Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI **10.31110/fmo2024.v39i4-03** УДК **372.815**

ТЕОРЕМА ВІЄТА: ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИЙ І КРАЄЗНАВЧИЙ АСПЕКТ

Людмила ІЗЮМЧЕНКО ✉
Ліцей «Престиж» м. Києва, Україна
l.iziumch@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8656-2220

Анна ТКАЧЕВСЬКА
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна
tkannochka@gmail.com
https://orcid.org/0009-0009-0170-3422

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Основною задачею сучасної школи є розвиток природних здібностей та обдарувань учнів, формування компетентностей, необхідних для їх соціалізації, розвиток критичного мислення та створення умов для забезпечення гармонійного розвитку. Отже, постає проблема формування в учнів цілісної системи теоретичних відомостей і практичних навичок з різних дисциплін, що дозволить використовувати отримані знання для вирішення проблем сьогодення. Проте шкільні підручники недостатньо враховують знання школярів із суміжних предметів та сучасного життя. Метою статті є створення задач інтегрованого змісту з теми «Теорема Вієта» різного рівня складності з можливістю використання їх у класах різного профілю та під час навчання студентів педагогічних спеціальностей.

Матеріали і методи. У дослідженні використовувалися теоретичні методи – аналіз навчальних програм з математики та освітніх програм педагогічних спеціальностей з математичною складовою, змісту сучасних шкільних підручників, узагальнення власного та передового педагогічного досвіду щодо застосування завдань інтегрованого змісту в освітньому процесі школи і ЗВО; емпіричні – спостереження під час роботи з учнями ЗЗСО на уроках математики і під час позаурочної роботи та студентами педагогічних спеціальностей на заняттях з математичних дисциплін у ЗВО.

Результати. Авторами була розглянута серія задач з теми «Теорема Вієта». Наведено огляд типових задач, які зустрічаються у шкільному курсі математики і у математичних курсах педагогічних спеціальностей ЗВО. Запропоновано приклади завдань краєзнавчого аспекту, які зорієнтують вчителя враховувати історико-географічну місцеву тематику чи профіль вивчення математики при створенні схожих завдань. Показано використання теореми Вієта у геометрії та інших розділах алгебри, у тому числі і для розв'язування завдань практичного змісту. Наведені задачі високого рівня складності, які доцільно розглянути з учнями у позаурочний час при організації науково-дослідницької чи проєктної роботи.

Висновки. Створення серії задач інтегрованого змісту з теми «Теорема Вієта» може бути корисним досвідом для молодих вчителів, котрі викладають математику у класах різного профілю, та студентів фізико-математичних факультетів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *многочлен; корені многочлена; теорема Вієта; задачі інтегрованого змісту; профільне навчання.*

VIETA'S THEOREM: MATHEMATICAL AND ETHNOMATHEMATICAL ASPECT

Liudmyla IZIUMCHENKO ✉
Lyceum Prestige, Ukraine
l.iziumch@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8656-2220

Anna TKACHEVSKA
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine
tkannochka@gmail.com
https://orcid.org/0009-0009-0170-3422

Для цитування:	Ізюмченко Л., Ткачевська А. Теорема Вієта: природничо-математичний і краєзнавчий аспект. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 4. С. 20-27. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i4-03
	Ізюмченко, Л., & Ткачевська, А. (2024). Теорема Вієта: природничо-математичний і краєзнавчий аспект. *Фізико-математична освіта*, *39*(4), 20-27. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i4-03
For citation:	Iziumchenko, L., & Tkachevska, A. (2024). Vieta's Theorem: mathematical and ethnomathematical aspect. *Physical and Mathematical Education*, *39*(4), 20-27. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i4-03
	Iziumchenko, L., & Tkachevska, A. (2024). Teorema Viieta: pryrodnycho-matematychnyi i kraieznavchyi aspekt [Vieta's Theorem: mathematical and ethnomathematical aspect]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(4), 20-27. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i4-03

✉ Corresponding author

ABSTRACT

Formulation of the problem. The main task of a modern school is to develop pupils' natural abilities and talents, build competitiveness and skills for their socialization, develop critical thinking, and create conditions to ensure their harmonious development. Therefore, the problem arises in shaping students with a comprehensive system of theoretical knowledge and practical skills across various disciplines, enabling them to apply acquired knowledge to address contemporary life issues. However, school textbooks do not sufficiently consider students' knowledge of related subjects and modern life. The article aims to integrate a problem series of "Vieta's Theorem" and create complex exercises of different levels.

Materials and methods. The research uses theoretical methods, including analyzing mathematics curricula and educational programs in pedagogical specialties with mathematical components and the content of contemporary school textbooks. Furthermore, combining personal and advanced pedagogical experiences regarding the integrated tasks application in the educational processes of both schools and higher education institutions. Empirical methods included observations during mathematics classes in high schools and extracurricular activities, and observations during mathematics sessions in pedagogical specialties at HEIs.

Results. The authors examined a problem series based on Vieta's Theorem, providing an overview of typical issues encountered in school mathematics courses and mathematics courses within pedagogical specialties at HEIs. Examples of tasks incorporating local geography were proposed to guide teachers in considering historical-geographical local themes or the profile of mathematics study when creating similar tasks. The use of Vieta's Theorem in geometry and other branches of algebra, including tasks with practical content, was demonstrated. High-level questions suitable for extracurricular scientific research or project work with students were presented.

Conclusions. The creation of a series of math problems with varying integrated tasks will serve as invaluable experience for beginner math teachers, including those in classes of different specializations, and for STEM students.

KEYWORDS: *polynomial; roots of a polynomial; Vieta's Theorem; tasks of integrated content; specialized training.*

ВСТУП

Постановка проблеми. У сучасному світі зростає відповідальність людини за прийняття рішень у різноманітних життєвих ситуаціях. Тому школа повинна давати учням можливість готуватися до реального життя, навчаючи не лише теоретичним фактам, а й можливостям їхнього практичного застосування у математиці та суміжних предметах, а також у реальних життєвих обставинах. Важливим фактором успішності учнів у майбутньому є прикладна спрямованість математики, внутрішні взаємозв'язки предмету та інтеграція з іншими дисциплінами. Сучасні шкільні підручники з математики, на жаль, мають дуже незначну кількість завдань практичного змісту чи історико-краєзнавчої тематики. А тому на прикладі теми «Теорема Вієта» ми показуємо, як можна доповнити її вивчення із урахуванням профілю навчання (історичного, філологічного, хіміко-біологічного, фізико-математичного), зробивши тему привабливішою та практично орієнтованою для учнів.

Аналіз актуальних досліджень. Науковці і педагоги-практики приділяють значну увагу різним аспектам математичної підготовки школярів та студентів педагогічних спеціальностей: організацію освітнього процесу, спрямованого на формування ключових компетентностей учнів, досліджували Бевз Г.П., Бурда М.І. (2014), Васильєва Д.В. (2018), Кірман В.К., Матяш О.І. (Matiash, 2021), Раков С.А., Сердюк З.О., Тарасенкова Н.А., Акуленко І.А. (Тарасенкова & Акуленко, 2020), Школьний О.В.; питання внутрішньопредметної та міжпредметної інтеграції у процесі вивчення математичних дисциплін, забезпечення наступності навчання математичних дисциплін досліджували Бевз В.Г., Владімірова Н.Г., Гнезділова К.М., Нічишина В.В., Ботузова Ю.В. (2020), Ріжняк Р.Я. (Ботузова & Ріжняк, 2022) та ін.; формування творчої особистості школяра, розвиток творчого мислення учня у процесі навчання математики досліджували Бевз Г.П., Бурда М.І., Ізюмченко Л.В., Ключник І.Г. (Ізюмченко & Ключник, 2020), Нелін Є.П., Чашечникова О.С. (2011) та ін. Проблему формування дослідницьких умінь учнів вивчали Плахотник В.В., Панасенко О.Б., Прус А.В., Швець В.О. (Прус & Швець, 2018) та ін. Реалізації в освітньому процесі інноваційних авторських новацій присвячені праці Працьовитого М.В., Кушніра В.А., Яременко Л.І., Мієр Т.І., Голодюк Л.С. (Miier & Holodiuk, 2019). На значному освітньому та виховному значенні задач історико-краєзнавчої тематики у навчанні математики наголошували відомі математики і методисти, у тому числі Бевз Г.П., Бурда М.І., Васильєва Д.В., Слєпкань З.І., Шкіль М.І., Бевз В.Г. (2004) та ін.

Мета статті. Створення задач інтегрованого змісту з теми «Теорема Вієта» різного рівня складності з можливістю використання їх у класах різного профілю та під час навчання студентів педагогічних спеціальностей ЗВО.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У дослідженні використовувалися теоретичні методи – аналіз навчальних програм з математики та освітніх програм педагогічних спеціальностей з математичною складовою, змісту сучасних шкільних підручників, узагальнення власного та передового педагогічного досвіду щодо застосування завдань інтегрованого змісту в освітньому процесі школи та ЗВО; емпіричні – спостереження під час роботи з учнями ЗЗСО на уроках математики та під час позаурочної роботи (на засіданнях математичного гуртка, при організації науково-дослідницької роботи, у т. ч. написання НДР МАН, під час підготовки до математичних конкурсів) та студентами педагогічних спеціальностей на заняттях з математичних дисциплін у ЗВО.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Огляд теоретичних відомостей і типових задач.

Теорема. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корені многочлена n-го степеня $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_n \neq 0)$. Тоді справедливі формули Вієта:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = (-1)^2\frac{a_{n-2}}{a_n},$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_1x_2x_n + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = (-1)^3\frac{a_{n-3}}{a_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n},$$

ліва частина k-ої рівності є сумою усіх можливих добутків, що складаються з k різних елементів з набору $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, знак у правій частині $(-1)^k$. Зауважимо, що теорема Вієта справедлива і у випадку комплексних коренів многочлена.

Типові приклади шкільного курсу математики.

1.1. Не розв'язуючи рівняння (використовуючи теорему Вієта), знайдіть корені рівняння $x^2 + 17x + 16 = 0$.

Зазвичай, при використанні теореми Вієта для зведеного квадратного рівняння зручно починати аналіз саме з добутку коренів, перевіряючи можливі дільники вільного члена; нескладно перевірити, що це $-1;\ -16$.

1.2. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $3x^2 + 7x - 2 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, обчисліть: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; ${x_1}^2 + {x_2}^2$; ${x_1}^3 + {x_2}^3$; ${x_1}^3x_2 + x_1{x_2}^3$; $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; $\frac{1}{{x_1}^2} + \frac{1}{{x_2}^2}$; $\frac{1}{{x_1}^3} + \frac{1}{{x_2}^3}$; $\frac{x_1}{{x_2}^2} + \frac{x_2}{{x_1}^2}$.

Прокоментуємо один з прикладів: ${x_1}^3 + {x_2}^3$. По-перше, дискримінант квадратного тричлена додатний, а тому дійсні корені існують. По-друге, за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{7}{3}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3}$, тоді

$$ {x_1}^3 + {x_2}^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = -\frac{7}{3}\cdot\left(\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = -\frac{469}{27}.$$

1.3. Складіть зведене квадратне рівняння, корені якого на $\frac{1}{3}$ більші за корені рівняння $3x^2 + 7x - 2 = 0$.

Оскільки сума коренів даного в умові рівняння дорівнює $-\frac{7}{3}$, то сума коренів шуканого рівняння $x_1' + x_2' = -\frac{7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$, а добуток $x_1' \cdot x_2' = \left(x_1 + \frac{1}{3}\right)\left(x_2 + \frac{1}{3}\right) = x_1 \cdot x_2 + \frac{1}{3}\cdot(x_1 + x_2) + \frac{1}{9} = -\frac{4}{3}$, тобто у рівнянні $x^2 + px + q = 0$ маємо $p = \frac{5}{3}$, $q = -\frac{4}{3}$.

Відповідь: $x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{4}{3} = 0$.

1.4. Визначте q, якщо відомо, що один з коренів рівняння $x^2 - 12x + q = 0$ є квадратом іншого.

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = 12$, $x_1 \cdot x_2 = q$. З умови маємо $x_2 = {x_1}^2$, тоді $x_1 + {x_1}^2 = 12$. Маємо квадратне рівняння ${x_1}^2 + x_1 - 12 = 0$, за теоремою Вієта його корені $\left[\begin{array}{l} x_1 = -4 \\ x_1 = 3 \end{array}\right.$. А тоді $\left[\begin{array}{l} x_1 = -4,\ x_2 = 16, q = -64; \\ x_1 = 3,\ x_2 = 9,\ q = 27. \end{array}\right.$

Відповідь: $q = -64, q = 27$.

Дещо складнішими, проте доцільними у класах з профільним вивченням математики, є завдання виду:

1.5. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $3x^2 + 7x - 2 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, обчисліть: $|x_1 - x_2|$, $|{x_1}^2 - {x_2}^2|$, $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right|$ і подібні їм:

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{73}{9}$. Звідки $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{73}}{3}$ і $|{x_1}^2 - {x_2}^2| = \frac{\sqrt{73}}{3}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7\sqrt{73}}{9}$.

1.6. Оцініть, при яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - (3a + 1)x + 4a^2 - a - 50 = 0$ є найменшою?

$$ {x_1}^2 + {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\cdot x_1 \cdot x_2 = (3a + 1)^2 - 2(4a^2 - a - 50) = a^2 + 8a + 101 = (a + 4)^2 + 85.$$

Найменше значення виразу досягається при $a = -4$, і дорівнює 85, проте у таких задачах необхідно робити обов'язкову перевірку, чи досягається це найменше значення, іншими словами, чи існують (дійсні) корені взагалі. У цьому прикладі при $a = -4$ отримуємо рівняння $x^2 + 11x + 18 = 0$, коренями якого є $-9, -2$, сума квадратів коренів дорівнює 85. (*Відповідь*: при $a = -4$).

1.7. При яких значеннях параметра a сума коренів рівняння $x^2 - (2a^2 - a)x + 4a = 0$ дорівнює одиниці?

$$x_1 + x_2 = 2a^2 - a = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{2}, \\ a = 1, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x \in \{-1; 2\}; \\ x^2 - x + 4 = 0 \Longrightarrow x \in \emptyset. \end{array}\right.$$

Відповіддю до задачі є лише одне значення параметра $a = -\frac{1}{2}$.

1.8. Обчисліть суму квадратів коренів та суму чисел, обернених до коренів рівняння $2x^3 + 21x^2 - 19 = 0$.

Зауважимо, що один із коренів цього рівняння є -1, виконавши ділення на двочлен $x + 1$, отримаємо квадратний тричлен $2x^2 + 19x - 19$, який має два корені, а тому початкове рівняння має три корені. За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{21}{2}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$, $x_1x_2x_3 = \frac{19}{2}$. Тоді сума квадратів коренів рівняння

$$ {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{441}{4}.$$

Сума чисел, обернених до коренів цього рівняння $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_3x_2 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = 0 : \frac{19}{2} = 0$.

Зауважимо, що якби кубічне рівняння не мало б раціонального кореня, то обчисливши похідну $f'(x) = (2x^3 + 21x^2 - 19)' = 6x^2 + 42x = 6x(x + 7)$, ми б отримали три проміжки монотонності функції, на кожному з яких функція мала б по одному нулю, оскільки на кінцях проміжків приймала протилежних значень, а тому початкове рівняння мало б три дійсних корені. Очевидно, що і графічне розв'язання даного рівняння теж привело б до обґрунтування того, що у рівняння є три дійсних корені.

1.9. Знайдіть усі значення параметра a, якщо відомо, що корені рівняння $x^2 + ax + 21 = 0$ є цілими числами. Оскільки $21 = 1 \cdot 21 = -1 \cdot (-21) = 3 \cdot 7 = -3 \cdot (-7)$, то з теореми Вієта $a \in \{\pm 22, \pm 10\}$.

2. Теорема Вієта: краєзнавчий аспект.

При вивченні теореми Вієта доцільно включити завдання, які розкривають історичні, географічні та інші особливості малої батьківщини учнів, інформацію про видатних земляків та ін. Це можуть бути завдання наукового чи краєзнавчого проєкту, складові інтегрованих уроків, теми НДР робіт та ін. Принцип інтеграції може реалізовуватися на двох рівнях: внутрішньопредметному та міжпредметному. У процесі вивчення математичних дисциплін внутрішньопредметний рівень виявляється під час виконання завдань, у яких інтегруються, наприклад, алгебра та геометрія. Міжпредметні зв'язки реалізовують міждисциплінарну інтеграцію, коли розв'язуються задачі, що вимагають знань з кількох предметних галузей. У своєму дослідженні ми пропонуємо задачі інтегрованого змісту, які задіюють як внутрішньопредметну, так і міжпредметну інтеграцію. Наведемо приклади таких завдань.

2.1. Розв'яжіть квадратне рівняння $x^2 - 12x + 27 = 0$ за теоремою Вієта, запишіть його корені одним числом у порядку спадання та дізнайтеся кількість слів у Акті проголошення незалежності України. (*Відповідь:* 93 слова).

2.2. Найбільшу кількість пам'ятників у світі встановлено Тарасу Шевченку. За теоремою Вієта визначте суму і добуток коренів рівняння $x^2 - 84x + 13 = 0$, запишіть одержані результати одним числом у порядку зростання і дізнайтеся їх кількість. (*Відповідь:* 1384 пам'ятники).

2.3. Визначте корені рівняння $x^3 - 89x^2 + 175x - 87 = 0$ та запишіть їх у порядку зростання (двократний корінь двічі). Отримане число – рік першої писемної згадки слова «Україна». (*Відповідь:* 1187 рік).

2.4. Єдина у світі підводна річка знаходиться у Чорному морі. Менший з коренів квадратного рівняння $x^2 - 61x + 60 = 0$ – її ширина, а більший – довжина (у кілометрах). Знайдіть їх. (*Відповідь:* довжина 60 км, ширина 1 км).

2.5. У місті Львові було засновано одну з найстаріших обсерваторій Європи. За теоремою Вієта знайдіть значення параметрів p і q рівняння $x^2 - px + q = 0$, запишіть їх одним числом у порядку зростання та дізнайтеся, у якому році це сталося, якщо відомо, що коренями рівняння є $\frac{17-\sqrt{5}}{2}$ та $\frac{17+\sqrt{5}}{2}$. (*Відповідь:* 1771 рік).

2.6. Перша пісня, заспівана у космосі, – українська «Дивлюсь я на тебе та й думку гадаю», виконана Павлом Поповичем. Запишіть модулі усіх коефіцієнтів рівняння $2x^2 + bx + c = 0$ одним число у порядку спадання та дізнайтеся, у якому році це сталося, якщо його корені $x_1 = \frac{-3-\sqrt{47}}{2}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{47}}{2}$. (*Відповідь:* 1962 рік).

2.7. Цікаві факти про українські гривні:

А) Встановіть відповідність між квадратними рівняннями та їх коренями і дізнайтеся у якій країні вперше надрукували гривні. Номер прикладу відповідає місцю, на якому стоїть буква у слові.

1) $x^2 - 42x + 80 = 0$; 2), 4), 6) $x^2 - 28x + 160 = 0$; 3) $x^2 + 27x - 28 = 0$; 5) $x^2 - 25x + 180 = 0$.

Корені рівняння	40 і 2	– 6 і 2	20 і 8	1 і – 28	– 3 і – 4	∅
Буква	К	О	А	Н	Т	Д

Відповідь: Канада.

Б) Знайдіть суму двох найбільших коренів усіх рівнянь і дізнайтеся, скільки копійок коштує друк найдорожчої купюри з сучасними захисними елементами. (*Відповідь*: 60 копійок).

В) Знайдіть суму найбільшого і найменшого коренів усіх рівнянь і дізнайтеся, скільки копійок коштує виготовлення однієї купюри в середньому. (*Відповідь*: 12 копійок).

Зауважимо, що у класах філологічного профілю можна запропонувати учням встановити відповідність між квадратними рівняннями і їхніми коренями та кількістю звуків / букв у слові: $x^2 - 10x + 24 = 0$ (варіанти відповіді «ящик», 4 букви, 6 звуків), скласти рівняння, яке відповідало б слову «їжак»: $x^2 - 9x + 20 = 0$ та ін. У класах хіміко-біологічного профілю це можуть бути завдання виду: розставте індекси та дайте назви сполукам $Zn..Cl..$, $Al..S..$ і складіть (зведене) квадратне рівняння, коренями якого були б ці індекси та ін.

3. Теорема Вієта у різних розділах математики.

Наведемо приклади завдань інтегрованого змісту з використанням теореми Вієта. Зауважимо також, що коректність геометричних задач 3.1-3.8 випливає з існування додатних коренів заданих рівнянь.

3.1. Відомо, що корені рівняння $x^2 - 14x + 36 = 0$ є проєкціями катетів прямокутного трикутника на гіпотенузу. Використовуючи теорему Вієта, обчисліть гіпотенузу, висоту, проведену до гіпотенузи, площу прямокутного трикутника та радіус описаного кола.

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 14$, $x_1 \cdot x_2 = 36$. А тому гіпотенуза $c = x_1 + x_2 = 14$ (од.); висота, проведена до гіпотенузи, є середнє геометричне між проєкціями катетів на гіпотенузу, тобто $h = \sqrt{x_1 \cdot x_2} = 6$ (од.); площа трикутника дорівнює $S = \frac{ch}{2} = \frac{14 \cdot 6}{2} = 42$ (кв. од.), а радіус описаного кола $R = \frac{1}{2}c = 7$ (од.).

3.2. Відомо, що корені рівняння $x^2 - 12x + 22 = 0$ є сторонами прямокутника. Використовуючи теорему Вієта, обчисліть площу прямокутника, його периметр, діагональ та радіус описаного кола.

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 12$, $x_1 \cdot x_2 = 22$. А тому площа прямокутника дорівнює 22 (кв. од.), а периметр $2 \cdot 12 = 24$ (од.). Діагональ прямокутника $d = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2} = \sqrt{12^2 - 2 \cdot 22} = 10$ (од.), а радіус описаного кола $R = \frac{1}{2}d = 5$ (од.).

3.3. Відомо, що корені рівняння $x^2 - 20x + 72 = 0$ є діагоналями ромба. Використовуючи теорему Вієта, обчисліть площу ромба, його периметр, висоту та радіус вписаного кола.

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 20$, $x_1 \cdot x_2 = 72$. Оскільки площа ромба дорівнює півдобутку його діагоналей, маємо, що площа дорівнює $S = \frac{1}{2} \cdot 72 = 36$ (кв. од.); для довільного паралелограма сума квадратів його діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його сторін, маємо: ${d_1}^2 + {d_2}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 20^2 - 2 \cdot 72 = 256$, звідки

$4a^2 = 256 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow P = 4a = 32$ (од.) – периметр ромба. Висота ромба $h = \frac{S}{a} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$ (од.), радіус вписаного кола $r = \frac{h}{2} = \frac{9}{4}$ (од.).

3.4. Корені рівняння $x^2 - 28x + 169 = 0$ – довжини основ рівнобедреної трапеції, в яку можна вписати коло. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть висоту, бічну сторону, площу і діагональ трапеції та радіус вписаного в неї кола.

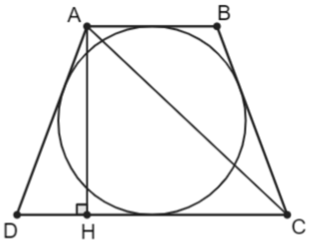

Рис. 1. Трапеція ABCD

Джерело: авторська розробка.

За теоремою Вієта: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 28, \\ x_1 \cdot x_2 = 169. \end{cases}$ Висота $h = AH = \sqrt{x_1 \cdot x_2} = \sqrt{169} = 13$ (од.). Так як у трапецію можна вписати коло і вона рівнобічна, то $2AD = AB + DC$, тоді $AD = \frac{AB+DC}{2} = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{28}{2} = 14$ (од.); радіус вписаного кола $r = \frac{h}{2} = 6{,}5$ (од.); площа $S = \frac{AB+DC}{2} \cdot h = 14 \cdot 13 = 182$ (кв. од.).

З $\Delta ABC, \angle AHC = 90°$: $HC = \frac{AB+DC}{2} = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{28}{2} = 14$ (од.) і $AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{169 + 196} = \sqrt{365}$ (од.).

Відповідь: $h = 13$ од., $AD = 14$ од., $r = 6{,}5$ од., $S = 182$ кв. од., $d = \sqrt{365}$ од.

3.5. Відомо, що точка дотику вписаного у ромб кола ділить сторону на відрізки завдовжки x_1, x_2, де x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 18x + 64 = 0$. Використовуючи теорему Вієта, обчисліть сторону, висоту та площу ромба.

Сторона ромба $a = x_1 + x_2 = 18$ (од.); радіус вписаного кола є середнє геометричне $r = \sqrt{x_1 \cdot x_2} = \sqrt{64} = 8$ (од.), а тоді висота $h = 2r = 16$ (од.); площа ромба $S = a \cdot h = 18 \cdot 16 = 288$ (кв. од.).

3.6. Відомо, що сторони прямокутного паралелепіпеда є коренями рівняння $x^3 - 18x^2 + 90x - 116 = 0$. Використовуючи теорему Вієта, обчисліть об'єм, повну поверхню та діагональ прямокутного паралелепіпеда.

За теоремою Вієта для кубічного рівняння: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 18, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 90, \\ x_1x_2x_3 = 116. \end{cases}$ Тоді об'єм прямокутного паралелепіпеда $V = x_1x_2x_3 = 116$ (куб. од.), площа повної поверхні $S = 2 \cdot (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 180$ (кв. од.), діагональ $d = \sqrt{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2 \cdot (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)} = \sqrt{18^2 - 180} = 12$ (од.).

3.7. Для обробки поверхонь стін, стелі і підлоги кімнати перед її подальшим оздобленням потрібно провести ґрунтовку з використанням рідини, яка продається в упаковках по 5 л. Оцініть, скільки таких упаковок потрібно купити, якщо виміри кімнати (у метрах) є коренями рівняння $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$, а витрати готової до використання рідини складають у середньому 0,17 л/м^2. Під час обчислень врахуйте, що поверхню вікон і дверей, які складають 10 % від усієї площі, обробляти не треба. Для опалювальної системи необхідні радіатори із розрахунку дві одиниці на 30 м^3. Скільки таких радіаторів треба замовити для обігріву даної кімнати?

За теоремою Вієта площа повної поверхні $S = 2 \cdot 47 = 94$ кв. м; 90 % площі складають 84,6 кв. м.; необхідна кількість рідини $84{,}6 \cdot 0{,}17 = 14{,}382$ л. А тому достатньо купити 3 упаковки ґрунтовки. $V = 60$ м^3, 4 радіатори.

3.8. Відомо, що діагоналі граней d_1, d_2, d_3 прямокутного паралелепіпеда є коренями рівняння $x^3 - 56x^2 + 1039x - 6384 = 0$. Використовуючи теорему Вієта, знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда.

За теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 = 56, \\ d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 = 1039, \\ d_1d_2d_3 = 6384. \end{cases}$

Нехай виміри прямокутного паралелепіпеда a, b, c, тоді діагоналі граней ${d_1}^2 = a^2 + b^2, {d_2}^2 = a^2 + c^2, {d_3}^2 = = b^2 + c^2$. Діагональ прямокутного паралелепіпеда $D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}\left({d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2\right) = \frac{1}{2} \cdot ((d_1 + d_2 + d_3)^2 - -2 \cdot (d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3)) = \frac{1}{2} \cdot (d_1 + d_2 + d_3)^2 - (d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3)$; $D = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 56^2 - 1039} = 23$ (од.).

Зауважимо, що коректність геометричної задачі випливає із існування додатних вимірів паралелепіпеда: $a = 2\sqrt{42}, b = 2\sqrt{22}, c = \sqrt{273}$, діагоналі граней $d_1 = 16;\ d_2 = 21;\ d_3 = 19$ (од.).

3.9. Корені рівняння $x^2 + px + q = 0$ є цілими числами. Знайдіть усі значення p, q, якщо сума $p + q = 100$.

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q$. З умови $p + q = 100$ маємо $-(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 100 \Leftrightarrow (x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) = 101$. Оскільки x_1, x_2 – цілі числа і 101 – просте число (його дільниками є числа $\pm 1; \pm 101$), тому можливі випадки (нехай $x_1 \le x_2$): $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 - 1 = -101, \\ x_2 - 1 = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 - 1 = 1, \\ x_2 - 1 = 101, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -100, \\ x_2 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 102, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p = 100, \\ q = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} p = -104, \\ q = 204. \end{cases} \end{array}\right.$.

Відповідь. $p = 100, q = 0$ або $p = -104, q = 204$.

3.10. Корені многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 - 33x + 35$ утворюють спадну арифметичну прогресію. Чому дорівнює перший член і різниця прогресії?

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -33$, $x_1x_2x_3 = -35$. Врахуємо, що $x_1 = x_2 - d$, $x_3 = x_2 + d, d < 0$, з першої рівності отримаємо $3x_2 = 3$, звідки $x_2 = 1$. З третьої рівності з урахуванням $x_2 = 1 \Rightarrow x_1x_3 = -35, (x_2 - d)(x_2 + d) = -35, 1 - d^2 = -35, d < 0 \Rightarrow d = -6$; $x_1 = 7$; $x_2 = 1$; $x_3 = -5$.

Відповідь: $x_1 = 7, d = -6$.

3.11. Корені многочлена $f(x) = x^3 - bx + a$ утворюють арифметичну прогресію з різницею d. Чому дорівнюють параметри a і b?

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -b, x_1x_2x_3 = a$. Оскільки $x_1 = x_2 - d, x_3 = x_2 + d$, то з першої рівності отримаємо $3x_2 = 0$, $x_2 = 0$, а тому $a = 0$. З другої рівності з урахуванням $x_2 = 0 \Rightarrow x_1x_3 = -b$; $(x_2 - d)(x_2 + d) = -b$; $-d^2 = -b$; звідки $b = d^2$.

Відповідь: $a = 0$; $b = d^2$.

3.12. Використовуючи теорему Вієта, знайдіть усі значення параметра a такі, щоб один з коренів рівняння $9x^3 - 52x + a = 0$ дорівнював потроєному іншому кореню.

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = {}^{-52}/_9$; $x_1x_2x_3 = -{}^{a}/_9$. Враховуючи, що $x_2 = 3x_1$, отримаємо з першої рівності $x_3 = -4x_1$. Друга і третя рівності перепишуться $3{x_1}^2 - 4{x_1}^2 - 12{x_1}^2 = {}^{-52}/_9$; $-12{x_1}^3 = {}^{-a}/_9$, звідки маємо ${x_1}^2 = {}^4/_9$; $a = 108{x_1}^3$. Маємо дві можливості: 1) $x_1 = {}^2/_3$, $x_2 = 3x_1 = 2$, $x_3 = -4x_1 = -{}^8/_3$, тоді $a = 108 \cdot ({}^2/_3)^3 = 32$; 2) $x_1 = {}^{-2}/_3$, $x_2 = 3x_1 = -2$, $x_3 = -4x_1 = {}^8/_3$ і $a = -32$.

Відповідь: $a = \pm 32$.

3.13. При яких цілих значеннях n сума квадратів коренів рівняння $x^2 - n^3x - 2n^2 = 0$ є простим числом?

За теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} x_1 + x_2 = n^3, \\ x_1x_2 = -2n^2, \end{cases}$ ${x_1}^2 + {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$;

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = (n^3)^2 - 2 \cdot (-2n^2) = n^6 + 4n^2 = n^2(n^4 + 4) = (n^4 + 4 + 4n^2 - 4n^2) = n^2(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

Добуток цілих чисел може бути простим числом, якщо усі множники, крім одного, дорівнюють одиниці, а останній множник при цьому є простим числом. Неважко переконатися, що це виконується лише при $n = \pm 1$.

4. Теорема Вієта у класах фізико-математичного профілю.

4.1. Нехай $f(x) = x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 14x - 12$, $g(x) = x^3 + 5x^2 - 14$. Відомо, що x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена $g(x)$. Обчисліть значення величини $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$.

Покажемо, що рівняння $g(x) = 0$, $x^3 + 5x^2 - 14 = 0$ має три дійсні корені графічно, побудувавши в одній системі координат два графіка $y = x^3$ і $y = -5x^2 + 14$. Отримаємо три точки перетину, що гарантує три дійсні корені. Аналітичне обґрунтування може виглядати так: якщо (неперервна) функція на кінцях проміжку приймає значень протилежних знаків і є монотонною на цьому проміжку, то на цьому проміжку є рівно один дійсний корінь:

$$g(-5) = -14 < 0, g(-4) = 2 > 0, g'(x) > 0, \forall x \in (-5; -4) \Longrightarrow x_1 \in (-5; -4);$$
$$g(-3) = 4 > 0, g(0) = -14 < 0,\ g'(x) < 0, \forall x \in (-3; 0) \Longrightarrow x_2 \in (-3; 0);$$
$$g(0) = -14 < 0, g(2) = 14 > 0, g'(x) > 0, \forall x \in (0; 2) \Longrightarrow x_3 \in (0; 2).$$

За теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -5, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, \\ x_1x_2x_3 = 14. \end{cases}$ Поділимо $f(x)$ на $g(x)$ з остачею, отримаємо $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$; частка $q(x) = x^2 - x + 1$; остача $r(x) = x^2 + 2$. Рівність $f(x) = (x^3 + 5x^2 - 14)(x^2 - x + 1) + (x^2 + 2)$ має місце для усіх x, а тому і для x_1, x_2, x_3, тому $f(x_1) = g(x_1) \cdot q(x_1) + ({x_1}^2 + 2) = {x_1}^2 + 2$, бо $g(x_1) = 0$; аналогічно $f(x_2) = {x_2}^2 + 2$, $f(x_3) = {x_3}^2 + 2$. А тому $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = ({x_1}^2 + 2) + ({x_2}^2 + 2) + ({x_3}^2 + 2) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 6 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2 \cdot (x_1x_2 + x_1x_3 + {}$ ${} + x_2x_3) + 6 = (-5)^2 - 2 \cdot 0 + 6 = 31$.

Відповідь: 31.

4.2. Усі корені многочлена $f(x) = x^n + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ – дійсні числа. Доведіть, що $a_{n-2} \leq 0$.

Помічаємо, що коефіцієнт $a_{n-1} = 0$. За теоремою Вієта: $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + \cdots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}, \ldots \end{cases}$. Піднесемо першу рівність до квадрату, отримаємо $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = 0$, розкриємо дужки, маємо $({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + \cdots + x_{n-1}x_n) = 0$. Вираз у других дужках дорівнює a_{n-2}, а тому $a_{n-2} = -\frac{1}{2}({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2) \leq 0$, оскільки за умовою усі корені є дійсними. Доведено.

4.3. Використовуючи теорему Вієта, знайдіть розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x + 2y + 4 = 0, \\ x + 5y + 25 = 0. \end{cases}$

Зауважимо, що коефіцієнти при змінних непропорційні, а тому система має один розв'язок; використовуючи спосіб додавання (віднімання), отримаємо цей розв'язок $x = 10, y = -7$. Проте, якщо проаналізувати коефіцієнти при змінних і вільні члени, можна зробити висновок: при $t = 2$ та при $t = 5$ маємо $x + ty + t^2 = 0$ квадратне рівняння, коренями якого є $t = 2$, $t = 5$, а невідомі x, y відіграють роль параметрів. За теоремою Вієта, сума коренів 7 є $-y$; а добуток 10 є вільний член, тобто x. Маємо ту ж відповідь. Цей самий прийом дозволить розв'язати наступну систему:

4.4. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x - 2y + 4z = 8, \\ x + 3y + 9z = -27, \\ x - 5y + 25z = 125. \end{cases}$

Маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими. Засобами вищої математики можна показати, що ранг основної матриці дорівнює трьом, а тому система має єдиний розв'язок. Використовуючи знання шкільного курсу неважко обґрунтувати, що 1) кожне рівняння задає площину і кожні дві площини не є паралельними, 2) доступно знайти (довільні) дві спільні точки перших двох площин, наприклад: $\begin{cases} x - 2y + 4z - 8 = 0, \\ x + 3y + 9z + 27 = 0, \end{cases}$ при $y = 0$ $\begin{cases} x + 4z - 8 = 0, \\ x + 9z + 27 = 0, \end{cases}$

почленно віднімаємо, маємо першу точку $M(36;0;-7)$; при $z=0$ – т. $N(-6;-7;0)$; $\overrightarrow{NM}(42;7;-7)||(6;1;-1)$; тобто перші дві площини перетинаються по прямій: $\begin{cases} x=-6+6t, \\ y=-7+t, \\ z=0-t, t\in\mathcal{R}. \end{cases}$ Аналогічно, друга і третя площина перетинаються по прямій $\begin{cases} x=30+15u, \\ y=-19-2u, \\ z=0-u, u\in\mathcal{R}. \end{cases}$ Обидві отримані прямі непаралельні і лежать у другій площині, а тому перетинаються в одній точці. Таке дослідження сприяє цілісному сприйняттю математики, розумінню алгебраїчної задачі з геометричною інтерпретацією. При профільному вивченні математики, якщо учні знайомі з цими методами, розв'язок системи можна отримати методом Гаусса, за формулами Крамера чи матричним способом.

Розглянемо спосіб розв'язання задачі (з використанням теореми Вієта): $x-2y+4z-8=0$, позначимо $-2=t$, тоді маємо $x+ty+t^2z+t^3=0$, що можна інтерпретувати, як деякий многочлен третього степеня відносно t: $f(t)=t^3+t^2z+ty+x$, невідомі x,y,z відіграють роль параметрів, причому -2 є коренем цього многочлена. Друга рівність $x+3y+9z+27=0$ свідчить, що $t=3$ є коренем цього многочлена; з рівняння $x-5y+25z-125=0$ маємо $t=-5$ є коренем цього многочлена третього степеня. Тому многочлен $f(t)=1\cdot(t-(-2))\cdot(t-3)\cdot(t-(-5))=$ $=(t+2)(t-3)(t+5)$. Оскільки: $f(t)=t^3+t^2z+ty+x$, то за теоремою Вієта, тобто x, є добутком коренів $-2;3;-5$, взятим зі знаком мінус: $x=-30$, коефіцієнт при першому степені змінної t, тобто y, є сумою добутків коренів, взятих по два: $y=(-6)+(-15)+10=-11, y=-11$, коефіцієнт при другому степені змінної t, тобто параметр z, є сумою коренів, взятих зі знаком мінус $z=-(-2+3-5)=4$.

Відповідь: $x=-30,\ y=-11,\ z=4$.

У позаурочний час в класах з профільним вивченням математики можна познайомити учнів з визначником Вандермонда, який маємо у попередній задачі, що сприятиме розширенню математичного кругозору школярів.

4.5. Нехай x_1, x_2 – корені многочлена $f(x)=x^2-2\sqrt{3}x-1$. Обчисліть $arctgx_1+arctgx_2$.

Рівняння $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$ має два корені. За теоремою Вієта маємо $x_1+x_2=2\sqrt{3}, x_1x_2=-1$.

Функція $f(x)=x^2-2\sqrt{3}x-1$ є неперервною, $f(-1)>0, f(0)<0$, а тому на проміжку $(-1;0)$ є корінь; $f(1)<0, f(4)>0$, на проміжку $(1;4)$ є корінь. Висновок: $x_1\in(-1;0); x_2\in(1;4)$. А тому $arctgx_1\in\left(-\frac{\pi}{4};0\right)$; $arctgx_2\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$, а сума $arctgx_1+arctgx_2\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Обчислимо тангенс цього кута: $tg(arctgx_1+arctgx_2)$, скористаємося формулою тангенса суми, отримаємо:

$$tg(arctgx_1+arctgx_2)=\frac{tg(arctgx_1)+tg(arctgx_2)}{1-tg(arctgx_1)\cdot tg(arctgx_2)}=\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}=\frac{2\sqrt{3}}{1-(-1)}=\sqrt{3}.$$

Єдиний кут з проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює $\sqrt{3}$, є кут $\frac{\pi}{3}$.

Відповідь: $arctgx_1+arctgx_2=\frac{\pi}{3}$.

4.6. Нехай x_1, x_2 – корені рівняння $2023x^2-2024x-1=0$. Обчисліть $arctgx_1+arctgx_2$.

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У статті розглянуто методичні особливості вивчення теми «Теорема Вієта» під час освітнього процесу, створено приклади задач краєзнавчого та практичного змісту, завдань внутрішньої та міжпредметної інтеграції різного рівня складності, що дозволяють всебічно вивчати цю базову теорему шкільного курсу математики як на рівні стандарту, так і на профільному чи поглибленому рівні, зокрема наведено і задачі з параметрами. Створення такої серії різнопланових завдань інтегрованого змісту з теми може бути корисним досвідом для молодих вчителів, котрі викладають математику у класах різного профілю, та студентів фізико-математичних факультетів, а тому продовження цієї теми вважаємо виправданим, на що плануємо спрямувати свої подальші дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз, В.Г. (2004). Використання історичного матеріалу у навчанні елементарної математики майбутніх учителів. *Дидактика математики: проблеми і дослідження, 22*, 62-68.
2. Ботузова, Ю.В. (2020). Забезпечення наступності навчання математики при підготовці до розв'язування задач ЗНО методом оцінки. *Фізико-математична освіта, 3-2* (25), 21-28.
3. Botuzova, Y., Rizhniak, R., & Yaremenko, Y. (2022). The Role of the Integrated Image of the Problem Solving Method in the Realization of the Mathematics Teaching Continuity. *Revista Romaneasca Pentru Educatie Multidimensionala, 14*(4). 243-259.
4. Бурда, М.І. (2014). Компетентнісна орієнтація змісту шкільних підручників з математики. *Проблеми сучасного підручника, 14*, 78-85.
5. Васильєва, Д.В. (2018). Математичні задачі як засіб формування ключових компетентностей учнів. *Проблеми сучасного підручника, 21*, 83-91.
6. Ізюмченко, Л.В., Ключник, І.Г., & Гаєвський, М.В. (2020). Організація навчальної діяльності учнів профільних класів (на прикладі інтегрованих завдань високого рівня з математики). *Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Серія:" Педагогічні науки", 3,* 187-192.
7. Matiash, O., Mykhailenko, L., Shvets, V., & Shkolnyi, O. (2021). Educational environment as a form for development of math teachers' methodological competence. *Mathematics and Informatics, 64*(5), 520-531.
8. Miier, T., & Holodiuk, L. (2019). Didactic Triadas–Learning–Teaching–Management in the Context of Realization in the Educational Process of Innovative Author's Novations. *The Actual Problems of the World Today*. London: Sciemcee Publishing is part of SCIEMCEE, 2, 140-151.
9. Прус, А.В., & Швець, В.О. (2018). Розвиток дослідницьких умінь учнів у процесі розв'язування завдань із параметрами. Science and Education a New Dimension. *Pedagogy and Psychology, VI* (64), 49-52.

10. Tarasenkova, N., Akulenko, I.A., Burda, M., & Hnezdilova, K. (2020). Factors Affecting Techniques of Teaching Theorem Proof. *Universal Journal of Educational Research*, 508-519.
11. Чашечникова, О.С. (2011). Розвиток творчого мислення учнів під час навчання математики. Проблема діагностики. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології, 1 (*11), 217-226.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bevz, V.H. (2004). Vykorystannia istorychnoho materialu u navchanni elementarnoi matematyky maibutnikh uchyteliv [The use of historical material in teaching elementary mathematics to future teachers]. *Dydaktyka matematyky: problemy i doslidzhennia*, *22*, 62-68 (in Ukrainian).
2. Botuzova, Yu.V. (2020). Zabezpechennia nastupnosti navchannia matematyky pry pidhotovtsi do rozviazuvannia zadach ZNO metodom otsinky [Correcting grammar issues: Ensuring the continuity of mathematics education in preparation for solving problems in external examinations through the evaluation method]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 3-2 (25), 21-28 (in Ukrainian).
3. Botuzova, Y., Rizhniak, R., & Yaremenko, Y. (2022). The The Role of the Integrated Image of the Problem Solving Method in the Realization of the Mathematics Teaching Continuity. *Revista Romaneasca Pentru Educatie Multidimensionala*, *14*(4). 243-259.
4. Burda, M.I. (2014). Kompetentnisna oriientatsiia zmistu shkilnykh pidruchnykiv z matematyky [Competency orientation in the content of school textbooks on mathematics]. *Problemy suchasnoho pidruchnyka*, (*14*), 78-85 (in Ukrainian).
5. Vasylieva, D.V. (2018). Matematychni zadachi yak zasib formuvannia kliuchovykh kompetentnostei uchniv. [Mathematical problems as a means of forming key competences in students] *Problemy suchasnoho pidruchnyka*, (*21*), 83-91 (in Ukrainian).
6. Iziumchenko, L.V., Kliuchnyk, I.H., & Haievskyi, M.V. (2020). Orhanizatsiia navchalnoi diialnosti uchniv profilnykh klasiv (na prykladi intehrovanykh zavdan vysokoho rivnia z matematyky) [Organization of educational activities for students in specialized classes (using the example of integrated tasks at a high level in mathematics)]. *Visnyk Cherkaskoho natsionalnoho universytetu imeni Bohdana Khmelnytskoho. Seriia:" Pedahohichni nauky"*, *(3*), 187-192 (in Ukrainian).
7. Matiash, O., Mykhailenko, L., Shvets, V., & Shkolnyi, O. (2021). Educational environment as a form for development of math teachers' methodological competence. *Mathematics and Informatics*, *64*(5), 520-531.
8. Miier, T., & Holodiuk, L. (2019). Didactic Triadas–Learning–Teaching–Management in the Context of Realization in the Educational Process of Innovative Author's Novations. The Actual Problems of the World Today. London: *Sciemcee Publishing is part of SCIEMCEE*, *2*, 140-151.
9. Prus, A.V., & Shvets, V.O. (2018). Rozvytok doslidnytskykh umin uchniv u protsesi rozviazuvannia zavdan iz parametramy. Science and Education a New Dimension [Development of students' research skills in the process of solving tasks with parameters]. *Pedagogy and Psychology, VI* (64), 49-52 (in Ukrainian).
10. Tarasenkova, N., Akulenko, I.A., Burda, M., & Hnezdilova, K. (2020). Factors Affecting Techniques of Teaching Theorem Proof. *Universal Journal of Educational Research*, 508-519.
11. Chashechnykova, O.S. (2011). Rozvytok tvorchoho myslennia uchniv pid chas navchannia matematyky. Problema diahnostyky [Development of students' creative thinking during mathematics education - The problem of diagnosis]. *Pedahohichni nauky: teoriia, istoriia, innovatsiini tekhnolohii*, *1* (11), 217-226 (in Ukrainian).

Матеріал надійшов до редакції 29.03.2024р.