.

Keywords: *higher medical education, Ukraine, foreign students of preparatory department, lectures, mathematics, physics.*

УДК 371.315.6:51

Н. В. Кульчицька,
Р. І. Собкович
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

ПОХІДНА ДОПОМАГАЄ ПРИ ВІДШУКАННІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ

У даній статті наведено приклади відшукання розв'язків рівнянь із врахуванням властивостей функції (проміжки монотонності, кількість коренів, екстремуми), які досліджуються за допомогою похідної. Запропонований матеріал буде корисним вчителям при підготовці учнів до математичних турнірів і олімпіад.

Ключові слова: *рівняння, корені рівняння, єдність розв'язку, похідна, монотонність функції, екстремум, навчання математики.*

Постановка проблеми. При розв'язуванні нестандартних рівнянь з курсу елементарної математики досить часто один із коренів легко визначається. У розв'язниках задач такий випадок супроводжується словами «легко бачити, що число … є коренем рівняння». Якщо цей очевидний корінь єдиний, то розв'язання задачі на цьому можна було б завершити. Залишається тільки обґрунтувати те, що інших розв'язків немає. В окремих випадках тут допомагає дослідження виразів на монотонність. Так при розв'язанні рівняння $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{2}$ єдиність очевидного кореня $x = 0$ випливає з монотонності лівої частини. Дещо складніші міркування необхідно виконати у випадку рівняння $3^x+4^x=5^x$. Асоціація з єгипетським трикутником наводить на думку про очевидність кореня $x = 2$ Розділивши на 5^x, отримуємо рівняння $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$, звідки, враховуючи монотонність лівої частини, стверджуємо, що цей корінь єдиний. А як поступити у випадку рівняння $2^x+3^x=4^x+1$?

Мета статті: ознайомити із методом доведення існування розв'язків рівнянь та їх відшукання з використанням похідної функції.

Виклад основного матеріалу.

Повернемось до рівняння $2^x+3^x=4^x+1$. Очевидні два його розв'язки: $x = 0$ та $x = 1$. Покажемо, що інших розв'язків немає. Для цього розглянемо функцію $f(x)=2^x+3^x-4^x-1$. Знайдемо її похідну $f'(x)=\ln 2\cdot 2^x+\ln 3\cdot 3^x-\ln 4\cdot 4^x$ та дослідимо, скільки коренів може мати рівняння $f'(x)=0$. Маємо

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln 2\cdot 2^x+\ln 3\cdot 3^x-\ln 4\cdot 4^x=0 \Leftrightarrow \ln 2\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^x+\ln 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-\ln 4=0.$$

Розглянемо функцію, визначену лівою частиною останнього рівняння:

$$g(x)=\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+\ln 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-\ln 4.$$

Знаходимо $g'(x)=-\ln^2 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+\ln 3\cdot\ln\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x$. Очевидно, що для довільних x рівняння $g'(x)=0$ не має розв'язків (обидва доданки від'ємні). Тому функція $g(x)$ монотонна і рівняння $4^x\cdot g(x)=0$ або $f'(x)=0$ може мати не більше одного кореня. Тоді функція $f(x)$ може мати не більше, ніж один екстремум та два проміжки монотонності, а рівняння $f(x) = 0$ відповідно може мати не більше, ніж два корені. Отже, крім розв'язків $x = 0$ та $x = 1$ інших немає.

Зауважимо, що обґрунтування монотонності не обов'язково потрібно прив'язувати до відшукання похідної. Так при розв'язуванні рівняння

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+5}+2\sqrt{x^2+5x}=25-2x$$

насамперед встановлюємо, що областю визначення є промінь $x\geq 0$. Для всіх таких значень кожен з трьох доданків у лівій частині рівняння монотонно зростає, оскільки при зростанні x зростають підкореневі вирази, а, отже, значення коренів та їхня сума. Тому і весь вираз у лівій частині теж монотонно зростає при зростанні x. Зауваживши, що права частина рівняння монотонно спадає, робимо висновок, що дане рівняння може мати не більше одного кореня. Цей корінь легко встановити – це число $x = 4$.

Зупинимось на рівнянні $2^{x+1} = x^2 + x + 2$. Легко встановити, що значення $x = 0$, $x = 1$ та $x = 2$ є коренями. Покажемо, що інших коренів немає. Розглянемо функцію $f(x) = 2^{x+1} - x^2 - x - 2$ та знайдемо її похідні.

$$f'(x) = \ln 2 \cdot 2^{x+1} - 2x - 1, \quad f''(x) = \ln^2 2 \cdot 2^{x+1} - 2, \quad f'''(x) = \ln^3 2 \cdot 2^{x+1}.$$

Остання похідна додатна, тому друга похідна монотонно зростає і може мати не більше одного кореня. Тоді перша похідна може мати не більше двох проміжків монотонності, тобто не більше двох коренів. Отже, для функції $f(x)$ існує не більше трьох проміжків монотонності, а рівняння $f(x) = 0$ може мати не більше трьох коренів.

Розглянемо логарифмічне рівняння $\log_2(9x+2) = \log_3(16x+3)$. Очевидний його корінь $x = 0$. Для відшукання інших коренів виконаємо наступні перетворення:

$$\log_2(9x+2) = \log_3(16x+3) \Leftrightarrow -4 + \log_2 16(9x+2) = -2 + \log_3 9(16x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(144x+32) = 2 + \log_3(144x+27) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(t+5) = 2 + \log_3 t, \\ t = 144x + 27. \end{cases}$$

Очевидний корінь одержаного рівняння $t = 3$. Із попереднього зауваження, що $x = 0$ є розв'язком рівняння, отримуємо ще один корінь $t = 27$. Покажемо, що інших коренів немає. Для цього розглянемо функцію $f(t) = \log_2(t+5) - \log_3 t - 2$, визначену при $t > 0$. Її похідна

$$f'(t) = \frac{1}{(t+5)\ln 2} - \frac{1}{t \ln 3} = \frac{t(\ln 3 - \ln 2) - 5\ln 2}{(2x-3)(x-1)\ln 2 \ln 3}$$

має єдиний корінь $t = \dfrac{5\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$. Він розбиває область визначення на два проміжки, на кожному з яких функція монотонна і тому її графік може мати з віссю t не більше, ніж дві спільні точки.

Повертаючись до заміни, отримуємо другий корінь:

$$t = 3 \Rightarrow 144x + 27 = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}.$$

Розглянемо рівняння $\log_{a+1}(t+1) = \log_a t$. Легко побачити, що воно має корінь $t = a$. Покажемо, що інших коренів нема. Для функції $f(t) = \log_{a+1}(t+1) - \log_a t$ знаходимо

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)\ln(a+1)} - \frac{1}{t \ln a} = 0 \Rightarrow t = -\frac{\ln(a+1)}{\ln(a+1) - \ln a} < 0.$$

Оскільки на інтервалі $(0; +\infty)$ похідна $f'(t)$ зберігає сталий знак, то функція $f(t)$ монотонна і не може мати більше, ніж один корінь.

Наведемо ще один приклад: розв'язати рівняння

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2 - 2x - 2\right) = \log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2 - 2x - 3\right).$$

Користуючись властивостями логарифма, перетворимо його наступним чином:

$$\log_{\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}\left(x^2 - 2x - 2\right) = \log_{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\left(x^2 - 2x - 3\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{8+4\sqrt{3}}(t+1) = \log_{7+4\sqrt{3}} t, \\ t = x^2 - 2x - 3. \end{cases}$$

Очевидний корінь одержаного рівняння $t = 7 + 4\sqrt{3}$. Повертаючись до заміни, дістаємо $x^2 - 2x - 3 = 7 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$.

Подібні міркування реалізуємо при розв'язуванні рівняння

$$\log_2(x-1) = \log_3(2x-3).$$

Очевидні його корені 2 та 3. Обґрунтуємо, що інших коренів нема. Для цього розглянемо функцію $f(x) = \log_2(x-1) - \log_3(2x-3)$, визначену при $x > \frac{3}{2}$. Її похідна

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)\ln 2} - \frac{2}{(2x-3)\ln 3} = \frac{2x(\ln 3 - \ln 2) + 2\ln 2 - 3\ln 3}{(2x-3)(x-1)\ln 2 \ln 3}$$

має єдиний корінь $x = \dfrac{\ln\frac{27}{4}}{2\ln\frac{3}{2}}$. Він розбиває область визначення на два проміжки, на кожному з яких функція монотонна і тому її графік може мати з віссю X не більше, ніж дві спільні точки.

Розглянемо нерівність $e^x - 1 - \ln(x+1) > 0$. Її ОДЗ визначається умовою $x > -1$. Очевидно, що при $x = 0$ ми отримуємо рівність. Розглянемо функцію $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+1)$. Її похідна $f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$ в точці $x = 0$ дорівнює 0 і монотонно зростає (останнє випливає з того, що похідна її правої частини $e^x + \frac{1}{(1+x)^2}$ додатна). Звідси маємо, що для функції $f(x)$ точка $x = 0$ є точкою екстремуму, а саме точкою мінімуму. Тому для всіх $x \neq 0$, що належать ОДЗ, виконується нерівність $f(x) > f(0) = 0$, тобто всі вони є розв'язками заданої нерівності. Отримуємо відповідь: $x \in (-1;\, 0) \cup (0;\, +\infty)$.

Зупинимось на розв'язанні рівняння $\sin^3 x + \frac{7}{\sin^5 x} = \cos^3 x + \frac{7}{\cos^5 x}$.

Розглянемо функцію $f(t) = t^3 + \frac{7}{t^5}$. Її похідна $f'(t) = 3t^2 - \frac{35}{t^6}$ на кожній з множин $[-1;\, 0)$ та $(0;\, 1]$, як легко перевірити, є від'ємною. Це в свою чергу означає, що функція $f(t)$ на кожному з цих проміжків монотонно спадає. При цьому множини значень функції не мають спільних точок. Тому рівні значення при $t = \cos x$ та $t = \sin x$ вона приймає в одній і тій самій точці. Тому з рівності $f(\sin t) = f(\cos t)$ випливає, що $\sin x = \cos x$. З одержаного співвідношення отримуємо $tgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Знайдемо розв'язки нерівності $8\sin^4 x - 8\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$.

Введемо заміну $\sin x = t,\ t \in [-1;\, 1]$. Тоді нерівність набуде вигляду $8t^4 - 8t^2 + t - 1 < 0$. Зауваживши, що значення $t = 1$ є коренем многочлена у лівій частині та розклавши його на множники, отримуємо

$$(t-1)(8t^3 + 8t^2 + 1) < 0.$$

Покажемо, що функція $f(t) = 8t^3 + 8t^2 + 1$ на відрізку $t \in [-1;\, 1]$ не має коренів. Маємо $f'(t) = 24t^2 + 16t = 0 \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = -\frac{2}{3}$. Із двох знайдених значень перше є точкою мінімуму, а друге – точкою максимуму. Знаходимо $f(0)=1>0,\ f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{64}{27}+\dfrac{32}{9}+1>0$. На кінцях відрізка $[-1;\,1]$ дістаємо $f(-1)=1>0,\ f(1)=17>0$. Таким чином, на вказаному проміжку многочлен $f(t)=8t^3+8t^2+1$ приймає тільки додатні значення. Тому на відрізку $t\in[-1;1]$ нерівність можна замінити рівносильною їй $t-1<0$. Маємо $\sin x<1 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

Наведемо ще один приклад. Скільки коренів має рівняння $a^x=\log_a x,\ 0<a<1$? Зобразивши графіки двох монотонно спадних взаємно обернених функцій $f(x)=a^x$ та $g(x)=\log_a x$, хочеться стверджувати, що існує єдина їхня спільна точка (розташована на прямій $y = x$). Більш детальний аналіз з використанням похідних показує, що це не так. Зокрема при $0<a<\dfrac{1}{e^e}$ точок перетину буде три. Детальне обґрунтування цього цікавого факту можна знайти у статті Н. Виленкина [1]. Наведемо рівняння з даної статті: $\left(\dfrac{1}{16}\right)^x=\log_{\frac{1}{16}} x$. Легко перевірити, що значення $x=\dfrac{1}{4}$ та $x=\dfrac{1}{2}$ є коренями. Третій корінь є розв'язком рівняння $\left(\dfrac{1}{16}\right)^x=x$ та обчислюється наближено.

Висновки. Запропонований матеріал допоможе вчителю ефективніше організовувати навчальну та дослідницьку роботу з обдарованими учнями, зокрема, при їх підготовці до математичних турнірів і олімпіад.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Виленкин. Н. Я. Три точки, три точки, три точки… // Квант. – 1980. – № 1. – С. 48-50.
2. Збірник тестових завдань з математики /Під ред. О. Р. Никифорчина, Р. І. Собковича, А. І. Казмерчука, Н. В. Кульчицької. – 2-ге вид., випр. і доп. – Івано-Франківськ, Прикарпатський національний університет. – 2006. – 259 с.
3. Кульчицька Н. В., Собкович Р. І. Практикум із шкільних математичних задач: навчальний посібник [для студентів напряму підготовки "Математика"]. – Івано-Франківськ : Видавництво Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2011. – 97 с.

Кульчицкая Н. В., Собкович Р. И. Производная помогает в поиске решений уравнений.

В даной статье наведены примеры поиска решений уравнений с учетом свойств функций (промежутки монотонности, количество корней, экстремумы), исследуемых с помощью производной. Предлагаемый материал будет полезен учителям при подготовке учеников к математическим турнирам и олимпиадам.

Ключевые слова: *уравнение, корни уравнения, единственность решения, производная, монотонность функции, экстремум, обучение математике.*

Kulchytska N., Sobkovych R. Derivative helps with finding the solutions of equations.

This article gives examples of finding solutions of equations taking into account the properties of functions (monotonicity intervals, the number of roots, extremums) that investigated using the derivative. The proposed material is useful to teachers in preparing students for math competitions and contests.

Key words: *equation, roots of equation, uniqueness of the root, derivative, monotone of function, extremum, teaching mathematics.*

УДК 372.851, 37.026.4

И. Е. Малова

Брянский государственныйтуниверситет,

Южный математический институт

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРТА КАК СРЕДСТВО ПЛАНИРОВАНИЯ, ОБОБЩЕНИЯ И СИСТЕМАТИЗАЦИИ ТЕМЫ

У статті розглядається проблема зниження математичної підготовки учнів, причинами якої є «виклики» сучасності (обсяг інформації, використання інформаційно-комунікативних технологій, зниження відповідальності за результати своєї праці). Обґрунтовується наочний спосіб включення учнів в планування, узагальнення і систематизацію вивчення математичної теми, пом'якшувальний ці «виклики» і враховують фундаментальність математики. Запропоновано ряд вимог до створення математичної карти теми з позиції збагачення досвіду учня: карта повинна відображати ключові питання теми, відповідні питань вивчення змістової лінії; карта повинна демонструвати зв'язку між цими питаннями, виражені графічно і словесно; частково заповнена карта повинна відповідати навчальному досвіду учнів і тим самим включати їх в планування вивчення теми, а заповнена – в процес узагальнення і систематизації. Розкриваються ситуації використання карт математичних тем. Наведені приклади математичних карт. Показано доповнення математичної карти до методичної карти вивчення теми.

Ключові слова: *наочність у навчанні; планування вивчення, узагальнення змісту, систематизація змісту, навчальна діяльність, шкільний курс математики.*

Постановка проблемы. Снижение уровня математической подготовки учащихся можно объяснить различными причинами, среди которых «вызовы» времени: 1) увеличившийся объём информации, сокращающий время на её освоение; 2) развитие информационно-коммуникативных технологий, обеспечивающих быстрый доступ к информации, потому не мотивирующих развитие памяти; 3) снижение уровня ответственности за результаты своего труда как со стороны учащихся («мне это не сдавать»), так и со сторон учителя («проверяющих интересуют только бумаги, а не то, что я делаю на уроке»).

Одним из проверенных практикой и обоснованных дидактикой способов повышения уровня математической подготовки учащихся является использование наглядности систематизирующего характера (опорные конспекты, схемы, модели, таблицы, карты и др.). Особая роль отводится наглядности, способствующей постижению сущности фундаментальных понятий, в частности, математических. К средствам такой наглядности относятся математические карты, раскрывающие