Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Скуратовський Р.В. Ізопериметрична задача і критерії вписаності і описаності довільного опуклого многокутника в коло // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Випуск 3(13). – С. 147-154.

Skuratovskii R.V. Criterion Of Being Inscribed And Circumscribed For Convex Polyhedrons // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2017. – Issue 3(13). – P. 147-154.

УДК 378.14

Р.В. Скуратовський
Міжрегіональна Академія управління персоналом, Інститут математики НАНУ,
Києво-Печерський ліцей №171 «Лідер», Україна
ruslan@imath.kiev.ua

ІЗОПЕРИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА І КРИТЕРІЇ ВПИСАНОСТІ І ОПИСАНОСТІ ДОВІЛЬНОГО ОПУКЛОГО МНОГОКУТНИКА В КОЛО

Анотація. *У роботі узагальнено результат К. Ф. Гауса про вписаність правильного многокутника і представлено нові теореми про вписаність і описаність многокутників у коло та рівняння для знаходження радіусів кіл. Уточнено геометричне місце центра вписаного і описаного кіл. Сформульовано і доведено триангуляційний критерій вписаності. Показано можливість застосування теорем до розв'язування олімпіадних задач. Коротко описано нові здобутки в дослідженнях метричних співвідношень для вписаних і описаних многокутників. Доведено узагальнену теорему синусів для вписаного многокутника. Досліджено ознаки описаності многокутника навколо кола. Вперше отримано критерії вписаності в коло довільного многокутника з довільною кількістю кутів та представлено формулу для суми несусідніх кутів вписаного опуклого 2n-кутника.*

Ключові слова: *вписаний многокутник, описаний многокутник, триангуляційний критерій вписаності, узагальнена теорема синусів, олімпіадні задачі.*

Тема «Вписані та описані многокутники» є провідною для багатьох математиків. Зокрема, правильні вписані многокутники досліджував К. Ф. Гаус, а Я. Штейнер [1] довів, що серед усіх многокутників із заданими довжинами сторін і послідовністю їх слідування найбільшу площу має той, навколо якого можна описати коло. Однак вивчення цієї теми обмежується вписаними і описаними трикутниками, чотирикутниками і правильними многокутниками та їх окремими характеристиками, зокрема радіусом, який знаходиться з використанням теореми синусів. Іншими словами, ще й досі не знайдено загального критерію вписаності опуклого многокутника в коло.

Нами розв'язано задачу, що є частковим випадком ізопериметричної задачі: описується в загальному вигляді розв'язання задачі про вписаність і описаність довільного опуклого многокутника, досліджуються його метричні властивості, показано зв'язок з ізопеpимеричною задачею.

У 2006 р. Смірновим [6] було знайдено критерій вписаності для 5-кутника ABCDE, який задається даним співвідношенням:

$$\frac{AB}{\sin(C+E)}=\ldots=\frac{AE}{\sin(B+D)}=-2R \tag{1}$$

і сформулювати необхідну умову для 7-кутника:

$$\frac{AB}{\sin(C+E+G)}=\ldots=\frac{AE}{\sin(B+D+F)}=2R \tag{2}$$

Потім цей критерій було узагальнено Морозом М. у роботі [7]. Ми пропонуємо більш загальні критерії і ознаки вписаності *n*-кутника.

Теорема 1. Опуклий многокутник M_n є вписаним тоді і тільки тоді, коли його серединні перпендикуляри перетинаються в одній точці.

Доведення.

Необхідну умову вписаності опуклого n-кутника можна переформулювати у вигляді узагальненої теореми косинусів: якщо многокутник вписано в коло радіуса R, то справедлива рівність

$$\frac{A_1A_2}{\cos\alpha_1}=\frac{A_2A_3}{\cos\alpha_2}=\ldots=\frac{A_1A_n}{\cos\alpha_n}=2R, \tag{3}$$

де $\cos\alpha_i$ – це косинус кута $\angle OA_iA_{i+1}$ у $\Delta A_iA_{i+1}O$. (рис. 1-2)

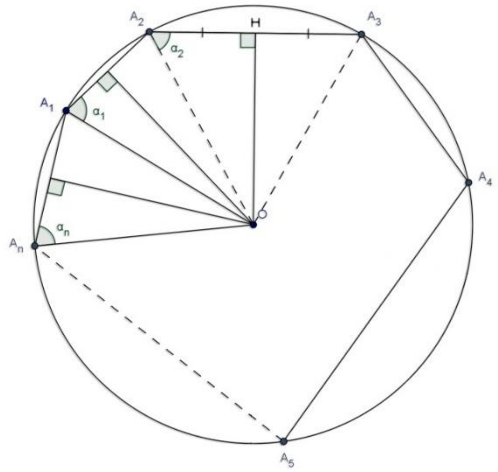

Рис. 1

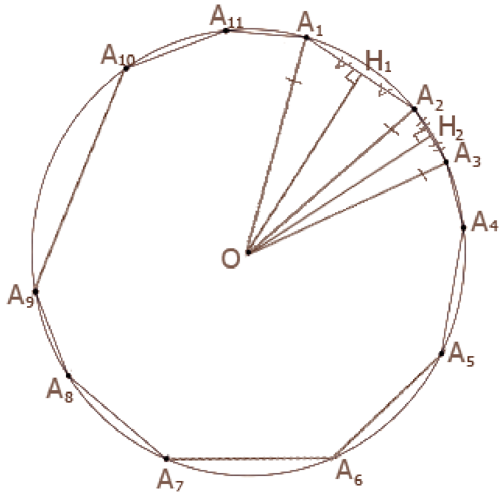

Рис. 2

Оскільки трикутник A_2A_3O має 2 сторони, що є радіусами, то він рівнобедрений і його висота OH є його медіаною, тобто ділить A_1A_2 навпіл. Тому катет трикутника A_2H_2 рівний $\frac{A_2A_3}{2}$. Аналогічно для довільного $\Delta A_iA_{i+1}O$ помітимо, що $\cos\alpha_i=\frac{A_iA_{i+1}}{2}:R=\frac{A_iA_{i+1}}{2R}$, де R – гіпотенуза прямокутного трикутника A_iOH_i, звідси $2R=\frac{A_iA_{i+1}}{\cos\alpha_i}$. Отже, в силу довільності значення індексу i, $1\le i\le n$ маємо рівність

$$\frac{A_1A_2}{\cos\alpha_1}=\frac{A_2A_3}{\cos\alpha_2}=\frac{A_1A_2}{\cos\alpha_3}=\ldots\frac{A_1A_n}{cos\alpha_n}=2R\cdot$$

Достатня умова. Якщо серединні перпендикуляри n-кутника перетинаються в одній точці, то він вписаний.

Дійсно з того, що H_1O серединний перпендикуляр слідує, що трикутник A_1A_2O є рівнобедреним. З того, що H_1O є і медіаною, і висотою, слідує, що трикутник A_2A_3O також рівнобедрений, причому сторона OA_2 у них спільна, отже, $OA_1 = OA_2 = OA_3$. Аналогічно для трикутника A_3A_4O маємо, що $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4$. І так далі. Таким чином, отримуємо рівності $OA_1 = OA_2 = OA_3 =\ldots= OA_n = R$.

Теорему 1 доведено.

Застосування до розв'язання олімпіадних задач. Цю теорему можна застосувати до розв'язування задач зі збірника [8]. Зокрема до задачі: «Задано вписаний чотирикутник, в якому з середин сторін проведено в центр кола О відрізки. Знайти суму кутів, що утворені несусідніми кутами в точці О». Застосування теореми 1 дає відповідь 180° градусів.

Тепер дослідимо ознаки описаності многокутника навколо кола.

Розглянемо многокутник M_{2n} зі сторонами $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, …, $A_{2n-1}A_{2n} = a_{2n}$.

Теорема 2. Якщо у **опуклого** многокутника M_{2n} сума сторін з непарними індексами рівна сумі сторін з парними індексами, то він є описаним.

Доведення.

Не зменшуючи загальності розглянемо 6-ти кутник $ABCDHE$. За теоремою про ковпак (якщо дві дотичні до кола виходять з однієї точки, то відстані від цієї точки до точок дотику рівні) має місце рівність дотичних проведених з вершин M_1 до кола $AA_1 = AE_1$, $BA_1 = BB_1$, … , $EE_1 = EH_1$. Окрім того, довжина кожної з сторін рівна сумі довжин двох відрізків з множини вище вказаних дотичних. Таким чином, кожна сторона поділена на дві частини, кожна з яких рівна сусіднім частинам сторін. Тоді периметр буде рівний подвоєній сумі частинок сторін, які не утворюють кут многокутника. Так, $BA = BA_1 + A_1A$ і $AE = AE_1 + E_1E$. При цьому $AE_1 = AA_1$ і один з доданків належить до $a_1 = AB$, а інший до $a_6 = AE$, тобто до сторін з різною парністю індексів. Аналогічно для інших сторін. Тому сума довжин сторін з непарними індексами рівна сумі довжин сторін з парними індексами $\sum_{i=1}^{2n-1} a_{2i+1} = \sum_{i=2}^{2n} a_{2i}$.

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. Многокутник є описаним тоді і тільки тоді, коли всі його бісектриси перетинаються в одній точці.

Доведення.

Достатня умова. Не зменшуючи загальності, проведемо доведення для 6-ти кутника: якщо всі бісектриси перетинаються в одній точці, то многокутник описаний.

Візьмемо бісектриси кутів *B* та *C* (рис. 4). Вони перетинаються в точці *O*. Доведемо що ця точка – центр вписаного кола. Для цього проведемо з точки *O* висоти до сторін *BC* та *CD*. Оскільки *CO* бісектриса кута *C*, то прямокутні трикутники *KOC* та *HOC* рівні. З цього випливає, що *OH = OK*. Якщо провести таку операцію для всіх пар трикутників, у яких є спільна сторона, яка є бісектрисою, то доведемо, що висоти до сторін многокутника, опущенні з точки *O*, рівні, а значить ми можемо вписати в многокутник коло з центром у точці *O*.

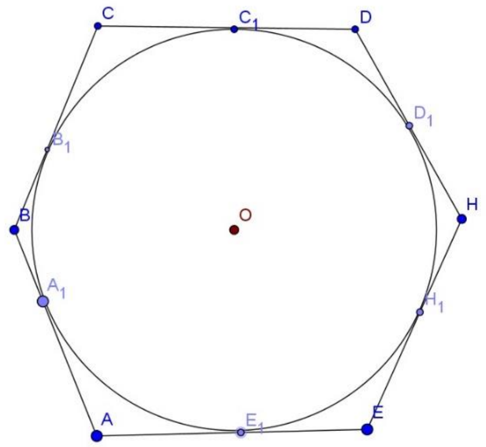

Рис. 3

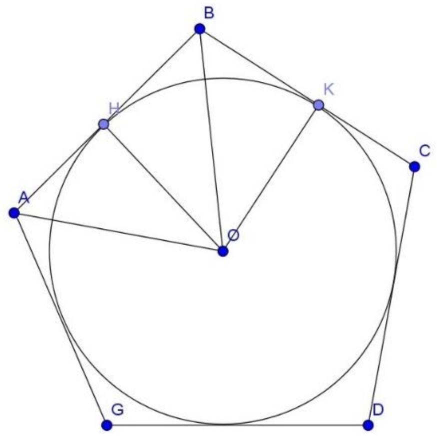

Рис. 4

Необхідність якщо довільний многокутник M_2 описаний, то його бісектриси перетинаються в центрі вписаного кола.

Візьмемо бісектриси кутів *K* і *H* (рис. 4). Зрозуміло, що точки *B* і *A* є точками кола і точками дотику описаного многокутника M_2. Побудуємо на точках дотику сторін M_2 до кола вписаний многокутник M_1. Оскільки трикутник *ABK* – рівнобедрений (його бічні сторони є дотичними з однієї точки), то його бісектриса KH_2 є одночасно: висотою і серединним перпендикуляром до основи трикутника *ABK* та стороною вписаного многокутника.

Продовження висоти KH_2 містить серединний перпендикуляр сторони *BA* вписаного многокутника M_1. За вище доведеним він містить і центр кола т.*O*. Аналогічні міркування застосуємо до бісектриси кута *H* з трикутника *BCH*. В результаті матимемо, що бісектриса *HG* проходить через т. *O* – центр кола. Аналогічно міркуючи далі доводимо, що всі бісектриси перетинаються в т. *O*.

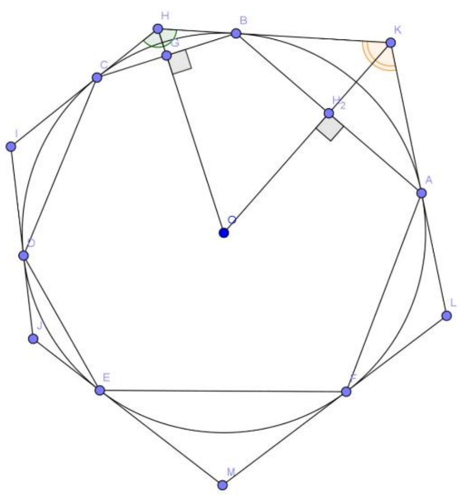

Рис. 5

Теорему 3 доведено.

Наслідок. Центр описаного многокутника співпадає з центром вписаного многокутника.

Доведення випливає з факту належності серединних перпендикулярів вписаного многокутника до бісектрис описаного многокутника і теорем 3 та 1 про центр вписаного многокутника.

Нижче опишемо триангуляційний критерій вписаності.

Означення. Кути α, ε такі, що $\alpha = 180 - \varepsilon$, називатимемо ***дуальними***.

Лема. Якщо трикутники, які побудовано на усіляких наборах з трьох вершин чотирикутника, є вписаними в коло з радіусом *R*, то весь многокутник є вписаним.

Вірно і обернене твердження.

З умови слідує рівносильне формулювання: якщо сторони усіх трикутників, що побудовані на усіляких наборах з трьох вершин чотирикутника, задовольняють рівність виду $\frac{a_i}{\sin\angle A_i} = 2R$, де a_i – довжина сторони, протилежної до кута $\angle A_i$, то весь чотирикутник є вписаним.

Доведення. Помітимо, що протилежні кути повинні бути рівними або дуальними, інакше не виконається умова $\frac{BD}{\sin\angle A} = 2R$, $\frac{BD}{\sin\angle C} = 2R$.

Скористаємося методом від супротивного: припустимо, що умова вписаності всіх вище зазначених трикутників виконується, але існує чотирикутник, який не є вписаним.

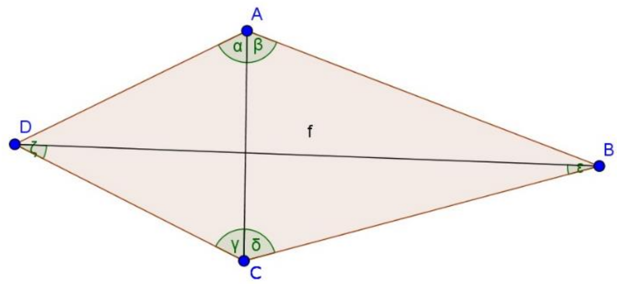

Рис. 6

Припустимо, що 4-кутник не є вписаним тобто, що протилежні кути не є дуальними, а є рівними тобто $\angle A = \alpha + \beta = \gamma + \delta = \angle C$.

При цьому $\alpha + \beta = \gamma + \delta \neq 90$. Крім того, якщо $\alpha = \varepsilon$ $\alpha = \varepsilon$, то чотирикутник вписаний, оскільки всі вершини обох трикутників лежать на одному і тому ж колі, а це є протиріччя з припущенням про вписаність чотирикутника. Крім того, $\alpha + \beta = 180 - (\gamma + \delta)$, що теж веде до протиріччя з припущенням.

Тому з умови $\sin\alpha = \sin\varepsilon$ слідує, що $\alpha = 180 - \varepsilon$ (такі кути названо ***дуальними***). Отже,

$$\alpha + \varepsilon = 180. \tag{4}$$

Подібним є доведення для кутів β, ξ, тобто

$$\beta + \xi = 180. \tag{5}$$

Тому підсумовуючи рівності (1) і (2)

$$(\alpha + \varepsilon) + (\beta + \xi) = 180 + 180 = 360. \tag{6}$$

Тут ми вже отримали протиріччя, бо в лівій частині отримали суму таких кутів, деякі з яких є строго вкладені в кути многокутника, а тому їх сума строго менша за 360, а в правій частині ми маємо 360.

Розглянемо трикутник ΔBCD, у якому $\varepsilon + \xi = 180 - \gamma - \delta$.

Підставимо цю суму в (6). Спочатку перегрупуємо доданки і отримаємо

$(\alpha + \varepsilon) + (\beta + \xi) = (\alpha + \beta) + (\varepsilon + \xi) = 180 + 180 = 360$. Тепер підставимо $\varepsilon + \xi = 180 - \gamma - \delta$ у другі дужки з суми (6)

$$(\alpha + \varepsilon) + (\beta + \xi) = (\alpha + \beta) + (\varepsilon + \xi) = \alpha + \beta + \varepsilon + \xi = \alpha + \beta + 180 - \gamma - \delta = 360.$$

Звідси $\alpha + \beta - \gamma - \delta = 180$, але ми поклали, що $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, тому отримуємо, $0 = 180$, що є неможливим. Аналогічно приходимо до протиріччя для іншої пари протилежних кутів чотирикутника. Отже, наше припущення, що протилежні кути чотирикутника не є дуальними, хибне.

Лему доведено.

Теорема 4. Якщо всі трикутники, які побудовані на усіляких наборах з вершин многокутника, є вписаними в коло радіуса *R*, то весь многокутник є вписаним в коло з радіусом *R*.

Вірно і навпаки: з вписаності многокутника слідує вписаність кожного трикутника, вершини якого є вершинами многокутника.

Доведемо теорему за індукцією.

Нехай дано многокутник, що задовольняє умову теореми.

Помітимо, що трикутник $\Delta\ A_1A_2A_6$ ми можемо завжди знайти, бо знаємо його кут $\angle A_1$ і сторони A_1A_2, A_1A_6. Скориставшись теоремою косинусів, можемо знайти A_2A_6, а потім і всі сторони вищезгаданих трикутників з вершинами, що належать многокутнику.

Просуваючись далі, аналогічно відсікатимемо наступний трикутник $A_2A_3A_6$, кут якого обчислюється за формулою $\angle A_3A_2A_6 = \angle A_1A_2A_3 - \angle A_1A_2A_6$, потім знаходимо його сторону A_3A_6 та інші сторони і кути цього трикутника. Користуючись лемою про чотирикутник, доводимо, що чотирикутник $A_1A_2A_3A_6$ вписаний, оскільки трикутник $\Delta\ A_2A_3A_6$ теж вписаний у коло радіуса R. таким чином міркуючи, бачимо, що центри кіл у всіх вписаних трикутників співпадають.

Подібну процедуру робимо для наступного чотирикутника $A_2A_3A_6A_4$, що має спільний трикутник $\Delta\ A_2A_3A_6$ з вписаним чотирикутником $A_1A_2A_3A_6$. Отримуємо розбиття для всіх пар трикутників, що стоять послідовно, маючи одну спільну сторону. Для кожного з таких чотирикутників виконується лема. Це розбиття на трикутники містить всі вершини многокутника. Отже, всі такі чотирикутники будуть вписаними. Значить всі вершини лежать на одному колі.

З вписаності многокутника очевидно слідує вписаність всіх трикутників.

Теорему 4 доведено.

Твердження. Сума σ_n несусідніх кутів вписаного опуклого $2n$-кутника рівна $(n-1)\pi$.

Доведення здійснюється шляхом сумування радіанних мір дуг, на які спираються несусідні кути. В результаті маємо, що кожна дуга виду $\cup\ A_iA_{i+1}$, де A_i, A_{i+1} вершини многокутника, входить в суму n–1 раз. А сума всіх дуг рівна 2π, тому сума вписаних кутів, що на них спираються, а це і є несусідні кути, рівна π. Наприклад, σ_4 вписаного чотирикутника M_4 рівна π, а $\sigma_6 = 2\pi$. Позначимо M_n як n-кутник. У теоремі 11 з [6] знайдено лише оцінку аналогічної суми лише для M_7 і суму кутів для M_6. Дане твердження дає шукану суму несуміжних кутів для довільного многокутника M_{2n}.

Твердження доведено.

Теорема 5. Для вписаності в коло опуклого многокутника M_{2n} необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови

$$\frac{A_kA_{k+1}}{\sin(\sigma_n-\varphi_k)}=\frac{|A_{2n}A_1|}{\sin(\sigma_n-\angle A_{2n}A_1A_2-\angle A_{2n}A_2A_1)}=(-1)^{n-2}2R,\ 1\le k\le 2n-1.$$

Доведення.

У многокутнику M_{2n} (рис. 8) пунктирна лінія зі стрілочками означає повторення ребер і вершин. Не обмежуючи загальності, знайдемо величину вписаного кута, що спирається на дугу $\cup A_2A_3$

Віднімаємо спочатку від σ_n кут $\angle A_2$ і отримаємо

$$\sigma_n-\angle A_2=\pi(n-1)-\frac{1}{2}\cup A_1A_iA_3=\pi(n-1)-\angle A_2=\pi(n-1)-(\pi-\angle A_1A_iA_3)=\pi(n-2)+\angle A_1A_iA_3 \text{ або}$$

$$\angle A_1A_iA_3 = \sigma_n - \angle A_2 - \pi(n-2) = \pi - \angle A_2.$$

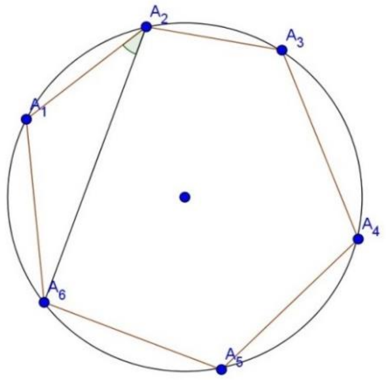

Рис. 7

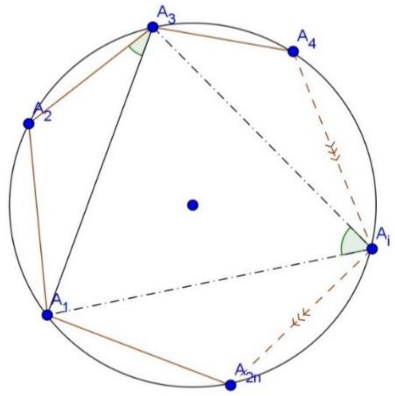

Рис. 8

Але знайдений кут $\angle A_1A_iA_3$ більший за шуканий нами кут $\angle A_1A_iA_2$, тому віднімемо від нього кут $\angle A_1A_3A_2$ і маємо $\angle A_1A_iA_2 - \angle A_1A_3A_2 = \pi - \angle A_2 - \angle A_1A_3A_2$, позначимо $\varphi_k = \angle A_2 + \angle A_1A_3A_2$, де $\angle A_2 + \angle A_1A_3A_2 < \pi$, бо це кути з $\Delta\ A_1A_2A_3$.

Аналогічні міркування виконуються для $\varphi_k = \angle A_k + \angle A_{k-1}\ A_{k+1}A_k$.

Також синус вписаного кута $\angle A_1A_iA_2$ можна отримати з рівності

$\sigma_n - \angle A_2 - \angle A_1A_3A_2 = \pi(n-2) + \angle A_1A_iA_3 - \angle A_1A_3A_2 = \pi(n-2) + \angle A_1A_iA_2$. Звідси синус шуканого кута $\angle A_1A_iA_2$ рівний $(-1)^{n-2}\sin(\sigma_n - \angle A_2 - \angle A_1A_3A_2) = \sin(\angle A_2 + \angle A_1A_3A_2)$. Тому умови, що вимагаються в теоремі, можна перетворити:

$$\frac{|A_kA_{k+1}|}{\sin(\varphi_k)} = \frac{|A_{2n}A_1|}{\sin(\angle A_{2n}A_1A_2 + \angle A_{2n}A_2A_1)} = 2R,\ 1 \le k \le 2n-1.$$

Також варто зазначити, оскільки многокутник опуклий, тобто всі вершини лежать в одній півплощині відносно довільного ребра (нехай це ребро A_2A_3), то з рівності $\sin\angle A_1A_iA_2 = \sin\angle A_1A_jA_2$, $2 < I, j \le 2n$ слідує рівність кутів $\angle A_1A_iA_2 = \angle A_1A_jA_2$, $2 < I, j \le 2n$, тому всі ці точки лежать на одному колі, що і треба було довести.

Доведення вписаності всіх трикутників в одне коло радіуса R можна було завершити міркуваннями з доведення достатності у роботі [7].

Варто зауважити, що знак $\sin(\sigma_n - \varphi_k) \in (-1)^{n-2}$ при $2n \ge 4$.

Теорему 5 доведено.

У роботах [6,7] авторам вдалося розв'язати задачу лише для випадку M_{2n+1}, тобто для $2n+1$-кутника, де виражається вписаний кут $\angle A_1A_iA_2$ через суму несусідніх кутів. Там же доведено критерій вписаності, виражений у (1) і (2), але авторам не вдалося виразити цей кут для $2n$-кутника.

У лемі 1.1 статті [7] для многокутника M_{2n+1} виражається вписаний кут, що спирається на дугу, яка відсікається стороною A_1A_2 многокутника як хордою кола наступним чином.

Знаходиться градусна міра вписаного кута $\angle A_i$ через радіанні міри доповнюючих дуг до дуги $\cup A_{i+1}A_{i-1}$, а саме через $\angle A_i = \pi - \frac{1}{2}\cup A_{i-1}A_i - \frac{1}{2}\cup A_iA_{i+1}$, тому суму $\sum_1$ з [7] представлено як

$$\angle A_3 + \angle A_5 + \ldots + \angle A_{2n+1} = (\pi - \cup A_2A_3 - \cup A_3A_4) + (\pi - \cup A_4A_5 - \cup A_5A_6) + \ldots + (\pi - \cup A_{2n}A_{2n+1} - \cup A_{2n+1}A_1) =$$
$$= n \cdot \pi - (\cup A_2A_3 + \cup A_3A_4 + \ldots + \cup A_{2n+1}A_1) = n \cdot \pi - (\pi - \cup A_1A_2) = (n-1)\cdot \pi + \angle A_1A_iA_2.$$

Потім для M_{2n+1} виражається шуканий синус $\sin\angle A_1A_iA_2 = (-1)^{n-1}\sin\left(\angle A_3 + \angle A_5 + \ldots + \angle A_{2n-1} + \angle A_{2n+1}\right)$. Але для M_{2n} таким шляхом вдасться виразити тільки дугу $\cup A_1A_3$, що спирається на хорду A_1A_3, але кут $\angle A_1A_iA_2$ чи $\sin\angle A_1A_iA_2$ так не можна виразити, отже безпосередньо з неї ні в [6], ні в [7] авторам не вдавалося виразити дугу $\cup A_1A_2$.

Якщо ж для M_{2n} провести аналогічні міркування до тих які автори робили для M_{2n+1}, то ми виразимо лише $\sin\angle A_1A_iA_3 = (-1)^{n-2}\sin\left(\angle A_4 + \angle A_6 + \ldots + \angle A_{2n-2} + \angle A_{2n}\right)$.

Зауважимо, що $\angle A_1A_iA_3$ можна було знайти простіше, використовуючи твердження про суму σ_n несусідніх кутів вписаного опуклого $2n$-кутника, що рівна $(n-1)\pi$. Для знаходження потрібного в Лемі 1.1. з [7] кута $\angle A_1A_iA_2$ ми пропонуємо знайти додатковий кут $\angle A_2A_3A_1$, використавши спочатку теорему косинусів для знаходження A_1A_3, а потім і теорему синусів для знаходження двох невідомих кутів трикутника. Але, віднявши від $\angle A_1A_iA_3$ знайдений нами додатковий кут $\angle A_2A_1A_3$, виразимо потрібний в цій ситуації кут $\angle A_1A_iA_2$. А саме $\sin(\angle A_1A_iA_2) = \sin((n-2)\cdot\pi + \angle A_1A_iA_3 - \angle A_2A_3A_1)$, де $\angle A_1A_iA_3 > \angle A_2A_3A_1$, бо $\cup A_1A_iA_3 > \cup A_1A_2$, звідки $\sin\angle A_3A_iA_2 = (-1)^{n-2}\sin\left(\angle A_4 + \angle A_6 + \ldots + \angle A_{2n-2} + \angle A_{2n} - \angle A_2A_3A_1\right)$, бо $(n-2)\cdot\pi + \angle A_1A_iA_3 = \angle A_3 + \angle A_5 + \ldots + \angle A_{2n+1}$

Це видно з рис. 8, де пунктирна лінія зі стрілочками означає повторення ребер і вершин.

Тому шуканий синус запишеться як

$$\sin\angle A_kA_iA_{k+1} = (-1)^{n-2}\sin\left(\angle A_{k+2} + \angle A_{k+4} + \ldots + \angle A_{k-3} + \angle A_{k-1} - \angle A_2A_3A_1\right).$$

Тепер доведення вписаності всіх трикутників в одне коло радіуса R можна завершити міркуваннями з доведення достатності статті [7].

Як наслідок можна розширити умови теореми 1.1 з [7] про вписаність для випадку $2n$-кутника: для вписаності опуклого $2n$-кутника в коло радіуса R необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{|A_1A_2|}{\sin(\Sigma_1 - \angle A_1A_3A_2)} = \frac{|A_2A_3|}{\sin(\Sigma_2 - \angle A_2A_3A_4)} = \ldots = \frac{|A_{2n-1}A_{2n}|}{\sin(\Sigma_{2n} - \angle A_{2n-1}A_{2n}A_1)} = (-1)^{n-2}2R.$$

Висновки. В роботі вперше отримано критерії вписаності в коло довільного многокутника з довільною кількістю кутів. Досліджено його метричні властивості. Доведено теорему, що узагальнює теорему синусів для вписаного трикутника.

Викладений матеріал може бути використаний для роботи в профільній школі, зокрема для гурткової роботи. Його можна вивчати, використовуючи метод проектів, що може мати місце як в окремому гуртку, так і в завданнях для математичних турнірів чи робот у Малій академії наук. Окремі задачі можна розв'язувати, використовуючи метод мозкового штурму і метод «мікрофон» для активізації роботи всього учнівського колективу. Також вважаємо за доцільне включити цю тему у навчальні плани підготовки магістрів освіти зі спеціалізації Математика.

Список використаної літератури

1. Актершев С. П. Задачи на максимум и минимум / Актершев С. П. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 192 с.
2. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владіміров В.М., Владімірова Н.Г. Геометрія. 10-11 / Бевз Г.П., Бевз В.Г. – К.: Освіта, 2000. – 235 с.
3. Габович И.Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач /Габович И.Г. – Радянська школа, 1989. – 162 с.
4. Кушнір І., Фінкельштейн Л. Навчання у просторі / Кушнір І., Фінкельштейн Л. – К.: Факт, 2003. – 157 с.
5. Мерзляк А. Г, Полонський В.Б, Якір М.С. Геометрія. 8 класс /Мерзляк А. Г, Полонський В.Б, Якір М.С. 2008. – 238 с.
6. Смирнова А., Смирнов В. Вписанные и описанные многоугольники / Смирнова А., Смирнов В. // Квант, 2006. – №4. – С. 33-34.
7. Мороз. М. Многокутники з непарною кількістю сторін навколо яких можна описати коло / Мороз. М. // Математика в рідній школі. – 2015. – № 5. – С. 37-41.
8. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами// 2001. – 400 с.
9. Скуратовський Р.В. Критерій вписаності в коло довільного *n*-кутника / Скуратовський Р.В. // Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики". – С. 80-82.
10. Виноградова И. А. Математический анализ в задачах и упражнениях / Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. – МГУ, 1991. – Т.1. – 352 с.
11. Варфоломеев В. В. Вписанные многоугольники и полиномы Герона /Варфоломеев В. В. // Матем. сб., 2003. – Т. 194. – № 3. – С. 3-24.
12. Скуратовський Р.В. Критерії вписаності і описаності в коло довільного *n*-кутника // Міжнародна науково-практична конференції «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики» / Скуратовський Р.В. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. – С. 64-65.

References

1. Aktershev S. P. Zadachi na maksimum i minimum / Aktershev S. P. – SPb.: BHV-Peterburg, 2005. – 192 c. (in Russian)
2. Bevz G.P., Bevz V.G., VladImIrov V.M., VladImIrova N.G. GeometrIya. 10-11 / Bevz G.P., Bevz V.G. – К.: OsvIta, 2000. – 235 s. (in Ukrainian)
3. Gabovich I.G. Algoritmicheskiy podhod k resheniyu geometricheskih zadach /Gabovich I.G. – Radyanska shkola, 1989. – 162 s. (in Russian)
4. KushnIr I., FInkelshteyn L. Navchannya u prostorI / KushnIr I., FInkelshteyn L. – K.:, Fakt, 2003. – 157 c. (in Ukrainian)
5. Merzlyak A. G, Polonskiy V.B, YakIr M.S. GeometrIya/ 8 klass /Merzlyak A. G, Polonskiy V.B, YakIr M.S. 2008. – 238 s. (in Ukrainian)
6. Smirnova A., Smirnov V. Vpisannyie i opisannyie mnogougolniki / Smirnova A., Smirnov V. // Kvant, 2006. – #4. – S. 33-34. (in Russian)
7. Moroz. M. Mnogokutniki z neparnoyu kIlkIstyu storIn navkolo yakih mozhna opisati kolo / Moroz. M. // Matematika v rIdnIy shkolI. – 2015. – # 5. – S. 37-41. (in Ukrainian)
8. Sharyigin I.F., Gordin R.K. Sbornik zadach po geometrii/ 5000 zadach s otvetami// 2001. – 400 s. (in Russian)
9. Skuratovskiy R.V. KriterIy vpisanostI v kolo dovIlnogo n-kutnika / Skuratovskiy R.V. // VseukraYinska naukovo-metodichna konferentsIya "SuchasnI naukovo-metodichnI problemi matematiki". – S. 80-82. (in Ukrainian)
10. Vinogradova I. A. Matematicheskiy analiz v zadachah i uprazhneniyah / Vinogradova I. A., Olehnik S. N., Sadovnichiy V. A. – MGU, 1991. – T.1. – 352 s. (in Russian)
11. Varfolomeev V. V. Vpisannyie mnogougolniki i polinomyi Gerona /Varfolomeev V. V. // Matem. sb., 2003. – T. 194. – # 3. – S. 3-24. (in Russian)
12. Skuratovskiy R.V. KriterIYi vpisanostI I opisanostI v kolo dovIlnogo n-kutnika // MIzhnarodna naukovo-praktichna konferentsIYi «AktualnI problemi teorIYi I metodiki navchannya matematiki» / Skuratovskiy R.V. – K. : NPU ImenI M. P. Dragomanova, 2017. – S. 64-65. (in Ukrainian)

CRITERION OF BEING INSCRIBED AND CIRCUMSCRIBED FOR CONVEX POLYHEDRONS

R.V. Skuratovskii

Interregional Academy of Personnel Management, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine and Kiev's Lyceum № 171 "Leader"

Abstract. *The work generalizes the result of K. F. Gauss on the refinement of a regular polygon and presents a new theorem about the refinement and opisanie polygons in the circle and the equation for finding the radii of the circles. Clarification of the locus of the center of the inscribed and circumscribed circles. Formulated and proved the triangulation criterion of refinement. The possibility of using theorems to the solution of Olympiad tasks. Briefly* *described new achievements in the studies of metric correlations for inscribed and circumscribed polygons. Proved a generalized theorem for the sine of the inscribed polygon. Investigated signs of opasnosti polygon around the circle. First obtained the criteria of refinement in the circle of an arbitrary polygon with an arbitrary number of angles and presents a formula for sums not adjacent angles inscribed in a convex 2n-gon.*

***Key words**: inscribed polyhedron, circumscribed polyhedrons.*