Міністерство освіти і науки України
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

ДРУШЛЯК М.Г., ЮРЧЕНКО А.О.

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА І ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ

Навчально-методичний посібник

Суми – 2021

УДК 510.6

Рекомендовано до друку рішенням кафедри математики
Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка
(протокол № 1 від 30.08.2021)

Друшляк М.Г. – доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики СумДПУ імені А.С.Макаренка.

Юрченко А. О. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри інформатики СумДПУ імені А.С.Макаренка.

Рецензенти:

Жучок Ю. В. – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри алгебри та системного аналізу Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Лукашова Т. Д. – доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедра математики Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка.

Математична логіка і теорія алгоритмів. Навчально-методичний посібник / М. Г. Друшляк, А. О. Юрченко. – Суми: СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2021. – 84 с.

Посібник складено відповідно до державних стандартів та програми курсу «Математична логіка і теорія алгоритмів» для спеціальностей 014.04 Середня освіта (Математика) та 014.09 Середня освіта (Інформатика). Теоретичний матеріал подано у схемах. Наведено приклади розв’язання типових задач. До кожної теми пропонуються завдання для самостійної роботи.

Посібник рекомендується майбутнім учителям математики та інформатики, викладачам математики закладів вищої освіти, закладів професійно-технічної освіти, закладів загальної середньої освіти та всім особам, хто цікавиться логікою.

УДК 510.6

ЗМІСТ

ВСТУП

Математична логіка як фундаментальна дисципліна відіграє важливу роль у професійній підготовці майбутніх учителів математики та інформатики. Вона сприяє розвитку критичного мислення, кращому розумінню структурно-логічної схеми шкільного курсу математики, глибшому проникненню в суть процесу доведення теорем та встановлення зв'язків між ними. Символіка та мова математичної логіки дають змогу стисло і точно описувати означення математичних понять, формулювання теорем та їх доведень.

Сучасні студенти є представниками покоління Z, яке зростає у візуально наповненому середовищі і характеризується кліповим мисленням, новим типом сприймання навчального матеріалу: їм важко сприймати інформацію подану лінійно у текстовому форматі. Тому теоретичний матеріал посібника подано у візуальній, структурно-зрозумілій формі – у вигляді схем.

Теоретичний матеріал мінімізовано і подано лише з метою актуалізації необхідних знань для розв'язування того чи іншого класу задач. Більш глибоке та повне вивчення теоретичного матеріалу рекомендується за навчальним посібником

Лиман Ф. М. *Математична логіка і теорія алгоритмів*. Суми: Видавництво «МакДен», 2014. 176 с.

Наразі у закладах вищої освіти спостерігаються тенденції скорочення годин, відведених на аудиторні заняття. З іншого боку, незмінним залишається обсяг програмового матеріалу. Через це викладачі змушені опанування більшості матеріалу перекласти на самостійну роботу студентів, що не завжди характеризується високим рівнем навчальних досягнень. Ситуація, що складалася, вимагає інтенсифікації освітнього процесу. З цією метою посібник розроблено у вигляді робочого зошита, робота з яким дозволяє збільшити кількість виконаних завдань на практичних заняттях.

Основна **мета** курсу „Математична логіка і теорія алгоритмів" – сформувати у студентів знання, вміння і навички, необхідні для усвідомлення і використання понять, законів і методів математичної логіки і теорії алгоритмів при розкритті природи математики та як засобу при вивченні інших галузей наукових знань.

Для досягнення основної мети в курсі „Математична логіка і теорія алгоритмів" розв'язуються основні **завдання**:

– розкривається місце і значення знань з математичної логіки і теорії алгоритмів у професійній підготовці майбутніх вчителів математики, фізики та інформатики;

– ґрунтовне ознайомлення студентів з формалізацією математичної мови, яка в цьому курсі іде значно далі, ніж в курсах алгебри, геометрії та аналізу;

– детальне ознайомлення студентів з формалізованим аксіоматичним методом побудови математичних теорій, проблемами несуперечності, повноти та алгоритмічної розв'язності теорій;

– уточнення поняття алгоритму і детальне ознайомлення з декількома такими уточненнями, з'ясування сутності алгоритмічної нерозв'язності, ознайомлення з прикладами алгоритмічно розв'язних та алгоритмічно нерозв'язних теорій, набуття навичок конструювання алгоритмів з класу точних алгоритмів для розв'язання найпростіших задач, зокрема, для обчислення числових функцій.

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

знати:

– основні поняття і факти алгебри висловлень: логічні операції над висловленнями; формули алгебри висловлень та їх класифікацію; рівносильність формул; ДНФ, КНФ та їх властивості; сутність проблеми вирішення в алгебрі висловлень.

– числення висловлень як формалізований аналог алгебри висловлень: поняття формули в численні висловлень; основні теореми і метатеореми числення; правила виводу, теорему дедукції та додаткові правила виводу; проблеми несуперечності, повноти, незалежності та розв'язності в численні висловлень.

– основні поняття і факти логіки предикатів: предикати, логічні операції над ними та класифікацію предикатів; кванторні операції, формули та їх класифікацію; інтерпретації формул, зведену та випереджену форми формул логіки предикатів; проблему вирішення в логіці предикатів.

– формалізацію логіки предикатів і теорії першого порядку: терми, формули, аксіоми, правила виводу; метатеореми дедукції; питання несуперечності, повноти та алгоритмічної розв'язності теорій першого порядку.

– основні поняття теорії алгоритмів: інтуїтивне та уточнене поняття алгоритму; частково-обчислювальні (обчислювальні) та частково-рекурсивні (рекурсивні) функції; оператори регулярної суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації; тезу Черча; нормальні алгоритми Маркова; машини Тюрінга; методологічну сутність алгоритмічно нерозв'язних проблем;

вміти:

– виконувати логічні операції над висловленнями і предикатами;

– використовувати рівносильність формул для їх перетворення до ДНФ, КНФ в алгебрі висловлень та до зведених і випереджених форм у логіці предикатів;

– практичні застосування алгебри висловлень та логіки предикатів в логіко-математичній практиці;

– доводити теореми в численні висловлень та в теоріях першого порядку з застосуванням основних і додаткових правил виводу;

– застосовувати на практиці оператори регулярної суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації;

– конструювати найпростіші нормальні алгоритми Маркова та машини Тьюрінга для обчислення числових функцій.

Присвячується світлій пам'яті доктора фізико-математичних наук,
професора Федора Миколайовича Лимана – Вченого, Вчителя, Людини

Розділ 1. АЛГЕБРА ВИСЛОВЛЕНЬ

Практичне заняття 1
Висловлення та логічні операції над ними. Формули алгебри висловлень

ВИСЛОВЛЕННЯ – речення, по відношенню до якого можна сказати істинне воно чи хибне.

Значення істинності висловлення *A*:

$$|\mathrm{A}| = \begin{cases} 1, \text{якщо висловлення A істине;} \\ 0, \text{якщо висловлення A хибне.} \end{cases}$$

Завдання 1. Серед речень знайти висловлення та вказати їх значення істинності.

№	Речення	Висловлення	Значення істинності
1	13 – просте натуральне число		
2	$log_2 8 = 4$		
3	$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$		
4	Дніпро впадає у Азовське море		
5	$x^2 + 10x - 5 > 0$		
6	Існує натуральне число, яке більше за 5		
7	Будь-яке дійсне число додатне		

ВИСЛОВЛЕННЯ → **просте**, якщо воно не утворене з інших

ВИСЛОВЛЕННЯ → **складене**, якщо воно не є простим

Логічне значення складеного висловлення $\varphi(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n)$ є функцією від логічних значень його складових:

$$|\varphi(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n)| = f(|\mathrm{A}_1|, |\mathrm{A}_2|, \dots, |\mathrm{A}_n|).$$

Складені висловлення утворюються з простих за допомогою логічних операцій.

Логічні операції

- **заперечення** ($\overline{A}$ – *«не A»*)
- **кон'юнкція** ($A \wedge B$ – *«A і B»*)
- **диз'юнкція** ($A \vee B$ – *«A або B»*)
- **імплікація** ($A \Rightarrow B$ – *«якщо A, то B»*)
- **еквіваленція** ($A \Leftrightarrow B$ – *«A тоді і тільки тоді, коли B»*)

$\lvert A\rvert$	$\lvert B\rvert$	$\lvert \bar{A}\rvert$	$\lvert A \wedge B\rvert$	$\lvert A \vee B\rvert$	$\lvert A \Rightarrow B\rvert$	$\lvert A \Leftrightarrow B\rvert$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Завдання 2. Визначити істинність чи хибність складних висловлень, вважаючи відомими значення істинності простих висловлень, з яких вони складаються.

1. *«96 кратне 24 тоді і тільки тоді, коли 96 кратне 8 і 96 кратне 3»*.

Висловлення А – «96 кратне 24», $\lvert A\rvert =$____________

Висловлення В – «96 кратне 8», $\lvert B\rvert =$_____________

Висловлення С – «96 кратне 3», $\lvert C\rvert =$_____________

Значення істинності складеного висловлення $\lvert A \Leftrightarrow B \wedge C\rvert =$______________

2. *«198 кратне 11 і 18, але не кратне 7»*.

Висловлення А – ____

Висловлення В – ____

Висловлення С – ____

Значення істинності складеного висловлення ________________________________

3. *«Неправильно, що хоча б одне з чисел 21, 51, 91 є простим»*.

____

____

____

____

Формула алгебри висловлень

1. *будь-яка висловлювальна змінна є формулою алгебри висловлень*
2. *якщо α і β – формули алгебри висловлень, то слова ($\bar{\alpha}$), (α∧β), (α∨β), (α⇒β), (α⇔β) також є формулами алгебри висловлень*
3. *усі інші слова, крім тих, які утворюються за правилами пунктів 1) та 2), не є формулами алгебри висловлень*

Логічним операціям алгебри висловлень приписується певний **ранг**, згідно якого операції в довільній формулі виконуються в такому порядку: **¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔,** якщо інший порядок не вказано за допомогою дужок.

Завдання 3. Визначити порядок виконання логічних операцій у формулах.

1. $A \Longrightarrow \bar{B} \vee (\bar{A} \Leftrightarrow C)B \vee C$

2. $(A \Longrightarrow ((B \vee \bar{C}) \wedge \bar{D})) \Longrightarrow (\bar{C} \vee B) \wedge C \Leftrightarrow \bar{A}$

При обчисленні значень істинності формули, що відповідають всім можливим наборам значень змінних, одержані результати зручно записувати у вигляді таблиці, яку називають **таблицею істинності даної формули**.

Для формули алгебри висловлень від *n* змінних кількість можливих наборів значень змінних дорівнює 2^n.

Формула α(A_1, … , A_n)

- **тотожно істинна (тавтологія)** — якщо |α(A_1, … , A_n)|=1 при будь-яких значеннях істинності висловлювальних змінних (A_1, … , A_n)
- **тотожно хибна (суперечність)** — якщо |α(A_1, … , A_n)|=0 при будь-яких значеннях істинності висловлювальни змінних (A_1, … , A_n)
- **нейтральна** — якщо вона ні тотожно істинна, ні тотожно хибна

Завдання 4. Скласти таблиці істинності для формул та визначити тип формули.

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathrm{A} \vee B) \wedge (A \Rightarrow \bar{C}) \Rightarrow A \vee (\bar{C} \Leftrightarrow B)$$

Алгоритм

1. Кількість висловлювальних змінних у формулі *n* =____________.
2. Кількість можливих наборів значень змінних 2^n=_____________.
3. Порядок виконання логічних операцій у формулі.
4. Складання таблиці істинності.

$\lvert \boldsymbol{A} \rvert$	$\lvert \boldsymbol{B} \rvert$	$\lvert \boldsymbol{C} \rvert$	$\lvert \mathrm{A} \vee \boldsymbol{B} \rvert$	$\lvert \bar{\boldsymbol{C}} \rvert$	$\lvert \boldsymbol{A} \Rightarrow \bar{\boldsymbol{C}} \rvert$	$\lvert (\mathrm{A} \vee \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{A} \Rightarrow \bar{\boldsymbol{C}}) \rvert$	$\lvert \bar{\boldsymbol{C}} \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \rvert$	$\lvert \boldsymbol{A} \vee (\bar{\boldsymbol{C}} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}) \rvert$	$\lvert \boldsymbol{\alpha} \rvert$
0	0	0							
1	0	0							
0	1	0							
0	0	1							
1	1	0							
1	0	1							
0	1	1							
1	1	1							

$$\boldsymbol{\alpha} = A \Leftrightarrow B\bar{C} \Rightarrow B \vee \bar{A}C \vee A\bar{B}$$

$\lvert \boldsymbol{A} \rvert$	$\lvert \boldsymbol{B} \rvert$	$\lvert \boldsymbol{C} \rvert$										

Під **проблемою вирішення в алгебрі висловлень** розуміють питання: чи існує алгоритм, який дає змогу для будь-якої формули алгебри висловлень визначити (за скінченне число кроків), є вона ТІ-формулою чи ні. Або в більш загальному вигляді: чи існує алгоритм, який дає змогу (за скінченне число кроків) визначити тип будь-якої формули алгебри висловлень.

Дана проблема в алгебрі висловлень розв'язується позитивно і при тому декількома способами.

Спосіб 1
Складання таблиці істинності для формули алгебри висловлень

Спосіб 2
Аналіз формул із застосуванням методу міркування від супротивного

Спосіб 3
Зведення формули алгебри висловлень до рівносильної їй формули (ДНФ та КНФ), за зовнішнім виглядом якої можна сказати ТІ вона чи ні

Завдання 5.

1) Довести, що формула $(A \wedge B) \wedge (\bar{C} \Rightarrow \overline{B}) \Rightarrow C$ тотожно істинна (ТІ).

Розв'язання

Використаємо метод міркування від супротивного. Припустимо, що формула не є ТІ, тобто існують значення висловлюваних змінних, при яких $\left|(A \wedge B) \wedge (\bar{C} \Rightarrow \overline{B}) \Rightarrow C\right| = 0$. Це можливо лише у випадку, коли

$$\left|(A \wedge B) \wedge (\bar{C} \Rightarrow \overline{B})\right| = 1 \text{ та } |C| = 0.$$

Розглянемо перший випадок. Кон'юнкція істинна тоді і тільки тоді, коли

$$|\mathrm{A}| = 1, |\mathrm{B}| = 1, |\bar{C} \Rightarrow \bar{B}| = 1.$$

Маємо такий набір $|\mathrm{A}| = 1, |\mathrm{B}| = 1, |C| = 0$. Перевіримо, яке значення приймає імплікація $\bar{C} \Rightarrow \bar{B}$ при таких значеннях висловлювальних змінних. Отримаємо, що при $|\mathrm{B}| = 1, |C| = 0$ їх заперечення $|\bar{\mathrm{B}}| = 0, |\bar{\mathrm{C}}| = 1$ та $|\bar{C} \Rightarrow \bar{B}| = 0$, що суперечить отриманому раніше.

Отже, наше припущення невірне, формула $(A \wedge B) \wedge (\bar{C} \Rightarrow \overline{B}) \Rightarrow C$ є ТІ.

2) Довести, що формула $(P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow R))$ тотожно істинна (ТІ).

Розв'язання

Використаємо метод міркування від супротивного. Припустимо, що формула не є ТІ, тобто існують значення висловлюваних змінних, при яких

Домашнє завдання.

1. Скласти таблицю істинності для формули
$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee C) \Longrightarrow (B \wedge C)).$$
2. Довести, що формула $AB \vee \bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B \vee A\bar{B}$ є тотожно істинною.

Практичне заняття 2
Рівносильні перетворення формул алгебри висловлень. ДНФ та КНФ

Формула алгебри висловлень $\alpha(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_m)$ і $\beta(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n)$ називаються ***рівносильними (логічно еквівалентними),*** *якщо значення істинності формули α збігається зі значенням істинності формули β для кожного з наборів логічних значень висловлювальних змінних.*

Рівносильність формул α і β позначатимемо $\alpha \equiv \beta$.

Критерій рівносильності формул. *Дві формули алгебри висловлень α і β рівносильні тоді і тільки тоді, коли їх еквіваленція є ТІ-формулою.*

Основні рівносильності формул алгебри висловлень

1) $\bar{\bar{\mathrm{A}}} \equiv \mathrm{A}$;	*12)* $\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \equiv (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C}$;
2) $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \equiv \mathrm{B} \wedge \mathrm{A}$;	*13)* $\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \equiv (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \vee \mathrm{C}$;
3) $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \equiv \mathrm{B} \vee \mathrm{A}$;	*14)* $\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \equiv (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C})$;
4) $\mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \equiv \mathrm{A}$;	*15)* $\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \equiv (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{C})$;
5) $\mathrm{A} \vee \mathrm{A} \equiv \mathrm{A}$;	*16)* $\overline{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} \equiv \bar{\mathrm{A}} \vee \bar{\mathrm{B}}$;
6) $\mathrm{A} \wedge \bar{\mathrm{A}} \equiv 0$;	*17)* $\overline{\mathrm{A} \vee \mathrm{B}} \equiv \bar{\mathrm{A}} \wedge \bar{\mathrm{B}}$;
7) $\mathrm{A} \vee \bar{\mathrm{A}} \equiv 1$;	*18)* $\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B} \equiv \bar{\mathrm{A}} \vee \mathrm{B}$;
8) $\mathrm{A} \wedge 1 \equiv \mathrm{A}$;	*19)* $\mathrm{A} \Longleftrightarrow \mathrm{B} \equiv \mathrm{B} \Longleftrightarrow \mathrm{A}$;
9) $\mathrm{A} \vee 1 \equiv 1$;	*20)* $\mathrm{A} \Longleftrightarrow \mathrm{B} \equiv (\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{A})$;
10) $\mathrm{A} \wedge 0 \equiv 0$;	*21)* $\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B} \equiv \bar{\mathrm{B}} \Longrightarrow \bar{\mathrm{A}}$.
11) $\mathrm{A} \vee 0 \equiv \mathrm{A}$;	

ЛІТЕРАЛОМ висловлювальної змінної будемо називати саму цю змінну та її заперечення.

Кон'юнкція літералів або один літерал називається **ЕЛЕМЕНТАРНОЮ КОН'ЮНКЦІЄЮ**.
Для того, щоб елементарна кон'юнкція була ТХ-формулою, необхідно і достатньо, щоб вона містила деяку висловлювальну змінну у її заперечення.

Диз'юнкція літералів або один літерал називається ***ЕЛЕМЕНТАРНОЮ ДИЗ'ЮНКЦІЄЮ***.
Для того, щоб елементарна диз'юнкція була ТІ-формулою, необхідно і достатньо, щоб вона містила деяку висловлювальну змінну у її заперечення.

Кон'юнкція елементарних диз'юнкцій або окрема елементарна диз'юнкція називається ***КОН'ЮНКТИВНОЮ НОРМАЛЬНОЮ ФОРМОЮ (КНФ).***

$\boxed{\text{Е.Д.}}$

$\boxed{\text{Е.Д.}} \wedge \boxed{\text{Е.Д.}} \wedge \ldots \wedge \boxed{\text{Е.Д.}}$

КНФ тоді і тільки тоді є ТІ-формулою, коли кожний її диз'юнктивний одночлен містить хоча б одну висловлювальну змінну разом з її запереченням.

Диз'юнкція елементарних кон'юнкцій або окрема елементарна кон'юнкція називається ***ДИЗ'ЮНКТИВНОЮ НОРМАЛЬНОЮ ФОРМОЮ* (ДНФ).**

$\boxed{\text{Е.К.}}$

$\boxed{\text{Е.К.}} \vee \boxed{\text{Е.К.}} \vee \ldots \vee \boxed{\text{Е.К.}}$

ДНФ тоді і тільки тоді є ТХ-формулою, коли кожний її кон'юнктивний одночлен містить хоча б одну висловлювальну змінну разом з її запереченням.

Для кожної формули алгебри висловлень існує рівносильна їй ДНФ та КНФ, а також ДДНФ та ДКНФ.

Завдання 1. Визначити, які з формул є елементарними кон'юнкціями, елементарними диз'юнкціями:

1) $A \vee \overline{C} \vee B$ – ____;

2) $AB \vee C$ – ____;

3) $A_2 \overline{A_3} A_4$ – ____;

4) $\overline{A}$ – ____;

5) $(A \vee C)B$ – ____;

6) B – ____.

Завдання 2. Визначити, які з формул є КНФ, ДНФ чи зовсім не є нормальними формами:

1) $A\overline{B}\overline{C} \vee \overline{A}B \vee AC \vee D$ – ____________________________________;

2) $A \Rightarrow B \vee C$ – ____;

3) A – ____;

4) $\overline{B}$ – ____;

5) $(A \vee \overline{B})\overline{A}\overline{B}C$ – ____.

Завдання 3. Звести формули алгебри висловлень до ДНФ та ДДНФ:

1) $(A \Rightarrow B)(B \Rightarrow C)$;

Розв'язання

2) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \overline{C})$.

Розв'язання

Завдання 4. Звести формули алгебри висловлень до КНФ та ДКНФ:

1) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow AC$;

Розв'язання

2) $AB \vee \overline{C}$;

Розв'язання

3) $\overline{ABC} \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

Розв'язання

Домашнє завдання.

1. Звести формулу $AB \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ до ДНФ та з'ясувати, чи є вона тотожно істинною.
2. Звести формулу $\overline{(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow ((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C))}$ до КНФ та з'ясувати, чи є вона тотожно хибною.

Практичне заняття 3
Логічне слідування на базі алгебри висловлень

Формула β називається **логічним наслідком формул $\boldsymbol{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}$ (гіпотези)**, якщо вона приймає значення істинності «1» для кожного такого набору значень висловлювальних змінних, при якому всі формули $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ мають значення істинності «1».

Позначається $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \,/\!= \beta$.

Завдання 1. Виходячи з означення логічного висновку на базі алгебри висловлень, побудувавши відповідні таблиці істинності, перевірити, чи правильне твердження $A \vee B, A \Rightarrow \overline{C} \,/\!= A \vee (\overline{C} \Leftrightarrow B)$.

Розв'язання

Маємо $\alpha_1 =$__________, $\alpha_2 =$___________, $\beta =$____________________.

$\lvert A \rvert$	$\lvert B \rvert$	$\lvert C \rvert$					

Отже, виходячи із означення логічного висновку на базі алгебри висловлень, твердження є ____.

Критерій логічного слідування.

Формула β є логічним наслідком формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, тоді і тільки тоді, коли імплікація $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \Rightarrow \beta$ є тотожно істиною формулою.

Завдання 2. Використовуючи критерій логічного слідування на базі алгебри висловлень, перевірити, чи правильним є твердження $A \wedge B, \overline{C} \Rightarrow \overline{B}$ /=C.

Розв'язання

За критерієм логічного слідування перевіримо формулу ____________________ ________________________________ на предмет її тотожно істинності.

Використаємо метод міркування від супротивного. Припустимо, що формула не є ТІ, тобто існують значення висловлювальних змінних, при яких

Отже, наше припущення вірне/невірне, формула __________________________ _______________________________________ не є/є ТІ, і за критерієм логічного слідування _______________________________________.

Завдання 3. Визначити, чи правильне міркування на базі алгебри висловлень.

1) Якщо паралелограм *ABCD* – прямокутник, то його діагоналі рівні.

2) Діагоналі паралелограма *ABCD* рівні.

Отже, *ABCD* – прямокутник.

Розв'язання

Позначимо прості висловлення.

А – «____»,

В – «____»,

Тоді гіпотези та логічний висновок запишемо наступним чином:

$\alpha_1 =$____________, $\alpha_2 =$_____________, $\beta =$___________________.

Логічне слідування: ____.

Залишається перевірити правильність даного логічного слідування одним із вище розглянутих способів – користуючись означенням чи критерієм логічного слідування.

Завдання 4. Визначити, чи правильне міркування на базі алгебри висловлень.

1) Якщо футбольна команда «Динамо» гратиме в основному складі і черговий матч не буде перенесено, то «Динамо» виграє черговий матч.

2) Якщо «Динамо» виграє черговий матч, то буде чемпіоном країни цього року.

3) Якщо не буде призначено на цей тиждень міжнародного матчу, то черговий матч чемпіонату країни не буде перенесено.

4) Міжнародна зустріч на цей тиждень не буде призначена і «Динамо» гратиме в основному складі.

Отже, «Динамо» буде чемпіоном країни цього року.

Розв'язання

Позначимо прості висловлення:

A – «Динамо гратиме в основному складі»;

B – «черговий матч не буде перенесено»;

C – «Динамо виграє черговий матч»;

D – «Динамо буде чемпіоном країни цього року»;

E – «не буде призначено на цей тиждень міжнародного матчу».

Тоді гіпотези запишемо наступним чином:

$\alpha_1 =$____________, $\alpha_2 =$___________, $\alpha_3 =$___________, $\alpha_4 =$_____________.

Логічний наслідок запишемо наступним чином: $\beta =$_______________________.

Логічне слідування: ____.

Залишається перевірити правильність даного логічного слідування одним із вище розглянутих способів – користуючись означенням чи критерієм логічного слідування.

Домашнє завдання.

1. Виходячи з означення логічного висновку на базі алгебри висловлень, побудувавши відповідні таблиці істинності, перевірити, чи правильне твердження $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C \models A \vee B \vee C$.

2. Використовуючи критерій логічного слідування на базі алгебри висловлень, перевірити, чи правильним є твердження $\overline{A \vee B} \models \overline{A} \vee C$.

3. Визначити, чи правильне міркування на базі алгебри висловлень (виходячи з означення логічного висновку на базі алгебри висловлень).

1) Якщо Наталка прочитала «Дванадцять стільців», то вона передала цю книгу Павлові.

2) Наталка не прочитала «Дванадцять стільців».

Отже, Наталка не передавала цієї книги Павлові.

4. Визначити, чи правильне міркування на базі алгебри висловлень, використовуючи критерій логічного слідування на базі алгебри висловлень.

1) Якщо задане число *m* кратне 15, то *m* кратне 5 і кратне 3.
2) *m* не кратне 15.
3) *m* кратне 3.
Отже, *m* не кратне 5.

Практичне заняття 4
Розв'язування логічних задач

Завдання 1 (*конкретизація задачі*). Чотири учениці – Маша, Наташа, Оля, Катя – приймали участь у лижних змаганнях і зайняли чотири перших місця. На запитання, хто яке місце зайняв, вони дали три різні відповіді:

1) «Ольга зайняла перше місце, Наташа – друге».
2) «Ольга – друге, Катя – третє».
3) «Марія – друге, Катя – четверте».

Дівчата зізналися, що одна частина кожної відповіді вірна, а інша – ні. Яке місце зайняла кожна учениця?

Розв'язання

Введемо пропозиційні змінні наступним чином:

M_n – «Маша зайняла *n* місце», де $n \in \{1,2,3,4\}$,
N_i – «Наташа зайняла *i* місце», де $i \in \{1,2,3,4\}$,
O_k – «Оля зайняла *k* місце», де $k \in \{1,2,3,4\}$,
K_j – «Катя зайняла *j* місце», де $j \in \{1,2,3,4\}$.

Проаналізуємо відповіді.

Істинне	Хибне

Для повноти розв'язування потрібно довести, що інших відповідей бути не може. Для цього продовжимо конкретизацію.

Істинне	Хибне

Відповідь. ____

Завдання 2 (*переконструювання задачі***)**.

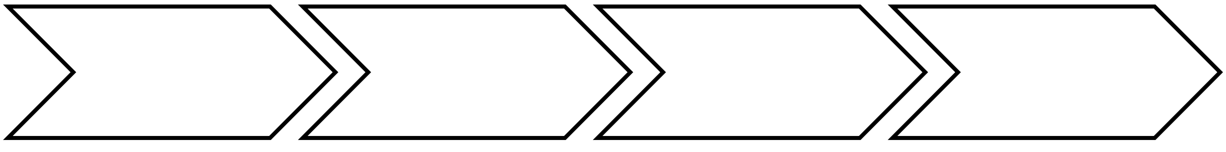
Акробат і цуценя
Важать як два левеня.
Цуценя без акробата
Важить два важких томата.

А томат і кошеня
Важать ціле левеня.
Скільки важить акробат
В розрахунку кошенят?

Розв'язання

Відповідь. ____.

Завдання 3 (*моделювання на півпрямій*). На вечірку зібралися Аня, Віка, Міша і Коля. Коля прийшов раніше Ані, але не першим. Визначити, в якій послідовності приходили друзі, якщо Віка прийшла останньою.



Відповідь. ____.

Завдання 4 (*моделювання за допомогою таблиці*). Четверо старшокласників: – Артур, Борис, Валентин та Руслан – учні однієї з київських шкіл пішли разом у туристичний похід. Усі вони навчаються у різних класах: з 8-го по 11-ий, і в кожного батьки працюють у різних установах: магазині, лікарні, на заводі та у поліції. Відомо, що:

1. Артур та дев'ятикласник живуть в одному будинку, а восьмикласник – на сусідній вулиці.

2. Борис і хлопець, у якого батько працює на заводі, робили замальовки тих місць, де вони були.

3. Валентину та одинадцятикласнику сподобалася ночівля біля гори Говерли.

4. Валентин і десятикласник уміють плавати краще, ніж Борис і хлопець, батько якого працює у магазині.

5. Хлопець, батько якого працює на заводі, старший від Руслана, Артур старший від Валентина, а хлопець, батько якого працює у міліції, старший від Артура.

6. Зранку хлопець, батько якого працює на заводі, готував сніданок, одинадцятикласник ходив до струмка по воду, а хлопець, батько якого працює в магазині, і Артур збирали дрова.

У якому класі вчиться кожний з хлопчиків та де працюють їхні батьки?

Розв'язання

Клас				Ім'я	Місце роботи батька			
8	9	10	11		Магазин	Лікарня	Завод	Поліція
				Артур				
				Борис				
				Валентин				
				Руслан				

Відповідь. ____

____

Завдання 5 (*моделювання за допомогою графів*). Три друга – Іван, Дмитро, Степан – викладають різні предмети (хімію, біологію, фізику) в школах Києва, Сум, Харкова. Відомо, що

1) Іван працює не в Києві, а Діма – не в Харкові;

2) Киянин викладає фізику;

3) Той, хто працює в Харкові, викладає хімію;

4) Діма і Степан викладають не біологію.

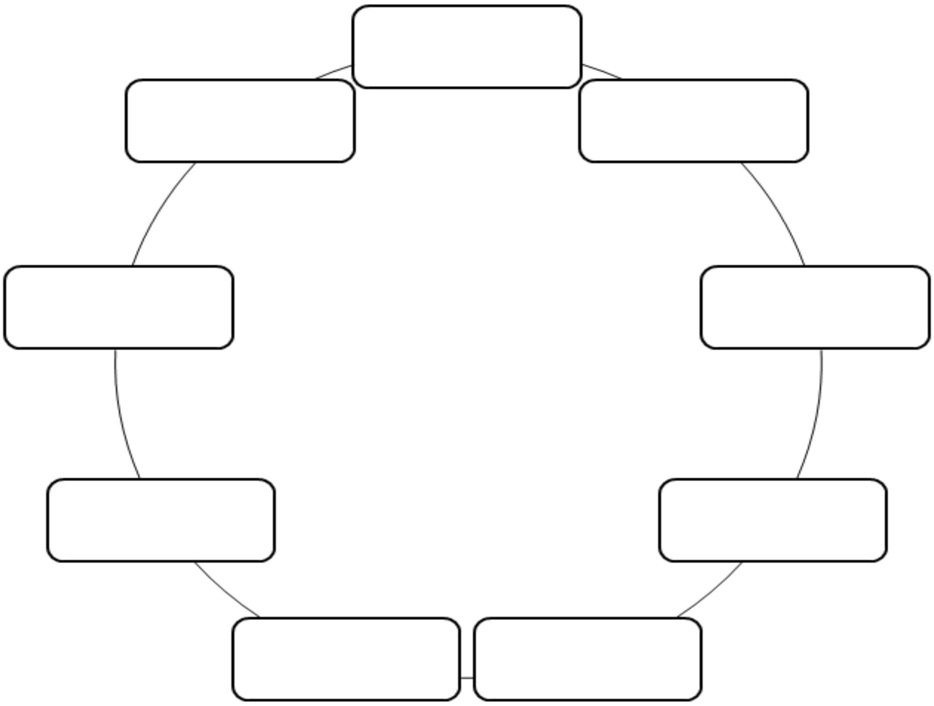
Який предмет і в якому місці викладає кожен?

Розв'язання

Імена – ____.

Міста – ____.

Предмети – ____.

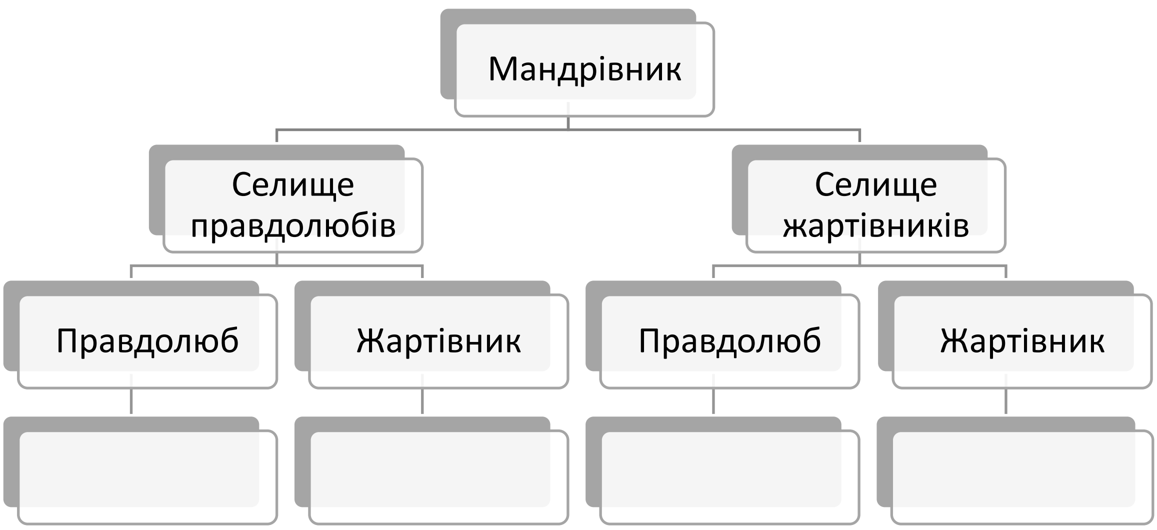


Відповідь. ____

____.

Завдання 6 *(моделювання за допомогою блок-схем).* На деякому острові окремими селищами живуть правдолюби і жартівники. Правдолюби завжди говорять тільки правду, а жартівники постійно жартують, а тому завжди брешуть. Жителі одного племені бувають в селищі іншого, і навпаки. В одне селище потрапив мандрівник, але не знає в яке саме. Довести, що мандрівнику достатньо першому зустрічному задати питання: «Ви місцевий?», щоб за відповіддю визначити, в селище якого племені він знаходиться.

Розв'язання



Завдання 7 *(складання таблиць істинності).* Один з трьох братів Вітя, Толя, Коля розбив вікно. В розмові приймають участь ще два брата – Андрій та Діма.

- Це міг зробити тільки або Вітя, або Толя, – сказав Андрій.
- Я вікно не розбивав, - заперечив Вітя, – і Коля теж.
- Ви обидва кажете неправду, – сказав Толя.
- Ні, Толя, один з них сказав правду, а інший сказав неправду, – заперечив Діма.
- Ти, Діма, неправий, – втрутився Коля.

Їх батько, якому можна довіряти, запевнив, що троє братів сказали правду. Хто розбив вікно?

Розв'язання

Введемо наступні висловлення:

В – «вікно розбив Вітя»;

К – «вікно розбив Коля»;

Т – «вікно розбив Толя».

Кожне із тверджень запишемо як формулу алгебри висловлень:

$\alpha =$______, $\beta =$_______, $\gamma =$________, $\delta =$_________________, $\varepsilon =$____.

$\|B\|$	$\|T\|$	$\|K\|$								
1	0	0								
0	1	0								
0	0	1								

Відповідь. ____.

Завдання 8 *(використання рівносильних перетворень формул алгебри висловлень).* На класній годині вчитель повідомив:

1) будуть куплені нові палатки, рюкзаки і підемо в похід;
2) палатки і рюкзаки не будуть купуватися і в похід не підемо;
3) нові палатки будуть, рюкзаки – ні, і в похід підемо;
4) не правильно, що або не будуть куплені рюкзаки, або підемо в похід, або будуть куплені палатки.

Одне з повідомлень вірне. Що хотів сказати вчитель?

Розв'язання

Введемо наступні висловлення:

А – «будуть куплені палатки»;

В – «будуть куплені рюкзаки»;

С – «підемо у похід».

Кожне із тверджень запишемо як формулу алгебри висловлень:

$\alpha =$_________, $\beta =$____________, $\gamma =$ _________, $\delta =$_______________.

Отримаємо формулу, яку потрібно спростити, використовуючи рівносильні перетворення формул алгебри висловлень.

Відповідь. ____.

Домашнє завдання.

1. Склавши відповідну таблицю істинності, розв’язати логічну задачу.

Розглядається справа Брауна, Джонса та Сміта. Один з них скоїв злочин. В процесі розслідування кожний з них зробив по дві заяви.

Браун: - Я цього не робив.

- Джонс цього не робив.

Джонс: - Браун не робив цього.

- Це зробив Сміт.

Сміт: - Я не робив цього.

- Це зробив Браун.

Було з’ясовано, що один з них два рази сказав неправду, другий два рази сказав правду, третій один раз сказав неправду, а інший раз сказав правду. Хто скоїв злочин?

2. Використовуючи рівносильні перетворення формул алгебри висловлень, розв’язати логічну задачу.

Повернувшись додому, Мегре подзвонив до ділянки: «Говорить Мегре, є новини?»

- *Да, шеф. Отримали повідомлення від інспекторів.*

Торранс: Якщо Франсуа був п'яний, то або Етьєн вбивця, або Франсуа говорить неправду.

Жусьє: Або Етьєн вбивця, або Франсуа не був п'яний і вбивство відбулося після півночі.

Люка: Якщо вбивство відбулося після півночі, то або Етьєн вбивця, або Франсуа говорить неправду.

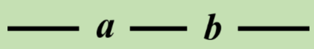
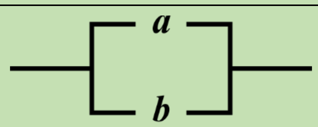
Потім дзвонила….

- Все, дякую, цього достатньо, - комісар поклав слухавку. Він знав, що тверезий Франсуа завжди говорить правду. Тепер він знав все.

Практичне заняття 5
Аналіз і синтез релейно-контактних схем

Під **релейно-контактною схемою** розуміють пристрій із провідників і двопозиційних контактів.

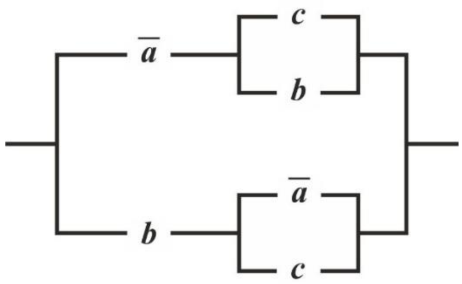
Двопозиційний контакт – це фізичне тіло, яке може перебувати лише в двох станах – «ввімкнуто» і «вимкнуто», які будемо позначати 1 і 0 відповідно. Контакти позначатимемо малими латинськими літерами.

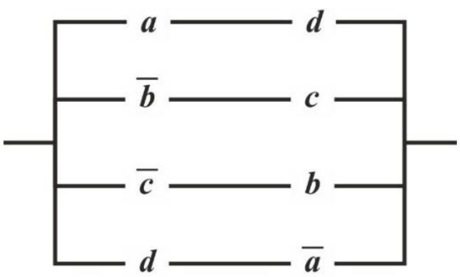
З'єднання контактів	
послідовно	**паралельно**
сигнал через з'єднання контактів проходить тоді і тільки тоді, коли він проходить через кожний контакт	сигнал через з'єднання контактів проходить тоді і тільки тоді, коли він проходить хоча б через один контакт з'єднання
Позначення з'єднання контактів a і b	
$a\,b$	$a+b$
Графічне зображення	
	
Аналог логічної операції	
кон'юнкція двох висловлень	диз'юнкція двох висловлень

Контакт, який проводить сигнал тоді і тільки тоді, коли контакт a його не проводить, позначатимемо $\bar{a}$. Якщо контакту a відповідає деяке висловлення, то контакту $\bar{a}$ відповідатиме заперечення цього висловлення.

Кожній <u>контактній схемі</u> відповідає деяка <u>формула алгебри висловлень</u>, утворена за допомогою функціональної повної системи логічних операцій $\{\wedge, \vee\}$ і, навпаки, кожній такій формулі відповідає деяка контактна схема. Тому алгебра висловлень ізоморфна алгебрі релейно-контактних схем.

Завдання 1. За схемою написати формулу:

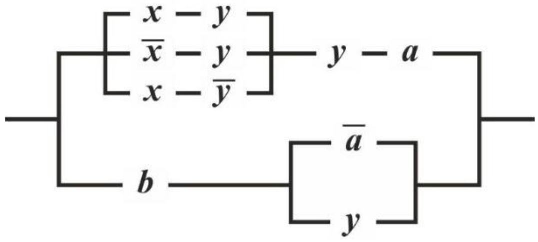




Завдання 2. Побудувати схему, що відповідає формулі контактних схем:

1) $a + b\overline{c}$;
2) $(a + b + \overline{c})(\overline{a} + c)$;
3) $a\overline{b} + \overline{a}bc + b\overline{c}$;
4) $\overline{a}\overline{b} + a\overline{c} + \overline{a}d + a(c + \overline{d})$.

Завдання 3. Максимально спростити релейно-контактну схему (накреслити схему за формулою алгебри контактних схем, спростити формулу і накреслити спрощену схему).



Розв’язання

За схемою запишемо відповідну їй формулу контактних схем

____.

Спростимо формулу шляхом рівносильних перетворень

За спрощеною формулою побудуємо спрощену контактну схему.

Завдання 4. Накреслити схему за формулою алгебри контактних схем, спростити формулу і накреслити спрощену схему:

1) $(a+b)(b+c)(\overline{a}+c)$

2) $ab+bc+\bar{a}c$

Домашнє завдання.

Накреслити схему за формулою алгебри контактних схем, спростити формулу і накреслити спрощену схему:

1) $abc+a\bar{b}c+\bar{a}bc$;

2) $(a+\bar{b})(\bar{a}+b)(a+bc)$;

3) $ab\bar{c}+\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{b}$.

Розділ 2. ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЕНЬ L_1

Практичне заняття 6-7
Розв'язування задач на доведення теорем числення висловлень

Пропозиційна буква – велика латинська буква (можливо з натуральними індексами).

Формула числення висловлень

1. *будь-яка пропозиційна буква – формула*
2. *якщо α і β – формули, то формулами будуть слова ($\overline{\alpha}$), (α∧β), (α∨β), (α⇒β)*
3. *інших формул теорії L_1, крім зазначених у пунктах 1) і 2) немає*

Аксіоми числення L_1.

1.1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

1.2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

2.1. $A \land B \Rightarrow A$

2.2. $A \land B \Rightarrow B$

2.3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \big((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \land C)\big)$

3.1. $A \Rightarrow A \lor B$

3.2. $B \Rightarrow A \lor B$

3.3. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \lor B \Rightarrow C))$

4.1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$

4.2. $\mathrm{A} \Rightarrow \bar{\bar{A}}$

4.3. $\bar{\bar{A}} \Rightarrow A$

Правила виводу	
Правило підстановки	**Правило Modus Ponens (MP)**
Нехай α – формула, що містить пропозиційну літеру *A*. Якщо α вивідна формула числення L_1, то замінюючи в ній <u>всі</u> входження букви *A* <u>довільною</u> формулою β, одержимо вивідну формулу.	Якщо α і $\alpha \Rightarrow \beta$ вивідні формули числення L_1, то вивідною буде і формула β.
S_A^β	$\dfrac{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$

Формула α називається **вивідною в численні *L_1*,** якщо існує така скінченна послідовність формул $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, в якій $\beta_n = \alpha$ і кожна формула є або аксіомою, або одержана з попередньої за допомогою правила підстановки, або одержана з двох попередніх за допомогою правила МР.

Позначається /=α.

Завдання 1. Довести теореми, користуючись лише правилами виводу.

/= $A \wedge A \Rightarrow A$

Розв'язання

1. ______________________________.
2. ______________________________.

/= $A \vee A \Rightarrow A$

Розв'язання

1. ______________________________.
2. ______________________________.
3. ______________________________.
4. ______________________________.
5. ______________________________.

/= $\overline{B \Rightarrow A} \Rightarrow \overline{A}$

Розв'язання

1. ______________________________.
2. ______________________________.
3. ______________________________.
4. ______________________________.

/= $A \vee B \Rightarrow B \vee A$

Розв'язання

1. ______________________________.
2. ______________________________.
3. ______________________________.
4. ______________________________.
5. ______________________________.
6. ______________________________.
7. ______________________________.
8. ______________________________.

Завдання 2. Чи можна вважати формальним доведенням формули $AB \Rightarrow (A \Rightarrow A \vee C)$ наступну послідовність формул. Відповідь обґрунтувати.

Розв'язання

1. $/= A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ – ____;

2. $/= (A \Rightarrow A \vee C) \Rightarrow (AB \Rightarrow (A \Rightarrow A \vee C))$ – ____________________________;

3. $/= (A \Rightarrow A \vee B)$ – ____;

4. $/= (A \Rightarrow A \vee C)$ – ____;

5. $/= AB \Rightarrow (A \Rightarrow A \vee C)$ – _______________________________________.

Нехай $Г = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ – деяка множина формул числення висловлень, які називають гіпотезами.

Формула α називається **вивідною з множини формул *Г*,** якщо існує така скінченна послідовність формул $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, в якій $\beta_n = \alpha$ і кожна формула є або формулою множини Г, або вивідною в численні висловлень, або одержана з двох попередніх за допомогою правила МР.

Позначається $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n /= \alpha$.

Зауваження.
Правило підстановки не можна застосовувати до гіпотез.

Завдання 3. Обґрунтувати вивідність з гіпотез.

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C), B, A /= D \Rightarrow C$$

Розв'язання

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________ } гіпотези

4. ____.

5. ____.

6. ____.

7. ____.

8. ____.

Метатеорема дедукції.

Якщо $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}, \ \gamma_m /= \alpha$, *то* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1} /= \gamma_m \Rightarrow \alpha$.

Наслідок. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}, \ \gamma_m /= \alpha$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$/= \gamma_1 \Rightarrow (\gamma_2 \Rightarrow (\dots (\gamma_{m-1} \Rightarrow (\gamma_m \Rightarrow \alpha)) \dots)).$$

Завдання 4. Застосовуючи метатеорему дедукції та додаткові правила виводу, довести, що формула є теоремою числення висловлень *L_1*.

$$/= (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \vee C))$$

Розв'язання

Доведемо, що /= $(A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \vee C))$, тобто дана формула є вивідною в численні висловлень *L_1*. Застосовуючи метатеорему дедукції, доведемо, що ____.

Будуємо вивід.

1. ________________________________
2. ________________________________
гіпотези
3. ____.
4. ____.
5. ____.
6. ____.
7. ____.

За наслідком з метатеореми дедукції маємо ________________________________.

$$/= ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

Розв'язання

$$\models ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$$

Розв'язання

$$\models (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Розв'язання

$$/\!= (A \wedge \overline{A}) \Rightarrow B$$

Розв'язання

$$/\!= (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \overline{B}) \Rightarrow \overline{A})$$

Розв'язання

Домашнє завдання.

1. Довести теореми $\vdash (B \Rightarrow A \vee C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow A \vee C)$, користуючись лише правилами виводу.

2. Обґрунтувати вивідність з гіпотез: $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$.

3. Застосовуючи метатеорему дедукції та додаткові правила виводу, довести, що формула є теоремою числення висловлень ***L₁***.

$$\vdash (\overline{A} \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow A)$$

$$\vdash (A \Rightarrow B \wedge C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

Практичне заняття 8
Контрольна робота №1

1 (*1б.*) Скласти таблиці істинності та встановити, чи рівносильні задані формули:

$$\alpha = ((X \Rightarrow \overline{Y}) \vee Z) \wedge (\overline{(X \wedge Y)} \Leftrightarrow \overline{Z}),$$

$$\beta = (X \wedge Y \wedge Z) \vee ((X \Rightarrow \overline{Y}) \wedge \overline{Z}).$$

2 (*1б.*) Довести тотожну істинність формули методом від супротивного:

$$(((P \wedge Q) \Rightarrow R) \wedge (\overline{R} \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

3 (*3б.*) Для формули α із задачі 1 знайти ДКНФ та ДДНФ.

4 (*2б.*) Проводиться чемпіонат школи з гімнастики. Вболівальники обговорюють хід боротьби і роблять припущення про майбутніх переможців.

– Першою буде Наташа, а Майя буде другою, – говорить Сергій.

– Ні, Ліда отримає друге місце, а Рита буде четвертою, – заперечив Вова.

– Другою буде Наташа, а Рита – третьою, – авторитетно заявив Толя.

Коли змагання закінчилися, виявилося, що кожний з хлопчиків помилився тільки раз. Які місця в змаганнях зайняли Наташа, Майя, Рита та Ліда?

5 (*2б.*) Для ДДНФ із задачі 3 записати аналог формули контактної схеми, накреслити схему, максимально її спростити і накреслити спрощену схему.

6 (*1б.*) Довести вивідність формули числення висловлень $(F \Rightarrow G) \Rightarrow ((G \Rightarrow H) \Rightarrow (F \Rightarrow H))$.

Розділ 3. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

Практичне заняття 9
Предикати, їх типи. Квантори загальності та існування

Нехай *M* – непорожня підмножина прямого добутку $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ деяких множин $M_1, M_2, \ldots, M_n, n \geq 1$.

n*-місним предикатом, заданим на множині *M, називається речення, що містить *n* змінних $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$, яке перетворюється на висловлення при підстановці замість цих змінних відповідних конкретних значень $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n$, для яких $(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n) \in \mathrm{M}$.

$\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ – предметні змінні;

$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n$ – предметні константи;

$\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$ – *n*-місний предикат.

Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
заданий на множині $M \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$

- **тотожно істинний**
  якщо для будь-якого набору предметних констант $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$,
  значення істинності $|P(a_1, a_2, \ldots, a_n)|=1$
- **тотожно хибний**
  якщо для будь-якого набору предметних констант $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$,
  значення істинності $|P(a_1, a_2, \ldots, a_n)|=0$
- **спростовний**
  якщо існує такий набір предметних констант $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$,
  для якого значення істинності $|P(a_1, a_2, \ldots, a_n)|=0$
- **виконуваний**
  якщо існує такий набір предметних констант $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$,
  для якого значення істинності $|P(a_1, a_2, \ldots, a_n)|=1$

Завдання 1. Вказати приклади тотожно істинних, тотожно хибних, виконуваних і спростовних предикатів, заданих на множині *R*.

Розв'язання

На множині *R* дійсних чисел.

$cos^2x + sin^2x = 1$ – ____;

$cos^2x + sin^2x > 1$ – ____;

$cos^2x + sin^2x \geq 1$ – ____;

$cos^2x + sin^2x < 1$ – ____.

Завдання 2. Зобразити таблицею значення одномісного предикату *P(x):* «*x* є простим числом» на множині натуральних чисел {1,2,…, 13}.

Розв'язання

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
|P(x)|													

Завдання 3. Зобразити таблицею з двома входами значення двомісного предикату *P(x,y):* «*2x+3y=17*» на множині натуральних чисел {1,2,…, 8}.

Розв'язання

|P(x,y)|	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Завдання 4. Записати символікою логіки предикатів твердження: «Якщо *x* має властивість *P* або не має властивості *Q*, то з того, що *x* не має властивості *R*, випливає, що *x* не може мати одночасно властивості *P* та *Q*».

Розв'язання

____

____

____

____

Завдання 5. Нехай на множині людей задано предикати *Б(q,z) – «q батько z», M(q,z) – «q мати z», C(a,x) – «a сестра x».* Записати через ці предикати, що «*c брат d».*

Розв'язання

____

____

____

____

Кванторні операції	
Зв'язування квантором загальності	**Зв'язування квантором існування**
$\forall x P(x)$	$\exists x P(x)$
«для будь-якого *x* має місце $P(x)$»	«існує таке *x*, для якого має місце $P(x)$»

$$|\forall x P(x)| = \begin{cases} 1, \text{якщо } P(x) - \text{ тотожно істинний предикат} \\ 0, \text{якщо } P(x) - \text{ спростовний предикат} \end{cases}$$

$$|\exists x P(x)| = \begin{cases} 1, \text{якщо } P(x) - \text{ виконуваний предикат} \\ 0, \text{якщо } P(x) - \text{ тотожно хибний предикат} \end{cases}$$

Завдання 6. Прочитайте наступні висловлення і визначте, які з них істинні, а які хибні, якщо всі змінні з множини *R.*

1) $\forall x \exists y (x + y = 7)$ – ____;

2) $\exists y \forall x (x + y = 7)$ – ____;

3) $\exists x \exists y (x + y = 7)$ – ____;

4) $\forall x \forall y (x + y = 7)$ – ____;

5) $(\forall x \forall y (x + y = 3)) \Rightarrow (3 = 4)$ – ____;

6) $\forall x ((x^2 > x) \Leftrightarrow (x > 1) \vee (x < 0))$ – ____________________________________.

Завдання 7. Записати мовою логіки предикатів наступні твердження.

1) Всі цілі числа раціональні, проте деякі раціональні числа не є цілими.

Розв'язання

Q(x) – «*x* – число раціональне», *Z(x)* – «*x* – число ціле».

____

____

____

2) Кожне число кратне 10, кратне 5 і кратне 2.

Розв'язання

A(x) – «_______________», *B(x)* – «_______________», *C(x)* – «______________».

____

____

____

3) Діагоналі будь-якого прямокутника рівні між собою.

Розв'язання

4) Всі трансцендентні числа ірраціональні, але не всі ірраціональні транцендентні.

Розв'язання

5) Кожний квадрат є ромбом, але не правильно, що всякий ромб є квадратом.

Розв'язання

Множиною (областю) істинності M_p предиката $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n)$, заданого на множині $M \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, називається сукупність всіх наборів $(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n) \in \mathrm{M}$, для кожного з яких $|\mathrm{P}(a_1, a_2, \dots, a_n)| = 1$.

Завдання 8. Знайти множини істинності предикатів:

1) «*x* кратне 3», *M*={1,2,…, 9} – M_p={ ________________ };

2) «*x* кратне 3», *M*={3,6,9,12} – M_p=________________;

3) «*x* кратне 3», *M*={2,4,8} – M_p=________________;

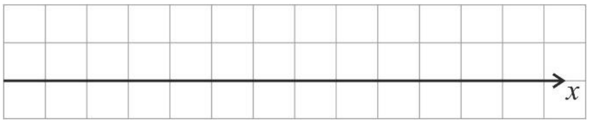
4) «$x^2+4>0$», *M=R* – M_p=________________;

5) «*sin x>1*», *M=R* – M_p=________________;

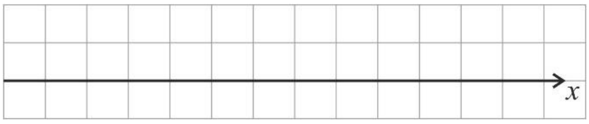
6) «$x_1^2+x_2^2=0$», $M_1=M_2=R$ – M_p={ ________________ }.

Завдання 9. Зобразити на координатній прямій множину істинності предикатів, заданих на множині *R.*

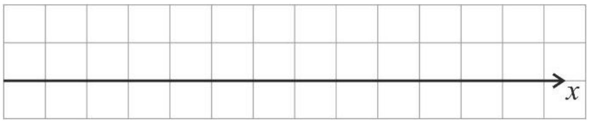
1) «*x<3*»;



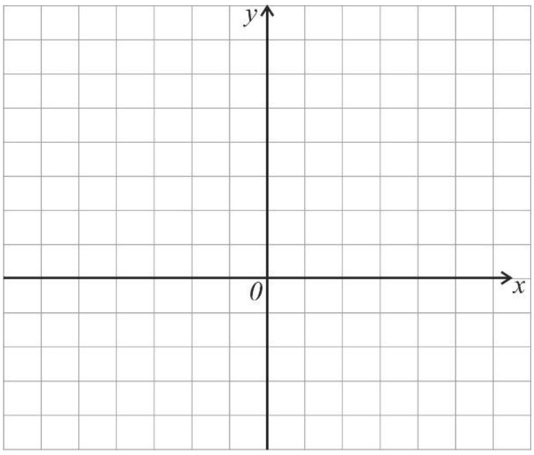
2) «$|x| = 4$»;



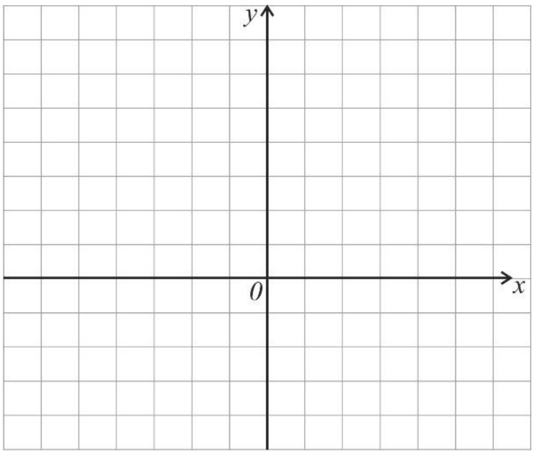
3) «$|x| < 2$»;



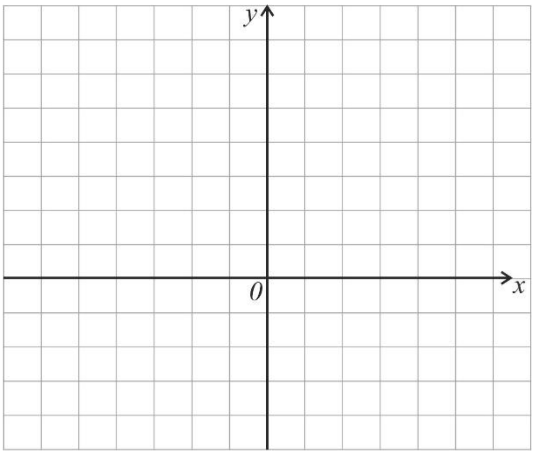
4) «*x=y*»;



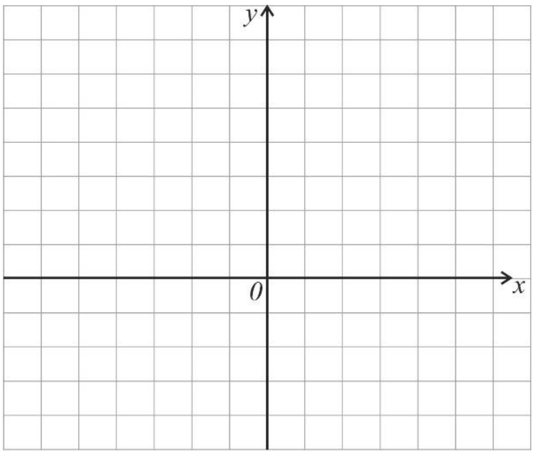
5) «$x^2+y^2=9$»;



6) «$x^2=y^2$»;



7) «$x^2 \le y$».



Домашнє завдання.

1. Нехай на множині людей задано предикати *Б(q,z) – «q батько z», M(q,z) – «q мати z», C(a,x) – «a сестра x».* Записати через ці предикати, що «*a тітка b*».

2. Прочитайте наступні висловлення і визначте, які з них істинні, а які хибні, якщо всі змінні з множини *R.*

$$\forall a((\exists x(ax = 6)) \Leftrightarrow a \neq 0);$$

$$\forall x((x > 1) \vee (x < 2) \Leftrightarrow (x = x)).$$

3. Записати мовою логіки предикатів наступні твердження «Всі числа кратні 48, кратні 8 і кратні 6, але не всяке число кратне 8 або кратне 6, є кратними 48».

4. Знайти множини істинності предикатів:

«$x^2+x-6=0$», $M=R$;

«$x_1<x_2$», $M_1=\{1,2,3,4,5\}$, $M_2=\{3,5,7\}$.

5. Зобразити на координатній прямій множину істинності предикатів, заданих на множині R.

«$|x|>2$»;

«$|x|=|y|$»;

«$x^2+y^2-4x+6y+14=0$».

Практичне заняття 10
Інтерпретація формул логіки предикатів.
Рівносильні перетворення формул логіки предикатів

За допомогою логічних операцій можна будувати як завгодно складні предикати. Для більш глибокого вивчення предикатів, аналізу можливостей практичних завдань, зокрема, при дослідженні процесів мислення, необхідно абстрагуватись від конкретного змісту предикатів, розвинути загальну теорію, а потім знову повернутись до практики. Це досягається шляхом введення і детального вивчення формул логіки предикатів.

Вихідним матеріалом для побудови формул логіки предикатів будуть символи таких категорій:

1) *предметні змінні* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$;

2) *предметні константи* $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$;

3) *функціональні символи* f_i^n,де $i=1,2,\dots$ вказує порядковий номер символу, а $n=1,2,\dots$ вказує на кількість аргументів;

4) *предикатні символи* P_i^n, де $i=1,2,\dots$ вказує порядковий номер символу, а $n=0,1,\dots$ вказує на кількість аргументів;

5) *знаки логічних операцій* $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$;

6) *знаки пунктуації* – ліва і права дужка та кома.

Серед слів, записаних за допомогою вказаних вище символів, виділяють терми і формули.

Терми логіки предикатів

1. *будь-яка предметна змінна або предметна константа є термом*
2. *якщо f_i^n – функціональний символ, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – терми, то $f_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – терм*
3. *всі інші слова, крім тих, що утворюються за правилами пунктів 1) і 2), не є термами логіки предикатів*

Предикатні букви, застосовані до термів, породжують елементарні формули логіки предикатів. Точніше, якщо P_i^n – предикатний символ, а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – терми, то $P_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – *елементарна формула.* P_i^0 – елементарна формула.

Формули логіки предикатів

1. *будь-яка елементарна формула є формулою логіки предикатів*
2. *якщо α і β – формули логіки предикатів, то слова $(\bar{\alpha})$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$, $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ також є формулами логіки предикатів*
3. *якщо α – формула, а x_i - вільна змінна формули α, то слова $(\forall x_i(\alpha))$, $(\exists x_i(\alpha))$ також є формулами логіки предикатів*
4. *всі інші слова, крім тих, які утворюються за правилами пунктів 1) – 3), не є формулами логіки предикатів*

При цьому говорять, що формули $(\forall\, x_i(\alpha))$, $(\exists x_i(\alpha))$ одержані з формули α *навішуванням* кванторів загальності та існування за змінною x_i.

Формула, яка не має вільних входжень предметних змінних, називається ***ЗАМКНУТОЮ***

Формула, що має вільні входження предметних змінних, називається ***ВІДКРИТОЮ***

Вільні і зв'язані входження предметних змінних у формулі відіграють суттєво різні ролі. По-перше, коли виникне потреба надати конкретного змісту формулі, то замість зв'язаної змінної не можна підставляти жодних конкретних значень, інакше одержимо вираз без будь-якого змісту. По-друге, зв'язана змінна не має самостійного значення, її можна замінити на іншу змінну і зміст формули від цього не зміниться. Така дія називається **перейменуванням** зв'язаного входження змінної.

Щоб визначити, що виражає та чи інша формула логіки предикатів, її треба «наповнити» конкретним змістом. Інакше цю думку висловлюють так: треба побудувати інтерпретацію формули.

Інтерпретацією формули логіки предикатів $\mathrm{a}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ називається система, яка складається з непорожньої множини $\mathrm{M} \subseteq (\mathrm{M}_1 \times \ldots \times \mathrm{M}_n)$, яку називають областю інтерпретації, і деякої відповідності, яка кожного предикатному символу P_i^n зіставляє певний n-місний предикат, заданий на множині M, кожному функціональному символу f_i^n – деяку n-арну алгебраїчну операцію, кожній константі α_i – деякий конкретний елемент із M_i.

Завдання 1. Задані формули логіки предикатів $\alpha = \exists x(P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x P(x) \Rightarrow P(y)$. Задана інтепретація: множина – $\{2{,}3\}$; предикат – $P(x)$: "$x \vdots 2$"; константа – $y = 3$.

Порівняти значення істинності здобутих при цьому висловлень.

Розв'язання

$$\alpha: \exists x(x \vdots 2 \Rightarrow 3 \vdots 2), \qquad \beta: \exists x(x \vdots 2) \Rightarrow 3 \vdots 2.$$

Квантор існування рівносильний диз'юнкції.

$$\alpha: (2 \vdots 2 \Rightarrow 3 \vdots 2) \vee (3 \vdots 2 \Rightarrow 3 \vdots 2)$$

$$\beta: (2 \vdots 2 \vee 3 \vdots 2) \Rightarrow 3 \vdots 2$$

Формула β називається **логічним наслідком множини формул** $\Gamma = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_m\}$, де $\mathrm{m} \geq 1$, якщо вона виконується на будь-якому наборі елементів з області довільної інтерпретації, на якому виконуються всі формули множини Γ.

Запис $\Gamma / = \beta$ означає, що формула β логічно слідує з множини формул Γ.

Якщо $\Gamma = \{\alpha\}$, то говорять, що формула β є логічним наслідком формула α.

Для формул логіки предикатів мають місце критерій логічного слідування, який є повним аналогом критерію логічного слідування для формул алгебри висловлень, та правила виводу, аналогічні правилам виводу в алгебрі висловлень.

Дві формули логіки предикатів α і β називаються **рівносильними**, якщо β є логічним наслідком α і α є логічним наслідком β.

Запис $\alpha \equiv \beta$ означає, що формули α і β рівносильні.

Рівносильності формул логіки предикатів

1) $\forall x_1 P(x_1) \equiv \forall x_2 P(x_2)$;
2) $\exists x_1 P(x_1) \equiv \exists x_2 P(x_2)$;

3) $\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}$;
4) $\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}$;

5) $\forall x P_1(x) \wedge \forall x P_2(x) \equiv \forall x (P_1(x) \wedge P_2(x))$;
6) $\exists x P_1(x) \vee \exists x P_2(x) \equiv \exists x (P_1(x) \vee P_2(x))$;

7) $\forall x P_1(x) \wedge P_2 \equiv \forall x (P_1(x) \wedge P_2)$;
8) $\forall x P_1(x) \vee P_2 \equiv \forall x (P_1(x) \vee P_2)$
9) $\exists x P_1(x) \wedge P_2 \equiv \exists x (P_1(x) \wedge P_2)$;
10) $\exists x P_1(x) \vee P_2 \equiv \exists x (P_1(x) \vee P_2)$;
11) $\forall x P_1(x) \Rightarrow P_2 \equiv \exists x (P_1(x) \Rightarrow P_2)$;
12) $\exists x P_1(x) \Rightarrow P_2 \equiv \forall x (P_1(x) \Rightarrow P_2)$;
13) $P_2 \Rightarrow \forall x P_1(x) \equiv \forall x (P_2 \Rightarrow P_1(x))$;
14) $P_2 \Rightarrow \exists x P_1(x) \equiv \exists x (P_2 \Rightarrow P_1(x))$.

У логіці предикатів, як і в алгебрі висловлень, можна від однієї формули переходити до іншої, яка їй рівносильна. Такий перехід називається рівносильним перетворенням формули. Шляхом рівносильних перетворень формулу можна спростити або одержати для неї рівносильну формулу того чи іншого спеціального виду. Один з таких видів носить назву зведеної формули, а другий – випередженої нормальної форми.

Зведеною формою для даної формули логіки предикатів називається така рівносильна їй формула, яка має логічні операції лише з множини $\{\neg, \wedge, \vee, \exists, \forall\}$, причому заперечення стосуються лише стосуються елементарних підформул даної формули.

Випередженою нормальною формою (ВНФ) для даної формули логіки предикатів називається така її зведена форма, яка або не має кванторних операцій, або всі кванторні операції виконуються останніми.

Для кожної формули логіки предикатів існує рівносильна їй зведена та випереджена нормальні форми.

Зауваження.
Перейменовувати можна лише зв'язані змінні.

Завдання 2. Звести формулу логіки предикатів до ВНФ

$$\forall x \exists y \forall z \exists u P(x, y, z, u) \Rightarrow \forall x \exists y \forall z \exists u Q(x, y, z, u)$$

Розв’язання

Зведемо формулу логіки предикатів спочатку до зведеної формули.

Отримали зведену форму. Тепер приведемо дану формулу до ВНФ.

Дана формула є ВНФ.

Домашнє завдання.

Звести формули логіки предикатів до ВНФ:

1) $\forall x P(x, y) \Rightarrow \exists y P(y)$;

2) $\exists x P(x) \vee \forall y P(y) \wedge (P(x) \Rightarrow \exists y P(y))$.

Практичне заняття 11
Дослідження формул логіки предикатів

Формула логіки предикатів

в одній інтерпретації

- *істинна в даній інтерпретації, якщо вона виконується на будь-якому наборі елементів з області інтерпретації*
- *хибна в даній інтерпретації, якщо вона не виконується на жодному наборі елементів з області інтерпретації*
- *нейтральна в даній інтерпретації, якщо існують такі два набори елементів, з області інтерпретації, на одному з яких вона виконується, а на іншому – ні*
- *виконувана в даній інтерпретації, якщо вона виконується хоча б на одному наборі елементів з області інтерпретації*
- *спростовна в даній інтерпретації, якщо вона не виконується хоча б на одному наборі елементів з області інтерпретації*

Формула логіки предикатів

в різних інтерпретаціях

- *загальнозначуща (або тотожно істинна, або тавтологія), якщо вона істинна в будь-якій інтерпретації*
- *суперечність (або тотожно хибна), якщо вона хибна в будь-якій інтерпретації*
- *нейтральна, якщо існують дві інтерпретації цієї формули, в одній з яких вона виконувана, а в іншій – спростована*
- *виконувана, якщо вона виконувана хоча б в одній інтерпретації*
- *спростовна, якщо вона спростовна хоча б в одній інтерпретації*

$$|\forall x P(x)| = \begin{cases} 1, \text{якщо } P(x) - \text{ ТІ предикат;} \\ 0, \text{якщо } P(x) - \text{ спростовний предикат.} \end{cases}$$

$$|\exists x P(x)| = \begin{cases} 1, \text{якщо } P(x) - \text{ виконуваний предикат;} \\ 0, \text{якщо } P(x) - \text{ ТХ предикат.} \end{cases}$$

Завдання. Встановити тип формули логіки предикатів.

1) $(\forall xP(x)\vee \forall xQ(x))\Rightarrow \forall x(P(x)\vee Q(x))$.

Розв'язання

Візьмемо довільну інтерпретацію. Нехай в даній інтерпретації *M* – непорожня множина; $P^*(x)$, $Q^*(x)$ – конкретні предикати, якими замінимо предикатні символи $P(x)$ та $Q(x)$ відповідно. Оскільки в формулі всі змінні зв'язані, то в будь-якій інтерпретації вона перетворюється на висловлення $(\forall xP^*(x)\vee \forall xQ^*(x))\Rightarrow \forall x(P^*(x)\vee Q^*(x))$.

Припустимо, що воно хибне, тобто ____.
Це можливо лише за умови, коли____.
____
____
____
____

Таким чином, припущення невірне і формула істинна в будь-якій інтерпретації, тобто загальнозначуща.

2) $\forall xP(x) \Rightarrow \mathrm{P}(y)$.

Розв'язання

Візьмемо довільну інтерпретацію. Нехай в даній інтерпретації *M* – непорожня множина; $P^*(x)$ – конкретний предикат, яким замінимо предикатний символ $P(x)$; $\mathrm{P}^*(y)$ – висловлення. Тоді в даній інтерпретації вона перетворюється на висловлення $\forall xP^*(x) \Rightarrow \mathrm{P}^*(y)$.

Припустимо, що воно хибне тобто ____.
Це можливо лише за умови, коли____.
____
____
____
____

Таким чином, припущення невірне і формула істинна в будь-якій інтерпретації, тобто загальнозначуща.

3) $\exists x\forall y\, P(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists yP(x,y)$.

Розв'язання

Візьмемо довільну інтерпретацію. Нехай в даній інтерпретації *M* – непорожня множина; $\mathrm{P}^*(\mathrm{x},y)$ – конкретний предикат, яким замінимо предикатний символ $\mathrm{P}(\mathrm{x},y)$. Тоді в даній інтерпретації вона перетворюється на висловлення $\exists x\forall y\, P^*(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists yP^*(x,y)$.

Припустимо, що воно хибне тобто ____.

Це можливо лише за умови, коли____.

Протиріччя

Таким чином, припущення невірне і формула істинна в будь-якій інтерпретації, тобто загальнозначуща.

Домашнє завдання.

Довести, що формула є загальнозначущою:

1) $\exists x(P(x) \land Q(x)) \Longrightarrow \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$;

2) $P(y) \Longrightarrow \exists x P(x)$;

3) $\forall x \exists y\, Q(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y Q(x, y)$.

Розділ 4. ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ

Практичне заняття 12
Частково рекурсивні функції

Під ***алгоритмом у математиці*** розуміють чітку систему інструкцій у відповідності з якою за будь-яким вхідним об'єктом з даного класу вхідних об'єктів можна ефективно одержувати вихідні об'єкт.

Типові характеристики алгоритму

- початкові дані
- певний результат
- дискретність
- визначеність
- масовість

Поняття алгоритму в математиці інтуїтивне. Існують такі математичні проблеми, які не можуть бути розв'язані за допомогою алгоритмів із деякого точно визначеного класу алгоритмів. Доведення того, що не існує алгоритму для розв'язування задач певного класу, вимагає уточнення поняття алгоритму.

Підходи до визначення алгоритму

- Алгоритм як обчислювальна функція
- Нормальні алгоритми Маркова
- Машини Тьюрінга

Функція називається ***обчислювальною***, якщо існує алгоритм, за допомогою якого можна обчислити значення функції для будь-якого набору значень аргументів із області визначення функції.

Базисні функції (кожна базисна функція обчислювальна).

1) Функція слідування $S(x) = x + 1$.

2) Нуль-функція $O(x) = 0$.

3) Функції-проєктори $I_m^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_m$.

Оператор регулярної суперпозиції.

$$h(m_1, m_2, \dots, m_k) =$$
$$= f(g_0\,(m_1, m_2, \dots, m_k), g_1(m_1, m_2, \dots, m_k), \dots, g_n(m_1, m_2, \dots, m_k))$$

Оператор примітивної рекурсії.

$$h(m_1, m_2, \ldots, m_n, 0) = f(m_1, m_2, \ldots, m_n)$$

$$g\big(m_1, m_2, \ldots, m_n, k, h(m_1, m_2, \ldots, m_n, k)\big) = h(m_1, m_2, \ldots, m_n, k+1)$$

Оператор мінімізації.

$$h(m_1, m_2, \ldots, m_n) = 0, \text{якщо } f(m_1, m_2, \ldots, m_n, 0) = 0.$$

$$h(m_1, m_2, \ldots, m_n) = k,$$

$$(\text{ якщо } f(m_1, m_2, \ldots, m_n, 0) \neq 0, \ldots, f(m_1, m_2, \ldots, m_n, k-1) \neq 0,)$$

$$f(m_1, m_2, \ldots, m_n, k) = 0$$

Числова функція називається ***частково-рекурсивною***, якщо існує така скінченна послідовність функцій, в яких кожна функція або базисна, або одержана з попередніх функцій цієї послідовності за допомогою одного з операторів регулярної суперпозиції, примітивної рекурсії або мінімізації.

Частково-рекурсивна функція обчислювальна. А навпаки?

Гіпотеза Черча. *Будь-яка обчислювальна функція є частково рекурсивною.*

Завдання 1. Знайти функції, які одержуються із базисних функцій за допомогою одноразового застосування оператора регулярної суперпозиції.

Розв'язання

$f(x) = S(x) = x + 1$	$f(x) = O(x) = 0$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = I_m^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$
$g(x) = S(x) = x + 1$ $f(g(x)) =$ ____________ ______________________ ______________________ ______________________	$g(x) = S(x) = x + 1$ $f(g(x)) =$ ___________ ______________________ ______________________ ______________________	$g_i(x) = S(x) = x + 1$ $f(g_1(x), \ldots, g_n(x)) =$ ______________________ ______________________ ______________________
$g(x) = O(x) = 0$ $f(g(x)) =$ ___________ ______________________ ______________________ ______________________	$g(x) = O(x) = 0$ $f(g(x)) =$ ___________ ______________________ ______________________ ______________________	$g(x) = O(x) = 0$ $f(g_1(x), \ldots, g_n(x)) =$ ______________________ ______________________ ______________________

$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = I_m^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_m$ $f(g(x_1, x_2, \dots, x_n)) =$ ____________________ ____________________ ____________________	$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = I_m^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_m$ $f(g(x_1, x_2, \dots, x_n)) =$ ____________________ ____________________ ____________________	$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = I_m^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_m$ $f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) =$ ____________________ ____________________ ____________________

Завдання 2. Знайти функцію за допомогою оператора примітивної рекурсії, виходячи з функцій:

1) $S(x) = x + 1,\ I_1^3(x_1, x_2, x_3) = x_1;$

Розв'язання

$f(x) = S(x) = x + 1,\ g(x_1, x_2, x_3) = I_1^3(x_1, x_2, x_3) = x_1.$

$h(x, 0) = f(x) =$____

$h(x, 1) = g(x, 0, x + 1) =$____________________________________

$h(x, 2) = g(x, 1, x) =$______________________________________

h(x, y) = $\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

2) $f(x) = x,\ q(x, y, z) = z^x;$

Розв'язання

$f(x) = x,\ g(x, y, z) = z^x.$

$h(x, 0) = f(x) =$____

$h(x, 1) = g(x, 0, h(x, 0)) =$__________________________________

$h(x, 2) = g\big(x, 1, h(x, 1)\big) =$__________________________________

$h(x, 3) = g\big(x, 2, h(x, 2)\big) =$__________________________________

$h(x, y) =$____

Завдання 3. Примітивно рекурсивною називається функція, яка одержана з базисних за допомогою операторів регулярної суперпозиції і примітивної рекурсії, або одного з них, або є базисною. Довести, що задані функції примітивно рекурсивні.

1) $h(x) = n,\ n \in N$

____

2) $h(x) = x$

____

3) $h(x) = x + n,\ n \in N$

___

Домашнє завдання.

1. Знайти функцію за допомогою оператора примітивної рекурсії, виходячи з функцій: $f(x) = x$, $q(x, y, z) = x^z$.

2. Довести, що функція $h(x, y) = x + y$ примітивно рекурсивна.

Практичне заняття 13-14
Нормальні алгоритми Маркова

Алфавіт – непорожня скінченна множина Σ деяких символів.

Слово – скінченна або порожня послідовність букв алфавіту. Σ* – множина всіх слів.

Схема S в алфавіті Σ – впорядкований набір трійок $\left((\alpha_1, \beta_1, \delta_1), (\alpha_2, \beta_2, \delta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n, \delta_n)\right)$, у яких $\alpha_i \in \Sigma^*$, $\beta_i \in \Sigma^*, \delta_i \in \{0,1\}, i = 1,2, \dots, n$.

Якщо кожне із слів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не підсловом слова α, то говорять, що слово α не піддається алгоритму *A*.

Якщо *k* – найменший номер, для якого α_k є підсловом слова α і β – результат заміни першого входження слова α_k в слово α на слово β_k, то будемо говорити:

$\delta_k=0$ ⇒ *A* просто переводить α в β — *позначається A:* **α→β**

$\delta_k=1$ ⇒ *A* заключно переводить α в β — *позначається A:* **α→β**

Функція називається ***нормально обчислювальною***, якщо існує такий нормальний алгоритм, який обчислює значення цієї функції для будь-якого набору значень аргументів із області визначення функції і не застосовний до наборів значень аргументів, що не входять в область визначення функції.

Гіпотеза (принцип нормалізації Маркова).

Клас нормально обчислювальних функцій збігається з класом обчислювальних функцій.

Завдання 1. Нехай $\Sigma = \{X, Y, \wedge, \vee, \neg, (,), a\}$. Розглянемо нормальний алгоритм Маркова (Σ, S) із схемою:

$aX \to Xa$ $aY \to Ya$ $a\wedge \to \wedge a$ $a\vee \to \vee a$ $a\neg \to \neg a$ $a) \to)a$ $a(\to (a$ $a \to \cdot \vee X)$ $\Lambda \to (a.$	Цей алгоритм будь-яку формулу α в алфавіті $\Sigma \setminus \{a\}$ перетворює у формулу $\alpha \vee X$. Переконатися в цьому для слова $\alpha = X \wedge \overline{Y}$. ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

Завдання 2. Нехай $A = \{a, b\}$ – алфавіт із схемою $a \to \cdot\Lambda$, $b \to b$. Застосувати до слів *aabab, ab, aa, bbab, baba*.

aabab→____

ab→____

aa→____

bbab→____

baba→____

Машина Тьюрінга

Зовнішній алфавіт $A = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Внутрішній алфавіт (алфавіт станів) $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$.

$A \cap Q = \emptyset$, символи →, R, L до даних алфавітів не належать.

Команди

- $q_i\, a_j \to q_k\, a_l$ — перебуваючи в стані q_i та спостерігаючи символ a_j, перейти в стан q_k написати символ a_l
- $q_i\, a_j \to q_k\, L$ — перебуваючи в стані q_i та спостерігаючи символ a_j, перейти в стан q_k і переміститися вліво на один символ
- $q_i\, a_j \to q_k\, R$ — перебуваючи в стані q_i та спостерігаючи символ a_j, перейти в стан q_k і переміститися вправо на один символ

Машиною Тьюрінга називається впорядкована шістка (A,Q, a_0, q_0, q_1, P), яка задовольняє умови:

1) множини A і Q скінченні, не перетинаються і не містять символів →, R, L;

2) $a_0 \in A, q_0 \in Q, q_1 \in Q$, a_0 називають символом порожньої комірки, q_1 – початковий стан машини, q_0 – стан, в якому машина зупиняється;

3) P – програма із зовнішнім алфавітом A та внутрішнім алфавітом Q, причому:

– програма не містить двох різних команд з однаковими лівими частинами і різними правими;

– жодна з команд не починається символом q_0.

Функція називається ***обчислювальною за Тьюрінгом***, якщо існує машина Тьюрінга, яка обчислює значення цієї функції для будь-якого набору значень аргументів із області визначення функції і не застосовний до наборів значень аргументів, що не входять в область визначення функції.

Гіпотеза Тьюрінга. *Клас функцій, обчислювальних за Тьюрінгом, збігається з класом обчислювальних функцій.*

Фільм "Алан Тьюрінг. Той, хто випереджав час"

Фільм "Гра в імітацію"

Завдання 3. Знайти результат застосування машини Тьюрінга з зовнішнім алфавітом $A = \{a_0, 1\}$, внутрішнім алфавітом $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$ і програмою

$q_1a_0 \to q_4R$ $q_11 \to q_2L$ $q_2a_0 \to q_6R$ $q_21 \to q_3L$ $q_3a_0 \to q_6R$ $q_31 \to q_1L$ $q_4a_0 \to q_01$ $q_41 \to q_5a_0$ $q_5a_0 \to q_4R$ $q_51 \to q_5a_0$ $q_6a_0 \to q_0a_0$ $q_61 \to q_7a_0$ $q_7a_0 \to q_6R$ $q_71 \to q_7a_0$	до наступних слів: 11111→____ ____ ____ ____ ____ ____ 11 a_0 111→____________________________________ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

Завдання 4. Чи зупиниться машина Тьюрінга із зовнішнім алфавітом $A = \{a_0, 1\}$, внутрішнім алфавітом $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ і програмою. Якщо машина зупиниться, то якою буде заключна конфігурація?

$q_1a_0 \to q_2R$ $q_11 \to q_2R$ $q_2a_0 \to q_2R$ $q_21 \to q_3R$ $q_3a_0 \to q_0a_0$ $q_31 \to q_3R$	при застосуванні до слів: 1111 a_0 1→____________________________________ ____ ____ ____ 11111→____ ____ ____ ____ 1 a_0 1 a_0 1→__________________________________ ____ ____ ____

Завдання 5. Побудувати алгоритми Маркова та машини Тьюрінга, які обчислюють задані функції:

1) $f(x)=0$;

x– 1^{x+1} 0 – 1 $\underbrace{11\ldots1}_{x+1}$ Алгоритм Маркова __________ __________ __________	$q_1 01^{x+1}0$ $q_0 010$	____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____
	$q_1 01^{x+1}0 \rightarrow$ ____ ____	
	Перевіримо випадок x=0. $q_1 010 \rightarrow$ ____ ____	

2) $f(x)=1$;

x– 1^{x+1} 1 – 11 Алгоритм Маркова __________ __________ __________	$q_1 01^{x+1}0$ $q_0 0110$	____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____
	$q_1 01^{x+1}0 \rightarrow$ ____ ____ ____	
	Перевіримо випадок x=0. $q_1 010 \rightarrow$ ____ ____	

3) $f(x)=x+1$;

x– 1^{x+1}	$q_1 01^{x+1}0$	____

x+1 – 1^{x+2} Алгоритм Маркова __________ __________ __________	$q_0 0 1^{x+2} 0$	____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________
	$q_1 0 1^{x+1} 0 \rightarrow \rightarrow$____________________ ____________________ ____________________	
	Перевіримо випадок x=0. $q_1 010 \rightarrow$____________________ ____________________	

4) $f(x,y)=x$;

x– 1^{x+1} y – 1^{y+1} x,y – $1^{x+1}01^{y+1}$ Алгоритм Маркова __________ __________ __________	$q_1 0 1^{x+1} 0 1^{y+1} 0$ $q_0 0 1^{x+1} 0$	____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________
	$q_1 0 1^{x+1} 0 1^{y+1} 0 \rightarrow$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	

	____ ____
	Перевіримо випадок x=0, y=0. $q_1$01010 → ____ ____

Домашнє завдання. Побудувати алгоритми Маркова та машини Тьюрінга, які обчислюють задані функції:

1) $f(x, y) = x + y$;
2) $f(x, y) = y + 2$.

Практичне заняття 15
Контрольна робота №2

1 (*1б.*) Записати мовою логіки предикатів твердження: «Якщо добуток двох натуральних чисел число парне, то хоч один із множників є парним числом».

2 (*2б.*) Рівносильними перетвореннями звести формулу алгебри предикатів до ВНФ

$$\exists y(P(x) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow \forall y(P(y) \vee \forall z Q(z)).$$

3 (*3б.*) З’ясувати, чи є формула логіки предикатів загальнозначущою

$$\forall x \exists y\, P(x, y) \ \Rightarrow \exists x\, \forall y P(x, y).$$

4 (*4б.*) Побудувати нормальний алгоритм Маркова і машину Тюрінга, які обчислюють функцію $f(x, y) = x + y$.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Склавши таблиці істинності, з’ясуйте, чи рівносильні наступні формули алгебри висловлень:

1. $F(X,Y,Z) = ((X \Rightarrow \bar{Y}) \vee Z) \wedge (\overline{(X \wedge Y)} \Leftrightarrow \bar{Z}),$
$G(X,Y,Z) = (X \wedge Y \wedge Z) \vee ((X \Rightarrow \bar{Y}) \wedge \bar{Z}).$

2. $F(X,Y,Z) = ((\overline{X \Leftrightarrow (Y \vee \overline{Z}))} \wedge \overline{X}) \Rightarrow (\overline{(X \vee \overline{Y})} \Leftrightarrow Z),$
$G(X,Y,Z) = X \vee (Y \Rightarrow Z).$

3. $F(X,Y,Z) = \overline{((\bar{Y} \vee \bar{Z}) \Leftrightarrow X) \wedge (\bar{X} \wedge (Y \Rightarrow \bar{Z}))},$
$G(X,Y,Z) = (X \wedge Y \wedge Z) \vee \bar{X} \vee (X \wedge \bar{Y}) \vee (X \wedge Y \wedge \bar{Z}).$

4. $F(X,Y,Z) = \bar{X} \Leftrightarrow \overline{((Y \vee \bar{Z}) \Rightarrow \overline{X \vee \bar{Y})}},$
$G(X,Y,Z) = ((\bar{X} \wedge \bar{Z}) \vee (X \wedge Z)) \wedge \bar{Y}.$

5. $F(X,Y,Z) = ((X \wedge (Y \Rightarrow Z)) \vee \overline{X \vee \bar{Z})} \Leftrightarrow \overline{\bar{Y} \Leftrightarrow Z},$
$G(X,Y,Z) = \overline{X \Rightarrow Z} \vee Y.$

6. $F(A,B,C) = (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
$G(A,B,C) = (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$

7. $F(A,B,C) = (A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \Rightarrow (A \vee C \Rightarrow B \vee D)$
$G(A,B,C) = A \vee B \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D) \Rightarrow C \vee D.$

8. $F(A,B,C) = (B \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
$G(A,B,C) = (A \Rightarrow B) \vee (C \Rightarrow B) \Leftrightarrow (AC \Rightarrow B).$

9. $F(A,B,C) = (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow A \vee B \Rightarrow C$
$G(A,B,C) = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow BC).$

10. $F(A,B,C) = (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (AB \Rightarrow C))$
$G(A,B,C) = ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (AB \Rightarrow C).$

Завдання 2. Доведіть, що наступні формули є тотожно істинними формулами алгебри висловлень методом міркування від супротивного:

1. $(((P \wedge Q) \Rightarrow R) \wedge (\overline{R} \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$

2. $((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow S) \wedge (\overline{R} \vee \overline{S})) \Rightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q}).$

3. $((P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \wedge (P \vee R) \wedge \overline{Q \wedge S} \Rightarrow\Rightarrow ((Q \Rightarrow P) \wedge (S \Rightarrow R)).$

4. $((P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \wedge (P \vee R)) \Rightarrow (Q \vee S)$.

5. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((R \Rightarrow \bar{Q}) \Rightarrow (((S \Rightarrow \bar{P}) \Rightarrow R) \Rightarrow\Rightarrow ((\bar{T} \vee P) \Rightarrow (T \Rightarrow S))))$.

6. $((P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow R)$.

7. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \bar{Q}) \Rightarrow \bar{P})$.

8. $((P \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (R \vee Q))$.

9. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$.

10. $\big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \Leftrightarrow \big(Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)\big)$.

Завдання 3. Формулу *F(X,Y,Z)* із завдання 1 рівносильними перетвореннями привести спочатку до ДДНФ (досконалої диз'юнктивної нормальної форми), а потім до ДКНФ (досконалої кон'юнктивної нормальної форми).

Завдання 4. Розв'язати логічну задачу:

1. Чемпіонат школи з гімнастики. Болільники обговорюють хід боротьби і виказують багато припущень стосовно майбутніх переможців.

- Першою буде Наташа, а Майя буде другою, - сказав Сергій.

- Ні, Ліда виборе друге місце, а Рита буде четвертою, - сказав Вова.

- Другою буде Наташа, а Рита – третьою, - авторитетно заявив Толя.

Коли змагання скінчилися, то виявилося, що кожний з хлопців помилився тільки один раз. Які місця вибороли Наташа, Майя, Ліда та Рита?

2. Чотири учениці – Аніта, Бригіта. Кріста і Дана – закінчили між собою змагання. На питання, хто зайняв яке місце, отримані такі висловлення:

«Аніта перемогла, а Брігіта зайняла друге місце».

«Аніта зайняла друге місце, а Кріста третє».

«Дана зайняла друге місце, а Кріста - четверте».

З'ясувалося, що в кожному з висловлень одне твердження правильне, а інше ні. Яке місце зайняла кожна з дівчат?

3. На змаганні з бігу було висловлено два прогнози про місця, які займуть спортсмени Іванов, Петров та Сидоров:

«Сидоров буде першим, Іванов – другим, а Петров - третім».

«Переможе Іванов, Петров прийде другим, а Сидоров буде третім».

Після закінчення змагання виявилося, що обидва прогнози хибні. В жодному ні одне з місць не було названо правильно. Яке місце зайняв кожен з спортсменів?

4. Чотири команди – «Артек», «Вимпел», «Сокол», «Метеор» - у спортивних змаганнях зайняли чотири перших місця, причому жодне місце не було поділено між двома командами. Про зайняті місця було отримано три висловлення:

«Друге місце зайняв «Сокол», а «Метеор» третє».

«Переможцем став «Сокол», а «Вимпел» був другим».

«Друге місце зайняв «Артек», а «Метеор» був останнім».

Яке місце зайняла кожна команда, якщо відомо, що в кожному з висловлень одне твердження правильне, а друге хибне?

5. Перед початком глядачі обговорювали трьох кращих коней с прізвиськами «Арбек», «Вітер», «Стрілок».

- Переможе або «Арбек, або «Стрілок», - сказав один болільник.

- Якщо «Арбек» буде другим, то переможе «Вітер», - сказав другий болільник.

- Багато ви розумієтеся на конях, - обурився третій болільник. – Другим прийде або «Вітер», або «Арбек».

- А я вам скажу, - втрутився четвертий болільник, - що якщо «Арбек» прийде третім, то «Стрілок» не переможе.

Після змагань з’ясувалося, що троє коней - «Арбек», «Вітер», «Стрілок» - зайняли три перших місця, не ділячи між собою жодного з місць, і що всі чотири прогнози болільників були правильні. Як скінчилися змагання?

6. Один з хлопчиків зіпсував вимикач. На питання: «Хто це зробив?» - отримано такі відповіді:

1) Це зробив або Міша, або Коля.

2) Це зробив або Вітя, або Коля.

3) Це не могли зробити ні Толя, ні Міша.

4) Це зробив або Вітя, або Міша.

Чи можна по цим даним встановити, хто винен, якщо з чотирьох висловлень три висловлення правильні?

7. Шість спортсменів – Адамов, Белов, Ветров, Глебов, Дронов, Ершов – в змаганні зайняли шість перших місць, не ділячи між собою жодного з місць. Про те, хто зайняв яке місце було отримано наступні висловлення:

1) «Здається першим був Адамов, а другим – Дронов».

2) «Ні, на першому місці був Ершов, а на другому – Глебов».

3) «Глебов був третім, а Белов - четвертим».

4) «Зовсім не так: Белов був п’ятим, а Адамов – другим».

5) «Ви все переплутали: п’ятим був Дронов, перед ним – Ветров».

Відомо, що в висловленні кожного з болільників одне висловлення істине, а інше хибне. З’ясувати, яке місце зайняв кожен спортсмен.

8. При складанні розкладу уроків на один день вчителі математики, історії та літератури виказали наступні побажання: математик прохав поставити йому або перший, або другий урок; історик – або перший, або третій; вчитель літератури – або другий, або третій. Як скласти розклад уроків, щоб врахувати всі побажання?

9. Для полярної експедиції з восьми претендентів A, B, C, D, E, F, G, H треба відібрати шість спеціалістів: біолога, гідролога, синоптика, радиста, механіка і лікаря. Обов’язки біолога можуть виконувати E і G, гідролога - B і F, синоптика – F і G, радиста – C і D, механіка – C і H, лікаря – A і D. Хоча деякі претенденти володіють двома спеціальностями, в експедиції кожен може виконувати може виконувати лише одну роботу. Кого і з ким треба узяти, якщо F не може працювати без B, D - без H і без C, C не може їхати одночасно з G, а A не може їхати разом з B?

10. Для чотирьох дружинників, прізвища яких починаються літерами А, Е, Р, С, необхідно скласти графік чергувань на чотири вечора підряд, враховуючи, що:

1) С і Р не можуть чергувати в перший вечір;

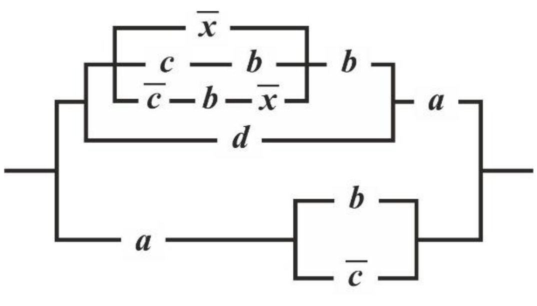
2) якщо С вийде в другий вечір або Р – в третій, то Е зможе чергувати в четвертий;

3) якщо А не буде чергувати в третій вечір, то Е згоден чергувати в другий;

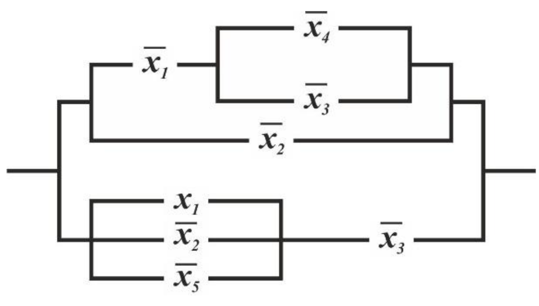
4) якщо А або Р будуть чегувати в другий вечір, то С зможе піти в четвертий;

5) якщо Р в четвертий вечір поїде на конференцію, то А змушений буде чергувати в перший, а С – в третій вечір.

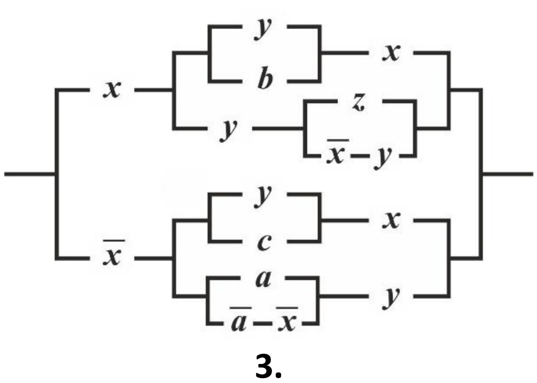
Завдання 5. Спростити релейно-контактні схеми.



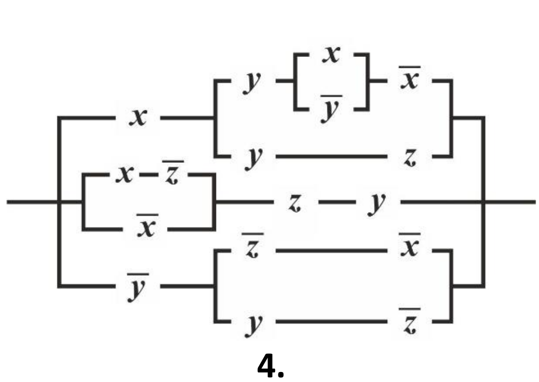
1.



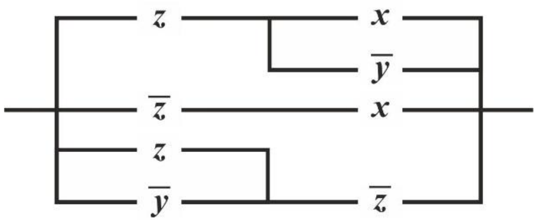
2.



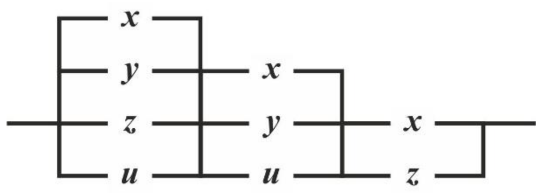
3.



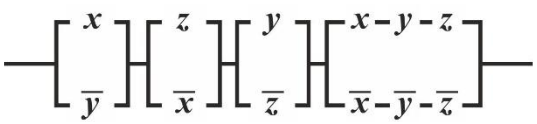
4.



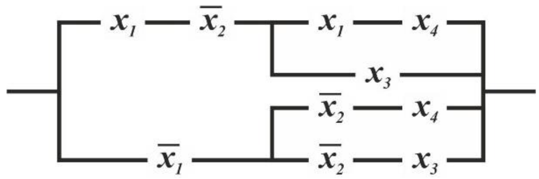
5.



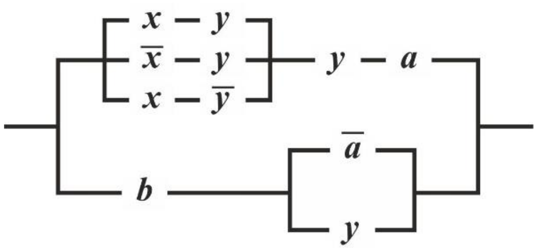
6.



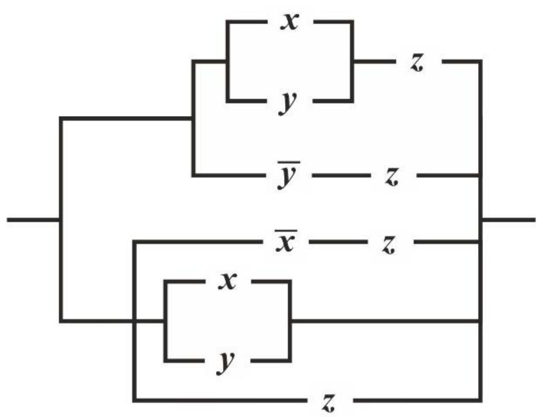
7.



8.



9.



10.

Завдання 6. Використовуючи при необхідності теорему дедукції і довільні правила виводу, довести, що формула є теоремою формалізованого числення висловлень:

1. $(F \Rightarrow G) \Rightarrow ((G \Rightarrow H) \Rightarrow (F \Rightarrow H)$.

2. $(F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow (G \Rightarrow (F \Rightarrow H))$.

3. $F \Rightarrow (G \Rightarrow (F \wedge G))$.

4. $(F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \wedge G) \Rightarrow H)$.

5. $((F \wedge G) \Rightarrow H) \Rightarrow (F \Rightarrow (G \Rightarrow H))$.

6. $((F \Rightarrow G) \Rightarrow F) \Rightarrow F)$.

7. $(F \Rightarrow G) \Rightarrow ((F \Rightarrow \bar{G}) \Rightarrow \bar{F})$.

8. $(F \Rightarrow G) \Rightarrow ((\bar{F} \Rightarrow G) \Rightarrow G)$.

9. $F \Rightarrow (\bar{G} \Rightarrow (\overline{F \Rightarrow G}))$.

10. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow C)$.

Завдання 7. Рівносильними перетвореннями звести формулу алгебри предикатів до ВНФ (випередженої нормальної форми):

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow \forall y(Q(x,y) \Rightarrow \overline{\forall zR(y,z)}))$.

2. $\forall x\exists y\forall z\exists uP(x,y,z,u) \wedge \forall x\exists y\forall z\exists uQ(x,y,z,u)$.

3. $\forall x\exists y\forall z\exists uP(x,y,z,u) \Rightarrow \forall x\exists y\forall z\exists uQ(x,y,z,u)$.

4. $R(x,y) \Rightarrow \exists yP(y) \Rightarrow (\exists xP(x) \Rightarrow Q(y))$.

5. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x,y)) \Rightarrow (\exists yP(y) \Rightarrow \exists zQ(y,z))$.

6. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists xP(x) \Rightarrow \exists yQ(y))$.

7. $\forall x\exists yP(x,y) \Rightarrow \exists z\forall xQ(x,z)$.

8. $(P(y) \wedge Q(x)) \Rightarrow \overline{\forall yR(y,z)}$.

9. $\forall xP(x,y) \vee \exists xP(x,x) \Rightarrow \forall z\overline{(Q(y,z)} \Rightarrow \exists xP(x,z))$.

10. $(\exists xP(x) \vee \forall xQ(x)) \wedge (S(y) \Rightarrow \forall xR(x))$.

Завдання 8. З'ясувати, чи є формула тавтологією алгебри предикатів:

1. $\exists x\exists yP(x,y) \Rightarrow \exists xP(x,x)$.

2. $\forall x(F(x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow (\forall xF(x) \Rightarrow \forall xG(x))$.

3. $\overline{\forall x\exists yP(x,y)} \Rightarrow \exists y\forall xP(x,y)$.

4. $\forall x(F(x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow (\exists xF(x) \Rightarrow \exists xG(x))$.

5. $(\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

6. $(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$.

7. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x))$.

8. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists xP(x) \vee \exists xQ(x))$.

9. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x))$.

10. $\exists x\exists yQ(x,y) \Leftrightarrow \exists x\exists xQ(x,y)$.

Завдання 9. Машина Тьюринга з зовнішнім алфавітом $A = \{a_0, 1\}$ і алфавітом внутрішніх станів $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_{12}, q_{13}\}$ визначається наступною функціональною схемою:

Q \ A	a_0	1
q_1	q_2a_0L	q_01
q_2	q_5a_0	q_3a_0
q_3	q_4a_0L	q_01
q_4	q_5l	q_41l
q_5	q_0a_0	q_61l
q_6	q_0a_0	q_7a_0
q_7	q_8a_0R	q_01
q_8	q_91	q_81r
q_9	q_0a_0	$q_{10}1l$
q_{10}	q_0a_0	$q_{11}a_0$
q_{11}	$q_{12}a_0L$	q_01
q_{12}	$q_{13}1$	$q_{12}1l$
q_{13}	q_0a_0	q_01

Зображуючи на кожному такті роботи машини конфігурацію, що отримуємо, визначити, в яке слово переробить машина кожне з наступних слів (в початковий момент часу машина знаходиться в стані q_0 і спостерігає крайню праву комірку, в якій записаний порожній символ a_0, в наступній зліва комірці вже записаний символ 1):

1. $a_0111a_{01}1111a_0$, $a_01a_01111a_0$, $a_0111a_01a_011a_0$;

2. $a_0111a_{01}1111a_0$, $a_01a_01111a_0$, $a_0111a_01a_011a_0$;

3. $a_011a_{01}1111a_0$, $a_0111a_011a_0$, $a_011a_0111a_01a_0$.

4. $a_011a_{01}1111a_0$, $a_0111a_011a_0$, $a_011a_0111a_01a_0$;

5. $a_011a_{01}11a_0$, $a_01111a_01a_0$, $a_01a_01a_01111a_0$;

6. $a_011a_{01}11a_0$, $a_01111a_01a_0$, $a_01a_01a_01111a_0$;

7. $a_01a_{01}111a_0$, $a_01111a_011a_0$, $a_01a_011a_0111a_0$;

8. $a_01a_{01}111a_0$, $a_01111a_011a_0$, $a_01a_011a_0111a_0$;

9. $a_01a_011a_0$, $a_0111a_01a_0$, $a_011a_0111a_011a_0$;

10. $a_01a_011a_0$, $a_0111a_01a_0$, $a_011a_0111a_011a_0$;

ТЕСТ

1. Нехай *x* та *y* змінні зі значеннями з інтервалу $(-\infty; +\infty)$. Вказати, які з наступних виразів не є висловленнями:

1) 2 * 2= 4;
2) sin(x) > y;
3) 5 > 10;
4) 2 + 3= 6

2. Висловлення А: " Існує від'ємне ціле число", висловлення В: "13 – просте натуральне число". Диз'юнкцією цих висловлень буде висловлення:

1) "Існує від'ємне ціле число або 13 – просте натуральне число".
2) "Якщо існує від'ємне ціле число, то 13 – просте натуральне число?
3) "Від'ємне ціле число існує тоді і тільки тоді, коли 13 – просте натуральне число".
4) "Існує від'ємне ціле число і 13 – просте натуральне число".

3. Висловлення А: " π – трансцендентне число", висловлення В: "Будь-яке число кратне 5". Визначити істинність складеного висловлення

$$(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \overline{\mathrm{B}})$$

1) 0;
2) правильна відповідь відсутня;
3) 1;
4) істинність висловлення визначається неоднозначно.

4. Формула алгебри висловлень $\mathrm{A} \wedge \overline{\mathrm{A}}$ рівносильна:

1) 0;
2) A;
3) 1;
4) $\overline{\mathrm{A}}$.

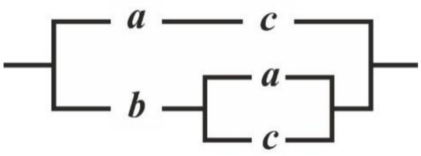
5. Спростити формулу алгебри висловлень $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \overline{\mathrm{B}})$.

1) 0;
2) $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$;
3) $\mathrm{A} \wedge \overline{\mathrm{B}}$;
4) A.

6. Знайти кон'юнктивну нормальну форму (КНФ) для формули алгебри висловлень $(A \Rightarrow B) \vee C$.

1) $\overline{A} \wedge B \wedge C$;
2) $\overline{A} \vee B \vee C$;
3) $(\overline{A} \wedge B) \vee C$;
4) $(\overline{A} \vee B) \wedge C$;

7. Яка формула відповідає релейно-контактній схемі



1) (a+c)(b+ac);
2) a+c+b(a+c);
3) ac+b(a+c);
4) ac+(b+ac).

8. Клас вивідних формул числення висловлень L_1 збігається із
1) класом ТІ-формул алгебри висловлень;
2) класом формул алгебри висловлень, для яких існує ДКНФ;
3) класом формул алгебри висловлень, записаних без логічної зв'язки «не»;
4) класом ТХ-формул алгебри висловлень.

9. Нехай x, y, z змінні зі значеннями з інтервалу $(-\infty; +\infty)$. Вказати, які з наступних виразів не є предикатами.
1) $x+y=z$;
2) $x^2>y$;
3) $2*2=4$;
4) $\sin x+y$

10. Дано довільні предикати. Вказати, яка з наступних формул рівносильна формулі $P(x) \Rightarrow \overline{Q(x)}$.
1) $P(x) \vee Q(x)$;
2) $\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}$;
3) $\overline{P(x)} \wedge Q(x)$;
4) $\overline{P(x)} \Rightarrow Q(x)$.

11. Вираз «Для кожного *x* виконується *P(x),* але не існує такого *x*, що Q(x)» в символьному записі представляється наступним чином

1) $\forall x P(x) \vee \exists x \overline{Q(x)}$;
2) $\forall x (P(x) \Rightarrow \overline{\exists x Q(x)})$;
3) $\forall x P(x) \wedge \overline{\exists x Q(x)}$;
4) $\forall x P(x) \equiv \overline{\exists x Q(x)}$.

12. Дано предикат *P(x)*: «Для будь-якого дійсного значення х $x^2+1>0$». Побудувати його заперечення.

1) Існує таке дійсне значення х, що $x^2+1<0$;
2) Для будь-якого дійсного значення х $x^2+1\leq 0$;
3) Існує таке дійсне значення х, що $x^2+1\geq 0$;
4) Існує таке дійсне значення х, що $x^2+1\leq 0$.

13. Нехай дано предикати на множині натуральних чисел *P*(*x*): «*x* – просте число», *Q*(*x*, *y*): «*x* ділиться на *y*». Вираз «Довільне просте число не ділиться на 2, а також не ділиться на 3» в символьному вигляді записується наступним чином:

1) $\forall x\big(\overline{Q(x,2)} \wedge \overline{Q(x,3)} \Rightarrow P(x)\big)$;
2) $\forall x (P(x) \Rightarrow (\overline{Q(x,2)} \vee \overline{Q(x,3)}))$;
3) $\forall x \left(Q(x,y) \Rightarrow \overline{P(2)} \wedge \overline{P(3)}\right)$;
4) $\forall x \left(P(x) \Rightarrow \left(\overline{Q(x,2)} \wedge \overline{Q(x,3)}\right)\right)$.

14. Формула $\overline{\exists x \forall y \exists z \forall u P(x,y,z,u)}$ рівносильна формулі:

1) $\exists x \forall y \exists z \forall u \overline{P(x,y,z,u)}$;
2) $\forall x y \forall z \exists u \overline{P(x,y,z,u)}$;
3) $\forall x \exists y \forall z \exists u P(x,y,z,u)$;
4) $\forall x \forall y \forall z \forall u \overline{P(x,y,z,u)}$.

15. Яка з наступних формул не є загальнозначущою:

1) $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$;
2) $P \wedge \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, (P \wedge Q(x))$;
3) $P \vee \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, (P \vee Q(x))$;
4) $\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\big(P(x) \vee Q(x)\big)$.

ПРОГРАМА ЕКЗАМЕНУ

1. Предмет математичної логіки, коротка історія її розвитку. Роль математичної логіки в питаннях обґрунтування математики. Математична логіка і автоматизовані системи управління.

2. Поняття, його зміст і об’єм. Конкретні і абстрактні поняття. Загальні, одиничні і порожні поняття. Сумісні і несумісні поняття. Узагальнення, обмеження і поділ поняття. Приклади.

3. Означення понять. Види означень понять. Вимоги до означень понять. Приклади.

4. Висловлення і логічні операції над ними. Формули їх значення істинності.

5. Булеві функції від n аргументів, їх число. Приклади.

6. Рівносильні перетворення формул. Основні рівносильності алгебри висловлень.

7. ДНФ, КНФ, їх властивості.

8. Подання булевих функцій формулами алгебри висловлень.

9. Повні і неповні системи логічних операцій.

10. Логічне слідування на базі алгебри висловлень. Критерій логічного слідування. Правила виводів. Приклади.

11. Проблема вирішення в алгебрі висловлень.

12. Числення висловлень. Алфавіт, формули, аксіоми, правила виводу. Приклади вивідних формул.

13. Вивідність із гіпотез. Мета теорема дедукції. Наслідки із теореми, приклади.

14. Додаткові правила виводу. Приклади їх застосування.

15. Несуперечність, повнота та проблема вирішення числення висловлень.

16. Незалежність аксіом числення висловлень.

17. Основні поняття логіки предикатів. Приклади.

18. Логічні операції над предикатами.

19. Кванторні операції над предикатами. Приклади.

20. Тереми і формули логіки предикатів. Вільні і зв’язані змінні. Приклади.

21. Інтерпретації формул логіки предикатів, класифікація формул, приклади.

22. Приклад формули логіки предикатів, виконуваної на нескінченій області і невиконуваної в будь-якій скінченій області.

23. Основні рівносильності логіки предикатів, їх доведення.

24. Рівносильні перетворення формул логіки предикатів. Зведена і випереджена нормальні форми. Приклади.

25. Проблема вирішення в логіці предикатів. Розв’язність цієї проблеми для логіки одномісних предикатів.

26. Застосування елементів математичної логіки в логіко-математичній практиці.

27. Математичні теорії першого порядку. Алфавіт, терми, формули, логічні і спеціальні аксіоми. Правила виводу. Приклади.

28. Аналіз прикладів математичних теорій першого порядку.

29. Доведення в теоріях першого порядку. Доводжуваність частинних випадків тавтологій. Приклади.

30. Теорема дедукції для теорій першого порядку. Наслідки з неї. Приклади.

31. Проблеми несуперечності і повноти аксіом числення предикатів. Проблема вирішення для числення предикатів.

32. Інтуїтивне поняття алгоритму, його характерні риси. Приклади.

33. Частково-обчислювальні і частково-рекурсивні функції. Гіпотеза Черча. Приклади.

34. Оператори регулярної суперпозиції, примітивні рекурсії. Їх роль в побудові класу частково-рекурсивних функцій.

35. Нормальні алгоритми Маркова, принцип їх роботи, приклади.

36. Машини Тюрінга, принцип їх роботи, приклади.

37. Алгоритмічно розв’язні і алгоритмічно нерозв’язні проблеми. Приклади.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лиман Ф.М. *Математична логіка і теорія алгоритмів*. *Навчальний посібник*. Суми: Видавництво «МакДен», 2014. 176 с.
2. Рамський Ю.С. *Логічні основи інформатики*. К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2003. 286с.
3. Середа В.Ю. *Математична логіка в шкільному курсі математики*. К.: Радянська школа, 1984. 144с.
4. Хромой Я.В. *Збірник вправ і задач з математичної логіки*. К.: Вища школа, 1987. 160 с.
5. Хромой Я.В. *Математична логіка*. К.: Вища школа, 1983. 208 с.
6. Кужель О.В. *Елементи теорії множин і математичної логіки*. К.: Радянська школа, 1977. 160с.
7. Касаткин В.Н., Владыкина Л.И. *Алгоритмы и игры*. К.: Радянська школа, 1984. 80с.
8. Мельников В.Н. *Логические задачи*. Киев-Одесса: Вища школа, 1989. 344 с.
9. Середа В.Ю. *Вчись логічно мислити*. К.: Радянська школа, 1989. 175 с.
10. Шевченко В.Е. *Некоторые способы решения логических задач*. К.: Вища школа, 1979. 80 с.

ДОДАТОК.
ПОНЯТТЯ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ І ОЗНАЧЕННЯ

Процес мислення відбувається із використанням певних понять. Математика, як і інші науки, вивчає навколишній світ, але вивчає лише особливі його сторони. Наприклад, в геометрії вивчають форму та розміри предметів, але абстрагуються від їх властивостей: кольору, маси тощо.

Математичні об'єкти – це результат виділення з предметів та явищ навколишнього світу кількісних та просторових властивостей та відношень і абстрагування від усіх інших властивостей.

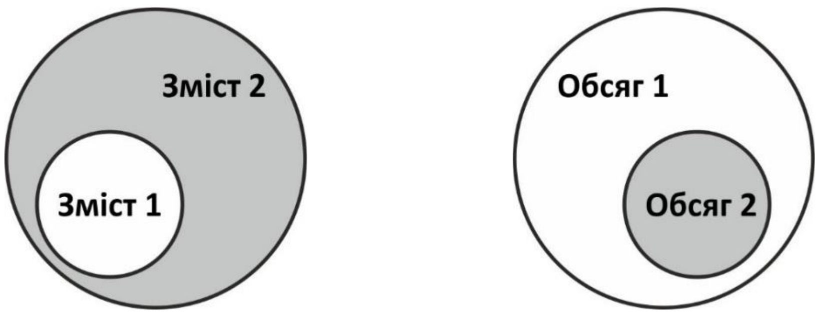
Кожний математичний об'єкт має певні властивості, серед яких виділяємо суттєві та несуттєві. Властивість є суттєвою для об'єкту, якщо вона притаманна даному об'єкту і без неї він не може існувати. Наприклад, суттєвою властивістю квадрата є рівність сторін, а несуттєвою є те, що сторона квадрата горизонтальна.

Поняття – це сукупність тверджень про суттєві властивості і відношення об'єктів деякого класу.

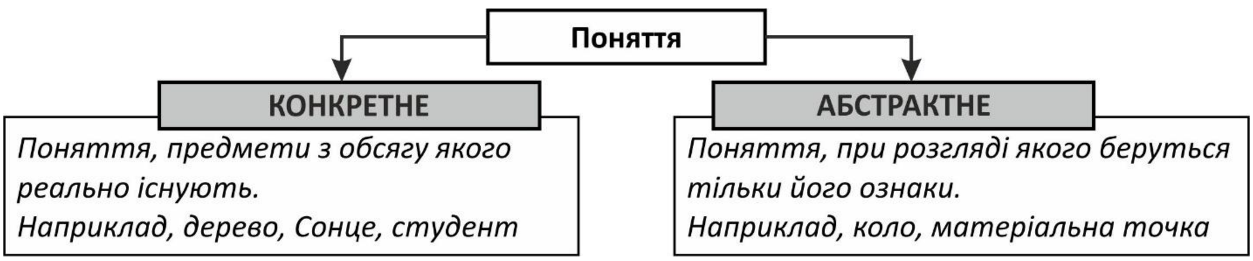
Кожне поняття характеризується змістом та обсягом.

Зміст поняття – це сукупність ознак предметів класу. **Обсяг поняття** – це множина предметів класу. Наприклад, зміст поняття «прямокутний трикутник» – трикутник, у якого один з кутів прямий, а обсяг даного поняття – це множина всіх прямокутних трикутників.

Зауважимо, що чим «більший» зміст, тим «менший» обсяг і навпаки. Наприклад, для понять «трикутник» (1) та «прямокутний трикутник» (2).



Поняття має **термін**, а інколи ще і **символ** (наприклад, $\int$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sum$).



Поняття

ЗАГАЛЬНЕ

Поняття, в обсязі якого є не менше двох предметів. Наприклад, студент, планета, трикутник

ОДИНИЧНЕ

Поняття, в обсязі якого є лише один предмет. Наприклад, Сонце, нуль, найменше натуральне число

ПОРОЖНЄ

Поняття, в обсязі якого немає жодного предмету. Наприклад, найбільше натуральне число

Поняття

ПОРІВНЯЛЬНІ

Поняття, у змісті яких є хоча б одна спільна ознака. Наприклад, поняття «трикутник» та «чотирикутник»

НЕПОРІВНЯЛЬНІ

Поняття, у змісті яких немає жодної спільної ознаки. Наприклад, поняття «учитель» і «успішність»

Поняття

СУМІСНІ

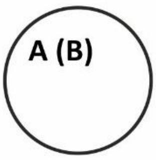
Поняття, у обсязі яких є хоча б один спільний предмет. Наприклад, поняття «прямокутник» і «ромб»

НЕСУМІСНІ

Поняття, у обсязі яких немає жодного спільного предмета. Наприклад, поняття «паралелограм» і «трапеція»

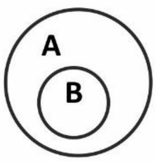
РІВНОЗНАЧНІ

Поняття, обсяги яких збігаються. Наприклад, поняття «квадрат» і «прямокутний ромб»



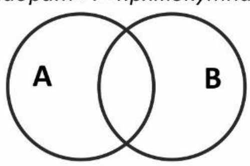
ПІДПОРЯДКОВАНІ

Поняття, обсяг одного з яких є частиною обсягу іншого. Наприклад, поняття «трикутник» і «рівнобедрений трикутник»



ПЕРЕХРЕСНІ

Поняття, в обсягах яких є як спільні предмети, так і предмети, що належать обсягу одного поняття, але не належать обсягу іншого. Наприклад, поняття «квадрат» і «прямокутник»



Операції над поняттями

1. Узагальнення – логічна операція, що полягає в переході від даного поняття до поняття більшого обсягу. Зауважимо, що при цьому зміст поняття зменшується.

2. Обмеження – логічна операція, що полягає в переході від даного поняття до поняття меншого обсягу. Зауважимо, що при цьому зміст поняття збільшується. Операція обмеження є оберненою до операції узагальнення.

Трикутник

Прямокутний трикутник

Рівнобедрений прямокутний трикутник

3. Поділ поняття на частини є правильним, якщо утворені частини не мають спільних елементів, а їх об’єднання збігається із обсягом вихідного поняття.

Приклад. Поділ поняття «натуральне число» на «просте» та «складене» є неправильним. Правильним є поділ поняття «натуральне число» на «просте» та «непросте».

4. Означення поняття – це логічна операція, за допомогою якої розкривається зміст поняття. Речення, яке отримуємо у результаті даної операції, називається **дефініцією** або **означенням**. Тобто в українській мові слово «означення» характеризує як процес, так і результат.

Види означень

1. Означення через найближчий рід та видову ознаку. Такими є більшість означень шкільного курсу математики.

Приклад.

Прямокутний трикутник – це $\underbrace{\boxed{\text{трикутник}}}_{\textit{найближчий рід}}$, у якого $\underbrace{\boxed{\text{один з кутів прямий.}}}_{\textit{видова ознака}}$

2. Генетичне означення – означення, які вказують на спосіб побудови об’єкта.

Приклад. Трикутник – це геометрична фігура, яка утворена трьома точками, що не лежать на одній прямій, і трьома відрізками, які їх попарно сполучають.

3. Рекурентне означення – від частинного до загального.

Приклад. Арифметична прогресія – це числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додають одне і те саме число.

4. Контекстуальне означення – зміст нового поняття розкривається через уривок тексту, через аналіз конкретної ситуації.

Приклад. $3 + x = 9$, x – невідоме число, яке потрібно знайти. Яке з чисел 2, 3, 6, 7 потрібно підставити замість x, щоб рівність була правильною. В цьому контексті неявно формується поняття рівняння та його кореня.

5. Остенсивне означення – це означення шляхом демонстрації. Вони нагадують контекстуальні означення, але контекстом є не уривок тексту, а ситуація, в якій опиняється об’єкт, який визначається.

Приклад. Означення відношень «більше» та «менше».

Рис. Фрагмент підручника з математики для 1 класу, автори О. М. Гісь, І. В. Філяк

6. Означення через перелік.

Приклад. Об'єднання множин раціональних та ірраціональних чисел називається множиною дійсних чисел.

7. Індуктивне означення складається з декількох пунктів. В перших (базисних) пунктах описуються базисні предмети з обсягу поняття. В подальших (індуктивних) пунктах описуються способи отримання всіх інших предметів з обсягу поняття. Останній пункт стверджує, що предметами поняття названі лише ті, які отримані за допомогою прямих (перших) пунктів означення.

Приклад. Означення формули числення висловлень (див. с. 32).

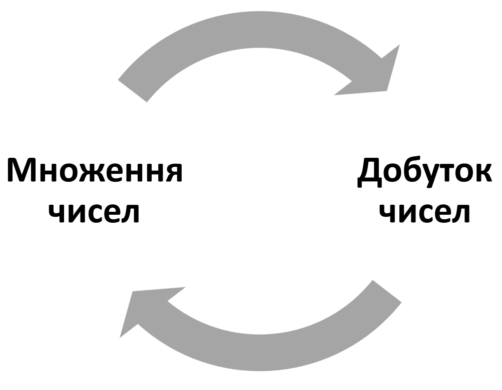
Вимоги до означень

1. Визначальне поняття та поняття, що визначається, повинні мати однакові обсяги (співмірність).

Приклад. Прямокутник (обсяг 1) – чотирикутник, у якого всі кути прямі (обсяг 2).

2. Означення не повинно містити «зачарованого кола».

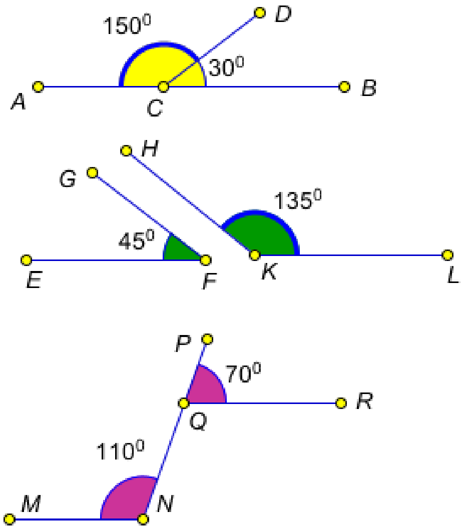
Приклад. Множення чисел – це операція, за допомогою якої знаходимо добуток чисел. Добуток чисел – це результат виконання операції множення.



3. Означення не повинно бути заперечувальним.

Приклад. Хімія – це не географія. Темрява – це відсутність світла.

4. В означенні повинні бути вказані всі ознаки, що дозволяють однозначно виділити предмети, що належать обсягу визначального поняття.



Приклад.

Суміжні кут – це кути, сума яких дорівнює 180^0. Проілюструємо пари кутів, які задовольняють дане означення (рис.). Очевидно, що не кожна пара кутів є суміжними кутами, отже, дане означення не є правильним, оскільки вказано не всі ознаки.

Правильним є означення: суміжними називаються два кути, одна сторона яких спільна, а дві інші є доповняльними променями.

5. В означенні не повинно бути вказано зайвих ознак, тобто коли серед ознак, зазначених у означенні, одні ознаки випливають з інших.

Приклад. Прямокутник – це чотирикутник, в якого протилежні сторони рівні і всі кути прямі. Дане означення не є правильним, воно містить надлишок ознак, оскільки з того факту, що всі кути прямі, випливає те, що протилежні сторони є рівними.

6. Означення не повинно містити ще не означених понять (звичайно, якщо вони не є первісними).

Практичні завдання

1. Визначити, які з наведених понять є загальними, одиничними, порожніми.

Лауреат – ____;

автор роману «Війна та мир» – ____________________________________;

найбільше з усіх чисел – ____;

найменше з натуральних чисел – ___________________________________;

квадрат, у якого діагоналі не діляться навпіл – _______________________;

рівнобедрений трикутник – _______________________________________;

$log_2(-4)$ – ____.

2. Знайти поняття, які б знаходилися у відношенні тотожності з наступними поняттями.

Перша голосна літера українського алфавіту – _______________________;

рівнокутний трикутник – ____;

найбільша річка України – ____;

рівносторонній прямокутник – ____;

цілі додатні числа – ____.

3. Встановити відношення між обсягами наступних понять, зобразивши їх графічно (кругами Ейлера).

Робочий, новатор, спортсмен

Чорний, нечорний

Держава, рабовласницька держава

Метал, рідина, ртуть

Київ, столиця України

Дельфін, риба, ссавець

Правильний многокутник, квадрат

Фрукт, ягода, кавун

Раціональне число, ціле число,
ірраціональне число

Цілі числа,
від’ємні числа

Рівняння, рівність

Хорда, діаметр

4. Навести приклади понять, які мають не лише термін, але й символ.

____

____

5. Вказати помилки в наступних класифікаціях та виправити їх.

Гострокутні трикутники бувають різносторонні і рівносторонні.

____

____

Лінії бувають прямі та ламані.

____

____

Кути бувають прямими, гострими та вертикальними.

____

____

6. Узагальнити поняття «прямокутний рівнобедрений трикутник».

____

____

7. Обмежити поняття «рівність».

____

____

8. Дати означення запропонованих понять. Вказати найближчий рід та видову ознаку в наступних означеннях.

Діаметр – це ____

____

Хорда – це ____

____

Прямокутник – це ____

____

Рівняння – це ____

____

Просте число – це ____

____

Коло – це ____

____

Прямокутна трапеція – це ____

____

9. Визначити вид означення.

Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони рівні. _______________

____

Конус – фігура, утворена в результаті обертання прямокутного трикутника навколо свого катета. ____

Множина дійсних чисел – це множина, що є об'єднанням множин раціональних та ірраціональних чисел. ____

Геометрична прогресія – послідовність чисел, перший член якої не дорівнює нулю, а відношення будь-якого елемента послідовності до попереднього є сталим числом, що називається знаменником прогресії. ________________________________

____

10. Яке з наведених означень є правильним? Чому?

Прямокутник – це чотирикутник, в якого всі кути прямі і сторони попарно рівні.

____

____

Прямокутник – це чотирикутник, в якого всі кути прямі.________________________

____

Прямокутник – це чотирикутник, в якого протилежні сторони рівні. _____________

____

Прямий кут – це кут, сторони якого перпендикулярні. _________________________

____

Прямий кут – це кут, градусна міра якого 90^0. ________________________________

____

Дві прямі в просторі називаються мимобіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні. ____

____

Паралелограм – це не трапеція. ____

____

Подібними називаються фігури, які мають однакову форму. ___________________

____

НОТАТКИ