Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ОБЕРНЕНОГО НАВЧАННЯ У СТАРШІЙ ШКОЛІ (НА ПРИКЛАДІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ»)

Спеціальність 014 Середня освіта (Математика)
Галузь знань: 01 Освіта /Педагогіка

Кваліфікаційна робота
На здобуття освітнього ступеню магістр

Науковий керівник
Одінцова Оксана Олександрівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
«____»_________________20__ року
Виконавець
Гавриленко Марина Сергіївна
«____»_________________20__ року

Суми 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. У всьому світі системи освіти реформуються внаслідок глобальних змін в суспільстві, трансформації політичних систем та других соціальних факторів. Раніше освіта в основному підтримувала більш традиційні методи. Однак нещодавні досягнення в області інформаційних технологій, широкомасштабний розвиток Інтернет-технологій відкрили зовсім нові напрями досліджень у сфері освіти. Щоб задовольнити потреби цього сучасного світу, розробляються інноваційні методи навчання. Дослідники повинні постійно міркувати над новими способами покращення вже існуючих теорій, стилів навчання, розроблювати і впроваджувати нові технології навчання, сучасні моделі навчання.

Світогляд сьогоднішньої молоді змінюється з розвитком інформаційних технологій. Учні можуть сприймати інформацію не тільки в класній кімнаті, а і поза нею, використовуючи різні інформаційні прилади. Крім того, кожна людина має свої унікальні стилі навчання, а також свою швидкість сприймання. З цих причин, щоб сформувати досвід учнів шкіл та студентів у засвоєнні і застосуванні нової інформації та навичок, процес освіти постійно переглядають, для покращення освітніх результатів.

У кваліфікаційній роботі досліджено можливості оберненого навчання , або «перевернутого» класу, як інноваційної моделі навчання. «Перевернутий» клас – це відносно нова технологія навчання, яка на сьогодні успішно розвивається і представляє собою навчальну стратегію та тип змішаного навчання, який змінює традиційне середовище навчання, в основному надаючи навчальний контент он-лайн, поза класом. Таким чином, Обернене навчання – це педагогічний підхід, при якому навчання безпосередньо переходить від звичайного середовища навчання групи учнів до окремого, індивідуального, а кінцеве середовище змінюється в динамічне інтерактивне, в якому вчитель веде учнів, коли вони застосовують концепції і творчо беруть участь у вивченні предмету. Вчитель може працювати індивідуально з учнями, що мають різний рівень навчальних можливостей та навчальних досягнень. Уведення технології в освітній процес дозволяє оптимізувати процес навчання, збільшити ефективність виконання домашніх завдань, підвищити рівень мотивації учнів, формувати в учнів почуття відповідальності за навчання, перетворити учня на активного учасника навчального процесу. Через це тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики учнів старшої ланки загальноосвітньої школи.

Предмет дослідження – особливості використання оберненого навчання на прикладі навчання теми «Показникова та логарифмічна функції».

Метою роботи є з'ясування методичних особливостей використання «перевернутого» класу в процесі навчання алгебри і початків аналізу, зокрема під час вивчення показникової та логарифмічної функції.

Відповідно до мети були поставлені такі **завдання дослідження**:

1. Проаналізувати психолого-педагогічну та науково-методичну літературу з теми дослідження.

2. Описати сучасний стан теорії та практики в галузі освітніх процесів, які використовують «перевернуту» концепцію навчання як основну педагогічну стратегію навчання в цілому.

3. Визначити переваги і недоліки моделі «перевернутого» класу в порівнянні з традиційним методом навчання математики.

4. Виявити специфіку «перевернутого» класу під час вивчення логарифмічної функцій в 11 класі.

5. Представити практичні розробки з теми дослідження.

Методи дослідження. Теоретичні – системний аналіз психолого-педагогічної і навчально-методичної літератури з проблеми дослідження, моделювання педагогічних процесів. Емпіричні – спостереження, бесіди зі вчителями й викладачами, вивчення і узагальнення досвіду вчителів математики, що працюють у старших класах.

Наукова новизна і теоретичне значення роботи полягає в узагальненні та удосконаленні освітнього процесу математики у старшій ланці загальноосвітньої школи.

Практична цінність. Робота може бути використана вчителями математики та студентами під час проведення занять з математики у класах різних профілів навчання; для дослідження особливостей вивчення показникової та логарифмічної функції у класах різних профілів навчання.

Апробація результатів. Основні положення та результати дослідження були представлені на ІІІ Міжнародній дистанційній науково-методичній конференції «Розвиток інтелектуальних вмінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ* плюс – 2020», квітень-травень 2020 р.

Робота складається зі вступу, двох розділі, висновків, списку використаних джерел, додатку.

У першому розділі роботи охарактеризовано теоретичні основи методу оберненого навчання, а саме історія появи методу, концепція, інформаційно-освітнє середовище ЗЗСО як базис технології оберненого навчання, психолого-педагогічні особливості сучасних учнів, технологія «Оберненого навчання» в математиці.

У другому розділі роботи розглянуто методичні особливості реалізації оберненого навчання математики учнів старших класів, а саме аналіз навчальних програм та підручників з теми «Показникова та логарифмічна функції», особливості навчання матеріалу з теми у «перевернутому» класі, формування вмінь та навичок учнів розв’язувати практичні завдання у «перевернутому» класі.

У висновках узагальнено й систематизовано результати вивчення і зроблено рекомендації по використанню отриманих результатів.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕТОДУ «ОБЕРНЕНОГО НАВЧАННЯ»

1.1. Історія появи методу «Оберненого навчання»

[94]У 2006 році Джонатан Бергман та Аарон Семс почали викладати в середній школі Вудленд-парку у Вудленд-Парку, штат Колорадо. Джонатан приїхав з Денвера, а Аарон з Південної Каліфорнії. Вони працювали хіміками у школі. З часом учителі зрозуміли, що мають дуже схожі погляди на освіту, тому почали планувати їх спільні уроки хімії, а щоб заощадити час, вони розділили частину роботи. Проблема, яку вони одразу помітили у викладанні полягала в тому, що багато учнів пропускають частину уроків. Також ця школа розташовувалася в сільській місцевості, тому учням доводилось проводити надмірну кількість часу в автобусах. Таким чином, учні пропускали заняття і щосили намагалися не відставати.

Тому Аарон та Джонатан зацікавилися програмним забезпеченням, яке записувало слайд-шоу PowerPoint, включаючи голос і будь-які анотації, а потім перетворювало запис у відеофайл, який може бути легко поширений в Інтернеті. YouTube тільки починав свою роботу, а світ онлайн-відео перебував у зародковому стані. Але коли вони обговорювали потенціал такого програмного забезпечення, вони зрозуміли, що це може бути способом застерегти їх учнів, які пропустили заняття, від пропусків у навчанні. Отже, навесні 2007 року вони почали записувати живі уроки за допомогою програмного забезпечення для екрану. Вони розмістили лекції в Інтернеті, щоб учні могли отримати до них доступ.

Учні, які пропускали заняття, могли дізнатися, що вони пропустили. Деякі учні, які були в класі і чули живу лекцію, почали перемотувати відео. Деякі переглядали, коли готувалися до іспитів. І викладачам це подобалося, тому що їм не потрібно було витрачати години після школи, під час обіду або під час планування, щоб підтягнути дітей. Бергман і Семс ніколи не могли очікувати побічних ефектів від розміщення їх уроків в Інтернеті. Їм почали приходити електронні листи. Оскільки їх відеоролики були розміщені в Інтернеті, учні та викладачі з усього світу почали дякувати за них, бо знайшли відео і почали використовувати їх для навчання. Учителі брали участь у кількох онлайн-форумах вчителів природничих наук, і почали ділитися посиланнями на записані лекції там. Освітяни з усієї країни стали звертати на це увагу. Учителі хімії стали використовувати відеолекції в якості заміни вчителів, а майбутні вчителі використовували їх для вивчення змісту хімії, щоб вони могли викладати його учням.

У цілому за 37 років викладання Бергман і Семс [94] були розчаровані тим, що учні не змогли перекласти зміст їх лекцій в корисну інформацію, яка дозволила б їм виконати домашнє завдання. Таким способом з’явилася ідея попередньо записувати всі лекції, що б учні розглядали відео як "домашнє завдання", а потім у класі під час уроку розбирали основні поняття, більш складні поняття чи такі, які учні не розуміють. Так народилася перша «перевернута класна кімната». Бергман і Семс взяли на себе зобов'язання протягом 2007-2008 навчального року попередньо записати всі свої лекції з хімії.

Учні мали передивитися відео як домашнє завдання і зробити відповідні нотатки. А в класі учні відбувалося розв’язування завдань та проведення лабораторних досліджень. Викладаючи наукові курси, Бергман і Семс продовжували проводити ті ж лабораторні експерименти, що і завжди. Вони виявили, що у них було більше часу як для лабораторій, так і для проблемної роботи. Насправді, вперше за всю їх кар'єру, у них не було ніяких складнощів для учнів. Вони закінчували всю свою роботу за 20 хвилин, ще залишався час до кінця уроку. Очевидно, що ця модель була більш ефективнішою, ніж читання лекцій та виконання домашніх завдань.

Бергман і Семс також вирішили провести ті ж тести в кінці року, що і в минулому та побачили, що їх учні дізналися більше, і отримали деякі приблизні дані, які, здавалося, вказували на те, що перевернутий клас був кращою моделлю, ніж традиційний підхід. Бергман і Семс реалізували перевернуту модель протягом одного навчального року і були дуже задоволені тим, як навчаються їх учні. У них були докази, що їх модель працює і краще підходить для дітей.

1.2. Концепція методу «Оберненого навчання»

[94] Концепція перевернутого класу така: те, що традиційно робиться в класі, тепер робиться вдома, а те, що традиційно є домашнім завданням, тепер виконується в класі. По суті, кожне заняття починається з декількох хвилин обговорення про відеозапис, зроблений напередодні ввечері. Один з недоліків перевернутої моделі полягає в тому, що учні не можуть задавати негайно питання, які приходять їм в голову, як це було б, якби тема викладалася наживо. Для вирішення цього питання витрачається значна кількість часу на початку уроку навчання учнів для ефективного перегляду відео. Перед переглядом відео учням слід надати такі рекомендації:

- вимикати плеєри, телефони та інші відволікаючі фактори під час перегляду відео.
- вчити учнів, що тепер у них є здатність " зупиняти" і "перемотувати" свого вчителя.
- рекомендувати їм вільно використовувати кнопку паузи, щоб вони могли записати ключові моменти уроку.
- навчити їх методу конспектування Корнелла, в якому вони роблять нотатки, записують будь-які питання, які у них є, і підводять підсумки свого навчання.

Учні, які приймають цю модель правильно, приходять на заняття з відповідними запитаннями, які допомагають учителю розібратися з їх помилковими уявленнями. Також учитель повинен використовувати ці запитання для оцінки ефективності відеороликів. Якщо у кожного учня є подібне питання, учитель має зробити замітку, щоб переробити або виправити це конкретне відео. Після того, як на початкові запитання дані відповіді, учням дається завдання на урок. Це може бути лабораторна робота, дослідницька діяльність, спрямована на вирішення проблем або тест. Оцінювання завдань, лабораторних робіт та тестів відбувається так само, як і завжди в рамках традиційної моделі. Але при цьому роль учителя в класі різко змінилася. Учитель більше не є носієм інформації, замість цього він бере на себе більше навчальної ролі.

[110]У традиційній моделі якщо учні мають проблеми з домашніми завданнями, які були зроблені напередодні, то, зазвичай, на уроці витрачаються перші 25 хвилин на повторення і розбирання тих проблем, які виникли в учнів. Потім учитель представляє новий матеріал і проводить залишок уроку з самостійною роботою, практичним застосуванням або лабораторною роботою.

У «перевернутій» моделі час повністю перебудовується. Учні все ще повинні задавати запитання про зміст, який було доставлено за допомогою відео, тому учитель зазвичай відповідає на ці запитання протягом перших кількох хвилин уроку. Це дозволяє прояснити невірні подання до того, як вони будуть практикуватися і застосовуватися неправильно. Час, що залишився використовується для більш інтенсивної практичної діяльності та спрямованого вирішення проблем.

Розглянемо типовий клас хімії Аарона і приклад того, як змінилася роль вчителя. [94]

Урок хімії Аарона починається напередодні ввечері в будинку кожного учня. Учням не задаються завдання або читання з книги, а, скоріше, відео. Усі учні будуть дивитися відео (на своєму телефоні, комп'ютері або телевізорі) Аарона і Джонатана, що пояснюють матеріал, який буде застосовуватися в класі вранці.

Урок починається. Аарон швидко бере участь і починає сеанс запитань і відповідей. Учні задають запитання по вчорашньому відео, і Аарон допомагає прояснити невірні уявлення. Приблизно через 10 хвилин Аарон доручає учням вийняти свій пакет практичних завдань, багато з яких схожі за структурою на тип запитань, які вони побачать на іспиті з хімії. Він веде клас через кілька прикладів, відображаючи зміст, який учні дізналися напередодні ввечері, і відповідає на будь-які подальші питання. Тож приходить час працювати. Учні завершають решту завдань, поки Аарон ходить по класу, допомагаючи учням, коли у них виникають питання. Керівництво зрозв'язування доступне учням, щоб перевірити свою роботу.

У ті дні, коли буде проводитися лабораторна робота, відео не призначається. Замість цього учні виконують попередню роботу вдома. На заняттях Аарон задає будь-які відповідні питання про лабораторну та обговорює питання безпеки. Потім учні починають експериментувати. В рамках традиційної моделі завершення будь-яких обчислень і обговорень зазвичай призначається якдомашнє завдання після лабораторної роботи. Однак відповідно до перевернутої моделі класу наступне відео призначається для домашнього завдання, і учням дається час в класі на наступний день, щоб закінчити лабораторну роботу. Це дозволяє Аарону відповідати на конкретні питання про лабораторну і допомогти виконати учням з розрахунками, а також обговорити дані, зібрані в класі. Коли настає екзаменаційний день, всі учні здають іспит в один і той же час і отримують своєчасний зворотний зв'язок, щоб можна було усунути неправильні уявлення.

Рис. 1.1. Приклад оберненого класу

Коли викладають в традиційній чином, учні, які, зазвичай, отримували більшу частину уваги, були найкращими і розумними учнями, які піднімали руки першими і задавали важливі запитання. Тим часом інші учні пасивно слухали їх розмову з учителем. Але від тоді, як вводиться перевернута модель, роль вчителя змінилася; він приділяє увагу більшій частині класу, допомагаючи учням, які борються за увагу найбільше. Це є найважливіша причина, чому учні мають успіхи в «перевернутій» моделі. Вчитель знаходиться в школі не тільки для того, щоб викладати зміст, а й для того, щоб, щоб надихати, заохочувати, слухати і надавати наукове бачення учням. Це відбувається в контексті взаємин. Учням потрібні позитивні зразки для наслідування в їхньому житті. Це пов'язано з посиленням взаємодії вчителя і учня. Можна заохочувати учнів взаємодіяти з учителем через текстові повідомлення. У більшості випадків зміст цих текстових повідомлення зводиться до наступного: «Як мені отримати допомогу з проблеми X?» або «Який орієнтир на майбутній тиждень?». Також учні можуть призупинити свого вчителя, перемотати його назад і переконатис я, що вони дійсно вивчають важливі поняття.

Існує безліч причин, за якими учень може погано вчитися. Він може мати деякі відсутні фонові знання. У нього можуть бути особисті проблеми, які заважають навчанню. Або учень може бути більш стурбований "грою в школу", ніж насправді вчитися. Коли вчителі можуть діагностувати, чому дитина не навчається, то створюють потужний момент, коли можна здійснити необхідні втручання, зокрема за допомогою батьків. Батьки позитивно реагують на такі відео в класах, де було використано технологію «оберненого навчання». Як виявилося, багато з них спостерігали їх прямо поруч зі своїми дітьми і вивчали науку. Це призводить до цікавих дискусій між учнями та батьками про зміст уроків. Технологія «Оберненого навчання» відкриває двері в класи і дозволяє батькам увійти на урок. Відео розміщені на сайті в інтернеті, і батьки учнів та інші мають до них вільний доступ. Замість того щоб гадати, що вивчають їхні діти в класі, батьки можуть знайти уроки всього за кілька кліків. Публікація відеороликів та відкриття навчальних практик для громадськості можуть дати змогу привернути більшу кількість учнів до школи, тому що батьки можуть контролювати якість та доступність викладання матеріалу вчителем.

1.3. Інформаційно-освітнє середовище закладу загальної середньої освіти як базис технології оберненого навчання

Становлення інформаційного суспільства охоплює всі сфери діяльності людини, в тому числі й галузь освіти, що базується на масовому впровадженні комп'ютерної техніки та використанні мережі Інтернет в закладах освіти. Сучасна система освітнього процесу не може залишитися осторонь від глобального процесу інформатизації суспільства та освіти. Новітні тенденції соціуму вимагають розвитку системи освіти на засадах інформаційних технологій, створенні та функціонуванні належного високотехнологічного та високоякісного інформаційно-освітнього середовища. Його значення останнім часом зростає і якісно впливає на всіх суб'єктів освітнього простору і на їх відносини в освітній системі.

Завданням інформаційно-освітнього середовища є докорінна модернізація технологічної складової системи освіти та здійснення переходу до відкритої освітньої системи. У складі глобального освітнього простору виділяють єдиний простір системи освіти, до якого як складова входить інформаційно-освітнє середовище ЗВО, яке є сукупністю інформаційного, технічного, навчально-методичного забезпечення з налагодженими зв'язками і пов'язує суб'єктів освітнього процесу. Характерними особливостями інформаційно-освітнього середовища (ІОС) сучасного закладу освіти є складність, відкритість, динамізм, нестабільність, нелінійність, самоорганізація. Навчально-пізнавальна діяльність учнів і організаційно-педагогічна діяльність учителів мають складну, багатокомпонентну та розгалужену структуру, що визначається суб'єктами і метою, змістом і методами, формами та засобами навчання.

У науковій літературі досить неоднозначно описано поняття ІОС, оскільки кожен автор враховує окремі його ознаки, і єдиного підходу до визначення не виявлено. В. Биков [95] зазначив, що «навчальне середовище – це штучно побудована система, структура і складові якої сприяють досягненню цілей навчально-виховного процесу». Ю. Жук [96] визначає предметне (навчальне) середовище як середовище, у якому забезпечуються умови інформаційної взаємодії в процесі навчання певного навчального предмету (предметів) між учителем, учнем і засобами навчання, що функціонують на базі засобів ІКТ. В.Лапінський [97] стверджує, що «навчальне середовище – це сукупність матеріальних об'єктів і зв'язків між ними, які утворюють систему, призначену для забезпечення навчальної діяльності суб'єктів навчання». М.Жалдак [98] тлумачить навчальне середовище як штучну, тобто створену людьми, систему з чітко визначеними освітніми цілями, яка функціонує в певному просторі, вважає, що освітнє середовище закладу освіти – інформаційно-освітній простір – є спеціалізованим і цілеспрямованим підпростором глобального освітнього простору, підсистемою єдиного інформаційного простору систем освіти, засоби й технології останнього формуються освітніми закладами й підпорядковані цілям навчання й виховання певного контингенту тих, хто навчається з урахуванням наявних обмежень навчального закладу щодо ресурсного забезпечення освітнього процесу.

Докладне трактування поняття ІОС подано у праці С. Литвинової [99, с.79], яка визначає його як багатокомпонентну систему, що включає в себе електронні навчально-методичні матеріали, інформаційне забезпечення педагогічної діяльності, необхідне для організації та проведення практики студентів, наукомістке програмне забезпечення, тренажери і засоби комп'ютерного моделювання, системи визначення ефективності підготовки фахівців, системи інформаційної інтеграції зі школами та педагогічною громадськістю, технічні засоби, бази даних та інформаційно-довідкові системи, засоби автоматизації наукових і науково-методичних досліджень, позанавчальної та організаційно-управлінської діяльностей, властивих будь-якому закладу освіти нашої держави.

Аналізуючи наявні в педагогічній науці визначення інформаційно-освітнього середовища, можна узагальнити, що ІОС – це система навчально-методичної, інформаційної, технічної підсистем, які цілеспрямовано забезпечують освітній процес, а також взаємодію його учасників.

Взявши за основу обґрунтовані родо-видові істотні ознаки феномену, інформаційно-освітнє середовище визначаємо в такій редакції: інформаційно-освітнє середовище – це штучно і цілеспрямовано спроєктована підсистема освітнього процесу, яка структурно включає змістову (інформаційні, навчальні, методичні ресурси), технологічну (інструменти, засоби ІТ-діяльності і комунікацій), організаційну (організаційні підрозділи) складові та згодом забезпечує відкритість системи підготовки завдяки об'єднанню учасників педагогічного процесу для виконання інформаційної, інтерактивної, комунікаційної, навчальної та інших функцій (рис.1.2).

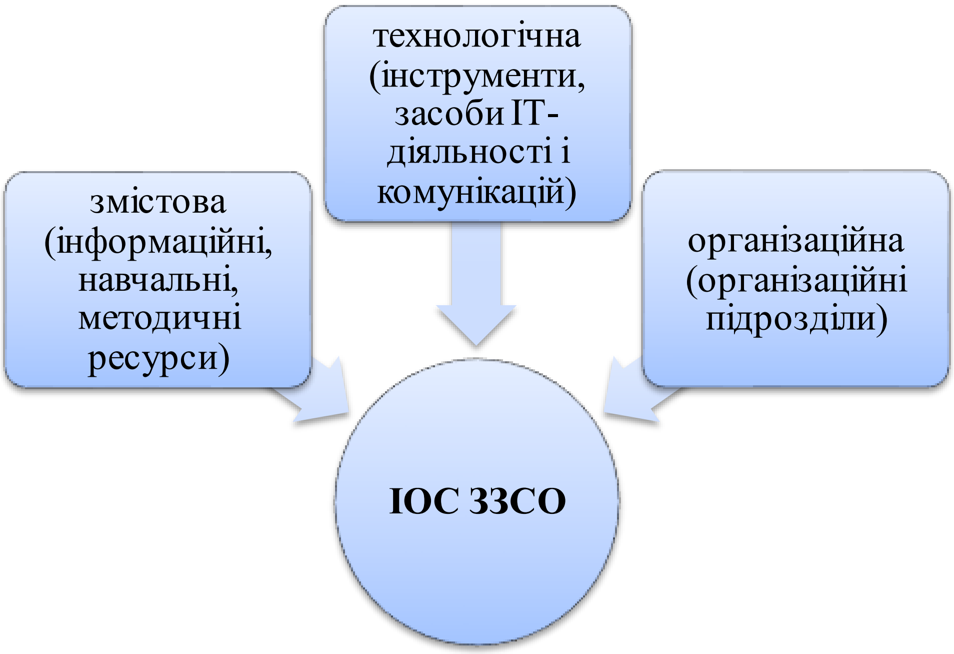


Рис. 1.2. Структура інформаційно-освітнього середовища ЗЗСО

За аналізом робіт науковців щодо визначення інформаційно-освітнього середовища та його суттєвих характеристик ми можемо стверджувати, що сучасне ІОС закладу освіти – це інтегроване, відкрите, динамічне середовище, яке: містить організаційні, управлінські, педагогічні, соціальні, економічні, правові, методичні та навчальні взаємозв'язки; функціонально спрямовується на інформаційну електронну взаємодію між суб'єктами середовища, централізоване електронне навчально-методичне та організаційно-педагогічне забезпечення освітнього процесу.

Інформаційно-освітнє середовище виконує такі функції:

- інтерактивну, що дає змогу реалізовувати внутрішньо-системні зв'язки;

- комунікаційну – уможливлює підтримання зв'язків "всередині", а також із "зовнішнім" інформаційним простором;

- інформаційну, що надає відкритий доступ до інформації, створює умови для інформаційного обміну;

- координаційну, тобто дозволяє фіксувати та представляти у взаємозв'язку зміст, адресований різним суб'єктам;

- розвивальну, спрямовану на розвиток інтелекту, особистих творчих якостей;

- культуро-формувальну, що пов'язана з інформаційною культурою;

- професійно-орієнтувальну, орієнтовану на профіль майбутньої професійної діяльності [100].

ІОС включає бібліотеку електронних освітніх ресурсів (електронних підручників, посібників, методичних рекомендацій, словників, довідників, лабораторних практикумів, які: розподілено за галузями (професійна підготовка, теоретична підготовка, професійно-практична підготовка, загальноосвітні дисципліни, додаткові матеріали); побудовано на основі Web-технологій (у тому числі хмарних, технологій відкритих ресурсів тощо); можуть використовуватися за різних організаційних форм навчання (очної, заочної, екстернатної та дистанційної); передбачає наявність довідково-пошукової системи; має репозитарій зовнішніх електронних ресурсів і репозитарій, що містить навчальні, методичні та наукові матеріали з різних питань, згрупованих за категоріями, галузями освіти; електронні енциклопедії та довідники.

Сприймаючи інформаційно-освітнє середовище через інтеграцію електронного кампусу закладу освіти, засобів управління навчальним процесом, педагогічних технологій, покликаних формувати інтелектуально-розвинену творчу особистість, яка володіє необхідним рівнем професійних знань, умінь і навичок для успішного життя і майбутньої професійної діяльності в інформаційному суспільстві, коротко опишемо надалі психолого-педагогічні особливості сучасних учнів, які дозволяють запроваджувати технологію оберненого навчання.

1.4. Психолого-педагогічні особливості сучасних учнів як основа запровадження технології оберненого навчання

Сьогоднішні учні виросли з доступом в інтернет, YouTube, Facebook, MySpace і безліч інших цифрових ресурсів. Як правило, вони роблять домашнє завдання з математики, одночасно листуючись з друзями, листуючись на Facebook і слухаючи музику. Багато хто з цих учнів повідомляють, що, коли вони приходять в школу, їм доводиться вимикати і відключати звук, тому що їх школи забороняють телефони, плеєри та будь-які інші цифрові пристрої. Більшість учнів мають більш потужні обчислювальні пристрої, ніж переважна більшість комп'ютерних класах в школах, на жаль, учням не дозволяють ними користуватися.

Аналіз рушійних чинників трансформації освітнього простору у напрямі впровадження ІТ вимагає згадати і про психічні особливості молодого покоління, яке народилося на межі століть і виросло водночас із швидким розвитком інформаційних технологій. Покоління Z (покоління центеніалів) є прибічником молодіжних течій і водночас більш активним.

[103] «Теорія поколінь», у якій уперше було виокремлено «покоління Z» (1995–2012 рр.) і названо його основні характеристики, була розроблена в 1991 році американськими вченими Н. Хоувом і В. Штраусом. У 2003–2004 роках науковці під керуванням Є. Шаміс адаптували «Теорію поколінь» для

пострадянських країн, зазначивши, що в нашому соціумі поколінням Z потрібно вважати дітей, які народилися й народяться в період 2004–2024 років. Психологічні особливості дітей покоління Z та способи роботи з ними описано у працях Г. Колосової [101], А. Мірошникової [102], та ін.

Інформаційне середовище, у якому живе покоління Z, суттєво впливає на розвиток їх особистості, визначаючи характерні ознаки. Зупинимося на цьому більш детально.

Американський дитячий психолог Ш. Постник-Гудвін [104] визначає такі ознаки дітей покоління Z (рис.1.3).

Рис.1.3. Психологічні характеристики покоління Z

1. Нетерплячість (виросли в онлайн-середовищі та звикають до того, що їхні бажання завжди будуть виконані у віртуальній реальності, але щоб зробити це в реальному житті, часто недостатньо просто натиснути на кнопку).

2. Зосередження на короткострокових цілях (у всьому прагнуть отримати негайні результати, як в Інтернеті).

3. Залежність від Інтернету (сидять у соціальних мережах, грають в Інтернет-ігри, постійно розповідають про своє життя в блогах і спілкуються в месенджерах.

4. Фрагментарність образного мислення (не виховані на книгах, а тому максимум, що вони можуть читати, це будь-які статті, найчастіше – міні-новини, формат твіттів і статусів у соціальних мережах).

5. Швидко стають дорослими (виросли в епоху економічної депресії; а від них усі очікують тільки одного – бути успішним).

6. Орієнтація на використання (знають, чого хочуть і як це отримати, тому мають у своєму арсеналі десятки аргументів, які використовують, коли просять щось у батьків).

7. Цінують чесність, тому в соціальній мережі відкриті (багато хто живе у світі фантазій, але деякі пишуть правдиво та чесно, інколи – дуже відкрито, чим шокують старше покоління).

8. Віртуальний світ на першому плані (у виборі між особистою зустріччю та спілкуванням у кіберпросторі нададуть перевагу другому способу).

9. Техніку знають краще, ніж розуміють почуття людей (запитують не у вчителів і батьків, а в Інтернеті, тому збільшується комунікативна відстань дітей від їхніх батьків і переривається ланцюг соціального наслідування, передавання досвіду).

10. Розумні виконавці (легко піддаються впливу).

Зарубіжні й вітчизняні психологи (А. Сапа, Г. Солдатова) зазначають, що у покоління Z розвиваються і специфічні психологічні особливості, а саме[104]:

– гіперактивність. Нині збільшується число так званих «дітей індиго» або дітей з дефіцитом уваги та гіперактивності. Їм важко довго залишатися зосередженими на чомусь одному, вони дуже непосидючі й тому розтормошені та гіперактивні. У таких дітей часто виникають проблеми з успішністю, хоча при цьому вони можуть бути обдарованими в певних сферах діяльності (наймолодший сертифікований спеціаліст Microsoft, пакистанець Шафай Тобани – 8-річний хлопець; стільки ж років має наймолодший мільйонер);

– схильність до клінічних форм аутизму. Це не вид психічного розладу, а спосіб взаємодії зі світом людей, які з дитинства занурені в себе й не здатні спілкуватися з іншими. Власне, це своєрідний захист від проблем сучасного життя, по суті – спосіб десоціалізації. Такі діти стають менш товариськими, живуть у віртуальному світі фантазій і поступово стають інтровертами. Водночас це трактується як дитячий егоцентризм – думати виключно про себе [105];

– сенсорна депривація. Занурюючись в Інтернет, діти отримують менше сенсорних сигналів із навколишнього світу. Відчуття світу може стати менш чуттєвим: притупляється сприйняття запахів, звуків реального світу, спостерігається спад здатності до співпереживання, емпатії;

– побудова ідентичності. Дитина насамперед активно експериментує зі своєю ідентичністю, пошуком свого соціального «Я», освоюючи в Інтернеті різні соціальні ролі. Водночас спроби приміряти на себе різні маски можуть призвести до того, що ідентичність застрягне на стадії дифузної ідентичності – нечіткого, нестійкого уявлення про самого себе. У результаті може затягнутися процес самовизначення, переходу від дитинства до юності й далі [106].

Усвідомлюючи зміни у психіці молодого покоління, яке виростає на повсякчасному використанні інформаційних технологій та живе більшою мірою віртуальним світом та його характеристиками, вважаємо необхіднимураховувати це у професійній діяльності вчителя.

З огляду на це бачимо доцільним здійснити аналіз рекомендацій провідних психологів та дидактів, які мають досвід роботи з поволінням Z. Так, американський експерт у сфері освіти дорослих і дітей Дж. Коатс у праці «Покоління та стилі навчання» [107] дає такі поради сучасним вчителям щодо побудови стилю навчання учнів, які відносяться до «Покоління Z».

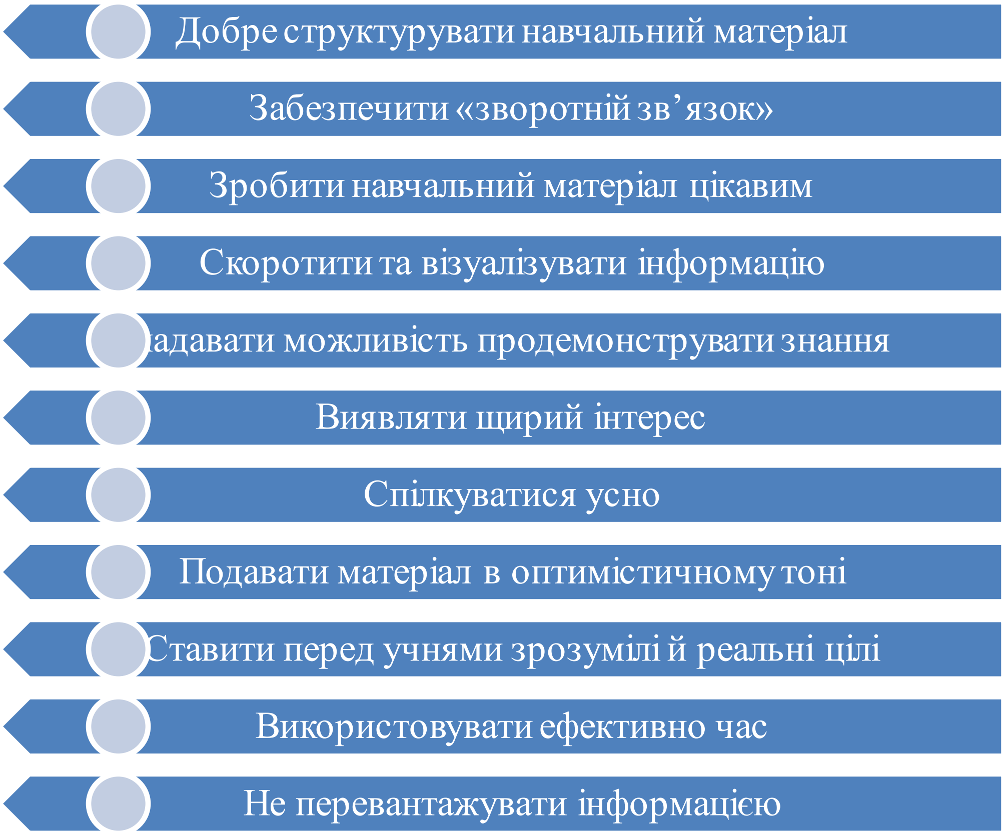


Рис.1.4. Рекомендації вчителю до роботи з поколінням Z (за Дж. Коатс)

Дж. Коатс [107] зазначає, що покоління Z росте в дуже «впорядкованому» світі та потребує такого ж порядку й логічної послідовності від навчання. Його представники бажають точно знати, що і в які терміни від них вимагається – ця інформація має бути дуже докладною. Сучасні учні завжди хочуть знати, наскільки точними є їхні припущення, чи правильно вони розуміють матеріал, чи роблять помилки, тому вдячні вчителю за увагу та участь. Покоління Z найкраще сприймає візуальну інформацію, тому текстові матеріали повинні бути простими для розуміння, структура тексту має відповідати його змісту, а ключові моменти – виділені візуально. Крім того, для цього покоління дуже важливим є підбиття підсумків за кожним етапом навчання – і майже негайна постановка завдань до наступного етапу. Учні не будуть зневажати вчителя, якщо вони відчувають, що їхні знання в деяких питаннях більш глибокі, ніж його. Однак вони безумовно бажають, щоб учитель надав їм можливість продемонструвати ці знання, і будуть дуже вдячні, якщо він проявить щирий інтерес. Представники цього покоління хочуть, щоб наставник був здатним і мудрим керівником, а не «все знав». Слід використовувати методики, які включають усний обмін інформацією між учнями: вербалізована інформація швидше і краще зберігається в пам'яті. Спілкування учнів між собою стимулює пам'ять і робить навчальний процес більш динамічним. Також позитивізм мислення сприяє розумовій активності. Представники «покоління Z» готові робити все максимально ефективно, але для цього вони повинні знати, що саме вимагається від них. Також учитель повинен допомогти зрозуміти, навіщо учневі потрібна певна інформація, і надати найкращу можливість скористатися нею. Представники покоління Z не здатні утримувати увагу на будь-чому понад 15-20 хв. Поділіть навчальний час на певні інтервали, протягом яких в учнів буде змінюватися вид діяльності. Покоління Z хоче отримувати «сконцентровані» знання. Крім того, вони свідомо ігнорують етапи уроку, спрямовані на «закріплення» матеріалу за допомогою його багаторазового повторення: як тільки суть навчального матеріалу їм стає зрозумілою, подальше повторення того ж матеріалу стає «недоречним».

Вітчизняні педагоги-практики також пропонують рекомендації щодо організації навчання дітей покоління Z. Так, С. Попова [108], яка має досвід навчання молоді, найбільш наближеної до покоління Z, пропонує таке.

1. Приділяти більше часу на осмислення матеріалу після уроку:

- забезпечити доступ учнів до змісту або презентацій уроку, щоб вони могли ще раз переглянути й осмислити вивчений матеріал;
- розробити й надати блок вправ для розуміння тексту прочитаного із невеликими тестовими завданнями та творчою роботою, де потрібно висловити власну думку з певного питання;
- звернутися із проханням оформити або заповнити абстрактну схему, яка буде виділяти ключові моменти уроку або встановлювати взаємозв'язок між поняттями теми.

2. Структурувати способи досягнення мети:

- надати алгоритм мотивованих кроків для досягнення конкретної мети;

- розробити рекомендації або список корисних порад щодо оптимізації роботи, економії часу, уникнення помилок тощо;
- доповнити теорію практикою, щоб учні змогли оцінити ефективність запропонованої методології.

3. Надати деяку свободу вибору дій у межах навчальної програми:

- рекомендувати список використаної літератури та додаткових джерел інформації з теми, тому що сучасне покоління звикло будувати свій алгоритм отримання інформації;
- повідомити, на основі яких критеріїв буде відбуватися загальне оцінювання, скільки балів вони будуть отримувати за своєчасне виконання завдань і скільки будуть утрачати, якщо не встигнуть (діти, які постійно грають у комп'ютерні ігри, звикли до системи заохочень і покарань);
- розробити своєрідний візуальний лічильник балів, щоб учні могли бачити миттєві позитивні або негативні зміни залежно від докладених або недокладених зусиль; правила гри не потрібно змінювати протягом усього навчального року; варто дотримуватися встановлених вимог, щоб не втратити довіру учнів.

4. Залучити учнів до довгострокових проєктів, які допоможуть культивувати терпіння й наполегливість.

Бізнес-журналіст О. Штурвало [109], який має досвід роботи з поколінням Z, запропонував принципи, що демонструють правильність постановки завдань для працівників, якщо керівники бажають їх швидкого виконання та адаптував ці принципи до освітнього процесу (рис. 1.5)

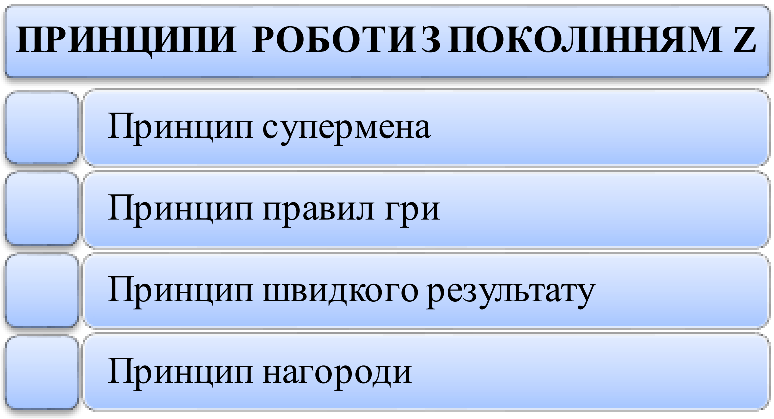


Рис.1.5. Принципи роботи з поколінням Z (за О. Штурвало)

Принцип супермена. Основою мотивації покоління Z є інтерес. Відсутність нудьги та наявність завдань, що захоплюють, – частина їх комфортного стану. Учень може швидко виконати декілька завдань чи рухів одночасно без втрати якості. Але він ще не готовий виконувати завдання, сутності якого не розуміє. Йому важливо знати: що він робить, чому, навіщо і як це узгоджується з метою. Також правильне формулювання завдання вчителем передбачає займенник «ми», наприклад, «Ми виконаємо три різні варіанти вправи…», «Ми хочемо виконати спільно таку дію», «За допомогою цієї вправи ми зможемо показати важливість розвитку…».

Принцип правил гри. Представники покоління Z можуть виконувати завдання якісно і вчасно. Однак їм важливо бачити в особі вчителя не керівника, а консультанта, порадника, помічника; знати конкретний термін виконання роботи; розуміти, що не виконання супроводжується покаранням.

Принцип швидкого результату**.** Покоління Z жадають перемоги, а тому їм важливо знати, що певна діяльність їм посильна.

Принцип нагороди**.** Учні покоління Z не можуть довго чекати; вони бажають, щоб їхні мрії здійснювалися швидко. Тому потрібно вказати не тільки термін виконання завдань, але й час досягнення першої перемоги.

О. Любченко [102], кризовий психолог, трансформаційний тренер, звертає увагу вчителів на створення спеціальних освітніх умов.

1. Із дітьми гаджетів потрібно говорити «твітами», тобто коротко і з перервами, завдання розсилати на гаджети. Будь-яке завдання краще розбивати на десяток дрібних і розписувати кожен крок, не сподіваючись на допитливість. Шаблони не обмежують, а заспокоюють покоління Z. Креативність виявляється, коли вони знаходять недоліки в шаблонах або шукають нові версії.

2. Покоління Z відгороджується від усього, що викликає дискомфорт. Якщо їм цікаво і вони самі цього хочуть – готові гарувати. Як тільки з'являється «треба» – активність знижується. Тому матеріал на уроці потрібно подавати цікаво, з елементами гри та в комфортних умовах. Комфортні, стильні та модернізовані класи спонукають сучасних дітей бігти на заняття. Якщо немає матеріальної бази, використовуйте оригінальні роздруківки та нестандартне оформлення кабінету.

3. Сучасні діти збиваються у віртуальні «зграї». Належність до групи в соцмережах для них надзвичайно важлива. Тому вчителю варто виділяти час на уроці для зворотного зв'язку, обміну досвідом, роботи у групах. Варто завести в соцмережі групу для класу, яку будуть вести діти, а не дорослі.

4. Учні полюбляють вести блоги, які для них стали публічними особистими щоденниками. Тому в навчанні варто організовувати як публічне, наприклад, запропонуйте учням зняти відео про виконання досліду. Вони зроблять це охочіше, ніж записуватимуть результати в зошит.

Учителям як представникам трьох попередніх поколінь для уникнення конфліктів і оптимізації освітнього процесу варто враховувати в його організації таке:

- не тільки знати та розуміти особливості поведінки покоління Z, а психологічно правильно реагувати на неї;
- створити в навчальному закладі комфортні умови, які відповідають запитам цих дітей;
- трансформувати освітній процес відповідно до рекомендацій зарубіжних і вітчизняних учених, педагогів-практиків;

- постійно підвищувати власну інформаційну грамотність і використовувати ІТ в освітньому процесі;
- спілкуватися з батьками учнів із метою їх інформування щодо особливостей покоління *Z*, а також знаходження спільних способів їх виховання й розвитку.

1.5. Технологія «оберненого навчання» в математиці

Виходячи з національних, міжнародних та університетських даних, здається очевидним, що учні потребують більшої кількості математики і більш якісному математичному навчанні, ніж те, що вони можуть отримувати в даний час. Учні повинні мати можливість відчути себе пов'язаними з математикою. Учителям потрібен спосіб розвинути в учнів розуміння та інтерес до математичних концепцій та ідей, щоб заохотити їх продовжувати відвідувати більше математичних курсів в середній школі і математичних курсів вищого рівня, щоб підвищити свою кваліфікацію, шанси на успіх в університеті.

Згідно з ініціативою державних стандартів загального ядра, що допомагає учням розвивати математичні навички розуму через стандарти математичної практики.

Багато вчителів в останні роки розглядали використання перевернутого підходу до навчання в класі як спосіб задоволення цих вимог. Що привабливо в перевернутому підході до навчання для вчителів математики середньої школи, так це навчальний час, отриманий всередині запланованого часу занять. Використовуючи цю стратегію навчання, вчителі можуть використовувати час занять для розвитку розуміння в учнів. Вони здатні запропонувати студентам більш значущі завдання, які розвивають навички вирішення проблем. Потім учні можуть співпрацювати, обґрунтовувати і захищати свої процеси, в той час як учитель полегшує і направляє їх. Учні можуть піти від цього досвіду, більш зайняті своїм власним навчанням і зі здатністю аналізувати нові ситуації, критично роздумуючи про математичні концепції та ідеї.

Це своєчасно, враховуючи перехід до більш суворих стандартів і акцент на моделюванні та аргументації, що забезпечується загальними основними державними стандартами. Моделювання за допомогою математики і математичний дискурс є критичними чинниками у розвитку концептуального розуміння в учня. Навчальні стратегії, такі як перевернута модель класу, мабуть, підтримують ці функція. Цей підхід, здається, дає час у класі для більш значущої диференціації можливості і для розвитку математичних дискусій, які можуть привести до більш глибокого розуміння математичного змісту, сприяти зв'язкам між темами і підвищити успішність студентів в області математики.

[94]У США було проведене дослідження, де розглядається, як перевернутий метод навчання в класі відрізняється від традиційного навчання в класі при порівнянні показників успішності учнів в 10-х класів з математики. Була використана модифікована пояснювальна послідовна конструкція змішаних методів, яка включала збір кількісних даних і подальше докладне пояснення кількісних результатів. Оціночні дані та загальні оцінки підсумкового семестру з математики були наступними, вони були зібрані серед учнів середніх і старших класів у великому приміському державному шкільному окрузі Середнього Заходу, щоб визначити, як перевернутий підхід до навчання в класі відрізняється з точки зору показників успішності учнів у порівнянні з традиційним класом. Другим компонентом кількісних етапів був збір даних про частоту інцидентів активного навчання, що спостерігаються в класах, щоб додатково оцінити відмінності, пов'язані з перевернутим класом в порівнянні з традиційним класом.

У ході цього дослідницького спостереження були вивчені уявлення учнів і вчителів про досягнення в математиці у результаті застосування «перевернутого» підходу до навчання з учнями середньої та старшої школи з математики і про те, як ці уявлення можуть відрізнятися від уявлень учнів і вчителів в класах, де традиційно викладається математика.

Ґрунтуючись на дослідженнях описаних вище, можна зробити висновок про те, що використання стратегії «перевернутого» класу в класі математики старшої школи має багато наслідків. Деякі дослідження показують, що використання стратегії вивільняє навчальний час, вдома він витрачається на пасивні методи навчання, і звільняє місце для більш продуктивного, моделюючого та проектного навчання. Для того щоб підтримати стандарти для математичної практики будують життєздатні аргументи і критикують міркування інших, вчителям потрібен час з учнями, щоб розвинути ці звички розуму.

Ця технологія використовує як постпозитивістський, так і соціально-конструктивістський світогляд. Основна увага в ній приділена визначенню того, як конкретна навчальна стратегія порівнюється з більш традиційним навчальним підходом щодо показників успішності учнів у класі математики, а також наданню докладної інформації про сприйняття викладачем та учнями навчальних методів курсу. Однак навмисно розроблені уроки, що відповідають цілям курсу та забезпечують рівний доступ і диференціацію для учнів, також є важливими компонентами впливу на ті ж самі досягнення, які вимірюються вищезазначеними способами. Для виявлення потенційних кращих практик в області навчання математики необхідно було зібрати як кількісні дані про успішність, так і якісні дані про сприйняття від учасників, що у ньому беруть участь.

Отже, розглянуте дослідження було зосереджено на теоретичних основах конструктивізму стосовно навчання учня. Думки про те, як учні конструюють знання, можна побачити в ідеях Джона Дьюї, коли він припустив, що учні є продуктами їх власного особистого досвіду; однак термін конструктивізм як теорія навчання був розроблений Брунером (1960) і Піаже (1950). Використовуючи конструктивістські ідеї, учні активно взаємодіють з новим змістом, щоб осмислити матеріал, переживаючи і об'єднуючи його інформація з попереднім досвідом навчання (Hoover, 1996). Завдяки цьому навчанню теоретично, учні, які беруть участь у перевернутому класі, повинні мати можливість брати участь у більш практичних, візуальних або інтерактивних заняттях в класі. Цей досвід дозволив би їм побудувати новий сенс для себе на основі попереднього досвіду навчання, включаючи знання, отримані з відео, які вони дивилися, і з інших попередніх можливостей, встановлюючи зв'язок з математикою.

«Обернене навчання» теоретично дає вчителям час для розвитку математичних ідей і можливість полегшити цей розвиток. Реалізуючи технологічний підхід до навчання, такий як стратегія перевернутого класу, вчителі можуть змішувати навички двадцять першого століття з розвитком основних звичок розуму. Це дослідження спрямоване на те, щоб зрозуміти, як досягнення учнів при оберненому навчанні математики порівнюються з досягненнями учнів у традиційно проінструктованих класах, і як уявлення учнів і вчителів про викладання та навчання математики можуть відрізнятися між цими двома групами.

Ґрунтуючись на дослідженнях, існує кілька переваг і недоліків технології «оберненого навчання». Перша перевага перевернутого підходу до навчання включають:

– ідею про те, максимізацію учбового часу за рахунок переміщення компонентів прямого навчання за межі уроку;

– структура технології створює середовище, більш майстерне в забезпеченні можливості для диференційованого навчання, учні мають можливість використовувати класний час, щоб застосувати те, що вони дізналися з відео, що дозволяє вчителям більш точно оцінити, чи розуміють учні зміст курсу чи ні, і використовуючи різні форми та методи для оцінки розуміння, вчителі мають можливість виправити неправильні уявлення до того, як відбудеться підсумковий іспит;

– учителі мають можливість надавати зворотний зв'язок частіше і в більш широкому форматі та своєчасно, через це вчителі повідомляють, що учні стають більш незалежними у своєму навчальному середовищі.

Ще одна перевага перевернутого підходу до класу відноситься до самих відео, надаючи учням доступ до вмісту лекції за допомогою відео поза класним часом, що дозволяє робити паузи, назад перемотувати матеріал, з яким їм потрібно більше часу, та уперед перемотувати матеріал, який вони вважають освоєним. Кілька дослідників відзначили, що перевернутий підхід до класу особливо корисний для представлення контенту, заснованого на знаннях або навичках, і дозволяє проводити більш концептуальне навчання в класі.

Третя перевага перевернутого методу навчання в класі пов'язана з поколінням учнів, що сидять в сьогоднішніх класах. Ганноверська Дослідницька Рада стверджує, що існує все більше свідчень того, що нинішнє покоління учнів може вчитися більш ефективно за допомогою цифрових засобів масової інформації. Сьогоднішні учні були піддані впливу технологій з самого раннього віку, що докорінно змінило їх розуміння і взаємодію зі світом. Не дивно, що багато теоретиків вважають, що традиційна модель навчання на основі лекцій стає все більш непривабливою для сучасного учня і що парадигматичний зсув в педагогіці необхідний для підтримки залученості учнів.

Разом з сприйманими перевагами перевернутого класу приходять і сприймаються недоліки. По-перше, недоліки, що оточують окремого учня навколо. Багато учнів державних навчальних закладів досі не мають доступу до технологій поза школою. Це робить його важким, щоб отримати доступ до призначених відео. Інші також відзначили, що навіть якщо технологія доступна поза навчальним часом, деякі учні все одно не виконують завдання з перегляду відео у вільний від занять час. Вважається, що саме ці учні не виконали домашнє завдання і в традиційній обстановці.

Ще один недолік перевернутого класу пов'язаний з підготовкою і плануванням вчителів. При створенні відеороликів кілька педагогів говорили про погану якість створених відеороликів. Якщо відеоролики були занадто зосереджені на одній математичній процедурі або намагалися концептуально забезпечити навчання, студенти часто губилися. Аналогічним чином, відеозаписи ускладнюють надання необхідних будівельних лісів для боротьби учнів. Створення відео та передбачення відповідей учнів також стало більш трудомістким з боку викладача, ніж планування традиційної класного середовища.

Рекомендації по впровадженню технології «оберненого навчання»[114]

По-перше, вчителі, які розглядають можливість перевертання свого класу, повинні зосередитися на досвіді в класі. Згідно з дослідженням на університетському рівні, спрямованим на скорочення часу сидіння і збільшення глибини знань студентів, які вступають на великі лекційні заняття з математики, дослідники відзначають, що успіх у досягненні своїх дослідницьких цілей був результатом того, що вони менше зосереджувалися на кількості часу в класі та більше на якості взаємодій і дій, якими учні займалися під час уроку. Тому вчителі повинні надавати можливості для взаємодії з однолітками, обговорення і зворотного зв'язку.

По-друге, вчителі, які розглядають перевернутий метод, повинні вибрати відповідний контент, який може бути переданий в навчанні за допомогою відео. Після вибору відповідного рекомендується, щоб вчителі створювали свої власні відео та забезпечували систему підзвітності для учнів, щоб вони дивилися відео. Відеоролики повинні бути короткими по довжині і фокусуватися на поясненні процедурного змісту. Відео та дизайн уроку в класі також повинні слідувати керованому процесу де учні повинні слідувати з явними і чітко сформульованими очікуваннями. Точно так само учні повинні навчитися брати активну участь у перегляді відео для отримання інформації, а не дивитися відео для розваги. Як тільки учні входять в клас після виконання відео-завдання, вчителі повинні мати структуру для оцінки розуміння учнями відеоконтенту. Це допоможе вчителям диференціювати своє навчання під час уроку.

По-третє, педагоги рекомендують дотримуватися моделі, доводити її до кінця і співпрацювати з іншими. Рекомендується, щоб вчителі обмінювалися відео один з одним, коли намагаються почати впровадження, щоб зменшити деяке навантаження на будь-якого окремого вчителя. Співпраця з іншими викладачами, що реалізують перевернутий підхід, також корисна для успішної реалізації. Прихильність формату, який корисний для учнів, також може сприяти успішному впровадженню. Розуміння технології, яку учні мають у своєму розпорядженні, і використання цифрових ресурсів і систем управління курсами може забезпечити способи взаємодії поза класною кімнатою.

Коментарі про передбачувані переваги та недоліки перевернутого підходу до класу та пропозиції щодо ефективного впровадження в даний час більш численні, ніж наукові дані. З підвищенням строгості єдиних основних державних стандартів для математики та акцент на розвиток математично компетентних учнів через залучення навчання, яке просуває стандарти математичної практики, більше досліджень того, як перевернутий підхід до класу в поєднанні з осмисленими і грамотно сплановані уроки, повинні проводитися в старших класах.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ОБЕРНЕНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ СТАРШИХ КЛАСІВ (НА ПРИКЛАДІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ»)

2.1. Аналіз навчальних програм та підручників з теми «Показникова та логарифмічна функції»

Сучасна шкільна освіта старшого ступеня є профільною [9]. У Концепції профільної освіти [47] провідною метою проголошено створення можливостей задоволення індивідуальних запитів кожного учня, здійснення навчання за індивідуальними планами і програмами, реалізація старшокласниками власних освітніх траєкторій, всебічний розвиток кожного з них як цілісної особистості, її здібностей і обдарувань.

Навчальна дисципліна математика є базовим предметом для всіх напрямків [9], вивчення якого відбувається відповідно до Державного стандарту базової та повної загальної середньої освіти [20]. Його зміст побудовано на засадах особистісно орієнтованого, компетентнісного і діяльнісного підходів. Ідея особистісно орієнтованої освіти вимагає від вчителя математики включати в зміст освіти емоційно-ціннісні та особистісні компоненти [8]. Компетентністний підхід вимагає формування в учнів сукупності взаємозалежних смислових орієнтацій, досвіду діяльності, необхідних для здійснення особистісної й соціально значимої продуктивної діяльності стосовно об'єктів реальної дійсності [1; 31; 37; 68]. Діяльнісний підход полягає в тому, що знання ніколи не можна дати в готовому вигляді, вони завжди усвідомлюються через діяльність [12; 77]. Тому в учнів потрібно виховувати певне ставлення до навчання, навчальні мотиви, завдяки чому знання й уміння набудуть для них особистісного змісту, стануть їхнім внутрішнім здобутком [76].

У Державному стандарті [20] проголошено, що основною метою освітньої галузі «Математика» є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їхньої уваги, пам'яті, логіки, культури мислення та інтуїції.

Щодо вивчення логарифмічної функції за Державним стандартом [20] завданнями освітньої галузі «Математика» є:

- розширення компетентностей учнів щодо тотожних перетворень логарифмічних виразів, розв'язування відповідних рівнянь і нерівностей;
- завершення формування поняття числової функції в результаті вивчення логарифмічної функції, формування вмінь її досліджувати й використовувати для опису та вивчення явищ і процесів;
- ознайомлення з ідеями й методами диференціального та інтегрального обчислення, формування елементарних умінь їх практичного застосування, зокрема щодо логарифмічної функції.

Ці завдання виконуються в процесі вивчення того змісту освітньої галузі «Математика», який стосується показникової та логарифмічної функції. Вивчення показникової та логарифмічної функції представлено такими змістовими лініями: числа, вирази, рівняння і нерівності, функції [20]. Також у Держаному стандарті [20] відповідно до цих змістових ліній визначено державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів. Виділимо для прикладу саме ті, що стосуються вивчення логарифмічної функції (табл. 2.1.).

Таблиця 2.1

Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів щодо вивчення логарифмічної функції

Зміст освіти	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
Вирази Логарифм. Логарифмічні вирази та їх перетворення	знати і розуміти означення логарифма та його властивості, уміти знаходити значення виразів, наведених у змісті освіти, за значенням змінних, які входять до них, перетворювати логарифмічні вирази, застосовувати відповідні формули та алгоритми під час розв'язування задач.
Рівняння і нерівності Логарифмічні рівняння. Логарифмічні нерівності	знати і розуміти, що таке логарифмічні рівняння і нерівності, основні методи їх розв'язування, уміти розв'язувати нескладні логарифмічні рівняння і нерівності, застосовувати відповідні рівняння і нерівності для аналітичного опису відношень між реальними, зокрема геометричними та фізичними, величинами.
Функції Логарифмічна функція. Похідна. Інтеграл	знати і розуміти означення та властивості логарифмічної функцій, уміти будувати та аналізувати графік логарифмічної функції, знаходити похідну та первісну, застосовувати похідну для встановлення властивостей функції та побудови графіків.

Окрім Державного стандарту [20], вивчення математики регламентується також Навчальними програмами з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів трьох рівнів [59]: рівня стандарту, профільного рівня та рівня поглибленого вивчення математики. Програми подано в формі таблиць, що містить дві колонки: зміст навчального матеріалу і навчальні досягнення учнів. У змісті вказано навчальний матеріал, який підлягає вивченню із зазначенням послідовності тем та кількості годин на їх вивчення. Розподіл змісту й навчального часу є орієнтовним. Вимоги до навчальних досягнень учнів орієнтують на результати навчання, які є об'єктом контролю й оцінювання.

Формування навичок застосування математики є однією з головних цілей викладання математики на рівні стандарту. Мета навчання математики в класах математичного та фізико-математичного профілів, в класах з поглибленим вивченням математики полягає в забезпеченні загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості в динамічному соціальному середовищі, її соціалізації і достатньої для успішного вивчення фізики та інших, в першу чергу природничих, предметів, продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями, безпосередньо пов'язаними з математикою, або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів [59; 84].

Вивчення показникової та логарифмічної функції передбачено у навчальних програмах всіх рівнів для 11 класу [59] у темі «Показникова та логарифмічна функції».

У процесі вивчення цього розділу учні систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про степені, корені та їх властивості, поняття показникової функції, засвоюють властивості логарифмічної функції, навички та вміння виконувати тотожні перетворення логарифмічних виразів, здійснювати обчислення числових виразів з логарифмами, розв'язувати логарифмічні рівняння та нерівності. Учні повинні навчитися схематично зображати графіки логарифмічних функцій за різними основами, пам'ятати основні властивості цих функцій та навчитися використовувати їх під час розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей та їх систем [10; 45; 79].

Проаналізуємо кількість годин, що відводиться на цю тему у програмах різних рівнів, зміст теми та вимоги до навчальних досягнень учнів щодо логарифмічної функції у вигляді таблиці (табл. 2.2) [59].

Таблиця 2.2

Аналіз навчальних програм за темою «Показникова та логарифмічна функції» щодо вивчення логарифмічної функції

Рівень	**Кількість годин**	**Зміст теми**	**Навчальні досягнення учнів**
Стандарту	16	Логарифми та їх властивості. Властивості та графік логарифмічної функції. Логарифмічні рівняння і нерівності.	**розпізнає і будує** графіки логарифмічної функції; **ілюструє** властивості логарифмічної функції за допомогою графіків; **застосовує** логарифмічну функцію до опису реальних процесів; **розв'язує** найпростіші логарифмічні рівняння і нерівності.
			формулює властивості логарифмів та логарифмічної функції; **будує** графіки логарифмічної функції; **ілюструє** властивості логарифмічної функцій за допомогою графіків;

			перетворює нескладні логарифмічні вирази; **розв'язує** нескладні логарифмічні рівняння і нерівності.
Профільний Поглиблено го вивчення	36	Логарифми та їх властивості. Логарифмічна функція. Логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами. Похідна логарифмічної функції. (*Застосування логарифмічної функції у прикладних задачах**).	**формулює** означення логарифмічної функції та їх властивості; **формулює** означення логарифма та властивості логарифмів; **будує** графік логарифмічної функції; **перетворює** вирази, які містять логарифми; **знаходить** похідну логарифмічної функцій і **застосовує** її до дослідження функції; **розв'язує** логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами; **застосовує** логарифмічну функцію до розв'язування прикладних задачах.

*Примітка. * – матеріал розглядається на рівні поглибленого вивчення математики.*

Як видно з наведених порівняльних таблиць, у пропонованих програмах всіх рівнів [59] збережено ті ж самі теми та послідовність їх вивчення. Це надає можливість забезпечити для учнів зміну рівня навчання математики, якщо в учня виникне таке бажання чи необхідність.

Головною відмінністю у змісті програм різних рівнів [59] є те, що у програмі профільного рівня та поглибленого вивчення зміст навчального матеріалу доповнено логарифмічними рівняннями та нерівностями, що містять параметр. У процесі розв'язування таких задач до арсеналу прийомів та методів мислення школярів природно включаються аналіз, індукція та дедукція, узагальнення та конкретизація, класифікація та систематизація, аналогія. Ці задачі дозволяють перевірити рівень знання основних розділів шкільного курсу математики, рівень логічного мислення учнів, початкові навички дослідницької діяльності. Тому завдання з параметрами мають діагностичну та прогностичну цінність [2].

Порівняно з рівнем стандарту в кожному наступному рівні суттєво підвищується теоретичний рівень навчання та поглиблюється зміст навчання, зокрема при вивченні рівнянь, нерівностей та їх систем. Відповідно спостерігаємо збільшення кількості годин на вивчення даної теми. Перелік навчальних досягнень учнів конкретизовано й уточнено також відповідно до фізико-математичного профілю навчання [59].

Як показує аналіз програм [59], у ході вивчення логарифмічної функції на всіх рівнях вміння досліджувати функції застосовуються до моделювання закономірностей процесів зростання та вирівнювання, що описуються логарифмічною функцією. У зв'язку з цим у програмах [59] зроблено наголос на моделюванні реальних процесів, інтерпретації фізичного процесу як функції від змінної фізичної величини. Учні мають асоціювати характер реального процесу з відповідною функцією, її графіком, властивостями. У програмах [59] наголошується на важливості того, що притаманні явищу властивості пов'язувались із властивостями функцій (спадання, зростання, прямування до певної границі).

Певне місце у ході вивчення логарифмічної функції на всіх рівнях займають обчислення, оцінювання та порівняння значень логарифмічних виразів, тотожні перетворення логарифмічних виразів. При цьому у програмах [59] не рекомендується приділяти занадто багато уваги громіздким перетворенням логарифмічних виразів і спеціальним методам розв'язування логарифмічних рівнянь, оскільки вони, як правило, не знаходять практичних застосувань.

Також у старшій школі вивчення відповідних рівнянь, нерівностей та їх систем пов'язується з вивченням властивостей відповідних функцій [45]. Тому вивчення логарифмічної функції передбачає навчання учнів розв'язувати логарифмічні рівняння та нерівності на всіх рівнях.

У класах з поглибленим вивченням математики також значну увагу приділено використанню поняття і властивостей похідної логарифмічної функції для розв'язування задач, зокрема визначення властивостей функції, доведення логарифмічних тотожностей, розв'язування логарифмічних рівнянь, нерівностей та їх систем.

Тепер проаналізуємо підручники з алгебри та початків аналізу для 11 класу різних рівнів, що рекомендовані Міністерством освіти і науки України, за темою «Логарифмічна функція» авторів: Г. П. Бевз, В. Г. Бевз (2011) [3]; О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко (2011) [57] (рівень стантарту); Є. П. Нелін, О. Є. Долгова (2011) [65]; А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір (2012) [60]; Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова (2011) [4] (академічний рівень та профільний рівні).

Загалом зміст усіх підручників [3; 4; 57; 60; 65] і послідовність викладення матеріалу повністю узгоджується з відповідними програмами [59]. Навчальний матеріал у них структуровано за розділами, які, у свою чергу, розбито на параграфи, а параграфи – на пункти. Зокрема у підручнику Мерзляк А.Г. Алгебра та початки аналізу : 11 клас [60] послідовність викладення теми така: «Логарифм і його властивості», «Логарифмічна функція та її властивості», «Логарифмічні рівняння», «Логарифмічні нерівності», «Похідні показникової та логарифмічної функції». У підручнику Нелін Є.П. Алгебра та початки аналізу: 11 клас [65] додатково виділено параграф для профільного рівня «Показникові та логарифмічні рівняння й нерівності».

Підручники містять теоретичні відомості, приклади застосування вивченого, є зауваження, подано зразки розв'язування відповідних вправ. У підручнику Нелін Є.П. Алгебра та початки аналізу: 11 клас [65] на початку параграфів у вигляді таблиці коротко представлені основні теоретичні відомості та приклади до них.

Автори підручників: Бевз Г.П. Математика : 11 кл. : підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: рівень стандарту, Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу : 11 кл. : підручник для загальноосвітніх навчальних закладів : академічний рівень, профільний рівень; Математика: 11 клас: [підручник для загальноосвітніх навчальних закладів]: рівень стандарту / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко; Мерзляк А.Г. Алгебра та початки аналізу : 11 клас :академічний рівень, профільний рівень; Нелін Є.П. Алгебра та початки аналізу: 11 клас : академічний рівень, профільний рівень [3; 4; 57; 60; 65] у параграфі «Логарифм і його властивості» починають пояснення з розв'язування рівняння добуванням кореня n-го степеня. У підручниках [4; 57; 60] приведено також графічну інтерпретацію. Далі на прикладі пояснюється операція знаходження логарифму заданого числа та вводиться означення логарифма. Після ілюстрації означення прикладами розглядається основна логарифмічна тотожність, доводяться властивості логарифмів і формули логарифмування. У підручнику Мерзляк А.Г. Алгебра та початки аналізу : 11 клас :академічний рівень, профільний рівень [60] вони сформульовані у вигляді теорем та наслідків. У всіх аналізованих підручниках [3; 4; 57; 60; 65] наведено достатню кількість прикладів для розв'язування завдань. Отже, поняття логарифма у всіх підручниках [3; 4; 57; 60; 65] вводиться конкретно-індуктивним способом.

У параграфі «Логарифмічна функція та її властивості» у всіх підручниках [3; 4; 57; 60; 65] розглядається поняття логарифмічної функції та вводиться її графік абстрактно-дедуктивним способом як функції, оберненої до показникової функції. На цій основі обґрунтовуються такі властивості логарифмічної функції як: область визначення, область значень, перетин з координатними осями та нуль функції, зростання та спадання логарифмічної функції, проміжки знакосталості, парність. У підручнику Мерзляк А.Г. Алгебра та початки аналізу : 11 клас :академічний рівень, профільний рівень [60] також розглядаються властивості неперервності, диференційованості на наявність асимптот. Для ілюстрації теоретичного матеріалу в параграфі «Логарифмічна функція та її властивості» у всіх підручниках [3; 4; 57; 60; 65] наведено приклади розв’язуваань завдань на знаходження області визначення логарифмічної функції, застосування властивостей зростання та спадання логарифмічної функції для порівняння чисел та схематичне зображення графіків логарифмічної функції за допомогою геометричних перетворень графіків функцій.

У підручниках [3; 57] логарифмічні рівняння та нерівності розглядається в одну параграфі. У інших підручниках цей матеріал міститься в окремих параграфах. У підручниках [3; 57] спочатку вводиться загальне поняття логарифмічного рівняння та логарифмічної нерівності як рівняння (нерівності), змінні якого входять лише під знаки логарифмів. Потім автори цих підручників [3; 57] переходять до розгляду найпростіших логарифмічних рівнянь та нерівностей. У підручниках [60; 65] виклад матеріалу у цих параграфах відразу починається з поняття найпростіших логарифмічних рівнянь та нерівностей. У підручниках [57; 60; 65] їх розв’язування обґрунтовується за допомогою властивості монотонності логарифмічної функції, при цьому наводиться графічна ілюстрація. Розв’язування більш складних логарифмічних рівнянь у підручниках [57; 60] зводять до розв’язування рівнянь виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. При цьому у підручнику [60] цей факт сформульовано у вигляді теореми та наслідку і наголошується, що це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

У підручнику Математика: 11 клас: [підручник для загальноосвітніх навчальних закладів]: рівень стандарту / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко [57] наголошується, що при переході від рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ до рівняння $f(x) = g(x)$ можуть з'явитись сторонні корені, тому слід виконати перевірку. Аналогічні підходи у цих підручниках [57; 60] і до розв'язування логарифмічних нерівностей. Наприклад, при розв'язуванні логарифмічних нерівностей автори підручника [57] рекомендують використовувати таку схему:

1) записати умови, які визначають область визначення нерівності, тобто множину значень змінної, за яких мають зміст вирази, що входять до нерівності;
2) відкинути знаки логарифмів з урахуванням зростання чи спадання логарифмічної функції;
3) розв'язати одержану нерівність;
4) записати відповідь з урахуванням області визначення нерівності.

У підручнику [65] після розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь розглядається використання рівнянь-наслідків при розв'язуванні логарифмічних рівнянь, при цьому наголошується, що доцільно виконати перевірку, оскільки втрати коренів при використанні рівнянь-наслідків не відбувається, але можлива поява сторонніх коренів. Після цього розглядаються рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь. У цьому пункті окремо розглядається спосіб заміни змінної та рівносильні перетворення рівнянь виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, для яких сформульовано такий алгоритм:

1) урахувати ОДЗ цього рівняння;
2) прирівняти вирази, які стоять під знаком логарифмів.

Аналогічний підхід у цьому підручнику [65] застосовується і до розв'язування логарифмічних нерівностей, проте додається застосування методу інтервалів. Для цього показують, що задана нерівність зводиться до нерівності виду $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) і використовують схему:

1) знайти ОДЗ;
2) знайти нулі $f(x)$;
3) позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ;
4) записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.

Інший підхід до викладення матеріалу застосовано у підручнику [4]. Розв’язування найпростіших логарифмічних рівнянь та нерівностей обґрунтовується за допомогою означення логарифма. Для розв’язування більш складних логарифмічних рівнянь виокремлюють кілька груп рівнянь, для розв’язування яких використовують певні способи. Ці способи розглядають на конкретних прикладах. Також наголошується, що загального методу розв’язування логарифмічних рівнянь немає. Розглядаються такі способи:

1) за означенням логарифма;
2) за властивостями логарифмів та логарифмічної функції;
3) введення нової змінної;
4) графічний спосіб;
5) логарифмування.

Для розв’язування логарифмічних нерівностей автори підручника [4] використовують ті ж методи, що і для розв’язування логарифмічних рівнянь. Окремо у цьому підручнику [4] розглядається випадок, коли розв’язування нерівностей, які містять змінну і під знаком логарифма, і в основі логарифма. Тут подано рекомендацію розглянути два випадки:

1) основа логарифма більша за нуль, але менша від одиниці;
2) основа логарифма більша від одиниці.

Для ілюстрації теоретичного матеріалу у цих параграфах у всіх підручниках [3; 4; 57; 60; 65]наведено приклади розв’язання завдань.

Розв’язування логарифмічних рівнянь та нерівностей та їх систем, що містять параметр, у підручниках [4; 60; 65] розглядається на конкретних прикладах.

Нові терміни, означення, теореми та формули в тексті виділено зміною шрифту чи кольору [3; 4; 57; 60; 65].

У кінці параграфів у всіх підручниках [3; 4; 57; 65], окрім підручника [60], подано запитання та завдання для самоперевірки, мета яких допомогти учням звернути увагу на найголовніше. Наприклад, у підручнику [4] наведено такі запитання.

1. Які рівняння називають логарифмічними?
2. Яке рівняння називають найпростішим логарифмічним рівнянням?
3. Які способи розв’язування логарифмічних рівнянь ви знаєте?
4. Які нерівності називають логарифмічними?
5. Які способи розв’язування логарифмічних нерівностей ви знаєте?

Як бачимо, ці запитання спрямовані на перевірку знань учнями теоретичного матеріалу. Натомість у підручниках [57; 65] контрольні запитання мають практичну спрямованість, тобто передбачають перевірку рівня засвоєння учнями матеріалу та вмінь застосовувати його до розв’язування найпростіших завдань. Наприклад, у підручнику [57] наведено такі контрольні запитання.

1. Чи може рівняння $\log_a x = b$ не мати розв’язків?
2. Чи може рівняння $\log_a x = b$ мати від’ємний розв’язок?
3. Чи може рівняння $\log_a x = b$ мати два розв’язки?
4. Яким є розв’язок рівняння $\log_2 x = 0$?
5. Скільки розв’язків має рівняння $\log_2 x = -x$?
6. Чи правильно розв’язане рівняння
   $\log_2 x^2 = \log_2 9$,
   $2\log_2 x = 2\log_2 3$,
   $x = 3$?
7. Яким є розв’язок нерівності $\log_2 x < 0$?
8. Які цілі числа задовольняють нерівність $2 < \log_2 x < 3$?

9. Чи має розв'язки рівняння $\ln x - \ln(x+2) = 2$?

Зауважимо, що останнє запитання позначено символом «*», тобто відповідає підвищеному рівню складності [57].

Далі подано вправи, спрямовані на формування вмінь застосовувати вивчений теоретичний матеріал до розв'язування завдань. Задачний матеріал усіх підручників [3; 4; 57; 60; 65] спрямовано на індивідуалізацію та диференціацію навчання через варіювання рівня складності завдань. На це вказують умовні позначки: знаками біля номера завдання позначаються задачі і вправи, що відповідають різним рівням навчальних досягнень учнів з математики.

У підручнику [4] додатково виділено три рівні: рівень А, рівень Б та рівень В. У підручнику [57] завдання до параграфів «Логарифми та їхні властивості» та «Властивості та графік логарифмічної функції» подано разом. Завдання сформульовано чітко, лаконічно, подано з дотриманням принципу поступовості – від більш простих до більш складних.

У підручниках наявні завдання й на відпрацьовування змісту означень понять, і на закріплення матеріалу, і тренувальні завдання на відпрацювання умінь, а також завдання для усного розв'язування.

Таблиця 2.4.

Аналіз задачного матеріалу підручників

Автор підручника	**Кількість завдань на**			
	обчислення	**дослідження**	**доведення**	**побудову**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Логарифми та їх властивості				
Г.П. Бевз та інші [4]	44, з них 9 для виконання усно	3	3	–
А.Г. Мерзляк та інші [60]	37, з них 12 для виконання	1 для виконання усно	2	2

	усно			
О.М. Афанасьєва та інші [57]	17	–	1	–
Є.П. Нелін та інші [65]	10, з них 2 для виконання усно	1 для виконання усно	–	–
Логарифмічна функція та її властивості				
Г.П. Бевз та інші [4]	22, з них 4 для виконання усно	5, з них 1 для виконання усно	1	10
А.Г. Мерзляк та інші [60]	25, з них 6 для виконання усно	4, з них 2 для виконання усно	1	10
О.М. Афанасьєва та інші [57]	7	1	–	2
Є.П. Нелін та інші [65]	4	–	–	1
Логарифмічні рівняння та нерівності				
Г.П. Бевз та інші [4]	36, з них 5 для виконання усно	–	–	–
А.Г. Мерзляк та інші [60]	70, з них 2 для виконання усно	4	1	–
О.М. Афанасьєва та інші [57]	14	–	–	1
Є.П. Нелін та інші [65]	13, з них 3 для виконання усно	–	1	2

Підручник [57] відповідає програмі рівня стандарту [59], яка орієнтована на 3 години математики на тиждень, тому кількість завдань у ньому найменша. Як видно з таблиці 1.4, найбільша кількість завдань міститься у підручнику [60]. Також переважна більшість завдань у всіх темах за вимогою є завданнями на обчислення. У темі «Логарифми та їх властивості» це завдання з вимогою:

- знайти логарифм числа за даною основою;
- обчислити значення числового виразу;
- знайти значення виразу;
- подати число у вигляді степеня;
- знайти x у найпростіших логарифмічних виразах;
- спростити вираз.

У темі «Логарифмічна функція та її властивості» представлено такі завдання з вимогою обчислити:

- порівняти значення числових логарифмічних виразів;
- порівняти з одиницею основу логарифма;
- порівняти значення числового логарифмічного виразу з нулем;
- знайти найбільше та найменше значення логарифмічної функції на даному відрізку;
- знайти область визначення функції;
- розв’язати рівняння.

Відзначимо, що пропоновані у цій темі завдання на побудову графіків логарифмічних функцій передбачають використання геометричних перетворень графіків функцій, містять модулі, ірраціональності та тригонометричні функції. Наприклад, у підручнику [60] пропонується побудувати графіки таких функцій:

$$y = \frac{|log_{0,2}x|}{log_{0,2}x} \text{ або } y = \sqrt{log_3^2 x \, log_x 3}.$$

У темі «Логарифмічні рівняння та нерівності» представлено завдання з вимогою розв’язати логарифмічні рівняння, нерівність чи їх систему, зокрема таких, що містять параметр.

Відзначимо також наявність у підручнику [57] вправ та задач прикладного характеру, що сприяє посиленню міжпредметних зв'язків, наприклад такі.

1) Конструкція вакуум-насоса розрахована на відкачку за один хід поршня камери 3 % газу від тієї кількості, що була в камері перед першим ходом поршня. Скільки таких рухів треба зробити, щоб відкачати з камери 99 % газу?
2) Кількість осіб біологічної популяції протягом кожної одиниці часу збільшується на 8 % по відношенню до попередньої одиниці часу. Через скільки одиниць часу чисельність популяції подвоїться?
3) Коефіцієнт звукоізоляції стін обчислюється за формулою $D = Alg\frac{p_0}{p}$, де p_0 – тиск звуку до поглинання, p – тиск звуку, що пройшов через стіну, A – деяка стала. Виразіть через інші змінні тиск звуку після поглинання.

Наприкінці кожного підручника [3; 4; 57; 60; 65] подано відповіді та вказівки до вправ у відповідності до нумерації параграфів. Структура кожного з указаних підручників [3; 4; 57; 60; 65] характеризується чіткістю та послідовністю. Зміст розділів, параграфів та пунктів підручників [3; 4; 57; 60; 65] відповідає одиницям навчального часу, відведеного навчальним планом на його вивчення. У всіх підручниках [3; 4; 57; 60; 65] міститься матеріал, присвячений історичним аспектам математики та її ролі в сучасному світі, зокрема виникненню логарифмів та першим логарифмічним таблицям.

Усі підручники [3; 4; 57; 60; 65] містять достатню кількість ілюстрацій та рисунків, предметний покажчик та довідкові таблиці. На форзаци підручників [4; 60; 65] винесено основні властивості логарифмів, а на форзаці підручника [60] подано ще й графіки логарифмічних функцій при різних основах логарифмів.

Навчальний матеріал викладений у відповідності до принципів доступності та послідовності, відповідає профілю навчання, сприяє усвідомленню учнями місця та ролі математики в системі наукових знань, формуванню уявлень про її застосування в різних галузях діяльності.

Таким чином, аналіз підручників з алгебри та початків аналізу для 11 класів різних рівнів [3; 4; 57; 60; 65] показав, що тема відображена в них повно і функціонально. За будь-яким із згаданих підручників можливо вивчати дану тему на відповідному рівні. Різнорівневі вправи на закріплення дають можливість застосувати вивчений матеріал на практиці у стандартних завданнях і у завданнях креативного характеру, що дозволяє дотриматися принципу диференціації навчання та реалізувати його розвивальну функцію.

2.2. Особливості навчання матеріалу з теми «Логарифмічна функція» у «перевернутому класі»

Так як у «перевернутому» класі ми даємо теоретичні відомості через відео, то далі я опишу яку інформацію і в якому порядку потрібно подавати учням, щоб вона була сприйнята та засвоєна. Вчитель може використовувати дошку, якщо на момент запису знаходиться у класі, може виводити на екран потрібну інформацію, або використовувати презентацію з коментуванням.

До нових понять, що вивчають учні у темі «Логарифмічна функція», відносяться:

- логарифм;
- десятковий логарифм;
- натуральний логарифм;
- логарифмічна функція;
- логарифмічні рівняння та нерівності.

Також у темі «Логарифмічна функція» учні вивчають основну логарифмічну тотожність, основні властивості логарифмів (теореми про логарифм добутку, логарифм частки, логарифм степеня, перехід від однієї основи логарифма до іншої та наслідки з них), основні властивості логарифмічної функції та теореми про розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей.

Розглянемо методичні особливості формування нових понять теми.

Перед введенням поняття логарифма в відеозаписі доцільно повторити про графік та властивості показникової функції. Якщо у ви записуєте відео у класі, то можете продемонструвати на дошці, але якщо дома, то можете вивисти на екран картинку з графіком, властивостями та озвучити зображене на єкрані, а також способи розв'язування показникових рівнянь [13; 17]. При цьому доцільно запропонувати таку систему усних вправ [48].

Завдання. Розв'язати рівняння та скласти слово – тему урока.

- $2^x = \sqrt[3]{4}$;
- $3^x = \sqrt{3}$;
- $5^x = 1/125$;
- $2^x = 1/4$;
- $2^x = 4$;
- $3^x = 81$;
- $7^x = 1/7$;
- $3^x = 1/81$

Ключ до завдання.

З	М	Л	Г	Е	Р	Ф	О	И	А
5	– 4	$2/3$	– 3	$-2/7$	2	– 1	$1/2$	4	– 2

Учень, що проглянув відео повинен вам відправити розв'язання цієї вправи, це буде підтверджувати, що етап повторення він пройшов.

Вчитель має наголосити, що такі рівняння розв'язати досить легко. Проте для рівняння, наприклад, $2^x = 5$ одразу вказати його корінь складно. Щоб з'ясувати наявність у цього рівняння коренів, слід звернутися до графічної інтерпретації, в залежності від того де записуєте відеоурок обираєте як саме це продемонструвати.

На рисунку 2.1 зображено графіки функцій $y = a^x$ та $y = b$. У обох випадках для a вони перетинаються у єдиній точці, отже, рівняння виду $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ має єдиний корінь.

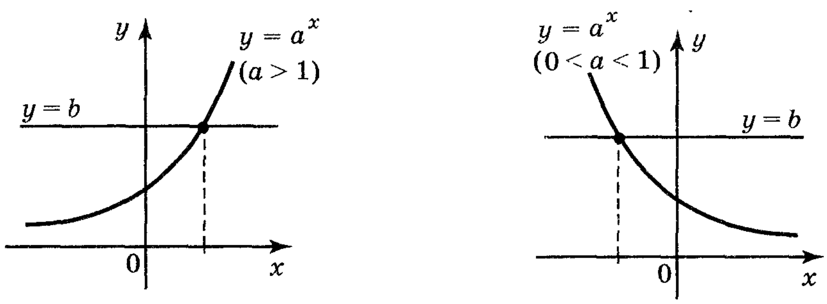


Рис. 2.1. Графіки функцій $y = a^x$ та $y = b$

Вчитель має наголосити, що графічний метод не дозволяє встановити точне значення кореня. При цьому, як приклад, слід навести рівняння $x^3 = 7$, графічна інтерпретація якого також ілюструє наявність єдиного кореня. У 10 класі потреба називати і записувати цей корінь привела до нового поняття «корінь n-го степеня» і позначення $\sqrt[n]{a}$.

Отже, звертається увага учнів, що рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, має єдиний корінь. Цей корінь називається логарифмом числа b за основою a і позначається $log_a b$. Наприклад, коренем рівняння $2^x = 8$ є число 3, тобто $log_2 8 = 3$.

Після підведення учнів до поняття логарифма вводиться означення логарифма та наводяться приклади [58; 66]. Наголошуємо на тому, що означення потрібно записати у зошит.

Означення 2.1 *Логарифмом додатного числа* b *за основою* a, *де* $a > 0$, $a \neq 1$, *називається показник степеня, до якого треба піднести число* a, *щоб одержати число* b.[58]

Наприклад, $log_2 8 = 3$, оскільки $2^3 = 8$; $log_2 \frac{1}{4} = -2$, оскільки $2^{-2} = \frac{1}{4}$; $log_7 1 = 0$, оскільки $7^0 = 1$.

Також доцільно запропонувати учням самостійно створити такі приклади.

Як бачимо, введення поняття логарифма відбувається конкретно-індуктивним способом за таким планом:

1) повторити основні поняття та правила теми «Показникова функція»;

2) привести графічну інтерпретацію розв'язування найпростіших показникових рівнянь;
3) наголосити, що корені таких рівнянь і називаються логарифмами;
4) ввести означення і символьне позначення, навести приклади.

Після цього слід перейти до первинного закріплення поняття та запропонувати учням вправи на читання логарифмічних виразів, обчислення логарифмів та перехід від показникових до логарифмічних рівностей і навпаки [69; 90].

Завдання. Обчислити та перейти від логарифмічного до показникового виразу. Завдання має бути виконане у зошиті у вигляді таблиці з відповідями.

	1	2	3	4	5
1	$\log_2 8$	$\log_3 9$	$\log_4 64$	$\log_5 125$	$\log_6 36$
2	$\log_3 \frac{1}{9}$	$\log_2 \frac{1}{16}$	$\log_5 \sqrt{5}$	$\log_4 2$	$\log_9 3$
3	$\log_{\frac{1}{2}} 4$	$\log_{\frac{1}{3}} 27$	$\log_{\sqrt{3}} 3$	$\log_{\sqrt{3}} 1$	$\log_{81} 3$
4	$5^{\log_5 4}$	$2^{-\log_2 6}$	$2^{1+\log_2 8}$	$3^{\log_3 2} - 1$	$3^{\log_3 2 - 1}$
5	$3^{2\log_3 2}$	$5^{-\log_5 3}$	$2^{\log_2 3+\log_2 5}$	$7^{\log_7 14-\log_7 2}$	$\log_4(3-\pi)$

Після цього слід ввести на основі означення основну логарифмічну тотожність та показати її застосування, перш за все, до представлення чисел у вигляді логарифма за певною основою.

Означення логарифма можна коротко записати так: $\boxed{a^{\log_a b} = b}$.

Ця рівність справедлива при *b >0, a>0, a* ≠ 1 і називається основною логарифмічною тотожністю.

Наприклад, $2^{\log_2 5} = 5$, $2^{-\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$.

Також доцільно запропонувати учням самостійно наводити такі приклади.

Надалі слід запропонувати учням знайти значення логарифма 1 та логарифма числа a за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$). Відповідно учні мають прийти до рівностей:

$$\log_a 1 = 0 \text{ і } \log_a a = 1.$$

Надалі слід ознайомити учнів з поняттям десяткового та натурального логарифмів, ввести їх означення та позначення, навести приклади [90].

Означення 2.2 *Десятковими логарифмами називаються логарифми за основою 10, позначаються* lg.[58]

Наприклад, $lg100 = 2$, $lg0,0001 = -4$.

Означення 2.3 *Натуральними логарифмами називаються логарифми за основою e (число e – ірраціональне, e = 2,718281828459045...), позначаються* ln.

Наприклад, $lne = 1$, $lne^2 = 2$, $ln\frac{1}{e} = -1$.

На цьому етапі доцільно також дати історичну довідку про винайдення логарифмів та їх застосування. Наведемо фрагмент цих матеріалів [72].

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Логарифм – з грецької означає “логос”– відношення і “аритмос”– число.

Його винахід пов’язаний з двома постатями: швейцарцем Іобстом Бюргі (1552-1632), знаним годинникарем і майстром астрономічних інструментів, та шотландцем Джоном Непером (1550-1617), який теж не був математиком за професією, астрономія була його «хобі».

Бюргі працював разом з астрономом Іоганном Кеплером. Саме величезний обсяг необхідних в астрономії обчислень і спонукав Бюргі й Непера шукати шляхів для їх спрощення. 20 років присвятив Непер своїм логарифмічним таблицям, аби, за його словами, «позбутися нудних і тяжких обчислень, що відлякують зазвичай багатьох від вивчення математики». Обидва автори прийшли до своїх таблиць незалежно один від одного. Вони склали таблиці так званих натуральних логарифмів.

Бюргі працював над таблицями 8 років і видав їх у 1620 році під назвою «Арифметична і геометрична таблиця прогресії». Проте його таблиці не отримали широкого поширення, бо Непер видав свій «Опис дивовижної таблиці логарифмів» на 6 років раніше. Тому і визнали число *е* неперовим числом. Ідея десяткових логарифмів виникла у професора лондонського коледжу Генрі Брігса (1561-1630) після ознайомлення з таблицями Непера. Він двічі побував у Непера, здружився з ним і в процесі спільних занять обидва розробили нову, практично зручнішу десяткову систему, засновану на порівнянні прогресії.

Брігс взявся розробити велику таблицю десяткових логарифмів. Уже в 1617 р. він опублікував восьмизначні таблиці логарифмів від 1 до 10^3, а в 1624 році спромігся видати «Логарифмічну арифметику», що містила чотирнадцятизначні таблиці логарифмів для чисел 1–20000 і 90000–100000. Понад три з половиною сторіччя з тих пір, як у 1614 році були опубліковані Непером перші логарифмічні таблиці, вони вірою і правдою служили астрономам і геодезистам, інженерам і морякам, скорочуючи час на обчислення і, як сказав французький вчений Лаплас (1749-1827), продовжуючи життя обчислювачам.

Ще донедавна важко було уявити собі інженера без логарифмічної лінійки в кишені. Винайдена в 1624 році англійським математиком Едмундом Гунтером (1581-1626), вона дозволяла швидко одержувати відповідь з достатньою для інженера точністю до трьох значущих цифр. І хоч тепер її витіснили калькулятори і комп'ютери, проте можна сміливо сказати, що без логарифмічної лінійки не було б і перших комп'ютерів.

Після цього переходять до доведення основних властивостей логарифмів [64]. Тут розглядається чотири теореми та два наслідки з них, при цьому поряд з формулюванням теореми та її символьним записом доцільно навести і коротке формулювання цих властивостей. Для учнів, які вивчають математику на рівні стандарту, особливо корисним буде вивчення цих теорем за допомогою таких таблиць (табл. 2.5).

Таблиця 2.5.

Формулювання основних властивостей логарифмів

Теорема	Формулювання та символьний запис	Коротке формулювання
1	2	3
Теорема про логарифм добутку	Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників

Продовження табл. 2.5.

1	**2**	**3**
Теорема про логарифм частки	Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника
Теорема про логарифм степеня	Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $p \in R$ виконується рівність $\log_a x^p = p\log_a x$	Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня
Теорема про перехід від однієї основи логарифма до іншої	Якщо $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ і $a \neq 1$, то виконується рівність $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$	
Наслідок 1	Якщо $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ і $a \neq 1$, то виконується рівність $log_a b = \dfrac{1}{log_b a}$	
Наслідок 2	Якщо$a > 0$, $b > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $p \in R$ виконується рівність $log_{a^p} b = \dfrac{1}{p} log_a b$	

Доведення цих теорем теж зручно навести у вигляді таблиці (табл. 2.6).

Таблиця 2.6.

Доведення теореми про логарифм добутку

Запис доведення	**Обґрунтування**
$a^{log_a xy} = xy$, $a^{log_a x + log_a y} = a^{log_a x} \cdot a^{log_a y} = xy$. $a^{log_a xy} = a^{log_a x + log_a y}$, тому $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	Покажемо, що вирази $a^{log_a xy}$ і $a^{log_a x + log_a y}$ рівні. Використаємо основну логарифмічну тотожність. Оскільки степені з однаковими основами рівні, то рівні й показники цих степенів. Теорему доведено.

Теорему про логарифм частки можна запропонувати учням довести самостійно, скориставшись ідеєю доведення теореми про логарифм добутку. Наслідки теж не є складними для доведення, тому це теж можна запропонувати зробити учням самостійно.

Зауважимо, що формули для логарифма добутку, логарифма частки та логарифма степеня при парних значеннях показника степеня обґрунтовуються тільки для додатних значень x та y. Проте учням слід показати, що коли числа x та y від'ємні ($x < 0$, $y < 0$), то їх добуток, частка і степінь з парним показником набувають додатних значень. Тому ці формули можна узагальнити:

$$\text{при } xy > 0 \ \log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|,$$

$$\text{при } \frac{x}{y} > 0 \ \ log_a \frac{x}{y} = log_a |x| - log_a |y|,$$

$$\text{при } x \neq 0 \ \log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|.$$

Приклади використання формул мають ілюструвати застосування всіх властивостей як окремо, так і разом [93].

Приклади:

1) $log_6 18 + log_6 2 = log_6 (18 \cdot 2) = log_6 36 = 2$;

2) $log_{12} 48 - log_{12} 4 = log_6 \frac{48}{4} = log_{12} 12 = 1$;

3) $log_3 \sqrt{3} = log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$;

4) $log_{125} 5 = log_{125} 5 = \frac{1}{3} log_5 5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$;

5) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4} = log_4 16 = log_4 4^2 = 2 \log_4 4 = 2 \cdot 1 = 2.$

6) Обчисліть: $\log_{\sqrt{8}} 4\sqrt{2}$; $\log_{\sqrt{5}} 25\sqrt{5}$.

Розв'язання:

$$\log_{\sqrt{8}} 4\sqrt{2} = \log_{8^{\frac{1}{2}}} 2^2 2^{\frac{1}{2}} = \log_{\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}} 2^{2\frac{1}{2}} = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} \log_2 2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

$$\log_{\sqrt{5}} 25\sqrt{5} = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^{2\frac{1}{2}} == \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{1} = 5.$$

7) Обчисліть $4^{\log_2 5 + 2\log_{0,25} 3}$.

Розв'язання:

$$4^{\log_2 5 + 2\log_{0,25} 3} = 4^{\log_2 5} \cdot 4^{2\log_{\frac{1}{4}} 3} = (2^2)^{\log_2 5} \cdot 4^{-2\log_4 3} = \left(2^{\log_2 5}\right)^2 \cdot 4^{\log_4 3^{-2}} = 5^2 \cdot 3^{-2} =$$

$$= 25 \cdot \frac{1}{9} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}.$$

Отже, введення поняття логарифма та його властивостей у 11 класі доцільно здійснювати за такою схемою:

1) повторити основні поняття та правила теми «Показникова функція»;
2) мотивувати введення нового поняття необхідністю розв'язувати рівняння виду $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$;
3) ввести означення логарифма та перейти до первинного закріплення поняття;
4) навести історичну довідку з теми;
5) сформулювати основні властивості логарифмів та довести їх;
6) показати приклади застосування цих властивостей.

Дана схема є доцільною на всіх рівнях вивчення математики. Відмінності будуть полягати у рівнях складності прикладів, які ілюструють нове поняття.

Відповідно до загальної методичної схеми вивчення окремих видів функцій у курсі алгебри і початків аналізу [19; 22; 79; 92], введення поняття логарифмічної функції доцільно розпочати з мотивації, тобто розглянути приклади залежностей, які приводять до логарифмічної функції [14; 23; 41; 62; 63; 87]. Наприклад, за допомогою логарифмічної функції описується залежність об'єму легень людини V від її віку x у роках (на проміжку від 10 років до 100 років) [80]:

$$V\,(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}.$$

Після повторення означення логарифма числа та його властивостей, вчитель має наголосити, що кожному додатному числу x можна поставити у відповідність його логарифм за певною основою $a\log_a x$. Це означає, що можна задати функцію

$$y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,$$

яку й називають *логарифмічною*.

Після цього слід показати, що ця функція є оберненою до показникової функції $y = a^x$. Методична схема пояснень вчителя наведена на рисунку (рис. 2.2) [74; 90].

Учням, що вивчають математику на профільному та поглибленому рівнях, а також учням з високим рівнем навчальних можливостей, які вивчають математику на академічному рівні, можна запропонувати самостійно знайти функцію, оберенену до показникової функції $y = a^x$, скориставшись відомим їм алгоритмом відшукання формули функції, оберненої до даної [79]. З цим алгоритмом у три кроки учні таких класів ознайомлюються під час вивчення теми «Степенева функція» у 10 класі:

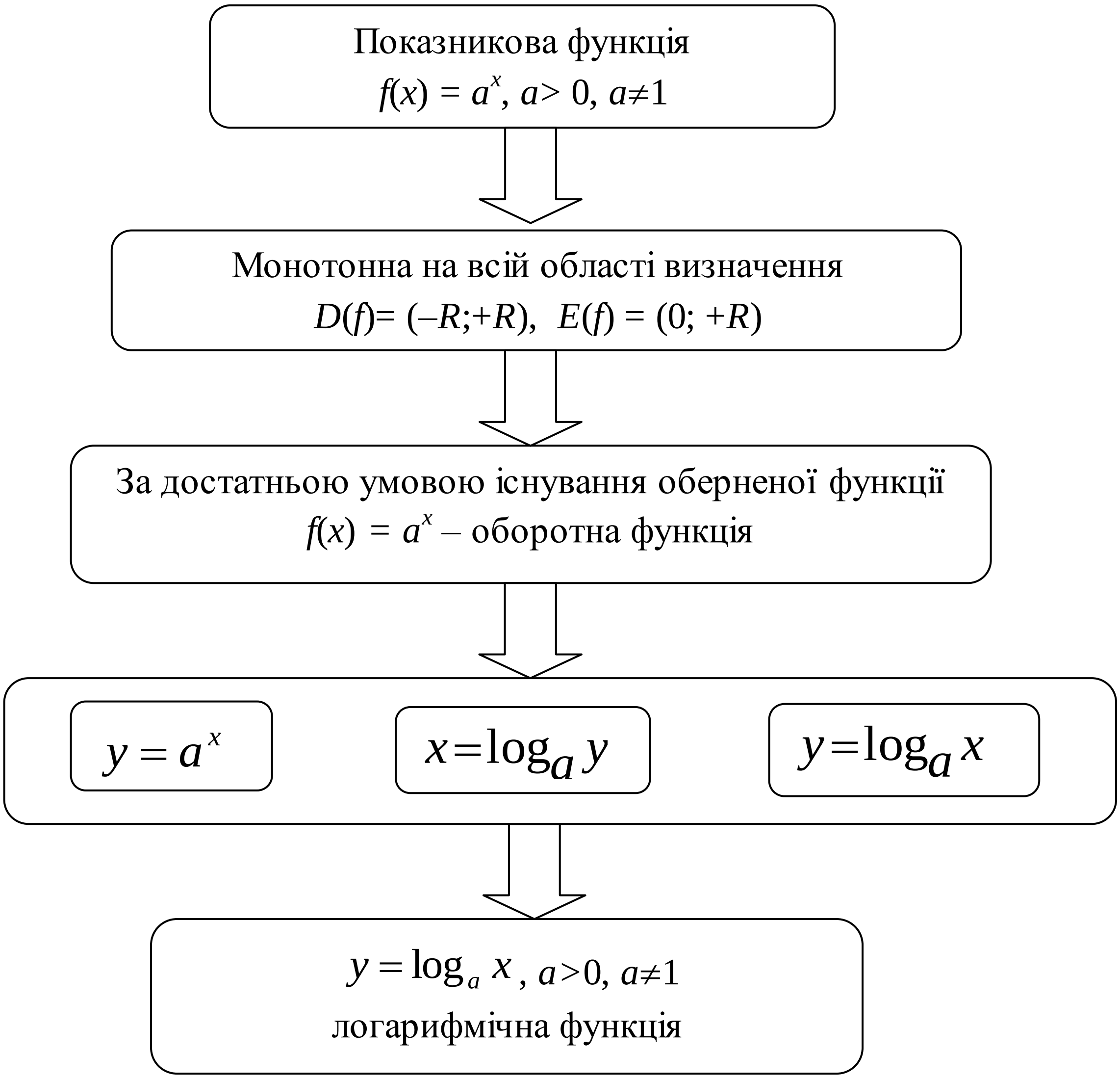


Рис. 2.2.Схема введення логарифмічної функції як оберненої до показникової

1) функція $y = a^x$ зростаюча при $a > 1$, спадна при $0 < a < 1$, тому вона є оборотною на всій області визначення $x \in R$, $y \in (0; +\infty)$;
2) розв’язати рівняння $y = a^x$ стосовно невідомої x, оскільки x – показник степеня, то, за означенням логарифма, $x = \log_a y = \varphi(x)$;
3) поміняти позначення незалежної і залежної змінних, тоді $y = \log_a x$, де $x \in (0; +\infty)$, $y \in R$.

Тоді учні самостійно прийдуть до означення логарифмічної функції як оберненої до показникової.

Означення 2.4 *Функція, обернена до показникової функції* $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, *називається логарифмічною і позначається* $y = \log_a x$. [пОСИЛАННЯ]

Потім слід нагадати учням, що графіки взаємно оберенених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Отже, графік функції $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, можна одержати з графіка функції $y = a^x$ симетричним відображенням відносно прямої $y = x$. При цьому доцільно запропонувати виконати таке завдання на конкретних функціях, наприклад, $y = 2^x$ (рис. 2.3). Саме на даному етапі вивчення теми доцільно використовувати педагогічні програмні засоби (ППЗ), зокрема GRAN 1 (рис.2.4), GRAN 2d, GeoGebra, DG тощо [24; 25; 32; 36; 61]. За допомогою вбудованих у ППЗ інструментів побудови точок, симетричних відносно прямої, учні легко можуть отримати необхідний графік логарифмічної функції, як оберненої до показникової [24; 25].

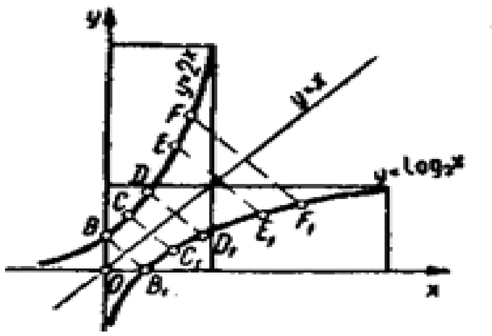


Рис. 2.3. Графіки взаємно обернених функцій

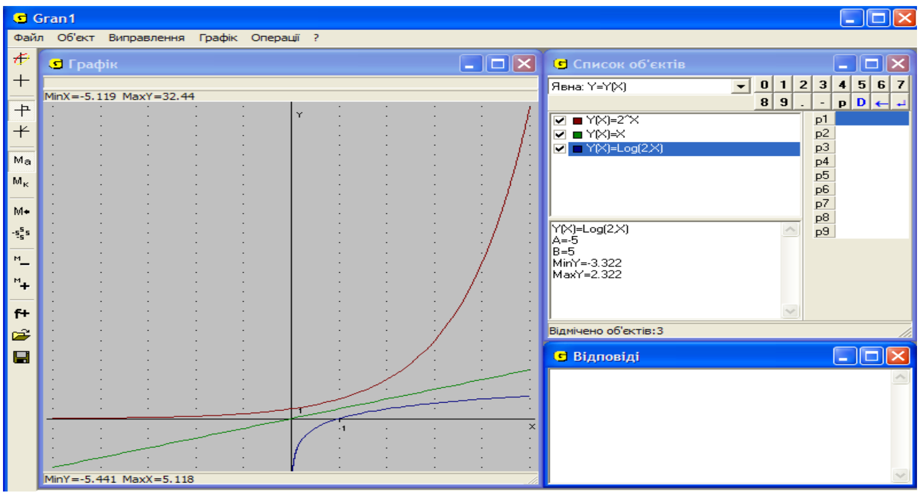


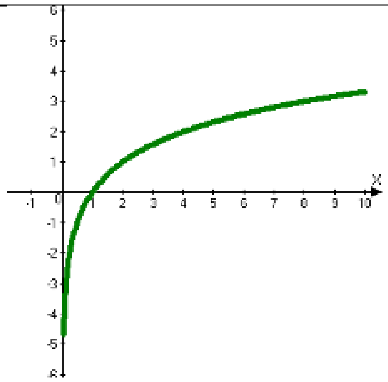
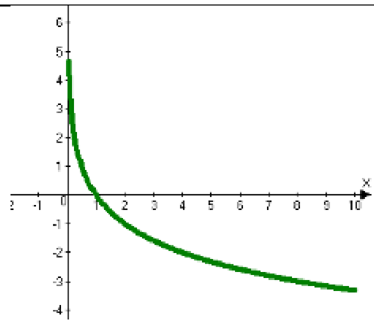
Рис. 2.4. Графіки взаємно обернених функцій у ППЗ GRAN 1

Після побудови ескізів графіків логарифмічної функції для різних випадків основи логарифма a наголошується, що графік логарифмічної функції називається логарифмічною кривою.

За побудованими графіками учні можуть «прочитати» властивості цієї функції. При цьому доцільно скласти порівняльну таблицю властивостей логарифмічної функції для випадків $a > 1$ та $0 < a < 1$ (табл. 2.7).

Таблиця 2.7.

Властивості логарифмічної функції

Властивості логарифмічної функції	**$y = \log_a x$, $a > 1$**	**$y = \log_a x$, $0 < a < 1$**
Графік		
1. Область визначення	$D(f) = (0;+\infty)$	
2. Область значень	$E(f) = (-\infty; +\infty)$	
3. Парність, непарність.	Функція не є ні парною, ні непарною (функція загального вигляду).	
4. Перетин з осями координат	Якщо $x = 1$, то $y = 0$, тобто графік проходить через точку (1;0) і перетинається з віссю Ox	
5. Проміжки знакосталості	Якщо $x > 1$, то $f(x) > 0$; Якщо $x < 1$, то $f(x) < 0$.	Якщо $x > 1$, то $f(x) < 0$; Якщо $x < 1$, то $f(x) > 0$.
6. Монотонність	Монотонно зростає на R	Монотонно спадає на R

У класах, де математика вивчається на академічному, профільному та поглибленому рівнях, ці властивості доводяться аналітично, спираючись на теорему про властивості взаємно обернених функцій та властивості функції $y = a^x$ [90].

Наприклад, слід довести, що коли $x > 1$, то при $a > 1$ функція $y = \log_a x$ набуває додатних значень. Справді, рівність $y = \log_a x$, $x > 1$, $a > 1$, можна записати у вигляді $x = a^y$. Із властивостей показникової функції, які вивчались раніше, випливає, що $y > 0$, тобто $\log_a x > 0$, що й треба було довести.

Також можна звернути увагу учнів на питання розташування графіків функцій $y = \log_a x$ та $y = log_{\frac{1}{a}}x$. Зрозуміло, що для однакових значень аргументів ці фукнції набувають протилежних значень:

$$log_{\frac{1}{a}}x = log_{a^{-1}}x = -log_a x.$$

Доцільно також використати ППЗ GRAN 1 для ілюстрації даного факту (рис. 2.5) [24; 25].

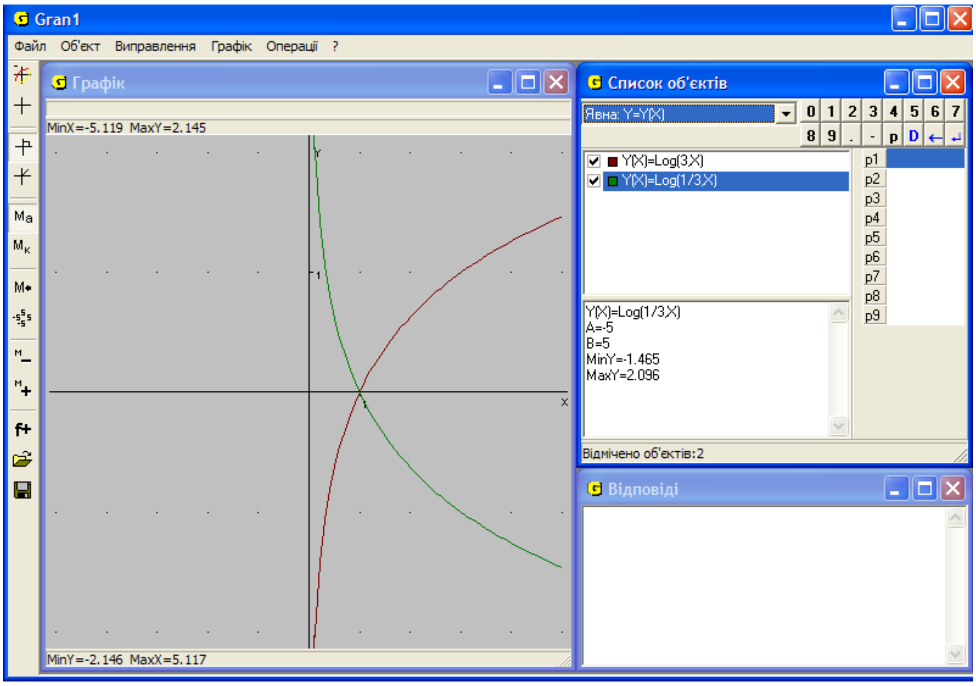


Рис. 2.5. Ілюстрація розташування графіків функцій $y = \log_a x$ та $y = log_{\frac{1}{a}}x$

Після цього переходять до прикладів застосування логарифмічної функції, її графіка та властивостей до розв'язування завдань. Типовими завданнями даної теми, якими доцільно проілюструвати вивчення нового матеріалу, є такі [56; 75; 90].

Завдання 1. Знайти область визначення функції $y = \log_{0,3}(7 - 3x)$.

Слід наголосити учням, що підлогарифмічний вираз набуває лише додатних значень.

Розв'язання. $7 - 3x > 0$, $3x < 7, x < \frac{7}{3}$, $x < 2\frac{1}{3}$.

$D(y) = (-\infty; 2\frac{1}{3})$.

Завдання 2. Побудувати графіки функцій: $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{0,1} x$, $y = \log_{0,3} x$, $y = \log_{0,5} x$.

Учням пояснюється, що графік логарифмічної функції можна побудувати за точками, склавши попередньо таблицю значень x та y, що задовольняють рівняння. Для кожного з рівнянь свій графік.

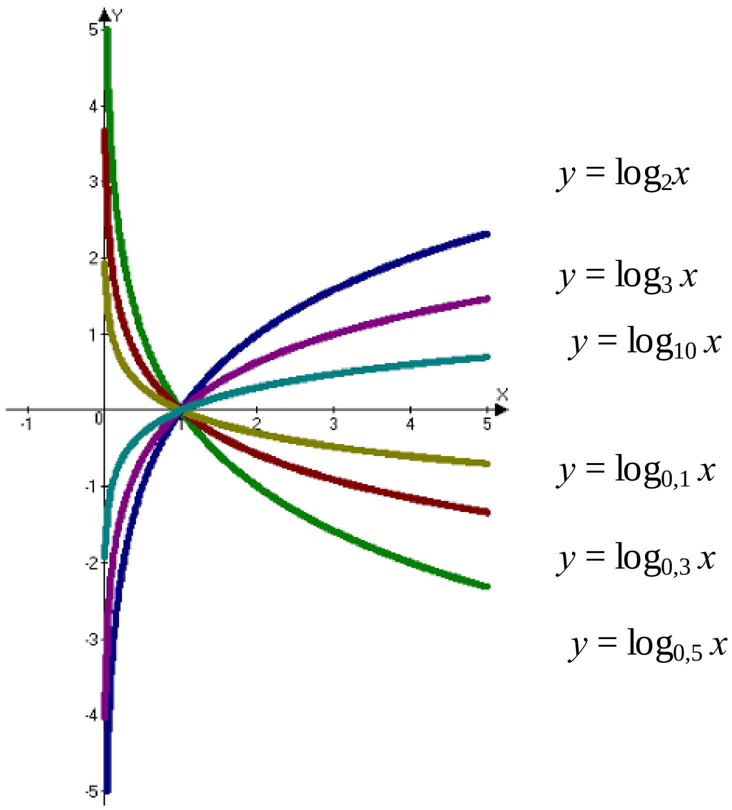


Рис. 2.6. Графіки логарифмічної функції

При виконанні завдання доцільно звернути увагу учнів на швидкість зростання чи спадання графіка логарифмічної функції залежно від основи логарифма.

Завдання 3. Порівняйте числа $\log_2 5$ і $\log_2 7$.

Слід звернути увагу учнів на значення основи логарифма та співвідношення підлогарифмічних виразів.

Розв'язання. $a = 2$, $a > 1$ і $5 > 7$, тому за властивостями логарифмічної функції $\log_2 5 > \log_2 7$.

Отже, схема введення логарифмічної функції є такою:

1) мотивувати введення логарифмічної функції через приклади відповідних залежностей;
2) задати логарифмічну функцію як відповідність кожному додатному числу його логарифма за деякою основою a;
3) показати, що ця функція є оберненою до показникової;
4) побудувати графіки логарифмічної функції та «прочитати» властивості;
5) довести властивості аналітично;
6) показати приклади застосування логарифмічної функції та її властивостей до розв'язування завдань.

Дана схема є доцільною на всіх рівнях вивчення математики. Відмінності будуть полягати у рівнях складності прикладів, які ілюструють нове поняття.

Методична схема введення поняття логарифмічного рівняння може бути такою [54; 55; 90].

1. Сформулювати означення логарифмічного рівняння.

Логарифмічними називають рівняння, що містять змінну лише під знаком логарифма.

2. Навести приклади логарифмічних рівнянь.

$lgx = 1 + lg^2x$, $log_3(x + 3) = 9$ тощо.

3. Аналізуючи означення, виділити суттєві особливості даного поняття – до нього входить логарифм за певною основою зі змінною у

підлогарифмічному виразі або логарифм, де в основі знаходиться невідома, і несуттєві особливості – будь-які числа.

Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд

$$log_a x = b, \text{ де } a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0.$$

За означенням логарифма випливає, що $x = a^b$.

Інший вигляд найпростішого логарифмічного рівняння такий:

$$log_a x = log_a b, \text{ де } a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ b > 0.$$

Найпростішим логарифмічним рівнянням є рівняння

$$log_x a = b, \text{ де } x > 0, \quad x \neq 1,\ a > 0.$$

За означенням логарифма маємо: $x^b = a$, звідси $x = a^{\frac{1}{b}}$.

4. На конкретних прикладах рівнянь здійснити операцію підведення під поняття.

Наприклад, запропонувати серед рівнянь вибрати логарифмічні та пояснити чому це так.

1) $log_3 (2x + 1) = 2$;
2) $log_3 x = log_3(6 - x^2)$;
3) $log_{x+1} (2x^2 + 1) = 2$;
4) $log_2^2 x - 3log_2 x = 4$;
5) $log_5(x - 1) + log_5(x - 2) = log_5(x + 2)$;
6) $x^{lgx} = 100x$;
7) $lgx = 1 - x$.

За аналогічною схемою доцільно вводити і поняття логарифмічної нерівності: сформулювати означення, навести приклади логарифмічних нерівностей, проаналізувати означення та виділити суттєві ознаки, здійснити підведення під поняття.

Ці схеми є доцільними на всіх рівнях вивчення математики.

Отже, ми розглянули методичні особливості формування нових понять та правил теми: логарифм та його властивості, логарифмічна функція та її властивості, логарифмічні рівняння та нерівності. Надалі розглянемо особливості формування вмінь та навичок учнів розв'язувати практичні завдання теми.

2.3. Формування вмінь та навичок учнів розв'язувати практичні завдання з теми «Логарифмічна функція» у «перевернутому» класі

У процесі вивчення теми основну увагу слід приділити формуванню вмінь та навичок виконувати тотожні перетворення логарифмічних виразів та розв'язувати логарифмічні рівняння, нерівності та їх системи.

У структурі математичних компетентностей учнів щодо тотожних перетворень логарифмічних виразів виокремлюють вміння учнів виконувати математичні розрахунки, тобто дії з числами, поданими у формі логарифма, та вміння виконувати тотожні перетворення логарифмічних виразів, зокрема при розв'язуванні різних задач [52; 53; 81; 90].

Перш за все, слід звернути увагу учнів на обчислення значень найпростіших логарифмічних виразів. Наприклад,

1) $log_5 125$; 2) $log_{\frac{1}{27}} 3$.

Розв'язуючи завдання такого типу, слід наголосити учням, що необхідно врахувати означенння логарифма та підібрати такий показник степеня, щоб при піднесенні основи логарифма до цього степеня одержати число, яке стоїть під знаком логарифма:

1) $log_5 125 = 3$, бо $5^3 = 125$;

2) $log_{\frac{1}{27}} 3 = -\frac{1}{3}$, бо $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.

З метою формування вмінь та навичок застосовувати означення логарифма до перетворення логарифмічних виразів також доцільно запропонувати завдання типу: «Запишіть розв'язки найпростіших показникових рівнянь». Наприклад,

1) $5^x = 3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 10$, 3) $10^x = \frac{1}{3}$.

Учні мають коментувати, що для будь-яких додатних чисел a ($a \neq 1$) і b рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь. Показник степеняx, до якого потрібно піднести основу a, щоб одержати b, називається логарифмом b за основою a, тому $x = log_a b$. Тоді за означенням логарифма:

1) $x = log_5 3$; 2) $x = log_{\frac{1}{3}} 10$, 3) $x = lg\frac{1}{3}$.

Для формування вмінь та навичок застосовувати властивості логарифмів під час тотожних перетворень виразів доцільно пропонувати вправи на логарифмування виразів. Наприклад, такі.

Завдання 2.1 Прологарифмуйте за основою 10 вираз $y = \frac{a^2b^2}{c^3}$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Виконуючи такі завдання, учні спочатку мають записати вирази в чисельнику та знаменнику заданого виразу як степені чисел та букв. Потім слід урахувати, що логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів чисельника й знаменника, а потім те, що логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників.

Розв’язання.

$$lgy = lg\frac{a^2b^2}{c^3} = lg\,(a^2b^2) - lgc^3 = lga^2 + lgb^2 - lgc^3 = 2\,lga + 2\,lgb - 3\,lgc.$$

Слід звернути увагу учнів на важливість обмежень $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ в умові завдання. Дійсно, розв’язання завдання «Прологарифмуйте за основою 10 вираз $y = \frac{a^2b^2}{c^3}$» вимагає інших міркувань. Оскільки логарифми існують тільки для додатних чисел, то даний вираз можна прологарифмувати тільки у випадку, коли $\frac{a^2b^2}{c^3} > 0$. З умови такого завдання не випливає, що в заданому виразі значення a, b і c додатні. Тому слід користуватися узагальненими формулами логарифмування, а також враховувати, що $|a^2b^2| = |a^2|\cdot|b^2|$, $|a^2| = |a|^2$, $|b^2| = |b|^2$, $|c^3| = |c|^3$. Тоді якщо $\frac{a^2b^2}{c^3} > 0$, то

$$lg\frac{a^2b^2}{c^3} = lg|a^2b^2| - lg|c^3| = lg(|a^2|\cdot|b^2|) - lg|c|^3 =$$
$$= lg|a^2| + lg|b^2| - 3lg|c| = lg|a|^2 + lg|b|^2 - 3lg|c| =$$
$$= 2lg|a| + 2lg|b| - 3lg|c|.$$

Поряд з розв'язанням таких завдань доцільно пропонувати учням обчислювати значення більш складних логарифмічних виразів.

Завдання 2.2 Обчислити значення виразу $5^{\frac{4}{log_{\sqrt{3}}5}+\frac{1}{2}log_5 4}$.

Розв'язуючи таке завдання, учні мають спробувати привести показник степеня заданого виразу до виду $log_5 b$, щоб можна було скористатися основною логарифмічною тотожністю

$$5^{log_5 b} = b.$$

Для цього учні мають перейти в показнику степеня до однієї основи логарифма, тобто до основи 5. Розв'язування таких завдань формує вміння та навички застосування формули переходу до нової основи та наслідків з неї.

$$log_{\sqrt{3}}5 = \frac{log_5 5}{log_5\sqrt{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}log_5 3} = \frac{2}{log_5 3},$$

$$\frac{4}{log_{\sqrt{3}}5} = \frac{4}{\frac{2}{log_5 3}} = 2log_5 3 = log_5 3^2 = log_5 9,$$

$$\frac{1}{2}log_5 4 = log_5 4^{\frac{1}{2}} = log_5\sqrt{4} = log_5 2,$$

$$\frac{4}{log_{\sqrt{3}}5} + \frac{1}{2}log_5 4 = log_5 9 + log_5 2 = log_5(9\cdot 2) = log_5 18,$$

Тоді $5^{\frac{4}{log_{\sqrt{3}}5}+\frac{1}{2}log_5 4} = 5^{log_5 18} = 18.$

Окрім завдань на логарифмування виразів, формуванню вмінь та навичок виконувати тотожні перетворення логарифмічних виразів сприяють завдання на потенціювання виразів.

Приклад. Пропотенціюйте вираз $lgx = \frac{1}{2}\, lg\ 5a - 3lg\ b + 4lg\ c$.

Для розв'язування цього завдання учні мають використати формули логарифмування справа наліво, тобто записати праву частину рівності у вигляді логарифма якогось виразу. Вчитель має наголосити, що одержана рівність

$$log_a x = log_a M$$

рівносильна рівності $x = M$. При цьому значення x, що задовольняє дану рівність, єдине, і це буде показано учням пізніше.

Розв'язання.

$lgx = \frac{1}{2}\, lg5a - 3lgb + 4lgc;$

$lgx = lg\,(5a)^{\frac{1}{2}} - lgb^3 + lgc^4;$

$lgx = lg\sqrt{5a} - lgb^3 + lg\mathrm{c}^4;$

$lgx = lg(\sqrt{5a} \cdot \mathrm{c}^4) - lg\ b^3;$

$lg\ x = lg\,\frac{c^4\sqrt{5a}}{b^3};$

$x = \frac{c^4\sqrt{5a}}{b^3}.$

Закріпленню вмінь та навичок тотожних перетворень логарифмічних виразів сприяють завдання на знаходження логарифма певного числа, якщо відоме значення іншого логарифма.

Завдання 2.3 Відомо, що $log_2 5 = a$, $log_2 7 = b$. Виразіть $log_2 700$ через a і b.

Слід подати пояснення для учнів, що спочатку число 700 необхідно представити як добуток степенів заданих чисел 5 і 7 та основи логарифма 2. Після цього необхідно пригадати властивості логарифма та підставити в одержаний вираз значення $log_2 5$ і $log_2 7$.

Розв'язання.

$log_2 700 = log_2 (7 \cdot 5^2 \cdot 2^2) = log_2 7 + log_2 5^2 + log_2 2^2 = log_2 7 + 2log_2 5 +$
$+ 2log_2 2 = b + 2a + 2$.

Формування вмінь та навичок розв'язування логарифмічних рівнянь ґрунтується на визначенні логарифма, властивостях логарифмічної функції і властивостях логарифма [34; 54; 55; 83; 90; 93].

Розв'язати логарифмічне рівняння – це означає знайти всі його корені або довести, що рівняння коренів не має.

Найпростішим логарифмічним рівнянням називають рівняння виду

$$log_a x = b, \text{ де } a > 0 \text{ і } a \neq 1.$$

Із цього рівняння за означенням логарифма випливає, що при будь-якому дійсному b рівняння має єдиний розв'язок $x = a^b$.

Розв'язування інших логарифмічних рівнянь ґрунтується на властивостях логарифмічної функції, означенні та властивостях логарифма.

Наприклад, із рівності $log_a x = log_a b$ на підставі означення логарифма і основної логарифмічної тотожності маємо:

$$x = a^{\log_a b} = b.$$

Варто звернути увагу учнів на те, що оскільки логарифмічна функція визначена лише на множині додатних чисел, то варто ще до розв'язування рівняння знайти область визначення виразів, що входять до складу рівнянь. Очевидно, наприклад, що рівняння $lg\ (x - 5) = lg\ (3 - x)$ не має розв'язків, оскільки значення x мають належати спільній частині областей визначення виразів $lg\ (x - 5)$ і $lg\ (3 - x)$, тобто множині розв'язків системи

$$\begin{cases} x - 5 > 0, \\ 3 - x > 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x > 5, \\ x < 3. \end{cases}$$

Оскільки остання система не має розв'язків, то їх не має і дане логарифмічне рівняння.

Слід застерегти учнів від можливих порушень еквівалентності логарифмічних рівнянь внаслідок виконання тотожніх перетворень. Наприклад, якщо маємо рівняння $lgx^2 = 3$, то, розв'язуючи його за означенням логарифма, дістаємо два розв'язки:

$$x^2 = 10^3,$$

$$x = \pm 10\sqrt{10}.$$

Якщо розв'язувати це рівняння, використовуючи твердження про логарифм степеня, то дістанемо:

$$2lgx = 3,$$

$$\lg x = \frac{3}{2},$$

$$x = 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10}.$$

У другому способі слід користуватися узагальненими формулами логарифмування, інакше відбувається втрата розв'язку, про що обов'язково слід наголошувати учням.

Навчати учнів розв'язувати логарифмічні рівняння слід починати з найпростіших.

Приклад Розв'яжіть рівняння $log_3 (2x + 1) = 2$.

Розв'язання.

За означенням логарифма маємо:

$2x + 1 = 3^2$,

$2x = 8$,

$x = 4$.

Перевірка:$log_3(2 \cdot 4 + 1) = log_3 9 = 2$.

Відповідь: 4.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $log_3 x = log_3(6 – x^2)$.

Розв'язання.

Із рівності логарифмів чисел випливає:

$x = 6 – x^2$;

$x^2 + x – 6 = 0$;

$x_1 = –3$, $x_2 = 2$.

Перевірка (обов'язково при відсутності ОДЗ):

1) число -3 не є коренем даного рівняння, бо вираз $log_3 (–3)$ – не має змісту;

2) $log_3 x = log_3 2$;

$log_3 (6 – x^2) = \log_3 (6 – 2^2) = log_3 2$.

Відповідь: 2.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $log_{x+1} (2x^2 + 1) = 2$.

Розв'язання.

За означенням логарифма маємо:

$2x^2 + 1 = (x + 1)^2$;

$2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$;

$x^2 – 2x = 0$;

$x_1 = 0, x_2 = 2$.

Перевірка:

1) значення $x_1 = 0$ не є коренем даного рівняння, оскільки основа логарифма $x + 1$ не повинна дорівнювати 1;

2) $\log_{x+1}(2 \cdot 2^2 + 1) = \log_3 9 = 2$.

Відповідь: 2.

Доцільно також звести до системи основні способи розв'язування більш складних логарифмічних рівнянь.

1. Метод зведення логарифмічного рівняння до алгебраїчного.

Приклад **.** Розв'яжіть рівняння $log_2^2 x – 3log_2 x = 4$.

Розв'язання.

Позначимо $log_2 x$ через y. Дане рівняння набере вигляду:

$y^2 – 3y = 4$;

$y^2 – 3y – 4 = 0$;

$y_1 = 4; y_2 = -1$.

Звідси $log_2 x = 4$, $log_2 x =-1$;

$x = 2^4$; $x =2^{-1}$;

$x= 16$, $x =\frac{1}{2}$.

Перевірка: 1) $log_2^2 16 – 3 log_2 16 = 16 – 12 = 4$;

2) $log_2^2 \frac{1}{2} - 3\, log_2 \frac{1}{2}$ = -1 + 3 = 4.

Відповідь: 16; $\frac{1}{2}$.

2. Метод потенціювання.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $log_5(x-1) + log_5(x-2) = log_5(x+2)$.

Розв'язання.

Перетворимо ліву частину і пропотенціюємо дану рівність, одержимо:

$log_5((x-1)(x-2)) = log_5(x+2)$;

$(x-1)(x-2) = x + 2$;

$x^2 - 2x - x + 2 = x + 2$;

$x^2 - 4x = 0$;

$x(x-4) = 0$;

$x = 0$ або $x = 4$.

Перевірка:

1) значення $x = 0$ не є коренем рівняння, тому що вирази $log_5(x-1)$ і $log_5(x-2)$ не мають змісту при $x = 0$;

2) $log_5(x-1) + log_5(x-2) = log_5(4-1) + log_5(4-2) = log_5 3 + log_5 2 = log_5(2\cdot 3) = log_5 6$.

$log_5(x+2) = log_5(4+2) = log_5 6$.

Отже, $x = 4$ – корінь.

Відповідь: 4.

3. Метод зведення логарифмів до однієї і тієї ж основи.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3$.

Розв'язання.

$log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3$;

$log_3 x - 2 \cdot \dfrac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 3$;

$log_3 x - 2\cdot \frac{\log_3 x}{-1} = 3;$

$log_3 x + 2log_3 x = 3;$

$3log_3 x = 3;$

$log_3 x = 1;$

$x = 3.$

Перевірка : $log_3 3 - 2\log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + 2 = 3$. Отже, $x = 3$ – корінь.

Відповідь: 3.

4. Метод логарифмування.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $x^{lgx} = 100x$.

Розв'язання.

Прологарифмуємо обидві частини рівності ($x > 0$), одержимо:

$lgx^{lgx} = lg(100x);$

$lgx \cdot lgx = lg\, 100 + lgx;$

$lg^2 x - lg\, x - 2 = 0.$

Замінимо $lg\, x = y$.

Рівняння набуде вигляду:

$y^2 - y - 2 = 0;$

$y_1 = 2,\ y_2 = -1.$

Тоді:

1) $lg\, x = 2;$

   $x = 10^2;$

   $x = 100;$

2) $lg\, x = -1;$

   $x = 10^{-1};$

   $x = 0{,}1.$

Відповідь: 100; 0,1.

5. Графічний метод розв'язування логарифмічних рівнянь.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $lgx = 1 - x$ графічно.

Розв'язання.

У одній і тій самій системі координат будуємо графіки функції $y = lg\ x$ і $y = 1 - x$ (рис. 2.7). Абсциса точки перетину побудованих графіків дорівнює 1.

Отже, $x = 1$ – корінь даного рівняння.

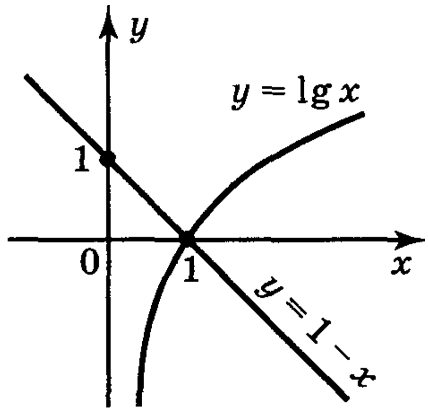


Рис. 2.7. Ілюстрація до завдання

Відповідь*:* 1.

У класах, де математика вивчається на академічному, профільному та поглибленому рівнях передбачено ознайомлення учнів з системами логарифмічних рівнянь. Вивчення теоретичного матеріалу тут не передбачено, оскільки під час розв'язування систем логарифмічних рівнянь використовують ті саме способи, що й при розв'язуванні алгебраїчних систем. Навчання учнів розв'язувати системи логарифмічних рівнянь відбувається на прикладах. Розглянемо приклади.

Приклад. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5. \end{cases}$

Розв'язання.

Враховуючи, що $x > 0$, $y > 0$,додамо і віднімемо почленно рівняння системи, тоді одержимо:

$$\begin{cases} 2\lg x = 12, \\ -2\lg y = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \lg x = 6, \\ \lg y = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 10^6, \\ y = 10^{-1}. \end{cases}$$

Відповідь*:* $(10^6;\ 10^{-1})$.

Приклад. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \log_4(x+y)=2, \\ \log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 7. \end{cases}$

Розв'язання.

Пояснюємо учням, що у першому рівнянні використовуємо означення логарифма, а у другому рівнянні системи слід використати властивість суми логарифмів:

$$\begin{cases} \log_4(x+y)=2, \\ \log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 7; \end{cases} \begin{cases} \log_4(x+y)=2, \\ \log_3(x\cdot y)=\log_3 9+\log_3 7; \end{cases} \begin{cases} x+y=16, \\ x\cdot y=63; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=16-y, \\ (16-y)\cdot y=63; \end{cases} \begin{cases} x=16-y, \\ 16y-y^2-63=0; \end{cases} \begin{cases} x=16-y, \\ y^2-16y+63=0; \end{cases} \begin{cases} x=16-y, \\ y_1=7; y_2=9. \end{cases}$$

Тоді маємо $\begin{cases} x_1=9 \\ y_1=7 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_2=7 \\ y_2=9 \end{cases}$.

Перевіркою впевнюємося, що (9; 7), (7; 9) – розв'язки системи.

Відповідь*:* (9; 7), (7; 9).

Отже, методична схема навчання учнів розв'язувати логарифмічні рівняння така:

1) введення поняття логарифмічного рівняння;
2) повторення означення та основних властивостей логарифма;
3) розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь за допомогою означення логарифма;
4) зведення до системи основних способів розв'язування більш складних логарифмічних рівнянь.

Логарифмічними називаються нерівності, що містять змінну під знаком логарифма [34; 55; 70; 90]. Найпростішими логарифмічними нерівностями називають нерівності виду $log_a f(x) > log_a g(x)$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Теоретичною основою розв'язування цих логарифмічних нерівностей є властивість монотонності логарифмічної функції. Як відомо, логарифмічна функція $y = log_a x$ зростає на всій області визначення при $a > 1$, спадає – при $0 < a < 1$. Із зростання функції $y = log_a x$ у першому випадку і спадання – у другому випадку випливає:

1) при $a > 1$ нерівність $log_a x_2 > log_a x_1$ рівносильна системі $\begin{cases} x_2 > x_1, \\ x_1 > 0, \\ x_2 > 0. \end{cases}$

2) при $0 < a < 1$ нерівність $log_a x_2 > log_a x_1$ рівносильна системі $\begin{cases} x_2 < x_1, \\ x_1 > 0, \\ x_2 > 0. \end{cases}$

Як правило, більш складні логарифмічні нерівності зводиться до нерівностей виду: $log_a f(x) > log_a g(x)$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Якщо $a > 1$, то нерівність $log_a f(x) > log_a g(x)$ рівносильна системі нерівностей: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $log_a f(x) > log_a g(x)$ рівносильна системі нерівностей: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

Слід обов'язково наголосити учням, що дані системи враховують вимогу знаходити область визначення виразів, які входять до складу нерівностей.

Розглянемо приклади.

Приклад 2.1 Розв'яжіть нерівність $log_2 x < 3$.

Розв'язання.

Оскільки $3 = log_2 2^3 = log_2 8$, то запишемо дану нерівність у вигляді $log_2 x < log_2 8$.

Оскільки функція $y = log_2 x$ зростаюча при $x > 0$, то маємо: $\begin{cases} x < 8, \\ x > 0; \end{cases}$ отже, $0 < x < 8$ (рис. 2.8).

Рис. 2.8 Ілюстрація до завдання.

Відповідь: (0; 8).

Приклад 2.2 Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{3}} x \leq -2$.

Розв'язання.

Запишемо дану нерівність у вигляді: $\log_{\frac{1}{3}} x \le \log_{\frac{1}{3}} 9$.

Оскільки функція $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ спадна при $x > 0$, маємо: $\begin{cases} x \ge 9, \\ x > 0; \end{cases}$

Отже, отримали, що $x \ge 9$ (рис. 2.9).

Рис. 2.9 Ілюстрація до завдання.

Відповідь: $[9; +\infty)$.

Приклад 2.3 Розв'яжіть нерівність: $\log_{0,5}(x^2 + x) > -1$.

Розв'язання.

Оскільки $-1 = log_{0,5} 0,5^{-1} = log_{0,5} 2$, то $log_{0,5}(x^2 + x) > log_{0,5} 2$.

Одержана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x \le 2; \end{cases} \begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x - 2 \le 0; \end{cases} \begin{cases} x(x+1) > 0, \\ (x+2)(x-1) \le 0. \end{cases}$$

Розв'язком першої нерівності (рис.2.10) є проміжок $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Рис. 2.10 Ілюстрація до завдання.

Розв'язком другої нерівності (рис. 2.11) є відрізок [-2; 1].

Рис. 2.11 Ілюстрація до завдання.

Тоді маємо (рис. 2.12) остаточно, що $x \in [-2; -1) \cup (0; 1]$.

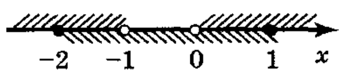


Рис. 2.12 Ілюстрація до завдання.

Відповідь: $[-2; -1) \cup (0; 1]$.

Приклад 2.4 Розв'яжіть нерівність $log_5^2 x - log_5 x > 2$.

Розв'язання.

Нехай $log_5 x = y,$ тоді отримаємо нерівність $y^2 - y - 2 > 0$.

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів.

Спочатку розв'яжемо відповідне квадратне рівняння:

$y^2 - y - 2 = 0$,

$y_1 = 2$, $y_2 = -1$.

Розкладемо квадратний тричлен на множники, маємо нерівність

$$(y - 2)(y + 1) > 0.$$

Відмітимо знайдені розв'язки на числовій прямій та розставимо знаки квадратного тричлена на кожному з проміжків (рис. 2.13).

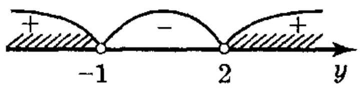


Рис. 2.13 Ілюстрація до завдання.

Маємо розв'язок нерівності $y \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Враховуючи заміну матимемо:

1) $log_5 x < -1$; $log_5 x < log_5 \frac{1}{5}$; $\begin{cases} x < \frac{1}{5}, \\ x > 0; \end{cases}$ $x \in \left(0; \frac{1}{5}\right)$;

2) $log_5 x > 2$; $log_5 x > log_5 25$; $\begin{cases} x > 25, \\ x > 0; \end{cases}$ $x \in (25; +\infty)$.

Отже, проміжок $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (25; +\infty)$ – розв'язок даної нерівності.

Відповідь: $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (25; +\infty)$.

Приклад 2.5 Розв'яжіть нерівність $\frac{2}{1+\lg x} \geq 1$.

Розв'язання.

Нехай $lgx = y,$ тоді матимемо нерівність

$\frac{2}{1+y} \geq 1; y \neq 1;$ $\frac{2}{1+y} - 1 \geq 0$; $\frac{2-1-y}{1+y} \geq 0$; $\frac{1-y}{1+y} \geq 0$.

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів (рис. 2.14).

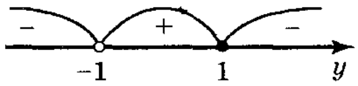


Рис. 2.14 Ілюстрація до завдання.

Отримали, що $y\in$ (-1; 1].

Враховуючи заміну, отримаємо -1 <$lg\ x\leq$ 1.

Тоді $\begin{cases} \lg x \le 1, \\ \lg x > -1; \end{cases}$ $\begin{cases} \lg x \le \lg 10, \\ \lg x > \lg 0{,}1; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 10, \\ x > 0{,}1 \\ x > 0; \end{cases}$

Отже, $x\in$ (0,1; 10] (рис. 2.15).

Рис. 2.15 Ілюстрація до завдання.

Відповідь: (0,1; 10].

Отже, методична схема навчання учнів розв'язувати логарифмічні нерівності така:

1) введення поняття логарифмічної нерівності;
2) повторення основних властивостей логарифмічної функції;
3) введення схеми заміни найпростіших логарифмічних нерівностей рівносильною системою нерівностей;
4) наведення прикладів розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей методом заміни змінних.

У класах, де математика вивчається на профільному та поглибленому рівнях, передбачене ознайомлення учнів з логарифмічними рівняннями та нерівностями, що містять параметр [4; 60; 65]. Формування вмінь учнів розв'язувати такі рівняння та нерівності передбачає:

1) формування вмінь розв'язувати звичайні логарифмічні рівняння та нерівності;
2) знання учнями різних методів розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей,

3) формування вмінь знаходити область допустимих значень змінних логарифмічних рівнянь та нерівностей;
4) знання властивостей квадратного тричлена та умов розміщення його коренів на числовій прямій;
5) знання загальних підходів до розв'язування завдань з параметрами.

Розглянемо приклади.

Приклад 2.6 Розв'яжіть нерівність $2\log_4 (x - a + 1) + \log_{0,4} (x - 2a - 3) \geq 2$.

Розв'язання.

Дана нерівність є логарифмічною та містить параметр у підлогарифмічному виразі. Перетворимо дану нерівність, використовуючи властивості логарифма:

$$\log_2 (x - a + 1) - \log_2 (x - 2a - 3) \geq 2,$$

$$\log_2 (x - a + 1) \geq 2 + \log_2 (x - 2a - 3),$$

$$\log_2 (x - a + 1) \geq \log_2 4(x - 2a - 3).$$

Тоді дана нерівність рівносильна системі, де враховано і ОДЗ нерівності:

$$\begin{cases} x - 2a - 3 > 0, \\ (x - a + 1) \geq 4(x - 2a - 3), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2a + 3, \\ 3x - 7a - 13 \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2a + 3, \\ x \leq \dfrac{7a + 13}{3}. \end{cases}$$

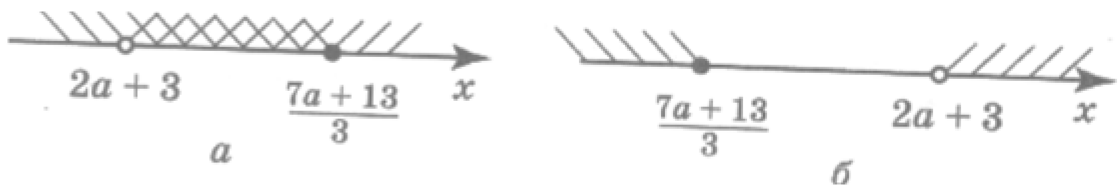


Рис. 2.16. Ілюстрація до завдання Відкорегуйте

Якщо $2a + 3 < \frac{7a+13}{3}$ (рис. 2.16, а), тобто $a > -4$, то $x \in (2a + 3; \frac{7a+13}{3}]$. Якщо $2a + 3 > \frac{7a+13}{3}$ (рис. 2.8, б), тобто $a < -4$, то нерівність розв'язків не має.

Якщо a = – 4, то, підставивши це значення в умову, учні теж отримають, що розв'язків немає.

Відповідь. При $a \leq -4$ нерівність розв'язків не має, при $a > -4$ $x \in (2a + 3; \frac{7a+13}{3}]$.

Приклад 2.7 Розв'язати рівняння $\log_2(5 - |x^2 - 6x + 8|) = a$.

Розв'язання.

Побудуємо графік функції $y = \log_2(5 - |x^2 - 6x + 8|)$ за допомогою MSExel (рис. 2.17).

Знайдемо ОДЗ: $5 - |x^2 - 6x + 8| > 0$, звідси $x \in (3 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6})$.

Розв'язуючи рівняння $\log_2(5-|x^2-6x+8|)=a$, знаходимо $x_{1,2}=3\pm\sqrt{6-2^a}$.

Якщо $a<2$, то $x_{1,2}=3\pm\sqrt{6-2^a}$; якщо $a=2$, то $x=3\pm\sqrt{6-4}=3\pm\sqrt{2}$ або $x=3$.

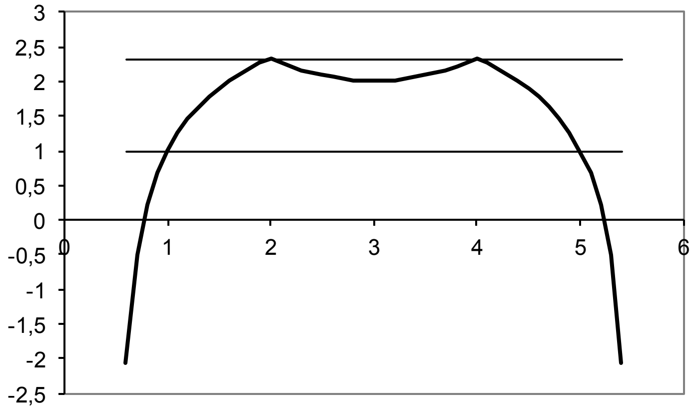


Рис. 2.17. Графічна ілюстрація до завдання

Якщо $x=2$ або $x=4$, то $\log_2 5=a$, звідси якщо $2<a<\log_2 5$, то $x_{1,2}=3\pm\sqrt{6-2^a}$.

Якщо $a>\log_2 5$, то розв'язків немає.

Приклад 2.8 При яких значення параметра *a* рівняння $\log_{(x-1)}(x+a)=0{,}5$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання.

Побудуємо сім'ю функцій $y=\log_{(x-1)}(x+a)$, а точніше графіки функцій $y=\sqrt{x-1}$та $y=x+a$за допомогоюMSExel (рис. 2.18).

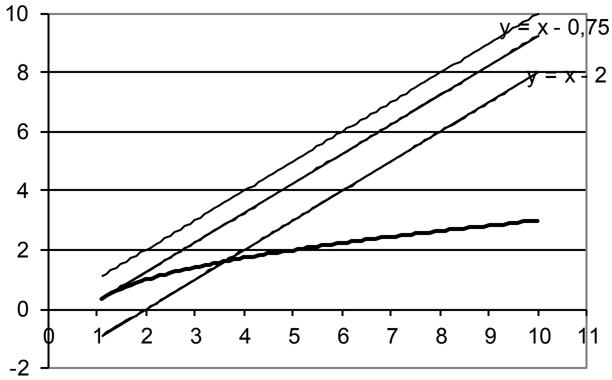


Рис. 2.18. Графічна ілюстрація до завдання

Знайдемо ОДЗ рівняння: $x-1>0, x-1\neq 1, x+a>0$.

Графіки функцій $y=\sqrt{x-1}$ та $y=x+a$ мають одну точку перетину при $a=-3/4$ та $a<-1$.

Відповідь: $a=-3/4$ та $a<-1$.

Приклад 2.9 Знайти всі значення параметра b, при яких рівняння $\lg 2|x| + \lg(2-x) - \lg(\lg b) = 0$ має єдиний корінь.

Розв'язання.

Позначимо $\lg b = a$. Запишемо рівняння, яке рівносильне початковому: $lg(2|x|(2-x)) = lga$. Переходимо до рівносильної системи

$$\begin{cases} 2|x|(2-x) = a, \\ x < 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Будуємо ескіз графіка функції $y=2|x|(2-x)$ з областю визначення $x<2$ та $x\neq 0$ (рис. 2.19).

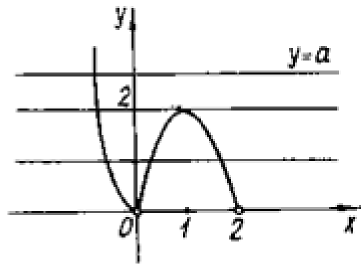


Рис. 2.19. Графічна ілюстрація до завдання

Знайдений графік сім’я прямих $y = a$ повинна перетинати тільки в одній точці. З рисунка видно, що ця вимога виконується лише при $a > 2$, тобто $\lg b > 2$, $b > 100$.

Відповідь: $b > 100$.

Отже, ми розглянули методичні особливості формування практичних вмінь та навичок учнів з теми: виконувати тотожні перетворення логарифмічних виразів та розв’язувати логарифмічні рівняння та нерівності в «перевернутому» класі.

ВИСНОВКИ

У сучасних умовах розвитку суспільства в Україні виникає необхідність підвищення якості та пріоритетності шкільної природничо-математичної освіти, включення математичних предметів до навчальних планів усіх рівнів освіти, поліпшення математичної підготовки учнів. Тому актуальним питанням є дослідження нових технологій вивчення математики. Кожна людина має свої унікальні стилі навчання, а також свою швидкість сприймання. З цих причин, щоб сформувати досвід учнів шкіл у засвоєнні і застосуванні нової інформації та навичок, процес освіти постійно переглядають, для покращення освітніх результатів.

У кваліфікаційній роботі досліджено можливості оберненого навчання , або «перевернутого» класу, як інноваційної моделі навчання. У роботі, спираючись на психолого-педагогічні особливості учнів старшого шкільного віку та аналіз програм і підручників з теми дослідження, ми розглянули методику оберненого навчання на прикладі теми логарифмічної функції у старшій ланці загальноосвітньої школи. Було з'ясовано історичні аспекти розвитку даної технології у математиці, розроблено методику викладання теми логарифмічної функції за допомогою оберненого навчання, показано місце та значення теми «Показникової та логарифмічної функцій» в курсі базового та поглибленого вивчення алгебри і початків аналізу в старшій школі, методичні особливості навчання зазначеної теми і на базі цього створено покрокову методику викладання та практичне відпрацювання навичок та вмінь у «перевернутому» класі.

Дипломна робота може бути використана вчителями математики при підготовці та проведенні уроків з даної теми, та студентами фізико-математичних факультетів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ачкан В.В. Математичні компетентності як компонент особистісно орієнтованого навчання математики / В.В. Ачкан. [Електронній ресурс]. – Режим доступу: http://www.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/znpkhnpu_zntndr/2007_27/3.html
2. Барановська Г.Г. Практикум з математики: Показникова та логарифмічна функції: навч. посібник для вступників до вузів / Г.Г. Барановська, В.В. Ясінський. – Київ :Національний технічний ун-т України «Київський політехнічний ін-т», 1998. – 124 с.
3. Бевз Г.П. Математика : 11 кл. : підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: рівень стандарту / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – Київ : Генеза, 2011. – 320 с.
4. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу : 11 кл. : підручник для загальноосвітніх навчальних закладів : академічний рівень, профільний рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – Київ: Освіта, 2011. – 400 с.
5. Бевз Г.П.Методи навчання математики / Г.П. Бевз. – Харків : Основа. – 2003. – 96 с.
6. Бевз Г.П. Методика викладання математики /Г.П.Бевз. – Київ:Вища школа, 1997. – 376 с.
7. Бикел П. Дж. Математическая статистика / П. Дж. Бикел, Доксам Куэлл ; пер. с англ. Ю. А. Данилова. – Москва : Финансы и статистика, 1983. – 254 с.
8. Білицький О. Управління процесом розвитку особистості засобами варіативного компоненту змісту освіти/ О.Білицький / Директор школи. – 2002. – № 8. – С. 2-3.
9. Біляк Б. Профільне навчання в загальноосвітніх навчальних закладах / Б. Біляк, О.Дуда // Директор школи, ліцею, гімназії. – 2003. – № 4. – С. 44-47.

10. Блох А.Я. Методика преподавания математики в средней школе/ А.Я. Блох, В.А. Гусев. –Москва : Просвещение, 1981. – 416 с.
11. Богомолов Н.В. Практические занятия с логарифмической линейкой/ Н.В. Богомолов. – Москва : Высшая школа, 1977. – 103 с.
12. Бугайов О.І. Диференціація навчання учнів у загальноосвітній школі/ О.І.Бугайов, Д.І. Дейкун. – Київ:Освіта, 1992. – 63 с.
13. Вивальнюк Л.М. Математика / Л.М. Вивальнюк, М.М.Мурач, О.І. Соколенко. –Київ:Освіта, 1998. – 301 с.
14. Виленкин Н.Я. Функции в природе и технике/ Н.Я.Виленкин. – Москва :Просвещение, 1978. –231 с.
15. Вікова та педагогічна психологія /О.В. Скрипченко, Л.В.Волинська, З.В. Огороднійчук та ін. – Київ: Просвіта, 2001. – 416 с.
16. Возрастная и педагогическая психология /Под. ред. А.В. Петровского. – Москва : Наука, 1999. – 346 с.
17. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике/ М.Я. Выгодский. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 321 с.
18. Шаг школы в смешанное образование. URL: http://openschool.ru/ru/content/lesson/18852
19. Гурський І.П. Функції та побудова графіків. Посібник для вчителів / І.П. Гурський.– Москва : Просвещение, 1968. – 215с.
20. Державний стандарт базової і повноїзагальноїсередньоїосвіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу :http://www.mon.gov.ua/ua/often-requested/state-standards/ – Загол. з екрану. – Мова укр.
21. Дунець Л. Формування професійних інтересів у майбутніх фахівців/ Л. Дунець, О. Дунець // Рідна школа. – 2001. – Січень. – С. 48-49.
22. Елизарова Н. А. Методические особенности изучения функции в классах гуманитарного направления профильной школы: автореф. дис. … канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (математика)» / Н. А. Елизарова. – Орел, 2004. – 18 с.

23. Єфремова О.І. Міжпредметні зв'язки фізики і математики у 9-11 класах середньої загальноосвітньої школи:автореф. дис. … канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / О.І. Єфремова. – Київ: НПУ, 2001. – 20 с.
24. Жалдак М.І.Комп'ютер на уроках математики / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Винниченко. – Київ : РННЦ «ДІНІТ», 2003. – 324 с.
25. Жалдак М.І. Комп'ютерно-орієнтовані засоби навчання математики, фізики, інформатики / М. І. Жалдак, В. В. Лапінський, М. І. Шут. – Київ :Дініт, 2004. – 110 с.
26. Заброцький М.М.Педагогічна психологія / М.М. Заброцький. – Київ : МАУП, 2000. – 100 с.
27. Заслонкіна Л.С. Мотивація пізнавальної діяльності на уроках математики / Л.С. Заслонкіна // Математика в школах України. – 2012. – № 31. – С. 5-11.
28. Заслонкіна Л.С. Мотивація пізнавальної діяльності на уроках математики / Л.С. Заслонкіна // Математика в школах України. – 2012. – № 33. – С. 2-7.
29. Засоби навчання математики [Електронній ресурс]. – Режим доступу: http://wiki.fizmat.tnpu.edu.ua/index.php/Засіб_навчання
30. Захарова А.В. Психология обучения старшеклассников / А.В. Захарова. – Москва : Знание, 1976. – 64 с.
31. Зіненко І.М. Упровадження компетентнісного підходу до навчання алгебри та початків аналізу учнів гуманітарного ліцею: результати педагогічного експерименту / І.М. Зіненко // Дидактика математики: проблеми і дослідження : Міжнародний збірник наукових робіт. – 2010. – № 34. – С. 98-101.
32. Иванов О. А. Системы компьютерной алгебры на уроках математики в школе / О.А. Иванов // Математика в школе. – 2012. – № 3. – С. 39-43.
33. Игнатенко Н.Я. Математические методы психолого-педагогических исследований / Н.Я. Игнатенко. – Ялта : РИО КГУ, 2009. – 52 с.

34. Іванко Т.І. Систематизація методів розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей/ Т.І. Іванко // Математика в школах України. – 2007. – Березень (№ 7). – С. 16-21.

35. Ігнатенко М.Я. Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики :дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / Микола Якович Ігнатенко. – Київ, 1997. – 335 с.

36. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики / В.В. Корольський, Т.Г. Крамаренко, С.О. Семеріков, С.В. Шокалюк: [під ред. акад. М. І. Жалдака]. – Кривий Ріг: Книжкове видавництво Кирєєвського, 2009. – 316 с.

37. Інтегрований урок виробничого навчання у контексті впровадження інновацій: компетентнісний підхід. [Електронній ресурс]. – Режим доступу: http://ptu76.at.ua/publ/integrovanij_urok_virobnichogo_navchannja_u_konteksti_vprovadzhennja_innovacij_kompetentnisnij_pidkhid/4-1-0-67

38. Інтерактивні технології на уроках математики / Уклад. І.С. Маркова. – Харків : Основа, 2008. – 126 с.

39. Календарно-тематичне планування з математики. 5-11 класи / Л.І. Кондратьєва, О.М. Тепцова. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2012. – 96 с.

40. Капіносов А.М. Основи технології навчання. Проектуємо урок математики/ А.М.Капіносов.– Харків:Основа, 2006.–140с.

41. Кац М. Физический материал на уроках математики / М. Кац/ Математика. – 2001. – №2. – С.15-17.

42. Кларин М.В. Интерактивное обучение – инструмент освоения нового опыта // Педагогика. – 2000. – № 7. – С. 12-18.

43. Класифікація методів навчання [Електронній ресурс]. – Режим доступу: http://ualib.com.ua/br_4310.html

44. Козира В.М. Технологія уроку з математики / В.М. Козира. – Таллинн : Астон, 2002. – 52с.

45. Колесник Т.В. Розвиток функціональної змістової лінії у старшій профільній школі / Т.В.Колесник // Математика в школі. – 2006. – № 1. – С. 40-44.

46. Кон И.С. Психология юношеского возраста/ И.С.Кон.– Москва : Просвещение, 1999. – 109 с.

47. Концепція профільного навчання в старшій школі (2013 р.) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.mon.gov.ua/ua/activity/education/56/692/normativno-pravova-baza/. – Загол. з екрану. – Мова укр.

48. Коток І.Б. Творчі вправи на уроках математики / І.Б. Коток // Математика в школах України. – 2012. – № 32. – С. 13.

49. Крайзман М. Л. Шляхи активізації розумової діяльності учнів при викладанні математики / М. Л. Крайзман. – Київ: Радянська школа, 1964. – 96 с.

50. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – Москва : Просвещение, 1968. – 432 с.

51. Крутецкий В. А. Психология обучения и воспитания школьника / В. А. Крутецкий. – Москва : Просвещение, 1976. – 303 с.

52. Кушнір І. Алгебра: від опанування до захоплення / Кушнір І.М, Л. Фінкельштейн.– Київ: Освіта, 2002. – 448 с.

53. Кушнір І. У світі логарифмів/ І.Кушнір.– Київ : Факт, 2004. – 136 с.

54. Логарифмічні рівняння // Математика. – 2004. – Квітень (№ 14). – С. 7-10.

55. Логарифмічні та показникові нерівності // Математика в школі. – 2004. – № 1. – С.20-22.

56. Македонська С.І. Побудова графіків логарифмічних функцій /С.І. Македонська / Математика. – 2003. – Березень (№12) – С. 8-11.

57. Математика: 11 клас: [підручник для загальноосвітніх навчальних закладів]: рівень стандарту / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 480 с.

58. Математика. Індивідуальний комплект для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. – Київ :Освіта, 2012. – 258 с.
59. Математика. Навчальні програми для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс]. – Режим доступу :<www.mon.gov.ua>. – Загол. з екрану. – Мова укр.
60. Мерзляк А.Г. Алгебра та початки аналізу : 11 клас :академічний рівень, профільний рівень/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б.Полонський, М.С. Якір. –Харків: Гімназія, 2011. – 432 с.
61. Минаева С.С. Современные информационные технологии в обучении математики / С.С. Минаева // Математика в школе. – 2012. – № 6. – С. 17-25.
62. Мірецька Л.Б.Семінар з алгебри на тему: «Показникова і логарифмічна функції в природі, науці, техніці, мистецтві»: (10–11 клас) / Л.Б. Мірецька // Математика в школі. – 2005. – № 10. – С. 32-36.
63. Мірецька Л.Б. Семінар з алгебри на тему: «Показникова і логарифмічна функції в природі, науці, техніці, мистецтві»: (10–11 клас) / Л.Б. Мірецька // Математика в школі. – 2006. – № 1. – С. 32-36.
64. Нелін Є.П. Алгебра в таблицях. Навчальний посібник для учнів 7-11 класів / Є.П. Нелін. – Харків: Гімназія, 2011. – 144 с.
65. Нелін Є.П. Алгебра та початки аналізу: 11 клас : академічний рівень, профільний рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. – Харків: Гімназія, 2011. – 432 с.
66. Нелін Є.П. Математика. Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання / Є.П. Нелін, О.М. Роганін. – Харків : Гімназія, 2011. – 248 с.
67. Остапчук У. Застосування сучасних освітніх технологій/ У. Остапчук// Математика в школі. – 2004. – № 8. –С. 11-17.
68. Пасячник Н. Формування соціальної компетентності випускника школи на уроках математики / Н. Пасячник, Г. Пасічник // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 7/8. – С. 36-38.

69. Перова М.П. Дидактические игры и упражнения по математике / М.П. Перова. –Москва : Просвещение. – 2009. – 163 с.

70. Повзло Н.М. Розв’язування логарифмічних нерівностей / Н.М. Повзло // Математика в школах України. – 2006. – Квітень (№ 11). – С. 7-17.

71. Пометун О.І. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика, досвід/ О.І.Пометун, Л.В. Пироженко.– Київ: Освіта, 2002. – 128 с.

72. Рибніков К.А. Виникнення і розвиток математичної науки / К.А. Рибніков. – Москва: Просвещение, 1987. – 263 с.

73. Саранцев Г.И. Формирование математических понятий в средней школе / Г.И. Саранцев // Математика в школе. – 1998. – №6. –С. 1-27.

74. Сердюк З.О. Формування прийомів розумової діяльності учнів у процесі вивчення математики в школах і класах суспільно-гуманітарного напряму: дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Зоя Олексіївна Сердюк. – Черкаси, 2011. – 245 с.

75. Симонов А.Я. Система тренировочных задач и упражнений по математике / А.Я. Симонов, Д.С. Бакаев, А.Г. Эпельман / Москва: Просвещение, 1991. – 208с.

76. Сухорукова Е.Г. Перевернутий урок. URL: http://www.academy.edu.by/files/12_13%20konf%202016/SUKHORUKOVA.pdf

77. Харитонова М.В. Как перевернуть урок? . «Современные методы и приемы обучения». 2014. URL: http://nauka-it.ru

78. Янченко І.В. Змішане навчання в вузі: від теорії до практики. Сучасні проблеми науки та освіти. 2016. № 5. С. 280.

79. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник / З.І. Слєпкань. – 2-ге вид., допов. і переоб. –Київ: Вища школа, 2006. – 582 с.

80. Соколенко Л.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу : практикум / Л.О. Соколенко, Л.Г. Філон, В.О. Швець. – Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.

81. Солодченко Л.І. Розвиток життєвих компетентностей на уроках математики / Л.І. Солодченко. – Тернопіль-Харків: Ранок, 2011. – 144с.
82. Столяр А.А. Педагогика математики/ А.А.Столяр. – Минск: Вышейшая школа, 1986. – 384 с.
83. Сторчай В. Ф. Показникові і логарифмічні рівняння: навч. посібник / В.Ф. Сторчай. – Київ : Дніпропетровський держ. ун-т., 1995. – 100 с.
84. Україна. МОНМС. Інструктивно-методичні рекомендаціїі з базових дисциплін: [математика] // Інформаційний збірник та коментарі Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України. – 2012. – № 19/20/21. – С. 91-96.
85. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика. – Уклад І.С. Маркова. – Харків: Основа, 2007. – 144с.
86. Фридман Л.М. Психологический справочник учителя / Л.М. Фридман, И.Ю. Кулагина. – Москва : Просвещение, 1991. – 288 с.
87. Харченко М. Використання взаємозв'язку фізики і математики на уроках у середній школі / М.Харченко // Фізика та астрономія у школі. – 2011. – № 4. – С. 12-16.
88. Хвостенко Е.Е. Методика обучения алгебре и началам анализа в 10–11 классах гуманитарного профиля с использованием компьютера :автореф. дис. … канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (математика)» / Е.Е. Хвостенко. – Махачкала, 2000. – 20 с.
89. Цукарь А.Я. Вправи практичного характеру з математики/ А.Я. Цукарь // Математика в школах України. – 1993. – №3. – С. 8-11.
90. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу. 11 клас / М.І.Шкіль, З.І. Слєпкань.– Київ: Зодіак-ЕКО, 2002. – 384 с.
91. Шумилин Е.А. Психологические особенности личности старшеклассника / Е.А. Шумилин. – Москва : Педагогика, 1979. – 152 с.
92. Шунда Н.М. Функції та їх графіки/ Н.М.Шунда. – Київ : Радянська школа,1983. – 190 с.

93. Щербинин Г.П. Показательно-логарифмические выражения, уравнения и неравенства / Г.П. Щербинин, Т.А. Недзельская. – Харьков : Харьковский гос. технический ун-т радиоэлектроники, 1995. – 60 с.
94. Bergmann, J., & Sams, A. Flip your classroom: reach every student in every class every day. Washington, DC: International Society for Technology in Education, 2012. – 10 с.
95. Биков В. Ю. Моделі організаційних систем відкритої освіти : [монографія]. Київ : Атака, 2008. 684 с.
96. Жук Ю. О. Теоретико-методичні засади організації навчальної діяльності старшокласників в умовах комп'ютерно орієнтованого середовища навчання : монографія. Київ : Педагогічна думка, 2017. 468 с.
97. Лапінський В. В. Електронні освітні ресурси – дидактичні вимоги і класифікація. URL : http://lib.iitta.gov.ua/2004 (дата звернення: 01.02.2020).
98. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал інформатизації навчального процесу. Оцінювання якості програмних засобів навчального призначення для загальноосвітніх навчальних закладів : монографія. Київ, 2012.
99. Литвинова С. Г. Теоретико-методичні основи проєктування хмаро орієнтованого навчального середовища загальноосвітнього навчального закладу: дис. … докт. пед. наук: 13.00.10 / ІІТЗН. Київ, 2016. 602с.
100. Жук Ю. О. Теоретико-методичні засади організації навчальної діяльності старшокласників в умовах комп'ютерно орієнтованого середовища навчання : монографія. Київ : Педагогічна думка, 2017. 468 с.
101. Колосова Г. Хто такі «ікси» та «ігреки» і як їм порозумітися з «зетами» [Електронний ресурс] / Ганна Колосова. – Режим доступу : https://www.pedrada.com.ua/article/1236-qqq-17-m3-15-03-2017-hto-tak-ksi-ta-greki-yak-m-porozumtisya-z-zetami.
102. Мірошникова А. Головні риси сучасних школярів та як їх спрямувати в корисне русло. URL : https://osvitoria.media/opinions/yak-vchytelyam-porozumitysya-z-tsyfrovym-pokolinnyam-ditej-porady-psyhologa/. (дата звернення 12.01.2020).

103. Покоління Z. Проблема визначення дат покоління [Електронний ресурс]. – Режим доступу : https://uk.wikipedia.org/wiki/Покоління_Z.

104. Сапа А. В. Поколение Z – поколение эпохи ФГОС. *Инновационные проєкты и программы в образовании*. 2014. №2. С. 24–30.

105. Шадриков В. Д. Психология деятельности и способности. Москва : Логос, 1998. 320 с.

106. Савченко В. А. Формування професійної майстерності вчителів фізичної культури в системі післядипломної педагогічної освіти. URL : http://osvita-dnepr.com/index.php/metodichnirekomendatsiji. (дата звернення 20.12.2019).

107. Катс Дж. Поколения и стили обучения. Москва : МАПДО ; Новочеркасск : НОК, 2011. 121 с.

108. Попова С. Н. Теория поколений – ключ к оптимизации процесса обучения современного студента. URL : http://www.nop-dipo.ru/en/node/581. (дата звернення 12.01.2020).

109. Покоління Z : как правильно ставить задачи сегодняшним двадцатилетним. URL : https://vc.ru/10701-generation-z. (дата звернення 12.01.2020).

110. Bishop J.L., Verleger M.A. The flipped classroom: a survey of the research // Atlanta: ASEE National Conference Proceedings, 2013.

111. Артюхіна А.І., Великанова О.Ф., Третяк С.В., Чумаков В. І., Велетнів В.В., Іванова Н.В. Інтерактивні методи навчання в розвитку ситуаційної готовності фахівця. Австрійський журнал гуманітарних та соціальних наук. 2016. № 1–2. С. 48–50.

112. Бондаренко Ю.О. Використання технології «перевернутий клас» на уроках англійської мови. URL: http://naukait.ru/attachments/article/1331/bondarenko_jua_novosibirsk_konf13

113. Велединська С.Б., Дорофєєва М.Ю. Організація навчального процесу в вузі за технологією змішаного навчання. XI міжнародна науково-методична конференція «Нові освітні технології у вищому навчальному закладі» URL: http://hdl.handle.net/10995/24760

114. Коптєва Л.С. Навчання за допомогою технології «перевернутого класу» на уроці математики. 2016. URL: https://www.prodlenka.org/metodicheskierazrabotki/srednjaja-shkola/matematika/217233-obuchenie-s-pomoschju-tehnologii-perevernutog.html

115. Литвинова С. Г. Технологія «Перевернуте навчання» в хмарно орієнтованому навчальному середовищі як компонент розвитку медіаосвіти в середній школі. Медіасфера і медіаосвіта: специфіка взаємодії в сучасному соціокультурному просторі. 2015. № 47 (3). С. 49-66.

116. Рибалко Т.Т. Інноваційна модель «Перевернутий клас» при вивченні іноземної мови в середній школі. Матеріали десятої міжнародної науково-практичної конференції «Професійне лінгвоосвіта». 2016. С. 278–284.

117. Rakhimzhanova M.B., Muratbakeev E.Kh. Systematic review and results of the experiment of a flipped learning model for the courses of descriptive geometry, engineering and computer graphics, computer geometry. 2017. № 13(8). P. 4831– 4845.

118. Zhukovskiy V.E. Study of network technologies in the “flipped class”. Proceedings of the IV International Scientific and Methodological Conference. 2017. № 1. P. 16–24.

119. Конференция «Смешанное обучение» 2017. URL: http://conference2017.blendedlearning.pro/

120. Виступ Андрєєвой Н.В. URL: http://blendedlearning.pro/

Додаток А.

« Історія виникнення і розвитку знань про логарифми» [72]

Логарифм – з грецької означає “логос”– відношення і “аритмос”– число.

Його винахід пов’язаний з двома постатями: швейцарцем Іобстом Бюргі (1552-1632), знаним годинникарем і майстром астрономічних інструментів, та шотландцем Джоном Непером (1550-1617), який теж не був математиком за професією, астрономія була його «хобі».

Бюргі працював разом з астрономом Іоганном Кеплером. Саме величезний обсяг необхідних в астрономії обчислень і спонукав Бюргі й Непера шукати шляхів для їх спрощення. 20 років присвятив Непер своїм логарифмічним таблицям, аби, за його словами, «позбутися нудних і тяжких обчислень, що відлякують зазвичай багатьох від вивчення математики». Обидва автори прийшли до своїх таблиць незалежно один від одного. Вони склали таблиці так званих натуральних логарифмів.

Бюргі працював над таблицями 8 років і видав їх у 1620 році під назвою «Арифметична і геометрична таблиця прогресії». Проте його таблиці не отримали широкого поширення, бо Непер видав свій «Опис дивовижної таблиці логарифмів» на 6 років раніше. Тому і визнали число e неперовим числом. Ідея десяткових логарифмів виникла у професора лондонського коледжу Генрі Брігса (1561-1630) після ознайомлення з таблицями Непера. Він двічі побував у Непера, здружився з ним і в процесі спільних занять обидва розробили нову, практично зручнішу десяткову систему, засновану на порівнянні прогресії.

Брігс взявся розробити велику таблицю десяткових логарифмів. Уже в 1617 р. він опублікував восьмизначні таблиці логарифмів від 1 до 10^3, а в 1624 році спромігся видати «Логарифмічну арифметику», що містила чотирнадцятизначні таблиці логарифмів для чисел 1–20000 і 90000–100000. Понад три з половиною сторіччя з тих пір, як у 1614 році були опубліковані Непером перші логарифмічні таблиці, вони вірою і правдою служили астрономам і геодезистам, інженерам і морякам, скорочуючи час на обчислення і, як сказав французький вчений Лаплас (1749-1827), продовжуючи життя обчислювачам.

Ще донедавна важко було уявити собі інженера без логарифмічної лінійки в кишені. Винайдена в 1624 році англійським математиком Едмундом Гунтером (1581-1626), вона дозволяла швидко одержувати відповідь з достатньою для інженера точністю до трьох значущих цифр. І хоч тепер її витіснили калькулятори і комп’ютери, проте можна сміливо сказати, що без логарифмічної лінійки не було б і перших комп’ютерів.