

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)

ФІЗИКО- МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Том 38, № 2

Суми – 2023

**Рекомендовано до видання вченою радою
Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка
(протокол № 10 від 24.04.2023 р.)**

Редакційна колегія

М.П. Вовк	доктор педагогічних наук, старший науковий співробітник (Україна)
М.Гр. Воскоглу	доктор філософії, почесний професор математичних наук (Греція)
Т.Г. Дерека	доктор педагогічних наук, професор (Словацька республіка)
М.Г. Друшляк	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
Р.А. Зіатдінов	доктор педагогічних наук, професор (Південна Корея)
А.П. Кудін	доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)
О.Ю. Кудріна	доктор економічних наук, професор (Україна)
О.О. Лаврентьева	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
Т.Ю. Осипова	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
М.В. Працьовитий	доктор фізико-математичних наук, професор (Україна)
Д.О. Сарфо	доктор педагогічних наук, професор (Гана)
О.В. Семеніхіна	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
О.М. Семенов	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
В.І. Статівка	доктор педагогічних наук, професор (Китай)
І.Я. Субботін	доктор фізико-математичних наук, професор (США)
О.С. Чашечникова	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
О.В. Школьнік	доктор педагогічних наук, професор (Україна)
Т.Д. Лукашова	доктор фізико-математичних наук, доцент (Україна)
О.О. Пипка	доктор фізико-математичних наук, доцент (Україна)
В.О. Швець	кандидат педагогічних наук, професор (Україна)
А.М. Добровольська	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)
В.Г. Шамо́ня	кандидат фізико-математичних наук, доцент (Україна)

Ф45 Фізико-математична освіта : науковий журнал. Том 38, № 2. Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Фізико-математичний факультет ; редкол.: О.В. Семеніхіна (гол.ред.) [та ін.]. Суми : [СумДПУ ім. А.С. Макаренка], 2023. 60 с.

*Наказом МОН України №1412 від 18.12.2018 р. журнал
«Фізико-математична освіта» затверджено як **фахове
наукове видання категорії «Б»** у галузі педагогічних
наук (13.00.02 – математика, фізика, інформатика;
13.00.10) і за спеціальностями 011, 014, 015.*

Журнал індексується наукометричною базою **Index Copernicus Journals Master List**

Автори статей несуть відповідальність за достовірність наведеної інформації (точність наведених у статті даних, цитат, статистичних матеріалів тощо) та за порушення прав інтелектуальної власності інших осіб.

Висловлені авторами думки можуть не співпадати з точкою зору редакції.

**УДК 53+51]:37(051)
DOI 10.31110/2413-1571**

© СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2023

**MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Makarenko Sumy State Pedagogical University
Physics and Mathematics Faculty**

**ISSN 2413-1571 (print)
ISSN 2413-158X (online)**

PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION

Scientific Journal

Vol. 38, No 2

Sumy – 2023

**Recommended for publication of the Academic Council
of Makarenko Sumy State Pedagogical University
(protocol No 10 from 24.04.2023)**

Editorial Board

M.P. Vovk	Doctor of Pedagogical Sciences, Senior Research Fellow (Ukraine)
M.Gr. Voskoglou	Doctor of Philosophy, Professor Emeritus of Mathematical Sciences (Greece)
T.H. Dereka	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Slovak Republic)
M.G. Drushlyak	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
R.A. Ziatdinov	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (South Korea)
A.P. Kudin	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor (Ukraine)
O.Yu. Kudrina	Doctor of Economic Sciences, Professor (Ukraine)
O.O. Lavrentjeva	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
T.Yu. Osyova	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
M.V. Pratsiovytyi	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor (Ukraine)
J.O. Sarfo	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ghana)
O.V. Semenikhina	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
O.M. Semenog	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
V.I. Stativka	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (China)
I.Ya. Subbotin	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor (USA)
O.S. Chashechnykova	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
O.V. Shkolnyi	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor (Ukraine)
T.D. Lukashova	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor (Ukraine)
O.A. Pypka	Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor (Ukraine)
V.O. Shvets	PhD (Physics and Mathematics Sciences), Professor (Ukraine)
A.M. Dobrovol'ska	PhD (Physics and Mathematics Sciences), Associate Professor (Ukraine)
V.G. Shamonia	PhD (Physics and Mathematics Sciences), Associate Professor (Ukraine)

F 45 Physical and Mathematical Education : Scientific Journal. Vol. 38, No 2. Makarenko Sumy State Pedagogical University, Physics and Mathematics Faculty ; O.V. Semenikhina (chief editor). Sumy : [Makarenko Sumy State Pedagogical University], 2023. 60 p.

The authors of the articles are responsible for the authenticity of the information (the accuracy of the presented information in the article, quotations, statistical materials, etc.) and for the violation of intellectual property rights of others.

Opinions expressed by the authors may not reflect the views of the editors.

**UDC 53+51]:37(051)
DOI 10.31110/2413-1571**

ЗМІСТ

Авдонін К.	7
МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ХВИЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ СИСТЕМИ ЧАСТИНОК.....	7
Бохонов Ю., Бохонова Т.	11
НЕРІВНОСТІ КОШІ-БУНЯКОВСЬКОГО І ГЕЛДЕРА ТА ЇХНЄ УЗАГАЛЬНЕННЯ.....	11
Бохонова Т., Бохонов Ю., Матвеева І., Томащук О., Тихонова В., Лещинський О., Гроза В.	15
ВКЛЮЧЕННЯ ТЕМИ «НАЙПРОСТІШІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ» В МОДЕЛЬНІ ПРОГРАМИ ВИВЧЕННЯ ПРЕДМЕТУ «АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ»	15
Воскоглоу М.	22
НЕЙТРОННЕ ОЦІНЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ УМІНЬ СТУДЕНТІВ	22
Куриленко Н., Сліпухіна І., Меньяйлов С.	27
РОЗВИТОК ПОНЯТТЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ЦИФРОВОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ В ПРАКТИЦІ ВІТЧИЗНЯНОЇ ПРИРОДНИЧОЇ ОСВІТИ	27
Мулеса П., Семеніхіна О.	37
ПЕДАГОГІЧНІ УМОВИ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ ДО ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ ВІРТУАЛЬНОЇ НАОЧНОСТІ У ПРОФЕСІЙНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ.....	37
Петренко О., Чепок О.	43
ЩОДО РОЗРОБКИ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСУ З ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ УЧНІВ ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ	43
Федчишин О., Мохун С., Чопик П.	50
ВІРТУАЛЬНИЙ ФІЗИЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ЯК ЗАСІБ УДОСКОНАЛЕННЯ ФАХОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ В УМОВАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ.....	50
Деордіца Т., Вороніна М.	56
РЕЦЕНЗІЯ НА КНИГУ: «АБЕТКА ЛОГІЧНОГО МИСЛЕННЯ»	56

CONTENTS

Avdonin K.	7
METHOD OF FINDING THE WAVE FUNCTION OF A SYSTEM OF PARTICLES	7
Bokhonov Yu., Bokhonova T.	11
THE INEQUALITIES OF CAUCHY-BUNIAKOVSKY AND HELDER AND THEIR GENERALIZATIONS.....	11
Bokhonova T., Bokhonov Yu., Matvieieva I., Tomashchuk O., Tykhonova V., Leshchynskii O., Groza V.	15
INCLUSION OF THE TOPIC «THE SIMPLEST FUNCTIONAL EQUATIONS» IN THE MODEL PROGRAMS FOR STUDYING THE SUBJECT «ALGEBRA AND THE BEGINNINGS OF ANALYSIS»	15
Voskoglou M. Gr.	22
NEUTROSOPHIC ASSESSMENT OF STUDENT MATHEMATICAL SKILLS	22
Kurylenko N., Slipukhina I., Mienailov S.	27
DEVELOPMENT OF THE CONCEPT OF INFORMATION AND DIGITAL COMPETENCE IN THE PRACTICE OF DOMESTIC SCIENCE EDUCATION	27
Mulesa P., Semenikhina O.	37
PEDAGOGICAL CONDITIONS FOR PREPARING FUTURE MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE TEACHERS FOR THE USAGE OF VIRTUAL CLARITY TOOLS IN PROFESSIONAL ACTIVITIES	37
Petrenko O., Chepok O.	43
CONCERNING THE DEVELOPING OF AN ELECTIVE COURSE ON THE ELEMENTS OF THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR STUDENTS OF INSTITUTIONS OF GENERAL SECONDARY EDUCATION	43
Fedchyshyn O., Mokhun S., Chopyk P.	50
A VIRTUAL PHYSIC EXPERIMENT AS A MEANS OF IMPROVING THE PROFESSIONAL COMPETENCIES OF STUDENTS IN THE CONDITIONS OF DISTANCE EDUCATION.....	50
Dieorditsa T., Voronina M.	56
BOOK REVIEW: «THE ALPHABET OF LOGICAL THINKING»	56

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видается з 2013.



p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571
<https://fmo-journal.org/>

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-2-001

УДК 538.9

МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ХВИЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ СИСТЕМИ ЧАСТИНОК

Костянтин АВДОНІН ✉

Військовий інститут телекомунікацій і інформатизації
імені Героїв Крут, Україна
avdonink13@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6805-0870>

METHOD OF FINDING THE WAVE FUNCTION OF A SYSTEM OF PARTICLES

Konstantin AVDONIN ✉

Military institute of telecommunications and informatization
named after Heroes of Krut, Ukraine
avdonink13@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6805-0870>

АНОТАЦІЯ

У даній роботі проводиться аналіз інтегральних рівнянь, відповідних хвильовій функції системи частинок у зв'язаному стані. Показана еквівалентність, отриманих раніше, інтегральних рівнянь типу Фредгольма і Вольтерра. Доведено, що однорідні інтегральні рівняння для хвильової функції системи взаємодіючих частинок у зв'язаному стані, мають тільки тривіальні розв'язки. Для ітерації інтегральних рівнянь і знаходження енергетичного спектру запропонована сферично симетрична форма вільних доданків, яка враховує симетрію хвильової функції.

Формулювання проблеми. З'ясування можливості та створення методів застосування інтегральних рівнянь, відповідних рівнянню Шредінгера для системи частинок, до знаходження хвильових функцій системи квантових частинок.

Матеріали і методи. Застосування перетворення Фур'є при дослідженні багатовимірних інтегральних рівнянь та використання теорем Фредгольма з загальної теорії інтегральних рівнянь.

Результати. Проведений аналіз інтегральних рівнянь відповідних хвильовій функції зв'язаного стану системи частинок, показана коректність шляху їх отримання. За альтернативою Фредгольма доведено, що фізичний зміст мають тільки хвильові функції, відповідні неоднорідним рівнянням. Для знаходження хвильової функції з інтегральних рівнянь шляхом ітерації запропонована сферично симетрична форма вільних доданків, яка неявним чином враховує спин частинок системи.

Висновки. Запропонований метод знаходження хвильової функції системи частинок є перспективним, оскільки ітераційні ряди для багатьох типів потенціальної енергії взаємодії будуть збіжними, внаслідок того, що запропоноване інтегральне рівняння відноситься до рівнянь типу Вольтерра. Слід зауважити, що запропонована форма вільних доданків не є єдиною можливою формою. При моделюванні систем частинок різного типу вільні доданки повинні відображати характерні риси системи.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: система квантових частинок; стаціонарність; стан; хвильова функція; ітерація.

ABSTRACT

This paper analyzes the integral equations corresponding to the wave function of a system of particles in a bound state. The equivalence of previously obtained integral equations of the Fredholm and Volterra type is shown. It is proved that homogeneous integral equations for the wave function of a system of interacting particles in a bound state have only trivial solutions. For the iteration of integral equations and finding the energy spectrum, a spherically symmetric form of free terms is proposed, which takes into account the symmetry of the wave function.

Formulation of the problem. Clarifying the possibility and creating methods of applying integral equations corresponding to the Schrödinger equation for a system of particles to finding the wave functions of a system of quantum particles.

Materials and methods. Application of the Fourier transform in the study of multidimensional integral equations and the use of Fredholm's theorems in the general theory of integral equations.

Results. The analysis of the integral equations corresponding to the wave function of the bound state of the system of particles was carried out, and the correctness of the way of their obtaining was shown. According to Fredholm's alternative, it is proved that only wave functions corresponding to inhomogeneous equations have a physical meaning. To find the wave function from integral equations by iteration, a spherically symmetric form of free terms is proposed, which implicitly takes into account the spin of the system particles.

Conclusions. The proposed method of finding the wave function of the particle system is promising since the iteration series for many types of interaction potential energy will converge, due to the fact that the proposed integral equation refers to Volterra-type equations. It should be noted that the proposed form of free terms is not the only possible form. When modeling particle systems of various types, free terms must reflect the characteristic features of the system.

KEYWORDS: system of quantum particles; stationarity; state; wave function; iteration.

ВСТУП

Постановка проблеми. На сьогоднішній день наноструктуровані матеріали є об'єктом зростаючого інтересу для фундаментальної та прикладної науки. У зв'язку з цим, особливої актуальності набувають теоретичні методи аналізу квантових систем з багатьох частинок.

Аналіз актуальних досліджень. Наприклад, у роботі (Полукетов, 2015) пропонується термодинамічна теорія збурень для багаточастинкової системи класичних частинок, в якій модель самоузгодженого поля використовується як основне наближення. У роботах (Rakov, 2016; Weygauch, 2013) створений ефективний та стабільний алгоритм для опису симетричних матричних добуткових станів з періодичними граничними умовами. У роботі (Olemskoi et al., 2013) спираючись на методи квантової теорії поля розроблена статистична теорія складних систем з неадитивними потенціалами. У роботі (Ющенко & Бадалян, 2013) для опису поведінки не екстенсивних систем застосовується деформований гамільтоніан Ізінга. Але, у фундаментальних та прикладних дослідженнях процесів, що відбуваються у фізичних системах, інтегральні рівняння, відповідні хвильовій функції системи частинок є потужним, дійовим засобом

Для цитування:

Авдонін К. Метод знаходження хвильової функції системи частинок. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 2. С. 7-10. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-2-001

Авдонін К. (2023). Метод знаходження хвильової функції системи частинок. *Фізико-математична освіта*, 38(2), 7-10. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-001>

For citation:

Avdonin, K. (2023). Method of finding the wave function of a system of particles. *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 7-10. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-001>

Avdonin, K. (2023). Metod znakhodzhennia khvylovoi funktsii systemy chastynek [Method of finding the wave function of a system of particles]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 7-10. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-001>

отримання результатів. В роботі (Avdonin & Kovalchuk, 2019) для хвильової функції, відповідної зв'язаному стану системи частинок, отримане ядро інтегрального рівняння типу Фредгольма, яке у випадку однієї частинки збігається з відомим ядром одночастинкової функції. Окрім цього для хвильової функції зв'язаних станів системи частинок, за допомогою розробленого метода обернення диференціальних операторів, побудоване рівняння типу Вольтерра, яке в граничному випадку збігається з відомим одновимірним рівнянням.

Мета статті. Побудовані у роботі (Avdonin & Kovalchuk, 2019) інтегральні рівняння мають вигляд:

$$\varphi_N(\vec{z}) = \varphi_{0N}(\vec{z}) + \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G_N(\vec{z} - \vec{\xi}) u \varphi(\vec{\xi}) d\vec{\xi}; \quad (1)$$

$$\varphi_N(\vec{z}) = \varphi_{0N}(\vec{z}) + \int_{(z_j)}^{(+\infty)} \int_{(-\infty)}^{(\eta_j)} g_N(\vec{\chi}) u \varphi(\vec{\xi}) d\vec{\xi} d\vec{\eta}. \quad (2)$$

де N – кількість частинок у системі, z_j – зважені координати частинок, які дорівнюють добутку координати частинки x_j на корінь квадратний з маси відповідної частинки:

$$z_j = x_j \sqrt{\mu_j}; \quad (3)$$

$$\vec{\chi} = 2\vec{\eta} - \vec{z} - \vec{\xi}, \quad (4)$$

інтегральні представлення функцій G_N та g_N мають вигляд:

$$G_N = -\frac{1}{2^{3N-1} \pi^{\frac{3N}{2}}} \int_{x_1}^{+\infty} \lambda^{3(N-1)} \exp\left\{-\frac{R^2 \lambda^2}{4} - \frac{k^2}{\lambda^2}\right\} d\lambda; \quad (5)$$

$$g_N = -\frac{1}{2^{3N-1} \pi^{\frac{3N}{2}}} \int_{x_1}^{+\infty} \lambda^{9N-3} \prod_{j=1}^{3N} (\chi_j) \exp\left\{-\frac{\chi^2 \lambda^2}{4} - \frac{k^2}{\lambda^2}\right\} d\lambda, \quad (6)$$

$$u = 2W_p / \hbar^2; \quad k = \sqrt{2(-E)} / \hbar; \quad E, W_p - \text{енергія та потенціальна енергія системи частинок}; \quad R = |\vec{z} - \vec{\xi}|.$$

Метою роботи є дослідження властивостей інтегральних рівнянь (1); (2), встановлення зв'язку між ними та з'ясування можливості одержання за їх допомогою хвильової функції багаточастинкової системи.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

При встановленні зв'язку між багатовимірними інтегральними рівняннями застосовувався метод перетворень Фур'є, при дослідженні можливості ітерації інтегральних рівнянь використовувались теореми Фредгольма з загальної теорії інтегральних рівнянь.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведений аналіз інтегральних рівнянь (1); (2), відповідних хвильовій функції зв'язаного стану системи частинок, показав їх еквівалентність, що свідчить про коректність шляху їх отримання, оскільки рівняння були отримані різними засобами.

Якщо у рівнянні (1) перейти від зважених координат до звичайних координат, то інтегральне представлення функції Гріна (5), при значенні хвильового числа рівному k буде таким:

$$G_{N,k}(\vec{x}, \vec{\xi}) = -\frac{p}{2^{3N-1} \pi^{\frac{3N}{2}}} \int_{x_1}^{+\infty} \lambda^{3(N-1)} \exp\left\{-\frac{q^2(\vec{x}, \vec{\xi}) \lambda^2}{4} - \frac{k^2}{\lambda^2}\right\} d\lambda, \quad (7)$$

$$\text{де } p = \prod_{j=1}^{3N} \sqrt{\mu_j}; \quad q(\vec{x}, \vec{\xi}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{3N} \mu_j (x_j - \xi_j)^2}.$$

Для функцій Гріна (7), знайдена згортка. Якщо позначити згортку через S_{N,k_1,k_2} :

$$S_{N,k_1,k_2} = \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} G_{N,k_1}(\vec{x} - \vec{\xi}_1) G_{N,k_2}(\vec{x} - \vec{\xi}_2) d\vec{x}, \quad (8)$$

то отриманий результат має вигляд:

$$\text{якщо } k_1 \neq k_2, \text{ то:} \quad S_{N,k_1,k_2} = \frac{G_{N,k_2}(\vec{\xi}_2, \vec{\xi}_1) - G_{N,k_1}(\vec{\xi}_2, \vec{\xi}_1)}{k_1^2 - k_2^2}, \quad (9)$$

$$\text{якщо } k_1 = k_2 = k, \text{ то:} \quad S_{N,k,k} = \frac{2}{k} \frac{dG_{N,k}(\vec{\xi}_2, \vec{\xi}_1)}{dk}. \quad (10)$$

Використовуючи отримані вирази для згортки (9); (10) доведено, що для хвильових функцій, відповідних однорідному рівнянню (1), виконується тільки умова ортогональності, умова нормування не може бути виконана. Звідки випливає, що фізично змістовні розв'язки однорідного інтегрального рівняння (1) тільки тривіальні.

Для неоднорідного інтегрального рівняння (1), з точністю до постійного, нормувального множника, пропонується вільний доданок у вигляді добутку двох функцій, які враховують симетрію хвильової функції системи частинок, функція Φ_{N_Φ} відповідає ферміонам, функція Φ_{N_B} відповідає бозонам:

$$\varphi_{0N} = \Phi_{N_\Phi} \Phi_{N_B}; \quad (11)$$

$$\Phi_{N_\Phi} = \begin{vmatrix} \psi_1(\bar{x}_1) & \psi_1(\bar{x}_2) & \dots & \psi_1(\bar{x}_N) \\ \psi_2(\bar{x}_1) & \psi_2(\bar{x}_2) & \dots & \psi_2(\bar{x}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(\bar{x}_1) & \psi_N(\bar{x}_2) & \dots & \psi_N(\bar{x}_N) \end{vmatrix}; \quad (12)$$

$$\Phi_{N_B} = \sum_{i \neq j} \hat{P}_{ij} \psi_1(\bar{x}_1) \psi_2(\bar{x}_2) \dots \psi_N(\bar{x}_N); \quad (13)$$

$\hat{P}_{ij}$ – оператор перестановки векторів $\bar{x}_i$ і $\bar{x}_j$, сумування ведеться по всіх можливих перестановках; ψ_j це функція, відповідна одній частинці, яку в сферичній системі координат можна записати у вигляді:

$$\psi_j = \exp(im\theta_j) \sin^{m_j} \vartheta_j \left(\frac{d}{d(\cos \vartheta_j)} \right)^{m_j} P_{l_j}(\cos \vartheta_j) r_j^{l_j} \left(\frac{1}{r_j} \frac{d}{dr_j} \right)^{l_j+1} \exp\{-k_j r_j\}; \quad (14)$$

P_{l_j} – поліноми Лежандра; $k_j = \sqrt{2(-E_j)/\hbar}$; $\sum_{j=1}^N k_j^2 = k^2$; $r_j = \sqrt{\mu_j \sum_{n=1}^3 x_{jn}^2}$; $l_j = 0, 1, 2, \dots$;

m_j – ціле число, верхня і нижня межа для якого становить $\pm l_j$.

Хвильова функція ψ_j є розв'язком тривимірному рівнянню Шредінгера для однієї частинки, яка знаходиться у сферично-симетричному однорідному полі і має від'ємне значення енергії.

В якості вільного доданку інтегрального рівняння (1), який є нульовим наближенням для хвильової функції системи взаємодіючих частинок, пропонується хвильова функція системи не взаємодіючих частинок у сферично-симетричному однорідному полі, яку можна представити у вигляді лінійної комбінації добутків хвильових функцій ψ_j всіх частинок системи. Сума енергій частинок у нульовому наближенні повинна дорівнювати енергії системи взаємодіючих частинок. Пошук дозволених значень енергії системи взаємодіючих частинок можна здійснювати за допомогою умов ортогональності і нормування хвильових функцій системи частинок.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведений аналіз інтегральних рівнянь (1); (2), відповідних хвильовій функції зв'язаного стану системи частинок, показав по перше: їх еквівалентність рівнянь, по друге: за альтернативою Фредгольма показано, що фізичний зміст мають тільки хвильові функції, відповідні неоднорідним інтегральним рівнянням.

Для знаходження хвильової функції з інтегральних рівнянь шляхом ітерації запропонована сферично симетрична форма вільних доданків (11), яка враховує спин частинок системи.

Результати, отримані в даній статті, відкривають нові можливості для моделювання, знаходження хвильової функції та визначення енергетичного спектру системи частинок. Ітераційні ряди, утворені за інтегральними рівняннями, для багатьох типів потенціальної енергії взаємодії будуть збіжними, оскільки інтегральне рівняння (2) відноситься до рівнянь типу Вольтерра. Слід зауважити, що запропонована форма вільних доданків не є єдиною можливою формою. При моделюванні систем частинок різного типу вільні доданки повинні відображати характерні риси системи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Avdonin, K.V., & Kovalchuk, O.V. (2019). Integral equations for the wave function of particle systems. *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics*, 22(3), 319–322.
2. Olemskoi, A. I., Yushchenko, O. V., & Badalyan, A. Yu. (2013). Statistical field theory of a non-additive system motion. *Theoretical and Mathematical Physics*, 174(3), 386–405.
3. Rakov, M. V., Weyrauch, M., & Braiort-Orrs, B. (2016). Symmetries and entanglement in the one-dimensional spin-1/2 XXZ model. *Phys. Rev. B*, 93(5), 054417.
4. Weyrauch, M., & Rakov, M. V. (2013). Efficient MPS algorithm for periodic boundary conditions and applications. *Ukr. J. Phys.*, 58(7), 657–665.
5. Полукетов Ю.М. (2015). Термодинамічна теорія збурень для класичних систем в наближенні самоузгодженого поля. *Український фізичний журнал*, 60(6), 556–563.
6. Ющенко, О. В., & Бадалян, А. Ю. (2013). Мікроскопічний опис не екстенсивних систем у рамках моделі Ізінга. *Український фізичний журнал*, 58(5), 497–504.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Avdonin, K.V., & Kovalchuk, O.V. (2019). Integral equations for the wave function of particle systems. *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics*, 22(3), 319–322.
2. Olemskoi, A. I., Yushchenko, O. V., & Badalyan, A. Yu. (2013). Statistical field theory of a non-additive system motion. *Theoretical and Mathematical Physics*, 174(3), 386–405.

3. Rakov, M. V., Weyrauch, M., & Braierr-Orrs, B. (2016). Symmetries and entanglement in the one-dimensional spin-1/2 XXZ model. *Phys. Rev. B*, 93(5), 054417.
4. Weyrauch, M., & Rakov, M. V. (2013). Efficient MPS algorithm for periodic boundary conditions and applications. *Ukr. J. Phys.*, 58(7), 657–665.
5. Poluektov, Yu.M. (2015). Termodynamichna teoriia zburen dla klasychnykh system v nablyzhenni samouzghodzhenooho polia [Thermodynamic perturbation theory for classical systems in the approximation of a self-consistent field]. *Ukrainskyi fizychnyi zhurnal – Ukrainian Journal of Physics*, 60(6), 556–563. (in Ukrainian).
6. Yushchenko, O. V., & Badalyan, A. Yu. (2013). Mikroskopichni opys ne ekstensyivnykh system u ramkakh modeli Izingha [Microscopic description of non-extensive systems within the Ising model]. *Ukrainskyi fizychnyi zhurnal – Ukrainian Journal of Physics*, 58(5), 497–504. (in Ukrainian).





DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-2-002

УДК 517.2/.3

НЕРІВНОСТІ КОШІ-БУНЯКОВСЬКОГО І ГЕЛДЕРА ТА ЇХНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Юрій БОХОНОВ ✉

Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, Україна

yubochonoff@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-3355-008X>

Тетяна БОХОНОВА

Київський природничо-науковий ліцей № 145, Україна

bohonova@ukr.net

<https://orcid.org/0000-0002-8186-5238>

THE INEQUALITIES OF CAUCHY-BUNIAKOVSKY AND HELDER AND THEIR GENERALIZATIONS

Yuriy BOKHONOV ✉

Kyiv Polytechnic Institute, Ukraine

yubochonoff@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-3355-008X>

Tetyana BOKHONOVA

Kyiv Natural Science Lyceum No. 145, Ukraine

bohonova@ukr.net

<https://orcid.org/0000-0002-8186-5238>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Класичним нерівностям присвячена різноманітна математична література. Нерівності Коші-Буняковського та Гелдера лежать в основі геометрії унітарних та нормованих просторів. У статті розглянуто узагальнення цих конструкцій – полілінійні форми і нерівності для них. Зміст узагальнених нерівностей полягає в оцінці полілінійної форми від системи векторів через їхні норми. Сама форма за зовнішнім виглядом є узагальненням скалярного добутку від довільної кількості векторів. Суттєво, що доведення проводяться елементарними методами, без використання засобів математичного аналізу. Відомо, що нерівність Коші-Буняковського є частинним випадком нерівності Гелдера. В роботі показується, що навпаки, другу з цих нерівностей може бути виведено з першої. Застосування доведених нерівностей до конкретних векторів дає одержання відомих результатів, зокрема, нерівності для середніх степеневих і деяких інших, які авторам не зустрічались у математичній літературі. Нерівності можуть бути перенесені на вектори з нескінченновимірних просторів послідовностей. Їх можна застосовувати також для пошуку екстремуму деяких функцій і при підготовці до олімпіад.

Матеріали і методи. Для доведення узагальненої нерівності Коші-Буняковського використано нерівність Коші для невід'ємних чисел, що є координатами векторів багатовимірного простору. При певному виборі таких векторів з цієї нерівності доводиться узагальнена нерівність Гелдера. Вибираючи вектори різноманітними способами, можна одержати різні змістовні нерівності.

Результати. Доведено узагальнені нерівності Коші-Буняковського, Гелдера, нерівність для середніх степеневих та деякі інші.

Висновки. Застосування узагальнених нерівностей Коші-Буняковського і Гелдера до різних систем векторів з невід'ємними координатами дає нерівності – як вже відомі, так і нові і досить змістовні. Їхнє доведення зводиться лише до вибору потрібної системи векторів. На цьому шляху вдається легко доводити нерівності, які можна зустріти на математичних олімпіадах.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нерівність Коші-Буняковського; нерівність Гелдера; вектор; координати вектора; лінійний простір; норма; нерівність трикутника; середнє степеневе.

ABSTRACT

Formulation of the problem. Various mathematical literature is devoted to classical inequalities. The Cauchy-Buniakowski and Helder inequalities are at the heart of the geometry of unitary and normed spaces. The article considers the generalization of these constructions – polylinear forms and inequalities for them. The content of generalized inequalities consists in estimating a polylinear form from a system of vectors through their norms. The form itself in appearance is a generalization of the scalar product of an arbitrary number of vectors. It is essential that the proofs are carried out by elementary methods, without using means of mathematical analysis. It is known that the Cauchy-Buniakowski inequality is a partial case of Helder's inequality. The paper shows that, on the contrary, the second of these inequalities can be derived from the first. The application of proven inequalities to specific vectors yields well-known results, in particular, inequalities for power averages and some others that the authors did not encounter in the mathematical literature. Inequalities can be transferred to vectors from infinite-dimensional sequence spaces. They can also be used to find the extremum of some functions and in preparation for the Olympics.

Materials and methods. To prove the generalized Cauchy-Buniakowski inequality, the Cauchy inequality was used for non-negative numbers, which are the coordinates of vectors in a multidimensional space. With a certain choice of such vectors, the generalized Helder inequality is proved from this inequality. By choosing vectors in various ways, you can get different meaningful inequalities.

The results. The generalized Cauchy-Buniakowski, Helder inequalities, the inequality for power averages, and some others are proven.

Conclusions. The application of the generalized Cauchy-Buniakowski and Helder inequalities to various systems of vectors with non-negative coordinates gives inequalities – both well-known and new and quite meaningful. Their proof is reduced only to the selection of the desired system of vectors. In this way, it is possible to easily prove inequalities that can be found at mathematical Olympiads.

KEYWORDS: Cauchy-Buniakovsky inequality; Helder's inequality; vector; vector coordinates; linear space; norm; triangle inequality; power average.

ВСТУП

1. Постановка задачі

Нехай $A_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$, $k = 1, \dots, m$ – система векторів лінійного простору $\mathbb{R}^n$. Введемо норму в цьому просторі:

$\|A_k\| = \sqrt[m]{\sum_{j=1}^n |a_{kj}|^m}$. Розглянемо допоміжні вектори $X_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$, $k = 1, \dots, m$, де $x_{kj} = \frac{a_{kj}}{\|A_k\|} = \frac{a_{kj}}{\sqrt[m]{\sum_{j=1}^n |a_{kj}|^m}}$. З їхнього

означення випливає, що $\|X_k\| = \sqrt[m]{\sum_{j=1}^n |x_{kj}|^m} = 1$.

Для цитування:

Бохонов Ю., Бохонова Т. Нерівності Коші-Буняковського і Гелдера та їхнє узагальнення. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 2. С. 11-14. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-2-002

Bohonov, Yu., & Bohonova, T. (2023). Nerivnosti Koshi-Buniakovskogo i Geldera ta yikhne uzagalnennia. *Fiziko-matematichna osvita*, 38(2), 11-14. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-002>

For citation:

Bokhonov, Yu., & Bokhonova, T. (2023). The inequalities of Cauchy-Buniakovsky and Helder and their generalizations. *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 11-14. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-002>

Bokhonov, Yu., & Bokhonova, T. (2023). Nerivnosti Koshi-Buniakovskoho i Helder ta yikhnie uzagalnennia [The inequalities of Cauchy-Buniakovsky and Helder and their generalizations]. *Fiziko-matematichna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 11-14. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-002>

Далі будемо вважати всі a_{kj} невід'ємними, інакше будемо записувати нерівності для модулів. Задача полягає в узагальненні двох класичних нерівностей для $m \geq 2$ векторів:

1) узагальнена нерівність Коші-Буняковського:

$$a_{11}a_{21}\dots a_{m1} + \dots + a_{1n}a_{2n}\dots a_{mn} \leq \sqrt[m]{(a_{11}^m + \dots + a_{1n}^m) \dots \sqrt[m]{(a_{m1}^m + \dots + a_{mn}^m)}}; \quad (1)$$

2) узагальнена нерівність Гельдера:

$$\forall p_k > 1, k=1, \dots, l, \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_l} = 1$$

$$a_{11}a_{21}\dots a_{l1} + \dots + a_{1n}a_{2n}\dots a_{ln} \leq (a_{11}^{p_1} + \dots + a_{1n}^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} \dots (a_{l1}^{p_l} + \dots + a_{ln}^{p_l})^{\frac{1}{p_l}}.$$

В обох нерівностях рівності мають місце тоді і лише тоді, коли вектори колінеарні.

Нерівності Коші-Буняковського, Гелдера та деякі інші викладено, напр., в [2, 3]. Багато класичних нерівностей в сучасній літературі містяться в цитованих роботах [1-7]. При цьому для доведення в більшості застосовуються методи математичного аналізу.

II. Доведення нерівностей

Для кожного $j=1, \dots, n$ утворимо добуток $a_{1j}a_{2j}\dots a_{mj} = \|A_1\| \dots \|A_m\| x_{1j}x_{2j}\dots x_{mj}$ j -их координат цих векторів та скористаємось нерівністю Коші для $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj} \geq 0$:

$$a_{1j}a_{2j}\dots a_{mj} = \|A_1\| \dots \|A_m\| x_{1j}x_{2j}\dots x_{mj} \leq \|A_1\| \dots \|A_m\| \frac{x_{1j}^m + x_{2j}^m + \dots + x_{mj}^m}{m}.$$

Як відомо, рівність в нерівності Коші має місце тоді і тільки тоді, коли всі множники рівні між собою: $x_{1j} = x_{2j} = \dots = x_{mj}$ ($j=1, \dots, n$). Це означає, що при кожному j має місце: $\frac{a_{1j}}{\|A_1\|} = \frac{a_{2j}}{\|A_2\|} = \dots = \frac{a_{mj}}{\|A_m\|}$. Значить, координати векторів $A_k, k=1, \dots, m$ пропорційні, тобто, ці вектори колінеарні.

Додаючи всі такі нерівності для $j=1, \dots, n$, будемо мати

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{1j}a_{2j}\dots a_{mj} &= a_{11}a_{21}\dots a_{m1} + \dots + a_{1n}a_{2n}\dots a_{mn} \leq \\ &\leq \|A_1\| \dots \|A_m\| \left(\frac{x_{11}^m + x_{21}^m + \dots + x_{m1}^m}{m} + \dots + \frac{x_{1n}^m + x_{2n}^m + \dots + x_{mn}^m}{m} \right) = \\ &= \|A_1\| \dots \|A_m\| \left(\frac{x_{11}^m + x_{12}^m + \dots + x_{1n}^m}{m} + \dots + \frac{x_{m1}^m + x_{m2}^m + \dots + x_{mn}^m}{m} \right) = \|A_1\| \dots \|A_m\| = \sqrt[m]{\sum_{j=1}^n a_{1j}^m} \dots \sqrt[m]{\sum_{j=1}^n a_{mj}^m}. \end{aligned}$$

Остаточно, одержимо узагальнену нерівність Коші-Буняковського:

$$a_{11}a_{21}\dots a_{m1} + \dots + a_{1n}a_{2n}\dots a_{mn} \leq \sqrt[m]{(a_{11}^m + \dots + a_{1n}^m) \dots \sqrt[m]{(a_{m1}^m + \dots + a_{mn}^m)}}$$

З цієї нерівності випливає:

$$(a_{11}a_{21}\dots a_{m1} + \dots + a_{1n}a_{2n}\dots a_{mn})^m \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}^m \right) \dots \left(\sum_{j=1}^n a_{mj}^m \right) \quad (2)$$

або у компактному вигляді

$$\left(\sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^m a_{kj} \right)^m \leq \prod_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_{kj}^m.$$

Варто повторити, що рівність в цій нерівності має місце тоді і тільки тоді, коли координати векторів $A_k, k=1, \dots, m$ пропорційні, тобто, вектори колінеарні.

Доведення узагальненої нерівності Гелдера.

Розглянемо $q_l \in \mathbb{N}$ однакових векторів $\left((a_{11})^{\frac{1}{q_l}}, (a_{12})^{\frac{1}{q_l}}, \dots, (a_{1n})^{\frac{1}{q_l}} \right)$, $q_l \in \mathbb{N}$. Позначимо: $q_1 + \dots + q_l = m$.

Застосовуючи до цих векторів доведену узагальнену нерівність Коші-Буняковського, одержимо:

$$\begin{aligned} (a_{11})^{\frac{1}{q_1}} \dots (a_{11})^{\frac{1}{q_l}} \dots (a_{11})^{\frac{1}{q_l}} \dots (a_{11})^{\frac{1}{q_1}} + \dots + (a_{1n})^{\frac{1}{q_1}} \dots (a_{1n})^{\frac{1}{q_l}} \dots (a_{1n})^{\frac{1}{q_l}} \dots (a_{1n})^{\frac{1}{q_1}} \leq \\ \leq \left(a_{11}^{\frac{q_1}{m}} + \dots + a_{1n}^{\frac{q_1}{m}} \right)^{\frac{q_1}{m}} \dots \left(a_{11}^{\frac{q_l}{m}} + \dots + a_{1n}^{\frac{q_l}{m}} \right)^{\frac{q_l}{m}}. \end{aligned}$$

За умови ліва частина нерівності дорівнює $a_{11}a_{21}\dots a_{l1} + \dots + a_{1n}a_{2n}\dots a_{ln}$.

Введемо позначення: $p_1 = \frac{m}{q_1} > 1, \dots, p_l = \frac{m}{q_l} > 1$. Звідси

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_l} = \frac{q_1}{m} + \dots + \frac{q_l}{m} = 1.$$

Це дає змогу переписати нерівність у вигляді

$$a_{11}a_{21}\dots a_{l1} + \dots + a_{1n}a_{2n}\dots a_{ln} \leq (a_{11}^{p_1} + \dots + a_{1n}^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} \dots (a_{l1}^{p_l} + \dots + a_{ln}^{p_l})^{\frac{1}{p_l}}.$$

Одержимо деякі наслідки з доведених нерівностей.

III. Приклади

Приклад 1. $m=2$. Застосуємо нерівність трикутника а потім доведену нерівність (2) для векторів $(a_1, \dots, a_n)$ і $(b_1, \dots, b_n)$ з необов'язково невід'ємними координатами:

$$|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \leq |a_1||b_1| + \dots + |a_n||b_n| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n b_j^2}.$$

Це відома нерівність Коші-Буняковського і, як відомо, рівність в цій нерівності має місце тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні, тобто, координати пропорційні.

Приклад 2. Застосуємо нерівність (2) для k однакових векторів $(a_1, \dots, a_n)$ і для $m-k, m > k$ однакових векторів $(b_1, \dots, b_n)$:

$$(a_1^k b_1^{m-k} + \dots + a_n^k b_n^{m-k})^m \leq (a_1^m + \dots + a_n^m)^k (b_1^m + \dots + b_n^m)^{m-k} \quad (3)$$

Приклад 3. Застосуємо нерівність (3) для k однакових векторів $(a_1, \dots, a_n)$ і для $m-k, m > k$ однакових векторів $(1, \dots, 1)$ (тобто, усі $b_j = 1, j = 1, \dots, n$). Одержимо відому нерівність

$$(a_1^k + \dots + a_n^k)^m \leq n^{m-k} (a_1^m + \dots + a_n^m)^k. \quad (4)$$

Зокрема, при $k = 1$

$$(a_1 + \dots + a_n)^m \leq n^{m-1} (a_1^m + \dots + a_n^m). \quad (5)$$

З (4) випливає:

$$\left(\frac{a_1^k + \dots + a_n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} \leq \left(\frac{a_1^m + \dots + a_n^m}{n} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (6)$$

Вирази зліва і справа називаються середніми степеневими відповідно степенів k і m . Отже, доведено відому нерівність для середніх степеневих невід'ємних чисел при $m > k$.

Приклад 4. Застосуємо нерівність (2) для k однакових векторів $(a_1, \dots, a_n)$ і для $m-k, m > k$ однакових векторів $(a_n, \dots, a_1)$. Зрозуміло, що їхні норми однакові. Маємо:

$$a_1^k a_n^{m-k} + \dots + a_n^k a_1^{m-k} \leq a_1^m + \dots + a_n^m.$$

Зауваження. У другому векторі можна взяти будь-яку іншу перестановку координат першого вектора.

Приклад 5. Нехай $m = m_1 + m_2$. Застосуємо нерівність (3) для m_1 однакових векторів $(a_1, \dots, a_n)$ і для m_2 однакових векторів $\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right)$. При цьому $b_j = \frac{1}{a_j}, j = 1, \dots, n$:

$$(a_1^{m_1-m_2} + \dots + a_n^{m_1-m_2})^{m_1+m_2} \leq (a_1^m + \dots + a_n^m)^{m_1} \left(\frac{1}{a_1^m} + \dots + \frac{1}{a_n^m} \right)^{m_2}.$$

Приклад 6. Застосуємо доведену нерівність (2) до системи векторів $(a_1, \dots, a_n), (a_1^2, \dots, a_n^2), \dots, (a_1^m, \dots, a_n^m)$:

$$\left(a_1^{\frac{m(m+1)}{2}} + \dots + a_n^{\frac{m(m+1)}{2}} \right)^m \leq (a_1^n + \dots + a_n^n) (a_1^{2n} + \dots + a_n^{2n}) \dots (a_1^{mn} + \dots + a_n^{mn}).$$

Приклад 7. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \left(0, \frac{\pi}{2^m} \right)$. Розглянемо вектори з додатними координатами:

$$(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n), (\cos 2\alpha_1, \cos 2\alpha_2, \dots, \cos 2\alpha_n), \dots, (\cos 2^{m-1}\alpha_1, \cos 2^{m-1}\alpha_2, \dots, \cos 2^{m-1}\alpha_n)$$

і застосуємо до них нерівність (2):

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha_1 \cos 2\alpha_1 \cos 2^{m-1}\alpha_1 + \cos \alpha_2 \cos 2\alpha_2 \cos 2^{m-1}\alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n \cos 2\alpha_n \cos 2^{m-1}\alpha_n)^m \leq \\ & \leq (\cos^m \alpha_1 + \cos^m \alpha_2 + \dots + \cos^m \alpha_n) (\cos^m 2\alpha_1 + \cos^m 2\alpha_2 + \dots + \cos^m 2\alpha_n) \times \\ & \times \dots \times (\cos^m 2^{m-1}\alpha_1 + \cos^m 2^{m-1}\alpha_2 + \dots + \cos^m 2^{m-1}\alpha_n). \end{aligned}$$

Використовуючи відому формулу $\cos \varphi \cos 2\varphi \dots \cos 2^{m-1}\varphi = \frac{\sin 2^m \varphi}{2^m \sin \varphi}, \varphi \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, перепишемо одержану нерівність у наступному вигляді:

$$\left(\frac{\sin 2^m \alpha_1}{\sin \alpha_1} + \frac{\sin 2^m \alpha_2}{\sin \alpha_2} + \dots + \frac{\sin 2^m \alpha_n}{\sin \alpha_n} \right)^m \leq$$

$$\leq 2^{m^2} (\cos^m \alpha_1 + \cos^m \alpha_2 + \dots + \cos^m \alpha_n) (\cos^m 2\alpha_1 + \cos^m 2\alpha_2 + \dots + \cos^m 2\alpha_n) \times \\ \times \dots \times (\cos^m 2^{m-1} \alpha_1 + \cos^m 2^{m-1} \alpha_2 + \dots + \cos^m 2^{m-1} \alpha_n).$$

ОБГОВОРЕННЯ

Доведені нерівності мають важливе значення самі по собі, але також є цікавими наслідки з них. По-перше, за допомогою узагальненої нерівності Коші-Буняковського легко доводиться класична нерівність для середніх степеневих. По-друге, вибираючи різні значення для координат векторів $A_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$, $k = 1, \dots, m$, можна одержати різні цікаві нерівності. В такий спосіб авторам вдавалось легко розв'язати деякі олімпіадні задачі.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Серед подальших можливих результатів можливе розповсюдження доведених нерівностей на нескінченновимірні простори послідовностей. Цікаво було б довести аналогічні нерівності для інтегралів методами математичного аналізу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Aldaz, J. M., Barza, S., Fujii, M., & Moslehian, M. S. (2015). Advances in Operator Cauchy—Schwarz inequalities and their reverses. *Annals of Functional Analysis*, 6 (3), 275–295, <https://doi.org/10.15352/afa/06-3-20>.
2. Bokhonov, Yu.Ye. (2021). Математичний аналіз: Диференціальне числення функцій однієї змінної. *КПІ. Навч. посібник. Kyiv: KPI named after Igor Sikorskiy*. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42337>
3. Mitrinovic, D. S., & Pecaric, J. E. (1993). *Springer Science+Business Media Dordrecht*, 83-99. https://books.google.ru/books?id=A0XwCAAAQBAJ&pg=PA83&hl=ru&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false
4. Steele, J.M. (2004). The Cauchy_Schwarz Master Class. *Cambridge University Press*.
5. Бохонов, Ю.Є. (2022). Узагальнення нерівностей Коші-Буняковського та Гелдера. Наука в контексті глобальної трансформації суспільства. Матеріали науково-практичної конференції (м. Полтава, 26-27 серпня 2022 р.), *Одеса: Видавництво «Молодий вчений»*. <https://molodyivchenyi.ua/omp/index.php/conference/catalog/book/8>
6. Журавська, Г.В., & Шраменоко, В.М. (2010). Нерівності: Методичні вказівки до курсів лінійної алгебри та математичного аналізу *КПІ*. <https://mph.kpi.ua/assets/img/Shramenko-V.M/neravenstva1.pdf>
7. Мартиненко, О.В., & Чкана Я.О. (2017). Використання методів математичного аналізу для доведення нерівностей. *Актуальні питання природничо-математичної освіти*. 1(9), 2017 35–44. http://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/0564/1362/2/APPMO_N9_2017.pdf

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Aldaz, J. M., Barza, S., Fujii, M., & Moslehian, M. S. (2015). Advances in Operator Cauchy—Schwarz inequalities and their reverses. *Annals of Functional Analysis*, 6 (3), 275–295, <https://doi.org/10.15352/afa/06-3-20>.
2. Bokhonov, Yu.Ye. (2021). Matematychnyy analiz: Dyferentsial'ne chyslennya funktsiy odniyeyi zminnoyi [Mathematical analysis: Differential calculus of functions of one variable]. *КПІ. Tutorial. Kyiv: KPI named after Igor Sikorskiy*. (In Ukrainian).
3. Mitrinovic, D. S., & Pecaric, J. E. (1993). *Springer Science+Business Media Dordrecht*, 83-99. https://books.google.ru/books?id=A0XwCAAAQBAJ&pg=PA83&hl=ru&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false
4. Steele, J.M. (2004). The Cauchy_Schwarz Master Class. *Cambridge University Press*.
5. Bokhonov, Yu.Ye. (2022). Uzahal'neniya nerivnostey Koshi-Bunyakovskoho ta Helderera [Generalization of the Cauchy-Buniakowski and Helder inequalities]. *Science in the context of global transformation of society. Materials of the scientific and practical conference* (Poltava, August 26-27, 2022), *Odesa: "Young Scientist" Publishing House*. <https://molodyivchenyi.ua/omp/index.php/conference/catalog/book/8> (In Ukrainian).
6. Zhuravs'ka, H.V., & Shramenko, V.M. (2010). Nerivnosti: Metodychni vkazivky do kursiv liniynoyi alhebyr ta matematychnoho analizu [Inequalities: Guidelines for Linear Algebra and Mathematical Analysis Courses.]. *K.: KPI named after Igor Sikorskiy*. <https://mph.kpi.ua/assets/img/Shramenko-V.M/neravenstva1.pdf> (In Ukrainian).
7. Martynenko, O. V., & Chkana, Ya. O. (2017). Vykorystannya metodiv matematychnoho analizu dlya dovedennya nerivnostey [Using methods of mathematical analysis to prove inequalities]. *Current issues of science and mathematics education*, 1(9), 35–44. http://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/0564/1362/2/APPMO_N9_2017.pdf (In Ukrainian).



Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
 Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
 Виходить з 2013.



p-ISSN 2413-1571
 e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571
<https://fmo-journal.org/>

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-2-003

УДК 37.02:517.9

ВКЛЮЧЕННЯ ТЕМИ «НАЙПРОСТІШІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ» В МОДЕЛЬНІ ПРОГРАМИ ВИВЧЕННЯ ПРЕДМЕТУ «АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ»

Тетяна БОХОНОВА

Київський природничо-науковий ліцей № 145, Україна

bohonova@ukr.net

<https://orcid.org/0000-0002-8186-5238>

Юрій БОХОНОВ

Національний технічний університет України «Київський
 політехнічний інститут» імені Ігоря Сікорського, Україна

yubochonoff@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-3355-008X>

Ірина МАТВІЄВА

Національний авіаційний університет, Україна

iryna.matvieieva@npp.nau.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0002-8787-6989>

Олексій ТОМАШЧУК

Національний авіаційний університет, Україна

oleksii.tomashchuk@npp.nau.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0001-5631-3418>

Вікторія ТИХОНОВА

Фаховий коледж інженерії, управління

та землевпорядкування НАУ, Україна

vivitykhonova@gmail.com

Олег ЛЕШЧИНСЬКИЙ

Фаховий коледж інженерії, управління

та землевпорядкування НАУ, Україна

oleschchinsky17.1@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-6005-7779>

Валентина ГРОЗА

Національний авіаційний університет, Україна

valentina.groza@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-1668-1878>

INCLUSION OF THE TOPIC «THE SIMPLEST FUNCTIONAL EQUATIONS» IN THE MODEL PROGRAMS FOR STUDYING THE SUBJECT «ALGEBRA AND THE BEGINNINGS OF ANALYSIS»

Tetiana BOKHONOVA

Kyiv Natural Science Lyceum № 145, Ukraine

bohonova@ukr.net

<https://orcid.org/0000-0002-8186-5238>

Yurii BOKHONOV

National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"
 named after Ihor Sikorskyi, Ukraine

yubochonoff@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-3355-008X>

Iryna MATVIEIEVA

National Aviation University, Ukraine

iryna.matvieieva@npp.nau.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0002-8787-6989>

Oleksii TOMASHCHUK

National Aviation University, Ukraine

oleksii.tomashchuk@npp.nau.edu.ua

<https://orcid.org/0000-0001-5631-3418>

Viktorii TYKHONOVA

Professional College of Engineering, Management

and Land Management of the National Aviation University, Ukraine

vivitykhonova@gmail.com

Oleh LESHCHYNSKII

Professional College of Engineering, Management

and Land Management of the National Aviation University, Ukraine

oleschchinsky17.1@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-6005-7779>

Valentyna GROZA

National Aviation University, Ukraine

valentina.groza@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-1668-1878>

АНОТАЦІЯ

Постановка проблеми. Дослідження питання включення теми «Найпростіші функціональні рівняння» в модельні навчальні програми вивчення предмету «Алгебра і початки аналізу» для профільних класів з поглибленим вивченням математики. Модельна навчальна програма вивчає орієнтовну послідовність досягнення очікуваних результатів навчання, зміст предмета або інтегрованого курсу та види навчальної діяльності здобувачів освіти. Включення вказаної теми має на меті розпочати творче осмислення функціональних зв'язків, існуючих в реальних системах і процесах, зокрема, екологічних, економічних та соціальних.

Матеріали та методи. Теоретичний метод аналізу методичної та навчальної літератури з досліджуваного питання; порівняльний аналіз для усвідомлення різних поглядів на проблему; систематизація та узагальнення для створення рекомендацій змісту запропонованої теми, а також формулювання висновків та інтегрування педагогічного досвіду авторів, які викладають відповідні дисципліни в закладах освіти різних рівнів.

ABSTRACT

Formulation of the problem. Analysis of the issue of including the topic "The simplest functional equations" in the model curricula for studying the subject "Algebra and the beginnings of analysis" for specialized classes with in-depth study of mathematics. A model curriculum studies the approximate sequence of achieving the expected learning outcomes, the content of the subject or integrated course, and the types of students' educational activities. The inclusion of this topic aims to start a creative understanding of functional relationships existing in real systems and processes, in particular, ecological, economic, and social ones.

Materials and methods. Theoretical method of analysis of methodical and educational literature on the researched issue; comparative analysis to understand different views on the problem; systematization and generalization to create recommendations for the content of the proposed topic, as well as formulating conclusions and integrating the pedagogical experience of authors who teach relevant disciplines in educational institutions of various levels.

Для цитування:

Bokhonova T., Bokhonov Yu., Matvieieva I., Tomashchuk O., Tykhonova V., Leshchynskii O., Groza V. Inclusion of the topic "The simplest functional equations" in the model programs for studying the subject "Algebra and the beginnings of analysis". *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 2. С. 15-21. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-2-003

Bokhonova, T., Bokhonov, Yu., Matvieieva, I., Tomashchuk, O., Tykhonova, V., Leshchynskii, O., & Groza, V. (2023). Inclusion of the topic "The simplest functional equations" in the model programs for studying the subject "Algebra and the beginnings of analysis". *Фізико-математична освіта*, 38(2), 15-21. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-003>

For citation:

Bokhonova, T., Bokhonov, Yu., Matvieieva, I., Tomashchuk, O., Tykhonova, V., Leshchynskii, O., & Groza, V. (2023). Inclusion of the topic "The simplest functional equations" in the model programs for studying the subject "Algebra and the beginnings of analysis". *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 15-21. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-003>

Bokhonova, T., Bokhonov, Yu., Matvieieva, I., Tomashchuk, O., Tykhonova, V., Leshchynskii, O., & Groza, V. (2023). Inclusion of the topic "The simplest functional equations" in the model programs for studying the subject "Algebra and the beginnings of analysis". *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 15-21. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-003>

✉ Corresponding author

© T. Bokhonova, Yu. Bokhonov, I. Matvieieva, O. Tomashchuk, V. Tykhonova, O. Leshchynskii, V. Groza, 2023

Результати. Запропоновано можливий зміст теми «Найпростіші функціональні рівняння» в модельні програми вивчення предмету «Алгебра і початки аналізу», приклади для пояснення викладачем і закріплення учнями. Для деяких прикладів запропоновані різні підходи їх розв'язання; надано зручні таблиці для пошуку учнями частинних розв'язків деяких видів функціональних рівнянь.

Висновки. Автори вважають, що тема «Найпростіші функціональні рівняння» буде корисною і сприйнятною для вивчення в межах предмету «Алгебра і початки аналізу» учнями профільних класів з поглибленим вивченням математики. В межах одинадцятирічної шкільної освіти, зрозуміло, часу на вивчення цієї теми знайти було неможливо за причини насиченості і щільності необхідного для вивчення матеріалу. Але в дванадцятирічній Новій Українській Школі, зазначеною більш глибокою диференціацією профільного навчання, тема «Найпростіші функціональні рівняння» може зміцнити фундаментальність математичної освіти в класах з поглибленим вивченням математики, інформатики тощо. Подальші дослідження в даному напрямку можуть стосуватися методики розв'язання найпростіших рекурентних рівнянь.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: функція однієї змінної; функціональні рівняння; загальний розв'язок функціонального рівняння; частинний розв'язок функціонального рівняння; ін'єктивність функції.

Results. The possible content of the topic "The simplest functional equations" in the model programs for studying the subject "Algebra and the beginnings of analysis", examples for an explanation by the teacher, and confirmation by students are proposed. For some examples, different approaches to their solution are proposed; convenient tables are provided for students to find partial solutions to some types of functional equations.

Conclusions. The authors believe that the topic "The simplest functional equations" will be useful and acceptable for studying within the scope of the subject "Algebra and the beginnings of analysis" by students of specialized classes with an in-depth study of mathematics. Within the eleven-year school education, of course, it was impossible to find time to study this topic due to the saturation and density of the material necessary for study. But in the twelve-year New Ukrainian School, marked by a deeper differentiation of specialized education, the topic "The simplest functional equations" can strengthen the fundamentality of mathematical education in classes with in-depth study of mathematics, computer science, etc. Further research in this direction may concern the method of solving the simplest recurrent equations.

KEYWORDS: function of one variable; functional equations; general solution of a functional equation; partial solution of a functional equation; injectivity of a function.

INTRODUCTION

Formulation of the problem. Analysis of current research. The goal of the research group was to study the issue of including the topic "The simplest functional equations" in the model programs for studying the subject "Algebra and the beginnings of analysis" for specialized classes with an in-depth study of mathematics. This subject can be viewed from the point of view of its integrity, or can be viewed as an integrated one consisting of the subjects "Algebra" and "Introduction to Analysis". Both points of view emphasize relevant content, internal and intersubjective connections.

On the one hand, the topic "The simplest functional equations" is an intersection of the meaningful lines "equation", "function", and, on the other hand, it can be considered in the future as a propaedeutic topic for studying the theory of ordinary differential and difference equations in higher education. Here, in particular, students can be explained what differential and difference equations are, and generally speaking, that they are representatives of functional equations. In addition, functional equations can be considered as a foundation for building models in ecology (Matvieieva et al., 2019), mathematical economics (Zhebka et al., 2006), sociology and other sciences. Today, functional equations in school education, as a rule, are studied at the optional level (when preparing for mathematical Olympiads of various levels) (Voronyi, 2010; Pihtar, 2008; Pihtar, 2015; Serdiuk, 2019), as well as in the research of members of the Small Academy of Sciences (Zazvirska, 2013), that is, this topic is not studied by all students in a mandatory manner, but is studied selectively by those interested in it. According to the authors, this impoverishes school mathematics education, in particular, its professional orientation.

On the other hand, the discipline "Functional equations" appeared in a number of universities among the courses for students specialized in Mathematics. The study guide (Fedak, 2018), written in accordance with the curriculum of this discipline, contains the basic methods of solving functional equations and linear difference equations, but the level of presentation of theoretical aspects and the method of presenting the material are quite difficult for schoolchildren, even high school students, to understand. Issues of methods of solving certain types of functional equations, in particular, Cauchy, D'Alembert, Lobachevsky equations and the simplest recurrent equations are studied by V.F. Davydovych (Davydovych, 2018). Many scientific researches today are devoted to the stability of functional equations (Rassias et al., 2012; Moslehian et al., 2007; Moszner, 2009; Saadati et al., 2011; Brzdek et al., 2011; Noori et al., 2021) and their applications (Russias, 2003; El-Hady, 2019).

METHODS OF RESEARCH

The basis for achieving the goal was the theoretical method of analyzing methodical and educational literature on the researched issue. Comparative analysis was also used to understand different views on the problem. Systematization and generalization became tools for creating recommendations for the content of the proposed topic, as well as formulating conclusions and integrating the pedagogical experience of authors who teach relevant disciplines in educational institutions of various levels.

RESULTS OF RESEARCH

The study of the simplest functional equations can be carried out in different trajectories. And what is proposed in this article is only one possible approach. The specified topic can become a link between algebra and the beginnings of analysis, based on a second point of view on the specified educational subject. The specified topic may include the following questions for study:

I. Elementary definition of a functional equation. A function that satisfies the corresponding functional equation.

When studying this issue it is possible to consider the following examples.

Example 1. A function $u(x)$ is defined for $\forall x \in \mathbb{N}$ and satisfies conditions:

$$\Delta u = u(x) - \varphi(x-1) = \cos(x-1)\alpha, \quad u(1) = 9. \quad (1.1)$$

Find $u(x)$.

Let's consider possible solving. Equalities follow from the condition of the example:

$$u(2) = u(1) + \cos \alpha,$$

$$u(3) = u(2) + \cos 2\alpha,$$

.....

$$u(x) = u(x-1) + \cos(x-1)\alpha.$$

After adding their corresponding parts and summing similar terms, the following ratio can be obtained:

$$u(x) = u(1) + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos(x-1)\alpha.$$

Using a well-known formula $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ and the initial condition $u(1)=9$, it is

possible to get the final answer:
$$u(x) = 9 + \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(2x-1)\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

The following task can be offered for selftraining:

A function $\varphi(x)$ is defined for $\forall x \in \mathbb{N}$ and satisfies the conditions: $\varphi(x+1) = \varphi(x) + 2^x$, $\varphi(1) = 3$. Find $\varphi(x)$. The answer: $\varphi(x) = 2^{x+1}$.

Example 2 (of a research nature). Does a linear function exist $y = \varphi(x)$ that satisfies the equation for an arbitrary real x :

$$3\varphi(x+7) + \varphi(10-x) = 11x + 15. \quad (2.1)$$

- 1) Replace x by $x-7$ in (2.1):

$$\begin{aligned} 3\varphi((x-7)+7) + \varphi(10-(x-7)) &= 11(x-7) + 15, \\ 3\varphi(x) + \varphi(17-x) &= 11x - 62. \end{aligned} \quad (2.2)$$

- 2) Replace x by $17-x$ in (2.2):

$$\begin{aligned} 3\varphi(17-x) + \varphi(x) &= 11(17-x) - 62, \\ \varphi(x) + 3\varphi(17-x) &= -11x + 125. \end{aligned} \quad (2.3)$$

- 3) Multiply (2.2) by -3 and add to (2.3):

$$\begin{aligned} -9\varphi(x) - 3\varphi(17-x) &= -33x + 186, \quad -8\varphi(x) = -44x + 311, \\ \varphi(x) &= \frac{44x}{8} - \frac{311}{8}, \quad \varphi(x) = \frac{11x}{2} - \frac{311}{8}. \end{aligned}$$

The answer: there exists a linear function $\varphi(x) = \frac{11x}{2} - \frac{311}{8}$, that satisfies equation (2.1) for any $x \in \mathbb{R}$.

The following equation can be offered for selftraining:

Find a linear function $u(x)$, that satisfies the equation $2u(x+2) - 5 = 2x - u(4-x)$. The answer: $u(x) = 2x - \frac{11}{3}$.

Example 3 (of computational character). A function u satisfies the functional equation:

$$u(x+y) = u(x) + u(y) \text{ for all } \{x, y\} \subset \mathbb{Q}, \quad (3.1)$$

$$u(9) = -e^2. \text{ Find } u\left(\frac{5}{6}\right).$$

- 1) It is obvious that the function $u(x) = kx$ is a solution of this equation, in particular for $x \in \mathbb{Q}$. In fact:

$$u(x+y) = k(x+y) = kx + ky = u(x) + u(y).$$

Let $y = x$. Then

$$u(2x) = 2u(x). \quad (3.2)$$

- 2) The hypothesis is: $u(nx) = nu(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. For $n = 1$ the identity is obvious.

$$u((n+1)x) = u(nx+x) = u(nx) + u(x) = nu(x) + u(x) = (n+1)u(x).$$

Then, according to the principle of mathematical induction, the hypothesis is correct.

- 3) Let's consider the relation

$$u(qx) = qu(x), \quad \forall \{x, q\} \subset \mathbb{Q}, \quad (3.3)$$

and prove its correctness for (3.1).

- a) Let $y = 0$ in (3.1), then $u(x) = u(x) + u(0)$. And $u(0) = 0$, i.e. (3.3) is correct for $q = 0$.

- b) Let in (3.2) $x = \frac{z}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{Q}$. Then

$$u(nx) = u(z) = nu\left(\frac{z}{n}\right) \Rightarrow u\left(\frac{1}{n} \cdot z\right) = \frac{1}{n}u(z). \quad (3.4)$$

It means that (3.3) is correct for $q = \frac{1}{n}$.

- c) Let in (3.4) $x = \frac{z}{m}$, $m \neq n$, $z > 0$, $m > 0$. Then $z = mx$ and $u\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{1}{n}u(mx) = \frac{m}{n}u(x)$, i.e. (3.3) is true for all positive

rational q .

d) Let $y = -x$ in (3.1). Then, taking into account a), we receive: $u(0) = u(x) + u(-x) = 0$. Or $u(-x) = -u(x)$, and it means that the function $u(x)$ is odd for all $q \geq 0$. Thus, $u(-qx) = -u(qx) = -qu(x)$, i.e. (3.3) is true for all rational x, q . For $x = 1$ in (3.3) we have:

$$u(q) = qu(1), \quad (3.5)$$

here $u(1)$ is a number.

e) If in (3.5) $x = q$, $k = u(1)$, then $u(x) = kx$, and it means that the function $u(x) = kx$ is the only solution of the equation (3.1).

$$4) u(9) = -e^2.$$

$k \cdot 9 = -e^2 \Rightarrow k = -\left(\frac{e}{3}\right)^2$. Then $u(x) = -\left(\frac{e}{3}\right)^2 x$ is a particular solution of (3.1) for given initial conditions.

For solving certain classes of elementary functional equations, it is useful to know that one of the simplest functional equations is the Cauchy equation, which is defined for the function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as: $f(x+y) = f(x) + f(y)$. A function f that satisfies this equation is called additive. It is also possible to draw students' attention to the fact that the method of solving example №3 is often called the Cauchy method, for which particular solutions are known for $x \in \mathbb{Q}$ and $f(x) \in \mathbb{Q}$.

After this example, the following equation can be suggested for selftraining: $\psi(y) = \psi(x+y) - \psi(x)$, $\psi(10) = -\pi$.

Find $\psi\left(-\frac{2}{7}\right)$. The answer: $\psi\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{\pi}{35}$.

II. Elementary functional equations, their particular solutions and features.

When studying this question, we can consider the following initial table 1 (Rassias et al., 2017). Note, that for the first dealing with elementary functional equations, if domain of definitions of variable x , variable y and $f(x)$, $f(y)$ is not indicated, then we assume that $x \in \mathbb{Q}$ and $f(x) \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$ and $f(y) \in \mathbb{Q}$.

Table 1.

Equation	Particular solutions	Notes
$f(x+y) = f(x) + f(y)$	$f(x) = kx$	A single family
$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$	$f(x) = c \ln x $, $f(x) = c \log_a x $, $f(x) = a \ln x + b$	Logarithmic equation. Some of the families
$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$	$f(x) = x ^\alpha$	Power equation. One of the families
$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$	$f(x) = e^{cx}$, $f(x) = a^x$, A degenerate solution $f(x) = 0$	Exponential equation. One of the families

The continuation of this table will be considered below.

Example 4 (inductive solution). A numerical function satisfies the equality

$$u(x+y) = u(x) + u(y) + 12xy, \quad \forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Find $u\left(\frac{7}{8}\right)$, if $u\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.

1) In the process of solving the simplest functional equations, induction plays an important role. It is obvious that the particular solution of this functional equation is a function $u_0(x) = 6x^2$. In fact:

$$u_0(x+y) = 6(x+y)^2 = 6x^2 + 12xy + 6y^2 = u_0(x) + u_0(y) + 12xy, \text{ which is consistent with (4.1).}$$

2) Let

$$v(x) = u(x) - u_0(x). \quad (4.2)$$

Then $v(y) = u(y) - u_0(y)$,

$$\begin{aligned} v(x+y) &= u(x+y) - u_0(x+y) = u(x) + u(y) + 12xy - 6(x+y)^2 = \\ &= u(x) + u(y) + 12xy - 6x^2 - 12xy - 6y^2 = u(x) - u_0(x) + u(y) - u_0(y) = \\ &= v(x) + v(y), \quad \forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}, \text{ and, in particular, } \forall \{x, y\} \subset \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

3) From Example 2 we have $v(x) = kx$ ($\forall x \in \mathbb{Q}$). Then from (4.2): $u(x) = v(x) + u_0(x) = kx + 6x^2$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

$$4) u\left(\frac{1}{2}\right) = k \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3, \quad \frac{k}{2} + \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow k = 3.$$

That is, $u(x) = 3x + 6x^2$ is a particular solution of this functional equation under given initial conditions.

$$5) \quad u\left(\frac{7}{8}\right) = 3 \cdot \frac{7}{8} + 6 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{231}{32}.$$

After this type of example, you can draw students' attention to the fact that the structure of the general solution of functional equations is similar to the structure of the general solution of ordinary differential equations (which will be studied in higher education and used to build models of dynamic systems, processes, phenomena).

In order to understand a possible method of solving the fourth example, students can be offered to solve the following problem: $80xy = \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)$, $\varphi(0,25) = 2$. Find $\varphi(0,8)$. The answer: $\varphi(0,8) = 24$.

III. Expansion of the set of the simplest functional equations.

In this section one can consider table 2 (Rassias et al., 2017) which "absorbs" table 1. Note also that if domains of definition of x, y and $f(x), f(y)$ are not indicated, then in the process of studying this material it is considered that $x \in \mathbb{Q}$ and $f(x) \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}$ and $f(y) \in \mathbb{Q}$.

Table 2.

Functional equation	Elementary particular solution
$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$	$f(x) = kx + b$
$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$	$f(x) = \cos(kx)$
$f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$	$f(x) = kx^2$
$f(x+y) + f(x-y) = 2f(y)$	$f(x) = kx$
$f(x+y) \cdot f(x-y) = (f(x))^2$	$f(x) = c$
$f(x+y) - f(x-y) = 4\sqrt{f(x)f(y)}$	$f(x) = kx^2$
$f(x+y) \cdot f(x-y) = (f(x))^2 - (f(y))^2$	$f(x) = kx, \quad f(x) = c \sin(kx)$
$f(xy) = f(x) \cdot f(y), \quad \{x, y\} \subset \square$	$f(x) = x^n$
$f(xy) = x f(y) + y f(x), \quad \{x, y\} \subset \square^+$	$f(x) = x \ln x$
$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}, \quad y \neq 0, \quad f(y) \neq 0$	$f(x) = x^n$
$f(x+y) = f(x) + f(y)$	$f(x) = f(1) \cdot x$ (one can draw students' attention to a different form of the particular solution compared to table 1)
$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$	$f(x) = (f(1))^x$ (one can draw students' attention to a different form of the particular solution compared to table 1)
$f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = 1 \pm x^n$

In the process of solving elementary functional equations, it is useful to pay attention to the special properties of the functions with respect to which they are solved. The following example can be an illustration of this remark.

Example 5. A numerical function $u(x)$ satisfies the equality:

$$kx + u(x) = u(u(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0. \quad (5.1)$$

Solve the equation

$$u(u(x)) = 0. \quad (5.2)$$

$$1) \quad kx = u(u(x)) - u(x), \quad x = \frac{u(u(x)) - u(x)}{k}.$$

If $u(x) = u(y)$, then $x = \frac{u(u(x)) - u(x)}{k} = \frac{u(u(y)) - u(y)}{k} = y$. It means that equality $u(x) = u(y)$ follows $x = y$, which indicates injectivity of $u(x)$ in this functional equation.

2) Injectivity of $u(x)$ follows that if $u(u(x)) = u(u(y))$, then $u(x) = u(y)$, and $x = y$, i.e. (5.2) can have at most one root.

3) The obvious root of (5.1) is $x = 0$. Really:

$$k \cdot 0 + u(0) = u(u(0)), \quad u(0) = u(u(0)), \quad u(0) = 0, \text{ then } u(u(x)) = 0.$$

It follows from point 2) that this is the only root of the equation (5.2).

Example 6. A function $u(y)$ satisfies the equation:

$$u(y+2) = u(y+1) + 2y + 3, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (6.1)$$

Find $u(2864)$, if $u(0) = 0$.

The first method. With this formulation of the problem, it is possible to consider the proposed functional equation only for natural values of the argument. Consider the following sequence:

$$p_n = u(n) - u(n-1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Then

$$\begin{aligned} \sum_{k=n-1}^1 (u(k+1) - u(k)) &= (u(n) - u(n-1)) + (u(n-1) - u(n-2)) + \dots + (u(1) - u(0)) = \\ &= u(n) = p_n + p_{n-1} + \dots + p_1 = \sum_{k=n}^1 p_k. \end{aligned}$$

For $\{p_n\}$ this equation has the form

$$u(n+2) = u(n+1) + 2n + 3.$$

Then

$$u(n+2) - u(n+1) = 2n + 3,$$

$$p_{n+2} = 2n + 3,$$

$$u(n+1) - u(n) = 2(n-1) + 3 = 2n + 1,$$

$$p_{n+1} = 2n + 1,$$

$$p_{n+2} - p_{n+1} = (2n + 3) - (2n + 1) = 2.$$

It means that $\{p_n\}$ is an arithmetic progression with $p_1 = 1$ and difference $d = 2$. Then $u(n) = S_n = \frac{2p_1 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = n^2$ and $u(2864) = 2864^2 = 8202496$.

The second method. It is easy to see that the particular solution of equation (6.1) is the function $u_0(y) = y^2$. In fact:

$$u_0(y+1) = (y+1)^2 = y^2 + 2y + 1,$$

$$u_0(y+2) = (y+1)^2 + 2y + 3 = y^2 + 2y + 1 + 2y + 3 = (y+2)^2.$$

Let $y+1 = t$. Then

$$u(t+1) = u(t) + 2t + 1.$$

Consider a function $v(t)$ that $u(t) = v(t) + u_0(t)$. Then:

$$v(t) = u(t) - u_0(t),$$

$$v(t+1) = u(t+1) - u_0(t+1) = u(t) + 2t + 1 - (t+1)^2 =$$

$$= u(t) + 2t + 1 - t^2 - 2t - 1 = u(t) - u_0(t) = v(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

These considerations lead to the conclusion that the function $v(t)$ is periodic with the main period $T=1$ along the whole number line. Therefore, the solutions of this functional equation are all periodic functions with period $T=1$, defined on the whole number line, and only them.

Then the general solution of this functional equation has the form:

$$u(t) = v(t) + y^2, \text{ тобто } u(y+1) = v(y+1) + y^2,$$

where $v(y+1)$ is an arbitrary periodic function defined on the whole number line with period $T=1$. Initial condition $u(0) = 0$ means that $v(0) = u(0) - u_0(0) = 0$. Then for all integer y we have

$$u(y) = y^2 + v(0) = y^2.$$

Thus, $u(2864) = 2864^2 = 8202496$.

IV. The simplest functional equations solutions of which are sequences (particular cases of functions).

Example 7. A sequence $\{b_k\}$ is defined as:

$$b_1 = 4, \quad b_{k+1} = \begin{cases} 4b_k, & \text{if } k = 2n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_k + 4, & \text{if } k = 2n - 1, \end{cases}$$

i.e. $b_2 = 4 + 4 = 8$; $b_3 = 8 \cdot 4 = 32$; $b_4 = 32 + 4 = 36$; $b_5 = 4 \cdot 36 = 144$; $b_6 = 144 + 4 = 148 \dots$ Find b_{22715} .

1) Consider the subsequence $b_1, b_3, b_5, \dots$. Let $c_1 = b_1, c_2 = b_3, c_3 = b_5, \dots, c_m = b_{2m-1}$. Then $b_{22715} = c_{11358}$.

2) Functional equation for odd sequence numbers $\{b_k\}$ has the form:

$$b_{2k+1} = 4b_{2k} = b_{(2k-1)+1} = 4(b_{2k-1} + 4) = 4b_{2k-1} + 16.$$

Then, respectively, functional equation for $\{c_m\}$ will be:

$$c_{m+1} = 4c_m + 16. \quad (7.1)$$

3) Let $c_m = d_m - \frac{16}{3}$, where $\{d_m\}$ is a new auxiliary sequence. Then $d_m = c_m + \frac{16}{3}$, a $c_{m+1} = d_{m+1} - \frac{16}{3}$.

And equation (7.1) is transformed to:

$$d_{m+1} - \frac{16}{3} = 4 \left(d_m - \frac{16}{3} \right) + 16,$$

$$d_{m+1} = 4d_m - \frac{4 \cdot 16}{3} + \frac{3 \cdot 16}{3} + \frac{16}{3}, \text{ тобто } d_{m+1} = 4d_m,$$

It means that the sequence $\{d_m\}$ is a geometrical progression with the first element $d_1 = c_1 + \frac{16}{3}$ and denominator $q = 4$. Thus $d_m = d_1 \cdot 4^{m-1}$.

$$c_m + \frac{16}{3} = \left(c_1 + \frac{16}{3} \right) \cdot 4^{m-1}, \quad c_m = c_1 \cdot 4^{m-1} + \frac{16}{3} (4^{m-1} - 1).$$

It is obvious that $(4^{m-1} - 1) : 3, c_1 = b_1 = 4$ (according to the condition of the problem), then

$$b_{22715} = c_{11358} = 4 \cdot 4^{11357-1} + \frac{16}{3} (4^{11357} - 1) = 4^{11358} + \frac{16}{3} (4^{11357} - 1).$$

Remark 1. The first method of solving example 6 can be motivation for studying section IV.

Remark 2. As exercises for understanding the ideas of solving examples 4, 5 and 6, examples similar to the considered ones can be offered.

CONCLUSIONS AND PROSPECTS OF FURTHER RESEARCH

The material of the article was partially reviewed by the authors in educational institutions, where the complexity, accessibility, perception level and usefulness of the issues were analyzed. The authors believe that the topic "The simplest functional equations" will be useful and acceptable for studying within the scope of the subject "Algebra and the beginnings of analysis" by students of specialized classes with an in-depth study of mathematics.

Within the eleven-year school education, of course, it is impossible to find time to study this topic due to the saturation and density of the material necessary for study. But in the twelve-year-old New Ukrainian School, marked by a deeper differentiation of specialized education, the topic "The simplest functional equations" can strengthen the fundamentality of mathematical education in classes with in-depth study of mathematics, computer science, etc.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

- Matvieieva, I., Tikhonova, V., & Groza, V. (2019). Application of Box Models in Radioecology. *Interdisciplinary Studies of Complex Systems*, 14, 53-57. <https://doi.org/10.31392/iscs.2019.14.053>.
- Zhebka, V., Tykhonova, V., Leshchynskii, O., & Groza, V. (2006). *Dyferentsialni rivniannia v ekonomitsi [Differential Equation in Economy]. Manual*. Kyiv: Delta (In Ukrainian).
- Voronyi, O. (2010). *Funktsionalni rivniannia v olimpiadnii matematytsi [Functional equations in Olympiad mathematics] Methodical guide*. Kirovograd (In Ukrainian).
- Pihtar, M. P. (2008). Metodika robotu ta sistema zadach z temi "Funktsionalni rivnyannya" [Methodology of work and system of problems on the topic "Functional equations"]. *Mathematics in the school*, 7-8, 48-56. (In Ukrainian).
- Pihtar, M. P. (2015). Deiaki osoblyvosti provedennia hurtkovykh zaniat z rozviazannia olimpiadnykh zadach z matematyky v pedahohichnykh universytetah [Some features of conducting group classes on solving Olympiad problems in mathematics in pedagogical universities]. *Scientific journal of the M.P. Drahomanov NPU. Series 3. Physics and mathematics in higher and secondary school*. (In Ukrainian).
- Serdiuk, I.V. (2019). Fakultativnyi kurs "funktsionalni rivniannia" dlia uchniv starshoi profilnoi shkoly [Optional course "functional equations" for students of a senior specialized school]. *Proceedings of the Cherkasy National University named after Bohdan Khmelnytskyi. "Pedagogical sciences" series*, 3, 103-107. (In Ukrainian).
- Zazvirska, O.A. (2013). *Funktsionalni rivniannia. [Functional Equations]*. Kirovohrad Regional Branch of the Small Academy of Sciences of Ukraine. https://docs.google.com/document/d/1HDnQ0xFe78_pla17AVgUAoDXSyTNcbexLp9CVhvCGd0/edit (In Ukrainian).
- Fedak, I.V. (2018). *Funktsionalni rivniannia. [Functional Equations]. Manual*. Ivano-Frankivsk: PNU (In Ukrainian).
- Davydovych, V.F. (2019). Funktsionalni rivniannia: pryklady, zastosuvannia, metody rozviazuvannia [Functional equations: examoles, applications, methods of solving]. *Proceedings of Seventh International Scientific-Practical Conference "Mathematics in Modern Technical University"*. Vinnytsia: Publisher FOP Kushnir Yu.V. (In Ukrainian).
- Russias, T.M., & Brzdek, J. (2012). *Functional Equations in Mathematical Analysis*. New York, NY, USA: Springer.
- Moslehian, M.S., & Russias, T.M. (2007). Stability of Functional Equations in Non-Archimedean Spaces. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 1, 325-334.
- Moszner, Z. (2009). On the stability of functional equations. *Aequationes Mathematicae*, 77, 33-88.
- Saadati, R., Zohdi, M.M., & Vaezpour, S.M. (2011). Nonlinear L-Random Stability of an ACQ Functional Equation. *Journal of Inequalities and Applications*. <https://doi.org/10.1155/2011/194394>.
- Brzdek, J., Chudziak, J., & Pales, Z. (2011). A fixed point approach to stability of functional equations. *Nonlinear Analysis: Methods & Applications*. <https://doi.org/10.1016/j.na.2011.06.052>.
- Noori, B., Moghimi, V.B., Najati, A., Park, C., & Lee, J.R. (2021). On superstability of exponential functional equations. *Journal of Inequalities and Applications*. <https://doi.org/10.1186/s13660-021-02615-w>.
- Russias, T.M. (2003). *Functional Equations, Inequalities and Applications*. Dordrecht, The Netherlands^ KluwerAcademic Publishers.
- El-Hady, E.-S. (2019). On Some Functional Equations with Applications in Networks. *In book: Frontiers in Functional Equations and Analytic Inequalities*. Springer, 295-308. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28950-8_17.
- Rassias, J.M., Thandapani, E., Ravi, K., & Senthil Kumar, B. V. (2017). *Functional Equations and Inequalities*. <https://doi.org/10.1142/10224>.



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
 Has been issued since 2013.
 Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
 Видається з 2013.



p-ISSN 2413-1571
 e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571
<https://fmo-journal.org/>

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-2-004

НЕЙТРОННЕ ОЦІНЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ УМІНЬ СТУДЕНТІВ

Майкл ВОСКОГЛОУ ✉

Вищий технологічний освітній інститут Західної Греції
 (Університет Пелопоннесу), Патрас, Греція
voskoglou@teiwest.gr; mvoskoglou@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-4727-0089>

NEUTROSOPHIC ASSESSMENT OF STUDENT MATHEMATICAL SKILLS

Michael Gr. VOSKOGLU ✉

Graduate Technological Educational Institute (TEI) of Western
 Greece (University of Peloponnese), Patras, Greece
voskoglou@teiwest.gr; mvoskoglou@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-4727-0089>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Оцінювання є важливою складовою навчального процесу, оскільки воно допомагає викладачеві визначити помилки студентів і покращити їх результати шляхом відповідної адаптації методів навчання. У даній роботі ми досліджуємо проблему оцінювання загальної успішності студента, коли викладач не впевнений у правильності виставлених оцінок. Це трапляється через те, що викладач не має достатньо часу, щоб належним чином оцінити математичні навички студентів, або тому, що у випадку письмового іспиту/тесту деякі студенти не чітко представили або не обґрунтували належним чином свої відповіді.

Матеріали та методи. Методи нечіткого оцінювання з використанням нейтронних множин і сірих чисел, а також розрахунок індексу середнього балу використовуються в цій роботі для оцінки середньої успішності студента в класі, якості успішності та загальної успішності, коли вчитель сумнівається щодо оцінки, виставленої деяким студентам.

Результати. Стаття зосереджена на застосуванні, розробленому для оцінювання математичних навичок студентів-інженерів двох факультетів Школи інженерії Вищого технологічного освітнього інституту Західної Греції (Університет Пелопоннесу), які перебувають на першому терміні навчання, за допомогою якісних (лінгвістичних) оцінок. Методика навчання на першому факультеті (експериментальна група) передбачала поєднання використання комп'ютера та аудиторних лекцій, тоді як на другому факультеті (контрольна група) проводилися лекції лише класичним методом.

Висновки. Використання нейтронних множин є корисним інструментом для оцінювання загальної успішності студента, коли викладач має сумніви щодо точності виставлених їм оцінок. Результати аудиторного застосування продемонстрували перевагу експериментальної групи. Ця перевага, однак, була значною щодо його середньої та загальної продуктивності (нейронна оцінка), але досить незначною щодо його якісних показників. Це є переконливим свідченням того, що використання комп'ютерів у навчальному процесі більше допомагає студентам з низьким та середнім рівнем навчальних досягнень.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нечіткі методи оцінювання; сірі числа; індекс середнього балу; нейтронні множини; нейтронні трійки.

ABSTRACT

Formulation of the problem. Assessment is an important component of the teaching process, because it helps the instructor to determine the student mistakes and to improve their performance by adapting suitably his/her teaching methods. In this work we investigate the problem of evaluating the student overall performance, when the teacher is not sure about the accuracy of the grades assigned to them. This happens, either because the teacher had not enough time to assess properly the students' mathematical skills, or because, in case of a written examination/test, some students did not present clearly or did not justified properly their answers.

Materials and methods. Fuzzy assessment methods using neutrosophic sets and grey numbers, as well as the calculation of the Grade Point Average (GPA) index are used in this work for the assessment of a student class mean performance, quality performance, and overall performance when the teacher has doubts about the grades assigned to some students.

Results. The paper focuses on a classroom application designed for the assessment, with qualitative (linguistic) grades, of mathematical skills of the engineering students of two Departments of the School of Engineering of the Graduate Technological Educational Institute (TEI) of Western Greece (University of Peloponnese) being at their first term of studies. The instructor was the same person for both Departments. The teaching methodology for the first Department (experimental group) involved a combined use of computers and classroom lectures, whereas for the second Department (control group) involved only lectures in the classical way on the board.

Conclusions. The use of neutrosophic sets provides a useful tool for evaluating the student overall performance when the teacher has doubts about the accuracy of the grades assigned to them. The outcomes of the classroom application demonstrated a superiority of the experimental group. This superiority, however, was significant with respect to its mean and overall performance (neutrosophic assessment), but rather negligible with respect to its quality performance. This gives a strong indication that the use of computers in the teaching process helps more the mediocre and weak students and not so much the good students.

KEYWORDS: Fuzzy Assessment Methods; Grey Numbers (GNs); Grade Point Average (GPA) Index; Neutrosophic Sets (NSs); Neutrosophic Triplets.

INTRODUCTION

Assessment is an important component of the teaching process, because it helps the instructor to determine the student mistakes and to improve their performance by adapting suitably his/her teaching methods.

When numerical grades are used for the assessment process, then the student **mean performance** is evaluated by calculating the mean value of the grades assigned to them. Another, popular in many countries, method for evaluating the overall performance of a student group is the calculation of the **Grade Point Average (GPA)** index (Voskoglou, 2017, p. 125), which is calculated by the formula

$$GPA = \frac{0n_F + n_D + 2n_C + 3n_B + 4n_A}{n} \quad (1)$$

Для цитування:

Voskoglou M. Gr. Neutrosophic assessment of student mathematical skills. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 2. С. 22-26. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-2-004

Voskoglou, M. Gr. (2023). Neutrosophic assessment of student mathematical skills. *Фізико-математична освіта*, 38(2), 22-26. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-004>

For citation:

Voskoglou, M. Gr. (2023). Neutrosophic assessment of student mathematical skills. *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 22-26. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-004>

Voskoglou, M. Gr. (2023). Neutrosophic assessment of student mathematical skills. *Fizyko-matematyczna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 22-26. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-004>

In formula (1), n denotes the total number of students of the corresponding group, A =excellent, B =very good, C =good, D =mediocre and F =fail are the linguistic grades assigned to the students, and n_x denotes the number of students who obtained the grade $X=A, B, C, D, F$. In other words, the GPA index is a weighted average in which greater coefficients (weights) are assigned to the higher grades; therefore it assesses not the mean, but the **quality performance** of the student group

Note that, since in the worst case ($n=n_F$) is $GPA=0$ and in the ideal case ($n=n_A$) is $GPA=4$, we have in general that

$$0 \leq GPA \leq 4 \quad (2).$$

Example 1: Assume that in a written test the 20 in total students of a class obtained the following grades in the numerical climax 1-100: 98: 2 (students), 95: 2, 90: 3, 85:1, 80:2, 75: 4, 60:2, 50:2, 40:1, 30:1. Evaluate the mean and the quality performance of the class.

Solution: Following widely accepted standards, we assign numerical scores to the linguistic grades A, B, C, D, F as follows: $A \rightarrow [85, 100]$, $B \rightarrow [75, 84]$, $C \rightarrow [60, 74]$, $D \rightarrow [50, 59]$, $F \rightarrow [49, 0]$.

The mean value of the student scores is equal to $\frac{2*98+2*95+3*90+85+2*80+4*75+2*60+2*50+40+30}{20} = 74.55$,

which shows that the class demonstrated a good (C) mean performance.

Also, by formula (1) we get that $GPA = \frac{2+2*2+3*6+4*8}{20} = 2.8$. Thus, with respect to inequality (2), one finds that $\frac{2.8}{4} = 0.7$,

or 70%. This shows that the class demonstrated a good quality performance too.

In many cases, however, the assessment of the student performance is realized by using qualitative (linguistic) instead of numerical grades. In such cases, the assessment of the student mean performance cannot be realized by calculating the average of numerical scores. To solve this problem, we proposed in earlier works several methods using principles of fuzzy logic, the most important of which are reviewed in (Voskoglou, 2019a). In this work we use grey numbers for overcoming this problem.

Also note that frequently the teacher has doubts for the grades assigned to some students, either because he had not enough time to assess properly their performance, or, in case of written tests/examinations, because their answers were not very clear or well justified. In this paper we use neutrosophic sets as tools to obtain a reasonable criterion for evaluating the student overall performance in such cases.

The present work focuses on a classroom application for the assessment of mathematical skills of engineering students. The rest of the paper is formulated as follows: The next section contains the necessary information about fuzzy sets, neutrosophic sets and grey numbers, needed for the purposes of this work. The fuzzy methods that we use for the student assessment are developed in the third section and the classroom application is presented in the fourth section. The paper closes with the final conclusions and some hints for future research, which are included in its fifth and last section.

MATHEMATICAL BACKGROUND

Fuzzy Sets and Logic

The development of human science and civilization owes a lot to Aristotle's (384-322 BC) **bivalent logic (BL)**, which was in the center of human reasoning for centuries. BL is based on the "**Principle of the Excluded Middle**", according to which each proposition is either true or false.

Opposite views, however, appeared also early in the human history supporting the existence of a third area between true and false, where these two notions can exist together; e.g. by Buddha Siddhartha Gautama (India, around 500 BC), by Plato (427-377 BC), more recently by the Marxist philosophers, etc. Integrated propositions of multi-valued logics reported, however, only during the early 1900's, mainly by Lukasiewicz and Tarski (Voskoglou, 2019a, Section 2). According to the Lukasiewicz's "**Principle of Valence**" propositions are not only either true or false, but they may have intermediate truth-values too.

Zadeh, replacing the characteristic function of a crisp subset of the universe U with the **membership function** m : $U \rightarrow [0, 1]$, introduced the concept of **fuzzy set (FS)** (Zadeh, 1965), in which each element x of U has a **membership degree** $m(x)$ in the unit interval. The closer $m(x)$ to 1, the better x satisfies the characteristic property of the corresponding FS. For example, if A is the FS of the tall men of a country and $m(x) = 0.8$, then x is a rather tall man. On the contrary, if $m(x) = 0.4$, then x is a rather short man. Formally, a FS A in U can be written as a set of ordered pairs in the form

$$F = \{(x, m(x)): x \in U\} \quad (3)$$

Zadeh also introduced, with the help of FS, the infinite-valued in the unit interval **fuzzy logic (FL)** (Zadeh, 1973), on the purpose of dealing with the existing in the everyday life partial truths. FL, in which truth values are modelled by numbers in the unit interval, embodies the Lukasiewicz's "Principle of Valence".

Uncertainty can be defined as the shortage of precise knowledge or complete information on the data that describe the state of a situation. It was only in a second moment that FS theory and FL were used to embrace uncertainty modelling. This happened when membership functions were reinterpreted as **possibility** distributions (Zadeh, 1978, Dubois & Prade, 2001). Zadeh (1978), articulated the relationship between possibility and **probability**, noticing that what is probable must preliminarily be possible.

Probability theory used to be for many years the unique tool in hands of the specialists for dealing with problems connected to uncertainty. Probability, however, was proved to be suitable only for tackling the cases of uncertainty which are due to **randomness** (Kosko, 1990). Randomness characterizes events with known outcomes which, however, cannot be predicted in advance, e.g. the games of chance. FSs, apart from randomness, tackle also successfully the uncertainty due to **vagueness**, which is created when one is unable to distinguish between two properties, such as "a good player" and "a mediocre player". For general facts on FSs and the connected to them uncertainty we refer to the book (Klir & Folger, 1988).

Neutrosophic Sets

Several generalizations and extensions of the theory of FSs have been developed during the last years for the purpose of tackling more effectively all the forms of the existing in real world uncertainty. The most important among them are briefly reviewed in (Voskoglou, 2019b).

Atanassov (1986), considered, in addition to Zadeh's membership degree, the degree of **non-membership** and extended FS to the notion of **intuitionistic FS (IFS)**. Smarandache (1998), inspired by the frequently appearing in real life neutralities - like <friend, neutral, enemy>, <win, draw, defeat>, <high, medium, short>, etc. - generalized IFS to the concept of **neutrosophic set (NS)** by adding the degree of **indeterminacy or neutrality**. The word "neutrosophy" is a synthesis of the word "neutral" and the Greek word "sophia" (wisdom) and means "the knowledge of the neutral thought". The simplest form of a NS is defined as follows:

Definition 1: A **single valued NS (SVNS)** A in the universe U is of the form

$$A = \{(x, T(x), I(x), F(x)) : x \in U, T(x), I(x), F(x) \in [0, 1], 0 \leq T(x) + I(x) + F(x) \leq 3\} \quad (4)$$

In equation (4) $T(x)$, $I(x)$, $F(x)$ are the degrees of **truth** (or membership), **indeterminacy** (or neutrality) and **falsity** (or non-membership) of x in A respectively, called the **neutrosophic components** of x . For simplicity, we write $A \langle T, I, F \rangle$. Indeterminacy is defined to be in general everything that exists between the opposites of truth and falsity (Smarandache, 2021).

Example 2: Let U be the set of the players of a soccer club and let A be the SVNS of the good players of the club. Then each player x is characterized by a **neutrosophic triplet** (t, i, f) with respect to A, with t, i, f in $[0, 1]$. For example, $x(0.7, 0.1, 0.4) \in A$ means that there exists a 70% belief that x is a good player, but at the same time there exist a 10% doubt about it and a 40% belief that x is not a good player. In particular, $x(0, 1, 0) \in A$ means that we do not know absolutely nothing about the quality of player x (new player).

If the sum $T(x) + I(x) + F(x) < 1$, then it leaves room for **incomplete information** about x , if it is equal to 1 for **complete information** and if it is > 1 for **inconsistent** (i.e. contradiction tolerant) **information** about x . A SVNS may contain simultaneously elements leaving room to all the previous types of information. All notions and operations defined on FSs are naturally extended to SVNSs (Wang et al., 2010).

Summation of neutrosophic triplets is equivalent to the union of NSs. That is why the neutrosophic summation and implicitly its extension to neutrosophic scalar multiplication can be defined in many ways, equivalently to the known in the literature neutrosophic union operators (Smarandache, 2016). For the needs of the present work, writing the elements of a SVNS A in the form of neutrosophic triplets and considering them simply as **ordered triplets** we define addition and scalar product as follows:

Definition 2: Let (t_1, i_1, f_1) , (t_2, i_2, f_2) be in A and let k be a positive number. Then:

- The sum $(t_1, i_1, f_1) + (t_2, i_2, f_2) = (t_1 + t_2, i_1 + i_2, f_1 + f_2)$ (5)

- The scalar product $k(t_1, i_1, f_1) = (kt_1, ki_1, kf_1)$ (6)

Remark 1: Summation and scalar product of the elements of a SVNS A with respect to Definition 2 **need not** be closed operations in A, since it may happen that $(t_1 + t_2) + (i_1 + i_2) + (f_1 + f_2) > 3$ or $kt_1 + ki_1 + kf_1 > 3$. With the help of Definition 2, however, one can define in A the **mean value** of a finite number of elements of A as follows:

Definition 3: Let A be a SVNS and let (t_1, i_1, f_1) , (t_2, i_2, f_2) , ..., (t_k, i_k, f_k) be a finite number of elements of A. Assume that (t_i, i_i, f_i) appears n_i times in an application, $i = 1, 2, \dots, k$. Set $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Then the **mean value** of all these elements of A is defined to be the element (t_m, i_m, f_m) of A calculated by

$$\frac{1}{n} [n_1(t_1, i_1, f_1) + n_2(t_2, i_2, f_2) + \dots + n_k(t_k, i_k, f_k)] \quad (7)$$

Grey Numbers

The theory of **grey systems** (Deng, 1982) introduces an alternative way for managing the uncertainty in case of approximate data. A grey system is understood to be any system which lacks information, such as structure message, operation mechanism or/and behavior document.

Closed real intervals are used for performing the necessary calculations in grey systems. In fact, a closed real interval $[x, y]$ could be considered as representing a real number T , termed as a **grey number (GN)**, whose exact value in $[x, y]$ is unknown. We write then $T \in [x, y]$. A GN T , however, is frequently accompanied by a **whitenization function** $f: [x, y] \rightarrow [0, 1]$, such that, if $f(a)$ approaches 1, then a in $[x, y]$ approaches the unknown value of T . If no whitenization function is defined, it is logical to consider as a representative crisp approximation of the GN T the real number

$$V(T) = \frac{x+y}{2} \quad (8)$$

The arithmetic operations on GNs are introduced with the help of the known arithmetic of the real intervals (Moore et al., 1995). In this work we are going to make use only of the addition of GNs and of the scalar multiplication of a GN with a positive number, which are defined as follows:

Definition 4: Let $A \in [x_1, y_1]$, $B \in [x_2, y_2]$ be two GNs and let k be a positive number. Then:

- The sum: $A+B$ is the GN $A+B \in [x_1+y_1, x_2+y_2]$ (9)

- The scalar product kA is the GN $kA \in [kx_1, ky_1]$ (10)

FUZZY ASSESSMENT METHODS WITH QUALITATIVE GRADES

Mean Performance

As said before, when using qualitative grades for the assessment the mean performance of a student group cannot be evaluated with the classical method of calculating the mean value of the student scores. For overcoming this difficulty, we assign here to each qualitative grade a GN, denoted for simplicity with the same letter, as follows: $A = [85, 100]$, $B = [75, 84]$, $C = [60, 74]$, $D = [50, 59]$, $F = [0, 49]$. The choice of the above GNs, although it corresponds to generally accepted standards, is not unique. For example, for a more strict assessment, one may choose $A = [90, 100]$, $B = [80, 89]$, $C = [70, 79]$, $D = [60, 69]$, $F = [0, 59]$, or otherwise. Such changes, however, does not affect the generality of our method

Assume now that, from the n in total students of the group, n_x obtained the grade $X=A, B, C, D, F$. It is logical then to accept that the crisp approximation $V(M)$ of the GN

$$M = \frac{1}{n}(n_A A + n_B B + n_C C + n_D D + n_F F) \quad (11)$$

can be used for estimating the mean performance of the student group.

Neutrosophic Assessment

When the teacher has doubts about the grades assigned to some students, the most suitable method for assessing the overall performance of a student group is to use NSs as tools. In our case, considering the NS of the good students of the group, we introduce neutrosophic triplets characterizing the individual performance of each student and we calculate the mean value of all these triplets with the help of equation (7) for obtaining the proper conclusions about the group's overall performance. In order to have complete information for each student's performance, the sum of the component of each triplet must be equal to 1.

THE CLASSROOM APPLICATION

The target of the following classroom application was the assessment of mathematical skills of engineering students. The subjects were the first term students of two departments of the School of Engineering of the Graduate TEI of Western Greece (60 students in each department) during the course "Higher Mathematics I", which includes Complex Numbers, Differential and Integral Calculus in one variable and elements from Linear Algebra. According to the grades obtained in the PanHellenic examination for entrance in Higher Education, the potential of the two departments in mathematics was about the same. The course's instructor was also the same person, but the teaching methods followed were different. Namely, the teaching methodology for the first department (experimental group) involved a combination of classroom lectures and computer applications using the proper mathematical software, whereas the classical method with lectures on the board was applied for the second department (control group).

The results of the common final examination, after the end of the course, were the following:

- Department I: A: 9 students, B: 15, C: 18, D: 12, F: 6
- Department II: A: 12, B: 15, C: 9, D: 12, F: 12

Applying the previously described assessment methods, we evaluated the performance of the two departments as follows:

Mean performance

By equation (11) one finds that

$$M_I = \frac{1}{60} (9[85,100] + 15[75,84] + 18[60,74] + 12[50,59] + 6[0,49]) = \frac{1}{60} [3570,4994] = [59.5, 83.23].$$

Therefore, equation (8) gives that $V(M_I) \approx 71.36$, which shows that the experimental group demonstrated a good (C) mean performance. In the same way one finds that $V(M_{II}) \approx 62.56$, which shows that the control group also demonstrated a good mean performance, which, however, was 8.8% worse than that of the experimental group.

Quality performance

Equation (1) gives that $GPA_I = \frac{12+2*18+3*15+4*9}{60} = 2.12$ and similarly $GPA_{II} = 2.05$, which shows that the experimental

group demonstrated a slightly better quality performance. In fact, with the help of equation (2) it is easy to check that the superiority of the experimental group in this case is only $0.07*25 = 1.75\%$.

Remark 2: When two groups have the same GPA index, the calculation of it is not sufficient to show which of them performed better. In such cases the **Rectangular Fuzzy Assessment Model (RFAM)**, which is based on the **Center of Gravity (COG) defuzzification technique** can be used to overcome this difficulty (Voskoglou, 2017, pp. 126-130).

Neutrosophic Assessment

Some of the student answers in the final examination were not clearly presented or well justified. As a result, the instructor was not quite sure for the accuracy of the grades assigned to them. For this reason, we decided to apply the neutrosophic method too for the assessment of the two departments' overall performance. For this, starting from the students with the higher grades, let us denote by S_i , $i=1,2,\dots,60$, the students of each department. Considering the NS of the good students, we assigned neutrosophic triplets to all students of the two departments as follows:

- Department I: S_1-S_{32} : (1,0,0), $S_{33}-S_{38}$: (0.8,0.1,0.1), $S_{39}-S_{42}$: (0.7,0.2,0.1), $S_{43}-S_{46}$: (0.4,0.2,0.4), $S_{47}-S_{50}$: (0.3,0.2,0.5), $S_{51}-S_{53}$: (0.2,0.2,0.6), $S_{54}-S_{55}$: (0.1,0.2,0.7), $S_{56}-S_{57}$: (0,0.2,0.8), $S_{58}-S_{60}$: (0,0,1).
- Department II: S_1-S_{31} : (1,0,0), $S_{32}-S_{35}$: (0.8,0.1,0.1), S_{36} : (0.7,0.1,0.2), $S_{35}-S_{43}$: (0.4,0.1,0.5), $S_{44}-S_{46}$: (0.3,0.2,0.5), $S_{47}-S_{50}$: (0.2,0.2,0.6), $S_{51}-S_{52}$: (0.1,0.2,0.7), $S_{53}-S_{58}$: (0,0.3,0.7), $S_{59}-S_{60}$: (0,0,1).

Then, by equation (7), the mean value of the neutrosophic triplets of Department I is equal to

$$\frac{1}{60} [32(1,0,0) + 6(0.8,0.1,0.1) + 4(0.7,0.2,0.1) + 4(0.4,0.2,0.4) + 4(0.3,0.2,0.5) + 3(0.2,0.2,0.6) + 2(0.1,0.2,0.7) + 2(0,0.2,0.8) + 3(0,0,1)] \approx$$

$\approx (0.72, 0.07, 0.21)$. In the same way we found that the mean value of the neutrosophic triplets of Department II is equal to $(0.65, 0.08, 0.27)$. Thus, the probability for a random student of Department I to be a good student is 72%, but at the same time there exists a 7% doubt about it and a 21% probability to be not a good student. Also, the probability for a random student of Department II to be a good student is 65%, with a 8% doubt about it and a 27% probability to be not a good student. Consequently, the experimental group, despite the doubts of the instructor for the accuracy of the grades assigned to the students, demonstrated a better overall performance.

CONCLUSION

The classroom application presented in this work demonstrated a superiority of the experimental group with respect to the control group. This superiority, however, was significant concerning the two groups' mean and overall (in terms of the neutrosophic method) performance, but rather negligible concerning their quality performance. This provides a strong indication

that the use of computers in the teaching process benefits more the mediocre and the weak in mathematics students, but less the good students. Much more experimental research is needed, however, for obtaining safer conclusions

REFERENCES

1. Atanassov, K.T. (1986), Intuitionistic Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1), 87-96.
2. Deng, J. (1982), Control Problems of Grey Systems, *Systems and Control Letters*, 288-294.
3. Dubois, D. & Prade, H. (2001), Possibility theory, probability theory and multiple-valued logics: A clarification, *Ann. Math. Artif. Intell.*, 32, 35-66.
4. Klir, G. J. & Folger, T. A. (1988), *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*, Prentice-Hall, London.
5. Kosko, B. (1990), Fuzziness Vs. Probability, *Int. J. of General Systems*, 17(2-3), 211-240.
6. Moore, R.A., Kearfort, R.B., Cloud, M.G. (1995), *Introduction to Interval Analysis*, 2nd ed., SIAM, Philadelphia, PA, USA.
7. Smarandache, F. (1998), *Neutrosophy / Neutrosophic probability, set, and logic*, Proquest, Michigan, USA.
8. Smarandache, F. (2016), Subtraction and Division of Neutrosophic Numbers, *Critical Review*, Vol. XIII, 103-110.
9. Smarandache, F. (2021), Indeterminacy in Neutrosophic Theories and their Applications, *International Journal of Neutrosophic Science*, 15(2), 89-97.
10. Voskoglou, M.Gr. (2017), *Finite Markov Chain and Fuzzy Logic Assessment Models: Emerging Research and Opportunities*, Create space independent publishing platform (Amazon), Columbia, SC.
11. Voskoglou, M.Gr. (2019a), Assessing Human-Machine Performance under Fuzzy Conditions, *Mathematics*, 7, article 230.
12. Voskoglou, M.Gr. (2019b), Fuzzy Systems, Extensions and Relative Theories, *WSEAS Transactions on Advances in Engineering Education*, 16, 63-69.
13. Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y. & Sunderraman, R. (2010), Single Valued Neutrosophic Sets, *Review of the Air Force Academy (Brasov)*, 1(16), 10-14, 2010.
14. Zadeh, L.A. (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338-353.
15. Zadeh, L.A. (1973), Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, 3, 28-44.
16. Zadeh, L.A. (1978), Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets Syst.*, 3-28.



Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
 Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
 Виходить з 2013.



p-ISSN 2413-1571
 e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571
<https://fmo-journal.org/>

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-2-005

УДК [373.016:53]:37.015.31:004(045)

РОЗВИТОК ПОНЯТТЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ЦИФРОВОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ В ПРАКТИЦІ ВІТЧИЗНЯНОЇ ПРИРОДНИЧОЇ ОСВІТИ

Наталія КУРИЛЕНКО ✉

Відокремлений структурний підрозділ «Морський фаховий
 коледж Херсонської державної морської академії», Україна
 kurylenko.n.v1976@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-1083-3247>

Ірина СЛІПУХІНА

Національний центр «Мала академія наук України», Україна
 slipukhina2015@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-9253-8021>

Сергій МЕНЯЙЛОВ

Національний авіаційний університет, Україна
 msm56msm@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-4871-311X>

DEVELOPMENT OF THE CONCEPT OF INFORMATION AND DIGITAL COMPETENCE IN THE PRACTICE OF DOMESTIC SCIENCE EDUCATION

Nataliia KURYLENKO ✉

A separate structural unit «Maritime Vocational College
 Kherson State Maritime Academy», Ukraine
 kurylenko.n.v1976@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-1083-3247>

Iryna SLIPUKHINA

National Center «Junior Academy of Sciences of Ukraine», Ukraine
 slipukhina2015@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-9253-8021>

Sergii MIENIAILOV

National Aviation University, Ukraine
 msm56msm@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-4871-311X>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Однією із ключових компетентностей учнів, формування якої передбачено низкою нормативних документів, є інформаційно-цифрова компетентність, що відображено у Концепції нової Української школи та навчальних програмах з фізики і природничих наук. Однак, у Державному стандарті базової середньої освіти йдеться про формування у здобувачів освіти компетентності в галузі ІКТ, окресленою терміном «інформаційно-комунікаційна компетентність». підхід.

Матеріали і методи. Використано теоретичні (аналіз наукових джерел та нормативних документів у контексті дефініцій інформаційно-комунікаційної та інформаційно-цифрової компетентностей) та емпіричні (бесіди і прасиметрія) методи дослідження.

Результати. Визначено сутність, структуру, особливості, моделі формування та співвідношення інформаційно-комунікаційної та інформаційно-цифрової компетентностей у процесі вивчення фізики в середній загальноосвітній школі, що сприятиме конкретизації цих понять і, зокрема, буде корисним для планування і формування освітніми змісту робочих документів, в основу яких покладено компетентнісний підхід. Проведено аналіз вітчизняних і закордонних наукових даних щодо досліджуваної проблеми. З'ясовано, що з широким впровадженням цифрових технологій у навчальний процес поняття інформаційно-цифрової компетентності замістило поняття інформаційно-комунікаційної компетентності, що відображено в контенті практичних освітніх документів. Виокремлено характерні особливості та основні компоненти інформаційно-цифрової компетентності здобувачів базової середньої освіти: інформаційна й медіа грамотність, знання про безпеку роботи в інтернеті та кібербезпеку, вміння створювати цифровий контент, вміння розв'язувати проблеми, навчальні ресурси.

Висновки. Формування інформаційно-цифрової компетентності вимагає навичок критичного мислення, дотримання правил поведінки та безпеки в інтернет-середовищі, розуміння загальних соціальних проблем, створених цифровими технологіями, вміння застосовувати інформаційні ресурси в освітній діяльності. Відтак формування інформаційно-цифрової компетентності у природничій освіті повинно здійснюватися із широким залученням навчально-дослідницької діяльності учнів, зокрема – з використанням цифрового

ABSTRACT

Formulation of the problem. One of the critical competencies of students, the formation of which is provided for by several regulatory documents, is information and digital competence, which is reflected in the Concept of the New Ukrainian School and the curricula for physics and natural sciences. However, the State Standard of Basic Secondary Education refers to forming ICT competence in students, defined by the term "information and communication competence."

Materials and methods. Theoretical (analysis of scientific sources and normative documents in the context of definitions of information and communication and information and digital competencies) and empirical (interviews and pragmatics) research methods were used.

Results. The essence, structure, features, models of formation and correlation of information and communication and information and digital competencies in the process of studying physics in secondary schools are determined, which will help to specify these concepts and, in particular, will be useful for planning and forming the content of working documents by educators based on the competence approach. The analysis of domestic and foreign scientific data on the problem under study is carried out. It is found that with the widespread introduction of digital technologies in the educational process, the concept of information and digital competence has replaced the concept of information and communication competence, which is reflected in the content of practical educational documents. The article highlights the characteristic features and main components of information and digital competence of students of basic secondary education: information and media literacy, knowledge of Internet safety and cybersecurity, ability to create digital content, problem-solving skills, and learning resources.

Conclusions. Formation of information and digital competence requires critical thinking skills, compliance with the rules of behavior and safety in the Internet environment, understanding of general social problems created by digital technologies, and the ability to use information resources in educational activities. Therefore, the formation of information and digital competence in science education should be carried out with the wide involvement of students' research activities, in particular, with the use of digital educational laboratory equipment, virtual laboratories, the use of STE(A)M approach to curriculum development, m-Learning technology, etc.

Для цитування:

Курilenko N., Slipukhina I., Mienaiiov S. Розвиток поняття інформаційно-цифрової компетентності в практиці вітчизняної природничої освіти. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 2. С. 27-36. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-2-005
 Курilenko, N., Slipukhina, I., & Mienaiiov, S. (2023). Rozvytok poniattia informatsiino-tsyfrovoy kompetentnosti v praktysii vitchyznanoi pryrodnychoi osvity [Development of the concept of information and digital competence in the practice of domestic science education]. *Fiziko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 27-36. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-005>

For citation:

Kurylenko, N., Slipukhina, I., & Mienaiiov, S. (2023). Development of the concept of information and digital competence in the practice of domestic science education. *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 27-36. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-005>
 Kurylenko, N., Slipukhina, I., & Mienaiiov, S. (2023). Rozvytok poniattia informatsiino-tsyfrovoy kompetentnosti v praktysii vitchyznanoi pryrodnychoi osvity [Development of the concept of information and digital competence in the practice of domestic science education]. *Fiziko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 27-36. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-005>

цифрового навчального лабораторного обладнання, віртуальних лабораторій, застосуванням STE(A)M підходу до формування навчальних планів, технології m-Learning тощо.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: цифрова грамотність; цифрова компетентність; інформаційно-комунікаційна компетентність; інформаційно-цифрова компетентність; природнича освіта.

KEYWORDS: digital literacy; digital competence; information and communication competence; information and digital competence; science education.

ВСТУП

Постановка проблеми. Серед основних вимог сучасності важливе місце посідає компетентність щодо «використання цифрових платформ, впровадження нових інформаційних та освітніх технологій, дистанційних форм організації освітнього процесу та активних методів навчання» (Биков & Пінчук, 2020). У одній із формул Нової української школи зазначається, що «...наскрізне застосування інформаційно-комунікаційних технологій в освітньому процесі...має стати інструментом забезпечення успіху нової української школи» (НУШ, 2017).

Державним стандартом базової середньої освіти передбачено формування одинадцяти ключових компетентностей, однією із яких є інформаційно-комунікаційна компетентність. У цьому ж документі йдеться про те, що цифрові технології є засобом її формування, а її зміст розкривається в «...в умінні школярів користуватися цифровими ресурсами, технологіями та пристроями» (Держстандарт, 2020).

Виявлено, що у нормативних документах, що регламентують освітній процес, переважно використовуються два основних терміни – *інформаційно-комунікаційна (ІКК) та інформаційно-цифрова (ІЦК) компетентності* (табл.1).

Таблиця 1.

Аналіз проблеми формування ІКК та ІЦК школярів у нормативних документах

Нормативний документ	Компетентність	Визначення поняття	Структурні компоненти
Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи (НУШ, 2017)	ІКК	Визначення відсутнє	Структура не надається
	ІЦК	впевнене, а водночас критичне застосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) для створення, пошуку, обробки, обміну інформацією на роботі, в публічному просторі та приватному спілкуванні	Структура не надається
ДЕРЖАВНИЙ СТАНДАРТ базової середньої освіти (Держстандарт, 2020)	ІКК	інформаційно-комунікаційна компетентність, що передбачає впевнене, критичне і відповідальне використання цифрових технологій для власного розвитку і спілкування; здатність безпечно застосовувати інформаційно-комунікаційні засоби в навчанні та інших життєвих ситуаціях, дотримуючись принципів академічної доброчесності	Структура не надається
	ІЦК	Визначення відсутнє	Структура не надається
ФІЗИКА І АСТРОНОМІЯ. Навчальна програма для 10-11 класів закладів загальної середньої освіти (Авторський колектив під керівництвом О. Ляшенка) (Навчальна програма, 2017)	ІКК	Визначення відсутнє	Структура не надається
	ІЦК	Визначення відсутнє	Структуру розкрито через компетентнісний потенціал навчального предмета <i>Уміння:</i> – використовувати інформаційні системи для швидкого та цілеспрямованого пошуку інформації; – визначати можливі джерела інформації, відбирати необхідну інформацію, оцінювати, аналізувати, перекодовувати інформацію; – користуватися сучасними гаджетами як інструментальними та вимірювальними засобами; – працювати з віртуальними лабораторіями, програмами-симуляторами; – створювати та досліджувати моделі фізичних і астрономічних явищ. <i>Ставлення:</i> – дотримуватися етичних норм під час роботи з інформаційними ресурсами. <i>Навчальні ресурси:</i> – електронні освітні ресурси та віртуальні лабораторії

ФІЗИКА. Навчальна програма для 10-11 класів закладів загальної середньої освіти (Авторський колектив під керівництвом В. Локтева) (Навчальна програма, 2017)	ІКК	Визначення відсутнє	Структура не надається
	ІЦК	Визначення відсутнє	Структуру розкрито через компетентнісний потенціал навчального предмета <i>Уміння:</i> – використовувати інформаційно-комунікаційні системи для швидкого та цілеспрямованого пошуку та обміну інформацією; – працювати з інформацією: аналізувати, відбирати потрібну, оцінювати, узагальнювати, створювати нову інформацію тощо; – створювати інформаційні продукти фізико-технічного змісту; – при потребі користуватися сучасними інформаційно-комунікаційними пристроями як засобами вимірювання; – при потребі працювати з цифровим обладнанням віртуальних лабораторій; – використовувати комп'ютерні моделі фізичних процесів та явищ; <i>Ставлення:</i> – дотримуватись принципів доброчесності щодо забезпечення авторських прав на отриману та використану інформацію; – критично сприймати інформацію, що надходить з різноманітних інформаційних ресурсів; <i>Навчальні ресурси:</i> – електронні освітні та інформаційні ресурси, цифрові лабораторії
ФІЗИКА. Навчальна програма для 7-9 класів закладів загальної середньої освіти (Авторський колектив під керівництвом О. Ляшенка) (Навчальна програма, 2017)	ІКК	Визначення відсутнє	Структура не надається
	ІЦК	Визначення відсутнє	Структуру розкрито через компетентнісний потенціал навчального предмета <i>Уміння:</i> – визначати можливі джерела інформації, відбирати необхідну інформацію, оцінювати, аналізувати, перекодовувати інформацію; – використовувати сучасні пристрої для отримання, опрацювання, збереження, передачі та представлення інформації; – використовувати сучасні цифрові технології і пристрої для вивчення фізичних явищ, для обробки результатів експериментів, моделювання фізичних явищ і процесів; – дотримуватись правил безпеки в мережах та мережевого етикету. <i>Ставлення:</i> – ціннісні орієнтири у володінні навичками роботи з інформацією, сучасною цифровою технікою; – дотримання авторського права, етично-моральних принципів поведінки з інформацією. <i>Навчальні ресурси:</i> – освітні цифрові ресурси, навчальні посібники
ПРИРОДНИЧІ НАУКИ 10-11 клас. Інтегрований курс для закладів загальної середньої освіти (Авторський колектив під керівництвом Т. Засекої) (Навчальна програма, 2017)	ІКК	Визначення відсутнє	Структура не надається
	ІЦК	Визначення відсутнє	Структуру розкрито через компетентнісний потенціал навчального предмета <i>Уміння:</i> – використовувати сучасні цифрові технології і пристрої для спостереження за довкіллям, явищами природи і процесами; – створювати інформаційні продукти (мультимедійна презентація тощо) природничого спрямування; шукати, обробляти і зберігати інформацію природничого характеру, критично оцінюючи її. <i>Ставлення:</i> – дотримання авторського права, етичних принципів поведінки з інформацією; – усвідомлення необхідності екологічних методів та засобів утилізації цифрових пристроїв. <i>Навчальні ресурси:</i> інтернет, гаджети

ПРИРОДНИЧІ НАУКИ 10-11 клас. Інтегрований курс для закладів загальної середньої освіти (Авторський колектив під керівництвом І. Дьоміної) (Навчальна програма, 2017)	ІКК	Визначення відсутнє	Структура не надається
	ІЦК	Визначення відсутнє	Структуру розкрито через компетентнісний потенціал навчального предмета <i>Уміння:</i> – використовувати сучасну техніку для пошуку інформації, її оброблення, збереження і передавання; – створювати медійні продукти наукового та науково-популярного профілю. <i>Ставлення:</i> – критично оцінювати наукову та науково-популярну інформацію з різних джерел; – дотримуватись авторського права, етичних принципів поводження з інформацією. <i>Навчальні ресурси:</i> – електронні освітні ресурси; – віртуальні лабораторії та атласи
ПРИРОДНИЧІ НАУКИ 10-11 клас. Інтегрований курс для закладів загальної середньої освіти (Авторський колектив під керівництвом Д. Шабанова) (Навчальна програма, 2017)	ІКК	Визначення відсутнє	Структура не надається
	ІЦК	Створення, аналіз та застосування комп'ютерних моделей та використання та аналіз достовірності різних цифрових джерел інформації	Структура не надається

Як видно з таблиці 1, Концепцією Нової української школи (НУШ, 2017), навчальними програмами з фізики (2017) та інтегрованих курсів з природничих наук (2017) передбачено формування ІЦК, натомість у Державному стандарті базової середньої освіти (2020) йдеться про формування ІКК.

Проведений аналіз наукових і публіцистичних даних у мережі Інтернет, а також педагогічний досвід вказують на те, що у педагогічній практиці доволі часто ІКК та ІЦК використовуються як взаємозамінні. Така термінологічна неузгодженість часто викликає певні складнощі, особливо на етапах планування навчального процесу і формування звітів педагогічними працівниками. Особливо виразною ця проблема постає у контексті вивчення математики і природничих дисциплін, особливо – фізики, при вивченні якої використовується широкий спектр інформаційних технологій: від баз даних до цифрових вимірювальних комплексів.

Аналіз актуальних досліджень. Проблема використання інформаційних технологій у освітньому процесі ґрунтовно досліджувалася українськими та зарубіжними науковцями. Теоретичні та практичні аспекти використання ІКТ у процесі підготовки учнів та студентів розглядали О. Співаковський (Spivakovsky et al., 2020), В. Биков й О. Пінчук (Биков та ін., 2020). Сутність та структуру цифрової компетентності здобувачів освіти досліджувала О. Трифонова (2018). Формування ІЦК через призму STE(A)M-освіти розглядали Г. Сакунова та Г. Мороз (2018). Дослідженням можливостей цифрових вимірювальних комплексів як засобів демонстраційного фізичного експерименту займалися В. Заболотний, Н. Мисліцька та О. Колеснікова (Мисліцька та ін., 2019). Використання ІЦК як засобу розвитку інновацій у сфері освіти було предметом дослідження О. Овчарук (2020). Проблеми формування цифрової компетентності школярів через призму опанування методик інструментальної цифрової дидактики (ІЦД) під час виконання лабораторних робіт із фізики в курсі загальноосвітньої та професійної підготовки присвячено роботи (Slipukhina et al., 2021; Чернецький та ін., 2020; Martyniuk et al., 2021).

Закордонні публікації щодо формування компетентності, пов'язаної з використанням ІКТ, мають виражену практичну орієнтованість. Так, концепції та засоби для розвитку цифрової грамотності (ЦГ) учнів та студентів досліджували А. Martin та J. Grudziecki (2006). У своїх дослідженнях, зокрема, вони виділяють три рівні її формування: 1 – digital competence; 2 – digital usage; 3 – digital transformation. Кожен із рівнів формується за допомогою набору он-лайн інструментів (Framework), що відображають цифрову грамотність учня та дають можливість вчителю внести корективи у її формування.

Підходи до розвитку цифрових компетентностей вчителів через формування ЦГ учнів були предметом дослідження (Borthwick & Hansen, 2017; Ottestad et al., 2014; Ghomi & Redecker, 2019; Faloona, 2020).

Більшість науковців використовують ІЦК як прояв ЦГ, що вказує на «здатність особистості ефективно використовувати засоби ІКТ у свої професійній діяльності» (Martin & Grudziecki, 2006), «впевнене та критичне використання доступних технологій інформаційного суспільства для повсякденного спілкування, роботи та відпочинку» (Биков та ін., 2020), «готовність і здатність ефективно використовувати ІКТ для вирішення різноманітних системних проблем» (Сакунова і Мороз, 2018), «інтегративне утворення, що містить систему знань, умінь та особистісних якостей доброчесності у використанні ІКТ технології та цифрових ресурсів для отримання нових природничо-наукових знань» (Запорожцева, 2019).

Аналіз робіт науковців та нормативних документів свідчать про те, що відсутнє єдине, загальноприйняте визначення сутності та структури ІЦК здобувачів освіти. Враховуючи те, що в Європейському освітньому просторі використовуються поняття ЦГ та ІЦК, важливо дослідити, як вони співвідносяться з категорією ІКК. Такий порівняльний аналіз дозволить поглибити розуміння змісту як структурних компонентів ІКК, так і результатів навчання природничих дисциплін, які з нею корелюють.

З огляду на зазначене **метою статті** є дослідження змісту поняття інформаційно-цифрової компетентності в контексті нормативних документів природничої освіти і його співвідношення з поняттям інформаційно-комунікаційної компетентності здобувачів базової середньої освіти у процесі навчання природничих наук.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі використано теоретичні методи аналізу педагогічної та науково-методичної літератури, відомих нормативних документів, пошук даних про релевантний теоретичний і практичний інноваційний досвід в інтернет-базах даних за ключовими словами та узагальнення багаторічного педагогічного досвіду. Емпірична складова дослідження представлена бесідами з освітянами, праксиметричними методами (аналіз звітів, планів і програм).

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Як показує європейський досвід, ІЦК є багатофункціональною і може застосовуватись у різних сферах життя. Так, Стратегією «Європа 2030» (2023) визначено ключову роль інформаційно-комунікаційних технологій для підтримки громадян Європи та підвищення довіри до ІКТ. З метою реалізації цієї стратегії у 2016 році європейськими науковими спільнотами та практиками (Vuorikari et al, 2016) була розроблена та представлена Європейська модель цифрової компетентності для громадян «DigComp» (DigComp 2.0, 2016, Vuorikari et al, 2016). Вона призначена для розбудови потенціалу цифрової трансформації освіти у таких напрямках як цифрові рамки компетентностей для споживачів (DigCompConsumers, 2016), освітніх організацій (DigCompOrg, 2021), викладачів та освітян (DigCompEdu, 2022). Ця концептуальна модель визначає основні компоненти цифрової компетентності у п'яти сферах діяльності (рис.1): інформаційна грамотність і використання даних, розв'язання проблем, спілкування, співпраця, участь у суспільному житті, створення цифрового контенту та розуміння етичних принципів, безпека.

Дотримуючись існуючих фреймворків автори DiKoLAN framework (Kotzebue et al, 2021) описують цифрові компетенції учнів та вчителів, які є актуальними для розробки науково-педагогічних норм природничої освіти з цифровою підтримкою (рис. 2).



Рис. 1. Структура цифрової компетентності згідно «DigComp» (DigComp, 2016)

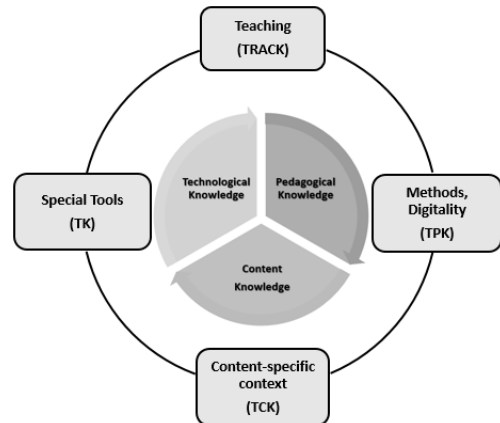


Рис. 2. Структура DiKoLAN framework (Kotzebue et al, 2021)

Як зазначають автори DiKoLAN (Kotzebue et al, 2021), до загальних (спільні для всіх предметів) і специфічних компетентностей у різних сферах науки до яких належать навички роботи з документами і презентаціями, комунікація (спілкування), пошук інформації, збір та опрацювання даних, створення симуляцій і моделей. Кожна із зазначених областей описується набором компетентностей, які, у свою чергу, структуруються відповідно до чотирьох технологічних вимірів, орієнтованих на предметно-специфічні знання: викладання (technological pedagogical content knowledge, TPACK), методи та педагогічні технології (technological pedagogical knowledge, TPK), контент (pedagogical content knowledge, PCK), спеціальні інструменти (technological content knowledge, TCK) і включають технологічний та педагогічний зміст знань і три рівні виконання (назва, опис, використання).

Аналіз світового та європейського досвіду формування цифрової компетентності громадян, а також чинних нормативних документів прийнятих у Європейському союзі та UNESCO (Куйбіда, 2020) спонукали до створення для громадян України Рамки цифрової компетентності (DigComp UA for Citizens, 2021) (рис.3).

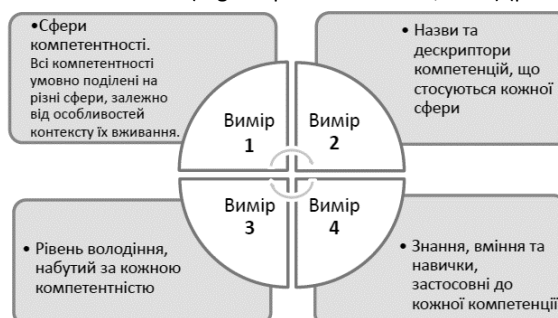


Рис. 3. Блок-схема адаптованої до України Рамки цифрової компетентності (DigComp UA for Citizens, 2021)

Адаптована Рамка DigComp UA for Citizens (2021) містить:

- 4 виміри, що включають: сфери компетентності, назви та дескриптори компетенцій, що входять до кожної сфери; знання, вміння та навички, що застосовуються до кожної компетенції, рівень володіння за кожною компетентністю;
- 6 сфер, до яких входять: базові цифрові навички, інформаційна грамотність та уміння працювати з даними, комунікація та взаємодія, створення цифрового контенту, розв'язання проблем та подальше навчання;
- 30 компетентностей, що відповідають кожній сфері застосування;
- 6 рівнів оволодіння кожною компетентністю, які умовно розділено на базовий, середній та високий.

Варто зазначити, що існують й інші підходи до опису цифрової компетентності в сфері освіти. Так, Л. Гаврилова, розглядаючи ІЦК як інтегровану здатність особистості у галузі ІК технологій, виокремлює в її складі знання, уміння, досвід, цінності та ставлення, що можуть бути реалізовані на практиці.

Натомість Ю. Запорожцева вказує на наступні компоненти ІЦК (Запорожцева, 2019): інформаційний – здатність учнів до ефективної роботи з інформацією у всіх видах її представлення; комп'ютерно-технологічний – уміння та навички, роботи школярів із сучасними комп'ютерними засобами та програмним забезпеченням; компонент застосування, що полягає у здатності застосовувати набуті знання, уміння та навички при роботі з сучасними цифровими засобами.

Спираючись на вітчизняні та зарубіжні дослідження, О. Наливайко вказує на характерні особливості та компоненти цифрової компетентності, до яких належать (Наливайко, 2021):

- знання й уміння працювати в цифровому середовищі;
- знання операційних і технологічних можливостей техніки, з якою необхідно взаємодіяти;
- уміння взаємодіяти та комунікувати з різними суб'єктами у кіберпросторі;
- уміння шукати й аналізувати інформацію;
- здатність до відповідальної поведінки в процесі створення та розповсюдження цифрового контенту.

Використовуючи модель формування ІЦК у предметній області шкільної програми з фізики, необхідно враховувати експериментальний характер цієї дисципліни. Тому під час її вивчення увага має бути зосереджена на:

- використання на уроках сучасного цифрового лабораторного обладнання;
- обробка результатів експериментів засобами ІКТ;
- виконання школярами різних видів проектів (у тому числі із застосуванням ІКТ та цифрових засобів);
- використання STE(A)M-технологій;
- застосування технології навчання з використанням можливостей смартфонів тощо.

Таким чином, узагальнення вищезазначеного дало можливість визначити структуру та сферу застосування ІЦК здобувачів освіти під час вивчення природничих наук. Виявлено, що це поняття включає: інформаційну й медіа грамотність, знання про безпеку роботи в інтернеті та кібербезпеку, уміння створювати цифровий контент, уміння розв'язувати проблеми та навчальні ресурси (рис. 4).



Рис. 4. Структурні компоненти ІЦК учня під час вивчення природничих наук

Інформаційна й медіаграмотність передбачають:

- знання: про можливі джерела інформації, способи пошуку, добору та оцінювання даних (DigComp UA, 2021; програми 10-11 кл, 2017);
- уміння: добирати й оцінювати, аналізувати, опрацьовувати необхідну інформацію, ефективно працювати з нею в усіх формах її представлення (програми 10-11, 2017) використовувати цифрові технології для саморозвитку, участі у суспільному житті, використовувати цифрові інструменти і технології для співпраці та створення ресурсів знань;
- ставлення: критичне сприйняття інформації, що надходить з різноманітних інформаційних ресурсів; ціннісні орієнтири у володінні навичками роботи з інформацією, сучасною цифровою технікою (програми 6-9 кл., 2017; 10-11 кл., 2017).

Безпека в інтернеті та кібербезпека передбачає:

- знання, пов'язані з дотриманням правил безпеки в мережах та мережевого етикету (DigComp, 2016; програми 10-11 кл, 2017), способи та засоби безпечної роботи в інтернеті (програми 10-11 кл., 2017), поняття кібератака та кібербезпека;

– уміння користуватися програмними продуктами для пристроїв, цифрового вмісту, безпечної роботи в інтернеті, збереження персональних даних і конфіденційності (програми 10-11 кл., 2017); захищати пристрої та цифровий контент (DigComp UA, 2021)

– ставлення: критичне сприйняття інформації, що надходить з різноманітних інформаційних ресурсів; оцінювання ефективності роботи різних програмних засобів із забезпечення безпечної роботи в інтернеті; розуміти ризики та загрози у цифрових середовищах (DigComp UA, 2021).

Створення цифрового контенту, доброчесність передбачають:

– знання про: створення та керування цифровим контентом у структурованому середовищі, норми академічної доброчесності щодо створення та передавання інформації та дотримання авторських прав;

– уміння: працювати в операційних системах та офісних застосунках; створювати інформаційні продукти фізико-технічного змісту; створювати інформаційні продукти природничого спрямування;

– ставлення: розуміння етики роботи з інформацією, дотримання принципів доброчесності щодо забезпечення авторських прав на отриману та використану інформацію (програми 10-11 кл., 2017); ставлення до піратських програмних засобів (DigComp UA, 2017).

Категорія навчальні ресурси включає:

– знання про: електронні освітні та інформаційні ресурси; цифрові та віртуальні лабораторії; комп'ютерні моделі фізичних процесів та явищ; цифрові засоби отримання й обробки даних експериментів; цифрові вимірювальні комплекси (програми 10-11 кл., 2017)

– уміння: працювати з віртуальними лабораторіями, цифровими засобами вимірювання, мобільними додатками; здійснювати вимірювання, аналіз та обробку результатів експериментів за допомогою цифрових засобів та вимірювальних комплексів (DigComp, 2016; програми 10-11 кл., 2017);

– ставлення: критично ставитись та оцінювати достовірність отриманих результатів.

Під поняттям Розв'язання проблем у контексті ІКТ розуміють:

– знання про можливості ІКТ та цифрових технологій у вирішенні освітніх завдань;

– уміння: творчого використання цифрових технологій для створення нового знання та інноваційних процесів і продуктів; шукати, обробляти і зберігати інформацію природничого характеру, критично оцінюючи її; виявляти технічні проблеми при експлуатації пристроїв (у тому числі лабораторного призначення) і користуванні цифровими середовищами та розв'язувати їх (DigComp, 2016);

– ставлення: оцінювання потреби, виявлення і добір цифрових інструментів та можливих технологій.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Витоки відмінностей понять ІЦК й ІКК знаходяться, насамперед, у визначенні нерозривно пов'язаних між собою цифрової й інформаційної технологій. Так, під інформаційними технологіями розуміють комп'ютеризовану інфраструктуру: від фізичного обладнання до операційного програмного забезпечення. Ці технології можуть включати комп'ютери та їх мережі, пристрої інтернету речей, комп'ютерні програми та програмне забезпечення, безпекове та антивірусне програмне забезпечення тощо. Водночас під цифровими технологіями розуміють способи і методи використання інформаційних технологій: інструменти, системи, пристрої та ресурси, які генерують, зберігають або обробляють дані, зокрема, цифрові вимірювальні інструменти, мобільні телефони і гаджети, соціальні мережі, мультимедіа тощо.

Зазначене узгоджується з отриманими в дослідженні результатами, які показали, що поняття ІЦК все частіше використовується у методичних працях, орієнтованих на практичне застосування ЦГ при вивченні природничих дисциплін. У структурі ІЦК виокремлюють навички критичного мислення, дотримання правил поведінки та безпеки в інтернет-середовищі, розуміння загальних соціальних проблем, створених цифровими технологіями, уміння застосовувати інформаційні ресурси в освітній діяльності. Вочевидь формування ІЦК при вивченні природничих наук у загальноосвітній школі має здійснюватися з урахуванням навчально-дослідницької діяльності здобувачів освіти, зокрема з використанням цифрового навчального лабораторного обладнання, віртуальних лабораторій, застосуванням STE(A)M підходу, технології m-Learning тощо. Можна зробити висновок, що з широким впровадженням цифрових технологій в освітній процес більш широке поняття інформаційно-цифрової компетентності замістило раніше введене поняття інформаційно-комунікаційної компетентності, що має бути враховане при формуванні освітніх нормативних документів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Borthwick, A. C., & Hansen, R. (2017). Digital Literacy in teacher education: Are teacher educators competent? *Journal of Digital Learning in Teacher Education*, 33(2), 46–48. <https://doi.org/10.1080/21532974.2017.1291249>
2. Digital Competence Framework for Educators (DigCompEdu). Official website of the European Union. https://joint-research-centre.ec.europa.eu/digcompedu_en
3. DiKoLAN - Digital Competencies for Teaching in Science Education (British English) – Digital Competencies for Teaching in Science Education. Взято з <https://dikolan.de/en/>
4. *Europe's Digital Decade: Commission sets the course towards a digitally empowered Europe by 2030*. European Commission - European Commission. (n.d.). Retrieved March 17, 2023, from https://ec.europa.eu/commission/presscorner/detail/en/IP_21_983
5. Falloon, G. (2020). From Digital Literacy to digital competence: The teacher digital competency (TDC) framework. *Educational Technology Research and Development*, 68(5), 2449–2472. <https://doi.org/10.1007/s11423-020-09767-4>
6. *Framework DigCompOrg*. Офіційний сайт Європейського Союзу. https://joint-research-centre.ec.europa.eu/european-framework-digitally-competent-educational-organisations-digcomporg/digcomporg-framework_en
7. Ghomi, M., & Redecker, C. (2019). Digital competence of educators (digcompedu): Development and evaluation of a self-assessment instrument for Teachers' Digital Competence. *Proceedings of the 11th International Conference on Computer Supported Education*. <https://doi.org/10.5220/0007679005410548>

8. Kotzebue, L. von, Meier, M., Finger, A., Kremser, E., Huwer, J., Thoms, L.-J., Becker, S., Bruckermann, T., & Thyssen, C. (2021). The framework DiKoLAN (Digital Competencies for teaching in science education) as basis for the self-assessment tool dikolan-grid. *Education Sciences*, 11(12), 775. <https://doi.org/10.3390/educsci11120775>
9. Kuzminska, O., Mazorchuk, M., Morze, N., Pavlenko, V., & Prokhorov, A. (2019). Study of digital competence of the students and teachers in Ukraine. *Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications*, 148–169. https://doi.org/10.1007/978-3-030-13929-2_8
10. Martin, A., & Grudziecki, J. (2006). DigEuLit: Concepts and tools for Digital Literacy Development. *Innovation in Teaching and Learning in Information and Computer Sciences*, 5(4), 249–267. <https://doi.org/10.11120/ital.2006.05040249>
11. Martyniuk, O. O., Martyniuk, O. S., & Muzyka, I. O. (2021). Formation of informational and digital competence of secondary school students in laboratory work in physics. <https://doi.org/10.31812/123456789/4446>
12. Ottestad, G., Kelentrić, M., & Guðmundsdóttir, G. B. (2014). Professional digital competence in teacher education. *Nordic Journal of Digital Literacy*, 9(4), 243–249. <https://doi.org/10.18261/issn1891-943x-2014-04-02>
13. Slipukhina, I., Chernetkiy, I., Kurylenko, N., Mienailov, S., & Podlasov, S. (2021). Instrumental Digital Didactics of Physics Study in the Aspect of M-learning. In: , et al. *Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications. ICTERI 2020. Communications in Computer and Information Science*, vol 1308. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-77592-6_1
14. Spivakovsky, O., Petukhova, L., & Anisimova, O. (2020). ICTERI 2020: ICT in Education, research and industrial applications. integration, harmonization and Knowledge Transfer 2020 : *Proceedings of the 16th International Conference on ICT in Education, research and industrial applications. integration, harmonization and knowledge transfer*. volume II: Workshops. Kharkiv, Ukraine, October 06-10, 2020. <https://doi.org/10.31812/123456789/4124>
15. The Digital Competence Framework for Consumers (*DigCompConsumers*). Official website of the European Union. https://joint-research-centre.ec.europa.eu/digital-competence-framework-consumers_en
16. Vuorikari, R., Punie Y., Carretero Gomez, S., & Vanden Brande, G. (2016). *DigComp 2.1: The Digital Competence Framework for Citizens with eight proficiency levels and examples of use*. <https://publications.jrc.ec.europa.eu/repository/handle/JRC106281>
17. Биков, В., Спірін, О., & Пінчук, О. (2020). Сучасні завдання цифрової трансформації освіти. Вісник кафедри ЮНЕСКО «Неперервна професійна освіта XXI століття», (1), 27–36. [https://doi.org/10.35387/ucj.1\(1\).2020.27-36](https://doi.org/10.35387/ucj.1(1).2020.27-36)
18. Гаврилова, Л. Г., Топольник, Ю. В. (2017). Цифрова культура, цифрова грамотність, цифрова компетентність як сучасні освітні феномени. *Інформаційні технології та засоби навчання*, 61(5), 1. <https://doi.org/10.33407/itlt.v61i5.1744>
19. Запорожцева, Ю. С. (2019). Інформаційно-цифрова компетентність як складник сучасного навчально-виховного процесу. *Теорія і методика професійної освіти*, 12(1), 79–82. <https://doi.org/10.32843/2663-6085.2019.12-1.15>
20. Куйбіда, В., Петров, О., Федюлова, Л., & Андрощук, Г. (2019). Цифрові компетенції як умова формування якості людського капіталу. *Збірник Наукових Праць Національної Академії Державного Управління При Президенті України*, (1), 118–133. <https://doi.org/10.36030/2664-3618-2019-1-118-133>
21. Мисліцька, Н. А., Колеснікова, О. А., Заболотний, В. Ф. (2019). Використання цифрової лабораторії Нова-5000 в системі засобів демонстраційного фізичного експерименту. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна*, 1(25), 130–134. <https://doi.org/10.32626/2307-4507.2019-25.130-134>
22. *Навчальні програми для 10-11 класів закладів загальної середньої освіти*. Міністерство освіти і науки України. <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
23. *Навчальні програми для 6-9 класів закладів загальної середньої освіти*. Міністерство освіти і науки України. <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi>
24. Наливайко, О. (2021). Цифрова компетентність: сутність поняття та динаміка його розвитку. *Компетентнісний підхід у вищій школі: теорія та практика*. <https://doi.org/10.26565/9789662856729.03>
25. *Нова Українська школа*. Концептуальні засади реформування середньої школи (2017). Міністерство освіти і науки України. <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>
26. Овчарук, О. В. (2020). Сучасні підходи до розвитку цифрової компетентності людини та цифрового громадянства в європейських країнах. *Інформаційні технології та засоби навчання*, 76(2), 1–13. <https://doi.org/10.33407/itlt.v76i2.3526>
27. *Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти*. Постанова від 30 вересня 2020 р. № 898. Офіційний веб портал парламенту України. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-p#Text>
28. *Про повну загальну середню освіту*. Офіційний вебпортал парламенту України. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text>
29. *Рамка цифрової компетентності для громадян України (DigComp UA for Citizens)*. https://thedigital.gov.ua/storage/uploads/files/news_post/2021/3/mintsifra-oprilyudnyue-ramku-tsifrovoyi-kompetentnosti-dlya-gromadyan/%D0%9E%D0%A0%20%D0%A6%D0%9A.pdf
30. Сакунова, Г., & Мороз, І. (2018). Формування інформаційно-цифрової компетентності учнів з фізики через призму стем-освіти. *Фізико-математична освіта*, 15(1), 285–289. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-015-1-054>
31. Трифонова, О. М. (2018). Інформаційно-цифрова компетентність: зарубіжний та вітчизняний досвід. *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки*, 2(173), 221–225. вилучено із <https://pednauk.cuspu.edu.ua/index.php/pednauk/article/view/348>
32. Чернецький, І., Сліпихіна, І., & Поліхун Н. (2020). Фізика. Прикладні методики інструментальної цифрової дидактики: навчально-методичний посібник. Національний центр «Мала академія наук України». <https://znayshov.com/FR/5622/121.pdf>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Borthwick, A. C., & Hansen, R. (2017). Digital Literacy in teacher education: Are teacher educators competent? *Journal of Digital Learning in Teacher Education*, 33(2), 46–48. <https://doi.org/10.1080/21532974.2017.1291249>
2. Digital Competence Framework for Educators (*DigCompEdu*). Official website of the European Union. https://joint-research-centre.ec.europa.eu/digcompedu_en
3. DiKoLAN - Digital Competencies for Teaching in Science Education (British English) – Digital Competencies for Teaching in Science Education. Взято з <https://dikolan.de/en/>
4. *Europe's Digital Decade: Commission sets the course towards a digitally empowered Europe by 2030*. European Commission - European Commission. (n.d.). Retrieved March 17, 2023, from https://ec.europa.eu/commission/presscorner/detail/en/IP_21_983
5. Falloon, G. (2020). From Digital Literacy to digital competence: The teacher digital competency (TDC) framework. *Educational Technology Research and Development*, 68(5), 2449–2472. <https://doi.org/10.1007/s11423-020-09767-4>
6. *Framework DigCompOrg*. Офіційний сайт Європейського Союзу. https://joint-research-centre.ec.europa.eu/european-framework-digcomporg-digcomporg-framework_en

7. Ghomi, M., & Redecker, C. (2019). Digital competence of educators (digcompedu): Development and evaluation of a self-assessment instrument for Teachers' Digital Competence. *Proceedings of the 11th International Conference on Computer Supported Education*. <https://doi.org/10.5220/0007679005410548>
8. Kotzebue, L. von, Meier, M., Finger, A., Kremser, E., Huwer, J., Thoms, L.-J., Becker, S., Bruckermann, T., & Thyssen, C. (2021). The framework DiKoLAN (Digital Competencies for teaching in science education) as basis for the self-assessment tool dikolan-grid. *Education Sciences*, 11(12), 775. <https://doi.org/10.3390/educsci11120775>
9. Kuzminska, O., Mazorchuk, M., Morze, N., Pavlenko, V., & Prokhorov, A. (2019). Study of digital competence of the students and teachers in Ukraine. *Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications*, 148–169. https://doi.org/10.1007/978-3-030-13929-2_8
10. Martin, A., & Grudziecki, J. (2006). DigEuLit: Concepts and tools for Digital Literacy Development. *Innovation in Teaching and Learning in Information and Computer Sciences*, 5(4), 249–267. <https://doi.org/10.11120/ital.2006.05040249>
11. Martyniuk, O. O., Martyniuk, O. S., & Muzyka, I. O. (2021). Formation of informational and digital competence of secondary school students in laboratory work in physics. <https://doi.org/10.31812/123456789/4446>
12. Ottestad, G., Kelenić, M., & Guðmundsdóttir, G. B. (2014). Professional digital competence in teacher education. *Nordic Journal of Digital Literacy*, 9(4), 243–249. <https://doi.org/10.18261/issn1891-943x-2014-04-02>
13. Slipukhina, I., Chernetskiy, I., Kurylenko, N., Mienailov, S., & Podlasov, S. (2021). Instrumental Digital Didactics of Physics Study in the Aspect of M-learning. *Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications. ICTERI 2020. Communications in Computer and Information Science*, vol 1308. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-77592-6_1
14. Spivakovsky, O., Petukhova, L., & Anisimova, O. (2020). ICTERI 2020: ICT in Education, research and industrial applications. integration, harmonization and Knowledge Transfer 2020 : *Proceedings of the 16th International Conference on ICT in Education, research and industrial applications. Integration, harmonization and knowledge transfer*. volume II: Workshops. Kharkiv, Ukraine, October 06-10, 2020. <https://doi.org/10.31812/123456789/4124>
15. The Digital Competence Framework for Consumers (DigCompConsumers). Official website of the European Union. https://joint-research-centre.ec.europa.eu/digital-competence-framework-consumers_en
16. Vuorikari, R., Punie Y., Carretero Gomez, S., & Vanden Brande, G. (2016). *DigComp 2.1: The Digital Competence Framework for Citizens with eight proficiency levels and examples of use*. <https://publications.jrc.ec.europa.eu/repository/handle/JRC106281>
17. Bykov, V., Spirin, O., & Pinchuk, O. (2020). Suchasni zavdannia tsyfrovoy transformatsii osvity [Modern tasks of digital transformation of education]. *Visnyk kafedry YuNESKO «Neperervna profesiina osvita KhKhI stolittia» – UNESCO Chair Journal "Lifelong Professional Education in the XXI Century"*, (1), 27–36. [https://doi.org/10.35387/ucj.1\(1\).2020.27-36](https://doi.org/10.35387/ucj.1(1).2020.27-36)
18. Havrylova, L. H., Topolnyk, Yu. V. (2017). Tsyfrova kultura, tsyfrova hramotnist, tsyfrova kompetentnist yak suchasni osvitni fenomeny [Digital culture, digital literacy, digital competence as modern educational phenomena]. *Informatsiini tekhnolohii ta zasoby navchannia – Information Technologies and Learning Tools*, 61(5), 1. <https://doi.org/10.33407/itlt.v61i5.1744> (in Ukrainian)
19. Zaporozhtseva, Yu. S. (2019). Informatsiino-tyfrova kompetentnist yak skladnyk suchasnoho navchalno-vykhovnoho protsesu [Information and digital competence as a component of modern educational process]. *Teoriia i metodyka profesiinoi osvity – Innovate Pedagogy*, 12(1), 79–82. <https://doi.org/10.32843/2663-6085.2019.12-1.15> (in Ukrainian)
20. Kuibida, V., Petroie, O., Fedulova, L., & Androshchuk, H. (2019). Tsyfrovi kompetentsii yak umova formuvannia yakosti liudskoho kapitalu [Digital competences as a condition for the formation of the quality of human capital]. *Zbirnyk Naukovykh Prats Natsionalnoi Akademii Derzhavnogo Upravlinnia Pry Prezydentovi Ukrainy – Collection of Scientific Works of the National Academy of Public Administration under the President of Ukraine*, (1), 118–133. <https://doi.org/10.36030/2664-3618-2019-1-118-133> (in Ukrainian)
21. Myslitska, N. A., Kolesnikova, O. A., Zabolotnyi, V. F. (2019). Vykorystannia tsyfrovoy laboratorii Nova-5000 v systemi zasobiv demonstratsiinoho fizychnoho eksperymentu [Use of Nova-5000 Digital Laboratory in the system of means of demonstration physical experiment]. *Zbirnyk naukovykh prats Kamianets-Podilskoho natsionalnoho universytetu imeni Ivana Ohienka. Seriiia pedahohichna – Collection of Scientific Papers of Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohienko University. Pedagogical Series*, 1(25), 130–134. <https://doi.org/10.32626/2307-4507.2019-25.130-134> (in Ukrainian)
22. *Навчальні програми для 10-11 класів закладів загальної середньої освіти (2017)*. Navchalni prohramy dlia 10-11 klasiv zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Educational programs for 10-11 grades of general secondary education institutions]. Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy – Ministry of Education and Science of Ukraine. <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (in Ukrainian)
23. *Навчальні програми для 6-9 класів закладів загальної середньої освіти*. Navchalni prohramy dlia 6-9 klasiv zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Educational programs for 10-11 grades of general secondary education institutions]. Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy – Ministry of Education and Science of Ukraine. <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (in Ukrainian)
24. Nalyvaiko, O. (2021). Tsyfrova kompetentnist: sutnist poniattia ta dynamika yoho rozvytku [Digital competence: the essence of the concept and the dynamics of its development]. *Kompetentnisnyi pidkhid u vyshchii shkoli: teoriia ta praktyka – Competency approach in higher education: theory and practice*. <https://doi.org/10.26565/9789662856729.03> (in Ukrainian)
25. *Нова Українська школа*. Концептуальні засади реформування середньої школи. Nova Ukrainska shkola. Kontseptualni zasady reformuvannia serednoi shkoly [New Ukrainian school. Conceptual principles of secondary school reform]. Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy – Ministry of Education and Science of Ukraine. <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf> (in Ukrainian)
26. Ovcharuk, O. V. (2020). Suchasni pidkhody do rozvytku tsyfrovoy kompetentnosti liudyny ta tsyfrovoho hromadianstva v yevropeiskykh krainakh [Modern approaches to the development of a person's digital competence and digital citizenship in European countries]. *Informatsiini tekhnolohii ta zasoby navchannia – Information Technologies and Learning Tools*, 76(2), 1–13. <https://doi.org/10.33407/itlt.v76i2.3526> (in Ukrainian)
27. *Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти*. Постанова від 30 вересня 2020 р. № 898. Pro deiaki pytannia derzhavnykh standartiv povnoi zahalnoi serednoi osvity. Postanova vid 30 veresnia 2020 r. № 898 [About some issues of state standards of complete general secondary education. Resolution of September 30, 2020 No. 898]. *Ofitsiyni veb portal parlamentu Ukrainy – Official web portal of the Parliament of Ukraine*. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-n#Text> (in Ukrainian)
28. *Про повну загальну середню освіту*. Pro povnu zahalnu seredniu osvitu [About complete general secondary education]. *Ofitsiyni veb portal parlamentu Ukrainy – Official web portal of the Parliament of Ukraine*. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text> (in Ukrainian)
29. *Рамка цифрової компетентності для громадян України (DigComp UA for Citizens)*. Ramka tsyfrovoy kompetentnosti dlia hromadian Ukrainy (DigComp UA for Citizens) [Digital competence framework for citizens of Ukraine (DigComp UA for Citizens)]. https://thedigital.gov.ua/storage/uploads/files/news_post/2021/3/mintsifra-oprilyudnyue-ramku-tsifrovoy-kompetentnosti-dlya-gromadyan/%D0%9E%D0%A0%20%D0%A6%D0%9A.pdf (in Ukrainian)

30. Sakunova, H., & Moroz, I. (2018). Foromuvannia informatsiino-tsyfrovoi kompetentnosti uchniv z fizyky cherez pryzmu stem-osvity [Formation of informational and digital competence of learner of physics under the premium of Steam Education]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 15(1), 285–289. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-015-1-054> (in Ukrainian)
31. Tryfonova, O. M. (2018). Informatsiino-tsyfrova kompetentnist: zarubizhnyi ta vitchyzniani dosvid [Information and digital competence: foreign and domestic experience]. *Naukovi zapysky. Seriya: Pedagogichni nauky – Proceedings. Series: Pedagogical sciences*, 2(173), 221-225. вилучено із <https://pednauk.cuspu.edu.ua/index.php/pednauk/article/view/348> (in Ukrainian)
32. Chernetskyi, I., Slipukhina, I., & Polikhun, N (2020). Fizyka. Prykladni metodyky instrumentalnoi tsyfrovoy dydaktyky: navchalno-metodychnyi posibnyk [Physics. Applied methods of instrumental digital didactics: educational and methodological manual]. Natsionalnyi tsentr «Mala akademiia nauk Ukrainy» – National Center «Small Academy of Sciences of Ukraine». <https://znayshov.com/FR/5622/121.pdf> (in Ukrainian)



Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
 Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
 Видається з 2013.



p-ISSN 2413-1571
 e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571
<https://fmo-journal.org/>

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-2-006

ПЕДАГОГІЧНІ УМОВИ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ ДО ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ ВІРТУАЛЬНОЇ НАОЧНОСТІ У ПРОФЕСІЙНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Павло МУЛЕСА ✉

Ужгородський національний університет, Україна
 pavlo.mulesa@uzhnu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3437-8082>

Олена СЕМЕНІХІНА

Сумський державний педагогічний університет
 імені А.С.Макаренка, Україна
 e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3896-8151>

PEDAGOGICAL CONDITIONS FOR PREPARING FUTURE MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE TEACHERS FOR THE USAGE OF VIRTUAL CLARITY TOOLS IN PROFESSIONAL ACTIVITIES

Pavlo MULESA ✉

Uzhgorod National University, Ukraine
 pavlo.mulesa@uzhnu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3437-8082>

Olena SEMENIKHINA

Makarenko Sumy State
 Pedagogical University, Ukraine
 e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua
<https://orcid.org/0000-0002-3896-8151>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Комплексне вивчення проблеми професійної підготовки фахівців вимагає уточнення відповідних умов її реалізації. Загальна особливість усіх умов організації навчальної діяльності полягає в тому, що вони створюються спеціально, дають змогу побудувати цілісну модель педагогічної системи навчання і наповнити її компоненти певним змістом. Нами розробляється педагогічна система професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності, а тому актуальним є питання визначення педагогічних умов її реалізації. Тому метою статті є визначення педагогічних умов підготовки майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності.

Матеріали і методи. Для досягнення мети використано теоретичні (аналіз і узагальнення наукових джерел, термінологічний аналіз, структурно-логічний аналіз) і емпіричні (експертна оцінка) методи наукового пізнання.

Результати. Підготовка майбутніх учителів математики та інформатики до застосування засобів віртуальної наочності у професійній діяльності потребує дотримання педагогічних умов: 1) посилення мотивації використання засобів ВН; 2) активне використання засобів комп'ютерної візуалізації у процесі вивчення професійно орієнтованих дисциплін; 3) розвиток здатності до впровадження інновацій в галузі ЦТ.

Висновки. Виокремлення педагогічних умов підготовки майбутніх учителів математики та інформатики до застосування засобів віртуальної наочності у професійній діяльності дає змогу обґрунтувати модернізацію професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики та впроваджувати їх в реальний освітній процес.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: педагогічні умови; майбутні учителі математики та інформатики; засоби віртуальної наочності; професійна підготовка; професійна освіта.

ABSTRACT

Formulation of the problem. A comprehensive study of the problem of professional training of specialists requires clarification of the relevant conditions for its implementation. The general feature of all the requirements for the organization of educational activities is that they are explicitly created, making it possible to build a holistic model of the pedagogical system of education and fill its components with specific content. We are developing a pedagogical system of professional training for future teachers of mathematics and computer science for the use of virtual clarity tools in professional activity. Therefore, the question of determining the pedagogical conditions for its implementation is relevant. Therefore, the purpose of the article is to determine the pedagogical conditions for preparing future teachers of mathematics and computer science for the use of virtual clarity in professional activities.

Materials and methods. To achieve the goal, theoretical (analysis and generalization of scientific sources, terminological analysis, structural and logical analysis) and empirical (survey, expert assessment) methods of scientific knowledge were used.

Results. The preparation of future teachers of mathematics and computer science for the use of virtual visual aids in professional activities requires compliance with pedagogical conditions: 1) the strengthening of the motivation to use virtual clarity tools; 2) the active usage of computer visualization tools in the process of studying professionally oriented disciplines; 3) the development of the ability to introduce innovations in the field of virtual clarity tools.

Conclusions. The separation of pedagogical conditions for the preparation of future mathematics and computer science teachers for the use of virtual clarity tools in professional activities makes it possible to justify the modernization of their professional training and introduce these conditions into the educational process.

KEYWORDS: pedagogical conditions; future teachers of mathematics and computer science; means of virtual clarity; professional training; professional education.

ВСТУП

Постановка проблеми. Комплексне вивчення проблеми професійної підготовки фахівців вимагає уточнення відповідних умов її реалізації. У галузі педагогіки умови представляють собою якісну характеристику основних факторів, процесів та явищ освітнього середовища, що відображає основні вимоги до організації освітньої діяльності, сукупність об'єктивних можливостей, обставин педагогічного процесу, які цілеспрямовано створюються і реалізуються в освітньому середовищі і сприяють вирішенню поставленої педагогічної проблеми, комплекс заходів, які дають змогу

Для цитування:

Мулеса П., Семеніхіна О. Педагогічні умови підготовки майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 2. С. 37-42. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-2-006

Мулеса, П., & Семеніхіна О. (2023). Педагогічні умови підготовки майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності. *Фізико-математична освіта*, 38(2), 37-42. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-006>

For citation:

Mulesa, P., & Semenikhina, O. (2023). Pedagogical conditions for preparing future mathematics and computer science teachers for the usage of virtual clarity tools in professional activities. *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 37-42. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-006>

Mulesa, P., & Semenikhina, O. (2023). Pedagogical conditions for preparing future mathematics and computer science teachers for the usage of virtual clarity tools in professional activities. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 37-42. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-006>

суттєво підвищити ефективність і результативність процесу професійної підготовки. Загальна особливість усіх умов організації навчальної діяльності полягає в тому, що вони створюються спеціально, дають змогу побудувати цілісну модель педагогічної системи навчання і наповнити її компоненти певним змістом. Нами розробляється педагогічна система професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності, а тому актуальним є питання визначення педагогічних умов її реалізації.

Аналіз актуальних досліджень. Термін «умови» у Великому тлумачному словнику української мови визначається як «необхідні обставини, які уможливають здійснення, створення, утворення чого-небудь або сприяють чомусь; обставини, особливості реальної дійсності, за яких відбувається або здійснюється що-небудь» (Бусел, 2003).

Під терміном «педагогічні умови» розуміють: характеристики педагогічного середовища; обставини, необхідні для перебігу педагогічного процесу; фактори, шляхи, напрями педагогічного процесу; уявні результати педагогічного процесу; форми, методи, педагогічні прийоми. В роботах (Галай, 2017) та (Гамалій, 2007) педагогічні умови характеризують як обставини, що сприяють формуванню професійно-важливих якостей та роблять можливим формування професійно бажаних особистісних новоутворень, або обставини, що сприяють розвитку учня, або, навпаки, гальмують його розвиток в освітньому процесі.

У роботі (Semenog et al., 2019) зазначається про умови формування умінь створювати та використовувати візуальні моделі знань. Автори (Yurchenko et al., 2021) характеризують умови успішної самоосвіти ІТ-фахівців на відкритих освітніх платформах. У дослідженні (Petrenko et al., 2019) представлено умови використання програмного забезпечення у підготовці спортсменів. Стаття (Hallstrom & Schonborn, 2019) торкається питань впровадження STEM-орієнтованого навчання.

Зазначимо, що, формулюючи педагогічні умови в тому чи іншому дослідженні, науковці сходяться в думці, що вони мають інтегрувати найважливіші взаємопов'язані сторони педагогічного процесу й водночас бути мінімально достатніми для досягнення мети.

Спираючись на наведені вище міркування під педагогічними умовами будемо розуміти ті обставини всередині педагогічної системи, що є необхідними й достатніми для успішного досягнення мети педагогічної системи. Тому **метою статті** є визначення педагогічних умов підготовки майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення мети використано теоретичні (аналіз і узагальнення наукових джерел, термінологічний аналіз, структурно-логічний аналіз) і емпіричні (експертна оцінка) методи наукового пізнання.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Організація освітнього процесу завжди передбачає виконання не однієї умови, а комплексу взаємопов'язаних педагогічних умов, які є результатом планомірного добору, конструювання і застосування елементів змісту, методів чи прийомів, а також організаційних форм навчання для досягнення певних дидактичних цілей. Тому з метою виділення педагогічних для успішної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності необхідно здійснити систематизацію й узагальнення результатів уже наявних наукових розвідок з актуальних проблем професійної підготовки майбутніх учителів. Виділені науковцями умови охоплюють різні сторони навчання, дослідники намагаються відобразити специфіку ЗВО педагогічної галузі, особливості підготовки майбутніх учителів, профіль їхньої діяльності. Проте, на наш погляд, вже запропоновані умови не зможуть напевно уможливити підготовку майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності. Тому важливим аспектом нашого дослідження було з'ясування чинників, які заважають успішній підготовці майбутніх учителів математики та інформатики використовувати засоби віртуальної наочності у професійній діяльності.

Нами було ініційовано опитування серед студентів (табл. 1) щодо чинників, які, на їхню суб'єктивну думку, заважають формуванню готовності до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності. Загальна кількість респондентів склала 102 особи

Таблиця 1

Відповідей студентів щодо чинників, які заважають формуванню готовності до використання

№	Чинники	Відповідь
1.	Невпевненість з приводу можливості застосування засобів віртуальної наочності	2%
2.	Відсутність можливості застосувати засоби віртуальної наочності у ході вивчення інших практичних дисциплін	22%
3.	Труднощі із сприйняттям матеріалу про засоби віртуальної наочності	10%
4.	Відсутність спрямованості змісту підготовки на формування готовності студентів до використання засобів віртуальної наочності	14%
5.	Недостатні теоретична (психолого-педагогічна\ методична) підготовка щодо використання засобів віртуальної наочності	11%
6.	Незначна кількість практичних занять, де використовувалися б засоби віртуальної наочності	52%
7.	Відсутність мотивації до опанування засобів віртуальної наочності та їх використання у професійній діяльності	2%

Очікуваним виявилось те, що для більшості (52%) чинником, який найбільше заважає формуванню в майбутніх учителів математики та інформатики готовності до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності,

була незначна кількість практичних занять, де використовувалися б засоби віртуальної наочності конкретно ними. На другому місці виявився такий чинник, як відсутність можливості застосувати знання та вміння використання засобів віртуальної наочності у ході вивчення інших практичних дисциплін (22%). Також 14% опитаних студентів відзначили відсутність спрямованості змісту професійної підготовки на формування готовності студентів до використання засобів віртуальної наочності, а для 11% студентів важливим виявився такий чинник, як нестача теоретичних знань про засоби віртуальної наочності.

Зазначимо, що виокремити необхідні педагогічні умови формування в майбутніх учителів математики та інформатики готовності до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності серед різних чинників та обставин, визначити та зафіксувати їх сутнісні характеристики та властивості, відносини і зв'язки з об'єктами та явищами можна лише після ґрунтовного теоретико-методологічного аналізу освітньої системи та проведення науково-методичних розробок всієї сукупності факторів (здійснено нами у розділі 1), спрямованих на вдосконалення й інтенсифікацію професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики.

На основі аналізу досліджень, власного багаторічного досвіду викладацької діяльності, а також узагальнення зовнішніх і внутрішніх процесів професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики ми виокремили сукупність гіпотетично впливових чинників успішної підготовки вчителів до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності:

- спрямованість професійної підготовки на формування в майбутніх учителів математики та інформатики готовності до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності;
- запит суспільства до формування в майбутніх учителів математики та інформатики готовності до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності;
- соціально-економічні умови підготовки майбутніх учителів математики та інформатики;
- державна соціально-освітня політика в галузі підготовки майбутніх учителів математики та інформатики;
- державна стратегія підвищення кваліфікації майбутніх учителів математики та інформатики у напрямі використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності;
- розвиненість цифровізації суспільства;
- професійні цінності майбутніх учителів математики та інформатики щодо формування готовності до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності;
- престижність використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності учителя математики та інформатики;
- система вимог до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності учителів математики та інформатики;
- статус учителя математики та інформатики як запорука використання засобів віртуальної наочності в освітньому процесі;
- реальні умови професійної діяльності учителів математики та інформатики;
- матеріально-технічне забезпечення діяльності учителів математики та інформатики;
- соціальні умови мікросередовища, що безпосередньо впливають на формування готовності до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності;
- освітнє цифрове середовище професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики;
- рівень кваліфікації викладацьких кадрів під час використання засобів віртуальної наочності;
- адекватність, доцільність, оптимальність обсягу, науковості, достовірності, віртуальна спрямованість засобів викладання змісту дисциплін професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики;
- адекватність, диференційованість і доцільність педагогічного інструментарію (форм, методів, прийомів, технологій навчання) під час використання засобів віртуальної наочності;
- постійне застосування інноваційних технологій на засадах використання засобів віртуальної наочності;
- мотиви та інтереси, що спонукають майбутніх учителів математики та інформатики займатися освітою, самовихованням і саморозвитком щодо використання засобів віртуальної наочності;
- ставлення майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності;
- рівень власних домагань, потреб, переконань щодо використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності;
- спроможність і схильність до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності;
- належні властивості інтелектуальної сфери (інтелектуальна компетентність, інтелектуальна ініціатива, самоорганізованість, саморегуляція) як рефлексивна основа формування готовності до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності;
- самосвідомість, відповідальність за якість опанування засобів віртуальної наочності.

Після детального суб'єктивного аналізу та термінологічного узгодження було визначено найбільш вагомі фактори, інтерпретовані нами як можливі педагогічні та організаційні умови формування готовності майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності.

Надалі для виділення серед цих факторів провідних педагогічних та організаційних умов формування готовності майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності ми використали метод експертної оцінки. На сьогодні рекомендації щодо вибору експертів формуються переважно у вигляді певних побажань, при цьому використовується певна множина характеристик, тому виникає потреба у формуванні деякої інтегральної оцінки. Однією з таких оцінок є компетентність експертів (Туранов & Уруський, 2001), під якою зазвичай розуміють: володіння певними знаннями, що дозволяє індивіду висловлювати судження з певного кола питань; ступінь кваліфікації експерта в певній галузі знань; всебічне знання експертом оцінюваного об'єкта і методів оцінювання його якості.

До складу експертів із оцінювання педагогічних умов підготовки майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності нами було запрошено сім викладачів математичних та інформатичних дисциплін, які залучені до реалізації освітньо-професійних програм підготовки вчителів математики та інформатики бакалаврського і магістерського рівнів, у власній професійній діяльності використовують засоби віртуальної наочності та мають власний викладацький досвід не менше 5 років.

Експертна оцінка побудована відповідно до методики надання переваг, що ґрунтується на виділенні найбільш значущих педагогічних умов у системі інших. При цьому коефіцієнт значущості кожної умови обраховується за формулою:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{10} R_i}{\sum_{j=1}^7 \sum_{i=1}^{10} R_{ij}},$$

де R_{ij} – ранг i -умови, яка поставлена j -м експертом; 7 – кількість експертів; 10 – кількість виділених умов

Результати оцінювання експертами значущості виділених педагогічних умов подано у таблиці (табл. 2).

Таблиця 1

Експертне оцінювання педагогічних умов

№	Педагогічна умова	Ранг
1.	Орієнтація професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики на використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності	0,51
2.	Створення на заняттях особистісно орієнтованих навчальних ситуацій, які спонукають студентів до використання засобів віртуальної наочності	0,29
3.	Посилення мотивації використовувати засоби ВН	0,86
4.	Підпорядкування змісту роботи викладачів університету принципу наочності навчання	0,49
5.	Активне використання засобів комп'ютерної візуалізації у процесі вивчення професійно орієнтованих дисциплін	0,75
6.	Спонукування викладачів включати інформаційні технології в освітній процес	0,29
7.	Орієнтація завдань професійної підготовки на розвиток умінь використання засобів віртуальної наочності	0,48
8.	Модернізація змісту окремих дисциплін у бік опанування засобів віртуальної наочності у професійній діяльності	0,49
9.	Розвиток здатності до впровадження інновацій в галузі ЦТ	0,72
10.	Індивідуалізація навчання студентів, створення умов для їхньої професійної та особистісної самореалізації	0,44

Як видно з результатів ранжування педагогічних умов експертами, більшість оцінок сфокусовані у межах до 0,5 балів, що свідчить про неоднозначність трактування їх впливу на результати професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики до використання засобів віртуальної наочності у професійній діяльності. Найвищі бали за рангом отримали умови № 3, 5 та 9:

1 – посилення мотивації використовувати засоби ВН;

2 – активне використання засобів комп'ютерної візуалізації у процесі вивчення професійно орієнтованих дисциплін;

3 – розвиток здатності до впровадження інновацій в галузі ЦТ.

ОБГОВОРЕННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

Перша педагогічна умова – посилення мотивації використовувати засоби віртуальної наочності

Для того, щоб учитель був готовим до використання засобів віртуальної наочності, він має, насамперед, усвідомлювати цінність і необхідність залученні ІТ взагалі у процесі навчання учнів. Засоби віртуальної наочності є інструментом отримання знань щодо розвитку не тільки пізнавальних, а й творчих здібностей і можливостей. У студентів слід формувати потребу до систематичного залучення засобів віртуальної наочності у майбутній професійній діяльності, а не вирішення часткових, ситуативних освітніх завдань.

Усвідомлення цінності засобів віртуальної наочності для освітнього процесу та необхідності їх упровадження в школі є першим кроком у формуванні досліджуваної готовності. Наступним є мотивація студентів до такої діяльності. У психології вже давно відомо, що людина, яка мотивується ззовні, часто втрачає стимул до продуктивної діяльності, якщо зовнішнє джерело заохочення слабшає або зникає взагалі. Особа, яка внутрішньо мотивується, здатна підтримувати свій стимулюючий чинник на рівні, що перевищує підйоми й спади, характерні для стимулів зовнішнього порядку.

У цих умовах особливо важливо передбачити спеціальні заходи щодо стимулювання освітньої діяльності для підтримки позитивної мотивації, серед яких дієвим інструментом є орієнтація на опанування засобів віртуальної наочності та інноваційних методик їх застосування.

Друга педагогічна умова – активне використання засобів комп'ютерної візуалізації у процесі вивчення професійно орієнтованих дисциплін

Сприйняття великої кількості інформації при візуальному її зчитуванні у віртуальному просторі задає високий темп людській увазі, яка має утримувати в пам'яті одночасно велику кількість джерел. У цифрову епоху візуальність, представлена на екрані монітора, є засобом виразності і визначає образний характер зображуваного. Цей новий тип виразності неминуче пов'язаний з формуванням нового типу культури – інформаційно-цифрової культури. Цифрова візуальність є невід'ємною частиною імітованих віртуальних світів Інтернету, де створюються соціально-культурні умови для розширення людської практики (Семеніхіна, 2016).

Можна стверджувати, що інтерес до візуалізації стимулюється саме розвитком комп'ютерних програмних

засобів, які не лише кардинально розширили свої галузі застосування, але й вплинули на характер професійної діяльності фахівців. Використання візуально-цифрового підходу у процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики означає опору на високий потенціал програмного забезпечення комп'ютерної індустрії.

Третя педагогічна умова – розвиток здатності до впровадження інновацій в галузі ЦТ.

У концептуальних положеннях «Стратегії розвитку педагогічної освіти в Україні» наголошується на тому, що умовою досягнення цілей її розвитку є інноваційність. Остання, як результат відкритості освіти до вдосконалення, пов'язана з адекватністю змісту потребам особистості майбутнього фахівця (Стратегія розвитку вищої освіти в Україні на 2022-2032 роки, 2022).

Як зазначає О. Дубасенюк, нині утверджується пріоритет інноваційного розвитку освіти на основі модернізації усіх складових системи (змісту, педагогічних технологій, оцінювання навчальних досягнень здобувачів освіти, підготовки педагогічних кадрів, управління, фінансування тощо), нормативне забезпечення інноваційної політики галузі; формування інфраструктур, які підтримують та координують інноваційні процеси (Дубасенюк, 2011). Змінюються погляди щодо характеру освіти від «освіта на все життя» до «освіти упродовж життя». Розвиток інновації залежить від того, наскільки освітнє середовище потребує нової ідеї.

Вважаємо, що інновації у сфері вищої освіти мають корелюватися з інноваційними процесами у суспільстві. У контексті нашого дослідження доречно процитувати міркування І. Гавриша: «...підготовка майбутніх учителів до інноваційної професійної діяльності має бути цілісною, відображаючи у своєму логічному розгортанні її зміст і структуру...» (Гавриш, 2006).

Підготовка до інноваційної діяльності може бути успішною, якщо: інноваційні тенденції в освіті знайдуть адекватне відображення в цілях, змісті, методах і організаційних формах підготовки вчителя; буде строго визначена модель випускника із чітким наповненням компонентів, зокрема, інноваційної діяльності; будуть створені передумови для проходження безперервної педагогічної практики в інноваційних освітніх закладах.

Наукові розвідки та власний досвід дають підстави виокремити стратегії, які забезпечують розвиток здатності до впровадження інновацій, а саме: визнання викладачами зусиль та досягнень студентів (своєчасне схвалення та психологічна підтримка за умови труднощів під час оволодіння знаннями, сприяння впевненості); позитивне оцінювання результатів освітнього процесу (використання ефективних інноваційних методів навчання), їхнє заохочення працювати наполегливіше (навіть якщо виникають певні труднощі); створення доброзичливої атмосфери на заняттях, використання різноманітних творчих завдань, обговорення цікавих і сучасних новин; сприяння єдності та співпраці групи (бажання поділитися особистим досвідом та висловити думку щодо актуальності теми заняття із використанням знань фахового спрямування, заохочення працювати, щоб досягти мети (індивідуально чи в групі): презентації, дослідження, проекти).

Вважаємо, що ефективними шляхами формування мотивації майбутніх учителів до інноваційної діяльності є: створення творчої атмосфери на заняттях; використання чітких методичних вказівок та роз'яснень при вивченні тем з навчальних дисциплін; врахування індивідуальних потреб та особливостей магістрантів; активна співпраця під час роботи над спільними дослідженнями та проектами; поєднання індивідуальної, групової та самостійної форм навчання; використання ситуативних та творчих завдань.

ВИСНОВКИ

Отже, підготовка майбутніх учителів математики та інформатики до застосування засобів віртуальної наочності у професійній діяльності потребує дотримання педагогічних умов: 1) посилення мотивації використовувати засоби ВН; 2) активне використання засобів комп'ютерної візуалізації у процесі вивчення професійно орієнтованих дисциплін; 3) розвиток здатності до впровадження інновацій в галузі ЦТ. Їх виокремлення дає змогу обґрунтовувати модернізацію професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики та впроваджувати їх в реальний освітній процес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Hallstrom, J., & Schonborn R. (2019). Models and modelling for authentic STEM education: reinforcing the argument". *International Journal of STEM Education*, 6 (22). <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0178-z>.
2. Petrenko, Y. I., Zigunov, V. M., Balashov, D.I., Bermudes, D.V., & Shyshenko, I.V. (2019). Use of the software biomechanics in physical culture and sports specialists' preparation. In: *42nd International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics, MIPRO*, (pp. 795-799). <https://doi.org/10.23919/MIPRO.2019.8757068>.
3. Semenog, O., Yurchenko, A., Udovychenko, O., Kharchenko, I., & Kharchenko, S. (2019). Formation of Future Teachers' Skills to Create and Use Visual Models of Knowledge. *TEM Journal*, 8(1), 275-283. <https://doi.org/10.18421/TEM81-38>.
4. Yurchenko, A., Drushlyak, M., Sapozhnykov, S., Teplytska, S., Koroliova, L., & Semenikhina, O. (2021). Using online IT-industry courses in the computer sciences specialists' training. *International Journal of Computer Science and Network Security*, 21(11), 97-104. http://paper.ijcsns.org/07_book/202111/20211113.pdf
5. Бусел, В. Т. (ред.). (2003). *Великий тлумачний словник сучасної української мови*. Київ ; Ірпінь : Перун.
6. Гавриш, І. (2006). Теоретико-методологічні основи формування готовності майбутніх учителів до інноваційної професійної діяльності. *Дис. докт. пед. наук*. Харків.
7. Галай, М.Д. (2017). Диференціація фізичних навантажень молодших школярів у процесі навчання вправ з м'ячем, *дис. канд. пед. наук*. Київ.
8. Гамалій, В. В. (2007). *Біомеханічні аспекти техніки рухових дій у спорті*. Київ: Наук. світ.
9. Дубасенюк, О. (2011). Професійна педагогічна освіта: методологія. теорія, практика: монографія. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка.
10. Семеніхіна, О. В. (2016). *Професійна готовність майбутнього вчителя математики до використання програм динамічної математики : теоретико-методичні аспекти* : монографія. Суми : ВВП Мрія.
11. Стратегія розвитку вищої освіти в Україні на 2022-2032 роки. (2022). *Новини Міністерства освіти і науки України*. <https://mon.gov.ua/ua/news/opublikovano-strategiyu-rozvitku-vishoyi-osviti-v-ukrayini-na-2022-2032-roki>.
12. Туранов, Ю.О., & Уруський, В.І. (2001). *Науково-дослідна робота в закладах освіти: метод. посібник*. Тернопіль : АСТОН.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Hallstrom, J., & Schonborn R. (2019). Models and modelling for authentic STEM education: reinforcing the argument". *International Journal of STEM Education*, 6 (22). <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0178-z>.
2. Petrenko, Y. I., Zigunov, V. M., Balashov, D. I., Bermudes, D. V., & Shyshenko, I. V. (2019). Use of the software biomechanics in physical culture and sports specialists' preparation. In: *42nd International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics, MIPRO*, (pp. 795-799). <https://doi.org/10.23919/MIPRO.2019.8757068>.
3. Semenog, O., Yurchenko, A., Udovychenko, O., Kharchenko, I., & Kharchenko, S. (2019). Formation of Future Teachers' Skills to Create and Use Visual Models of Knowledge. *TEM Journal*, 8(1), 275-283. <https://doi.org/10.18421/TEM81-38>.
4. Yurchenko, A., Drushlyak, M., Sapozhnykov, S., Teplytska, S., Koroliova, L., & Semenikhina, O. (2021). Using online IT-industry courses in the computer sciences specialists' training. *International Journal of Computer Science and Network Security*, 21(11), 97-104. http://paper.ijcsns.org/07_book/202111/202111113.pdf
5. Busel, V. T. (red.). (2003). *Velykyi tлумachnyi slovnyk suchasnoi ukrainskoi movy [A large explanatory dictionary of the modern Ukrainian language]*. Kyiv ; Irpin : Perun. (in Ukrainian).
6. Havrysh, I. (2006). *Teoretyko-metodolohichni osnovy formuvannya hotovnosti maibutnikh uchyteliv do innovatsiinoi profesiinoi diialnosti [Theoretical and methodological bases of formation of readiness of future teachers for innovative professional activity]*. Diss. dr. ped. of science. Kharkiv. (in Ukrainian).
7. Halai, M. D. (2017). *Dyferentsiatsiia fizychnykh navantazhen molodshykh shkolariv u protsesi navchannia vprav z miachem [Differentiation of physical loads of junior high school students in the process of learning exercises with a ball]*. Diss. Ph.D. ped. of science. Kyiv. (in Ukrainian).
8. Hamalii, V. V. (2007). *Biomekhanichni aspekty tekhniki rukhovykh dii u sporti [Biomechanical aspects of the technique of motor actions in sports]*. Kyiv: Nauk. svit. (in Ukrainian).
9. Dubaseniuk, O. (2011). *Profesiina pedahohichna osvita: metodolohiia. teoriia, praktyka [Professional pedagogical education: methodology. theory, practice]*. Zhytomyr: Vyd-vo ZhDU im. I. Franka. (in Ukrainian).
10. Semenikhina, O. V. (2016). *Profesiina hotovnist maibutnoho vchytelia matematyky do vykorystannia prohram dynamichnoi matematyky : teoretyko-metodychni aspekty [Professional readiness of the future mathematics teacher to use dynamic mathematics programs: theoretical and methodological aspects]*. Sumy : VVP Mriia. (in Ukrainian).
11. *Stratehiia rozvytku vyshchoi osvity v Ukraini na 2022-2032 roky [Strategy for the development of higher education in Ukraine for 2022-2032]*. (2022). *Novyny Ministerstva osvity i nauky Ukrainy – News of the Ministry of Education and Science of Ukraine*. <https://mon.gov.ua/ua/news/opublikovano-strategiyu-rozvitku-vishoyi-osvity-v-ukrayini-na-2022-2032-roki>. (in Ukrainian).
12. Turanov, Yu. O., & Uruskyi, V. I. (2001). *Naukovo-doslidna robota v zakladakh osvity [Research work in educational institutions]*. Ternopil : ASTON. (in Ukrainian).



Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
 Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
 Виходить з 2013.



p-ISSN 2413-1571
 e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571
<https://fmo-journal.org/>

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-2-007

УДК 378.4

ЩОДО РОЗРОБКИ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСУ З ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ УЧНІВ ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Олена ПЕТРЕНКО

Одеське вище професійне училище морського туристичного
 сервісу, Державний заклад «Південноукраїнський національний
 педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
petrenko2017@gmail.com

Ольга ЧЕПОК

Державний заклад «Південноукраїнський національний
 педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
chepok.oo@pdpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-8514-2769>

CONCERNING THE DEVELOPING OF AN ELECTIVE COURSE ON THE ELEMENTS OF THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR STUDENTS OF INSTITUTIONS OF GENERAL SECONDARY EDUCATION

Olena PETRENKO

Odessa Higher Professional School of marine tourism service,
 State institution «South Ukrainian National Pedagogical University
 named after K. D. Ushinsky», Ukraine
petrenko2017@gmail.com

Olga CHEPOK

State institution «South Ukrainian National Pedagogical University
 named after K. D. Ushinsky», Ukraine
chepok.oo@pdpu.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-8514-2769>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. За умов сьогодення володіння основами теорії диференціальних рівнянь представляється наполегливою вимогою до сучасної природничо-математичної та економічної вищої освіти. У той же час знайомство навіть з елементами відповідної теорії не передбачено наявними програмами курсів математики закладів загальної середньої освіти. При цьому в курсах фізики з інтегруванням диференціальних рівнянь учні, фактично, зустрічаються вже у дев'ятому класі, під час опанування властивостей рівноприскореного руху та радіоактивного розпаду, відповідні формули учням пропонуються без жодних обґрунтувань. Подібна ситуація аж ніяк не сприяє розвитку логічного та критичного мислення учнів, суперечить концепції впровадження у навчальний процес на рівні середньої освіти елементів дослідницького навчання. Розумним тимчасовим кроком до вирішення існуючої проблеми може стати впровадження для учнів старших класів закладів загальної середньої освіти факультативного курсу з теорії диференціальних рівнянь.

Матеріали і методи. Дослідження базується на порівняльному аналізі програм і підручників з математики та фізики для учнів 9, 10 і 11 класів закладів загальної середньої освіти щодо їх узгодженості стосовно явного чи неявного використання поняття про диференціальне рівняння та його розв'язок. При цьому проводяться міркування як індуктивного, так і дедуктивного характеру.

Результати. Представлено змістове наповнення запропонованого факультативного курсу для учнів 10-11 класів та методичні рекомендації щодо його впровадження у навчальний процес.

Висновки. Представлені матеріали не передбачають наявності у учнів занадто глибоких знань з відповідних розділів математичного аналізу, для учнів 10-11 класів вони є цілком доступними. Водночас, їх змістове наповнення безумовно буде корисним як для усвідомлення учнями наявності глибинних зв'язків між математикою та фізикою, так і з пропедевтичної точки зору, маючи на увазі їх подальше навчання на наступному рівні освіти.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: заклад загальної середньої освіти; диференціальні рівняння; факультативні заняття з математики; курси фізики закладів загальної середньої освіти; курси математики закладів загальної середньої освіти.

ABSTRACT

Formulation of the problem. Competence on the grounds of the theory of differential equations seems to be an urgent request for modern natural-mathematical and economic higher education. At the same time, the present programs of math courses at institutions of general secondary education make no provisions for mastering even some elements of the corresponding theory. In spite of this, in fact, even students of the ninth form meet with the integration of differential equations in the courses of physics, according to mastering the properties of uniformly accelerated motion and radioactive decay; the corresponding formulas are offered to them without any proofs. Such a situation in no way favors the development of logical and critical thinking of students and contradicts the concept of introducing some elements of research into the educational process at the level of secondary education. The introduction of the elective course on the theory of differential equations for students of senior classes of institutions of general secondary education is proposed as a reasonable temporary step to solve the existing problem.

Materials and methods. The study is based on a comparative analysis of programs and textbooks on mathematics and physics for students of the 9th, 10th, and 11th forms of general secondary education institutions, according to their consistency in the explicit or implicit use of the concept of a differential equation and its solution. Inductive and deductive reasoning are used for it.

Results. Content of the suggested elective course for the students of 10-11 forms and methodical recommendations for its implementation in the educational process are represented.

Conclusions. Present materials do not require students to have too deep knowledge of the relevant sections of mathematical analysis, they are quite accessible for students of 10-11 grades. At the same time, their content undoubtedly will be useful both for students' awareness of the presence of deep connections between mathematics and physics, and, perhaps, from a propaedeutic point of view taking in the mind their further study on the next level of education.

KEYWORDS: institution of general secondary education; differential equations; elective courses in mathematics; physics courses of general secondary education institutions; mathematics courses of institutions of general secondary education.

Для цитування:

Петренко О., Чепок О. Щодо розробки факультативного курсу з елементів теорії диференціальних рівнянь для учнів закладів загальної середньої освіти. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 2. С. 43-49. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-2-007

Петренко, О., & Чепок, О. (2023). Щодо розробки факультативного курсу з елементів теорії диференціальних рівнянь для учнів закладів загальної середньої освіти. *Фізико-математична освіта*, 38(2), 43-49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-007>

For citation:

Petrenko, O., & Chepok, O. (2023). Concerning the developing of an elective course on the elements of the theory of differential equations for students of institutions of general secondary education. *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 43-49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-007>

Petrenko, O., & Chepok, O. (2023). Shchodo rozrobky fakultatyvnoho kursu z elementiv teorii dyferentsialnykh rivnyan dla uchniv zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Concerning the developing of an elective course on the elements of the theory of differential equations for students of institutions of general secondary education]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 43-49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-007>

✉ Corresponding author

© O. Petrenko, O. Chepok, 2023

ВСТУП

Постановка проблеми. За умов сьогодення диференціальні рівняння покладено у основу математичних моделей багатьох фізичних, біологічних та економічних явищ і процесів. Оволодіння основами теорії диференціальних рівнянь є невід'ємною компонентою сучасної природничо-математичної та економічної вищої освіти. У той же час знайомство навіть з елементами відповідної теорії не передбачено наявними програмами курсів математики закладів загальної середньої освіти. Одночасно, у курсах фізики таких закладів з інтегруванням диференціальних рівнянь учні, фактично, зустрічаються вже у дев'ятому класі, під час опанування властивостей рівноприскореного руху та радіоактивного розпаду (Навчальна програма з фізики для учнів 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, 2017). Те ж саме має місце під час вивчення механічних коливань у десятому класі і електромагнітних коливань – у одинадцятому (Фізика. Навчальні програми для загальноосвітніх навчальних закладів для 10-11 класів, 2017). Звичайно, про те, що мають місце на увазі саме диференціальні рівняння вчителі на уроках фізики мови не ведуть, відповідні формули учням пропонуються без жодних обґрунтувань. Подібна ситуація аж ніяк не сприяє розвитку логічного та критичного мислення учнів, суперечить концепції реалізації у навчальному процесі закладів загальної середньої освіти елементів дослідницького навчання.

На нашу думку, розумним тимчасовим кроком до вирішення існуючої проблеми може стати впровадження для учнів старших класів закладів загальної середньої освіти факультативного курсу з елементів теорії диференціальних рівнянь. Виникає природне питання про те, чому саме для учнів старших (десятих – одинадцятих) класів, якщо, по відношенню до курсів фізики, питання є актуальним вже на рівні базової загальної середньої освіти (для учнів дев'ятих класів). Відповідь представляється очевидною. Сучасне, традиційне, здається, всіма визнане як цілком доцільне, змістове наповнення курсів математики базової загальної середньої освіти не забезпечує потенційної можливості побудови подібного курсу. Це стає можливим лише на підставі навчального контенту курсів математики 10-11 класів.

Вважаємо, що наявність подібного факультативного курсу дозволить суттєвим чином підвищити якість того узагальнюючого повторення курсів фізики 7-9 класів, яке має місце у 10-11 класах згідно діючих навчальних програм, та під час підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з фізики. Одночасно, такий курс, безумовно, буде корисним для тих учнів, які у подальшому планують здобувати вищу освіту за технічними, економічними та природничо-математичними спеціальностями.

Аналіз актуальних досліджень. На даний час курс алгебри і початків аналізу в закладах загальної середньої освіти знайомить учнів з базовими поняттями класичного математичного аналізу, створюючи таким чином відповідні передумови для подальшого опанування курсів вищої математики у закладах вищої освіти (далі, ЗВО) (Навчальні програми з математики (алгебри і початків аналізу та геометрії) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту, для класів з поглибленим вивченням математики, 2017). Для класів з поглибленим вивченням математики передбачене первинне знайомство з поняттям диференціального рівняння, але виключно на ознайомлювальному рівні, без ґрунтовного занурення у його сутність та доцільного практичного відпрацювання. Одночасно, для кожного профілю навчання передбачена наявність супровідних факультативних курсів, спрямованих на поглиблене усвідомлення сутності відповідних основних понять, природи їх формування у математиці, можливостей різних узагальнень та практичних застосувань.

Навчальними планами закладів загальної середньої освіти наявність факультативних курсів була передбачена, фактично, завжди. Сама ідея факультативного курсу полягає у тому, що це курс за вибором учня. Загальновідомо, що в ЗВО студенти зараз навчаються за певними освітньо-професійними програмами, від чверті до третини кредитів яких відводиться на опанування навчальних курсів за вибором студента. Мова йде про те, що студент у значній мірі має можливість будувати власну освітню стратегію у межах, або, навіть, поза межами самостійно обраної ним спеціальності. Середня освіта у старшій школі є профільною. Відповідний профіль навчання учні, разом з батьками, обирають самостійно. Наявність факультативних курсів, які не є обов'язковими, дозволяє заздалегідь адаптувати їх до сучасних технологій навчання, до формування власної освітньої стратегії, усвідомлення необхідності навчатися впродовж усього життя. Суттєвою ознакою сьогодення є можливість впровадження спільних факультативних курсів для учнів різних профілів та різних років навчання. Зрозуміло, що тематика факультативних курсів може і повинна бути різною, у залежності від профілів навчання учнів старших класів, побажань учнів та їх батьків, кадрових можливостей відповідного закладу загальної середньої освіти. МОН України надає перелік рекомендованих курсів для учнів різних класів, який у той же час, не обмежує власний вибір відповідного закладу освіти. Курсу, присвяченого основам чи елементам теорії диференціальних рівнянь, серед запропонованих натеper факультативних курсів немає. Незважаючи на реальні можливості авторів, апробації розробленого факультативного курсу у реальному навчальному процесі ще не було. Частковою апробацією можна вважати обговорення загальної ідеї відповідного змістового наповнення курсу з колегами. Думки при цьому розділилися. Частина викладачів математики і фізики висловила за його недоцільність. Автори же, навпаки, наполягають на доцільності, у своїй подальшій практичній роботі планують здійснити впровадження розробленого курсу у реальний навчальний процес. Зрозуміло, що внаслідок подібного впровадження виникнуть подальші ідеї щодо його вдосконалення.

Мета статті полягає у представленні методичної розробки факультативного курсу «Елементи теорії диференціальних рівнянь» на базі змістового наповнення курсів математики 10-11 класів закладів загальної середньої освіти (насамперед, з поглибленим вивченням математики).

Навчальна мета запропонованого курсу полягає у тому, щоб відповідні здобувачі освіти усвідомили сутність загального поняття про звичайне диференціальне рівняння та його розв'язок, навчилися розпізнавати та раціональним чином розв'язувати диференціальні рівняння певних видів, застосовувати опановані елементи теорії диференціальних рівнянь до розв'язування прикладних задач, зокрема, задач курсів фізики закладів загальної середньої освіти.

Розвиваюча мета запропонованого курсу полягає у тому, щоб сформувати у відповідних здобувачів освіти пропедевтичне підґрунтя для наступного вдалого опанування теорії диференціальних рівнянь у профільних ЗВО, поглибити їхнє усвідомлення ролі і місця математики у загальній системі наук про природу і суспільство, у повній мірі

реалізувати узагальнююче повторення тих розділів фізики, в яких, попередньо, елементи теорії диференціальних рівнянь було використано у неявному вигляді.

Виховна мета запропонованого курсу за своєю сутністю не відрізняється від виховної мети всіх факультативних курсів з математики, всіх курсів математики у закладах загальної середньої освіти взагалі, забезпечується потенційними можливостями цих курсів і полягає у тому, щоб сприяти формуванню у відповідних здобувачів освіти загальної логічної культури мислення, зокрема, культури діалектичного мислення, таких рис особистості як чесність та правдивість, мужність та наполегливість, підвищенню їхнього загальнокультурного рівня, формуванню їхнього світогляду.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У курсі фізики сьомого класу, під час вивчення теми «Рівномірний рух. Швидкість руху», надають означення рівномірного руху та швидкості рівномірного руху. При цьому формують характеристики графіка залежності швидкості руху матеріальної точки від часу та графіка залежності від часу пройденого шляху, які, за своєю сутністю, описують геометричний зміст похідної (функції швидкості) та первісної (функції шляху) (Навчальна програма з фізики для учнів 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, 2017).

Означення лінійної швидкості руху тіла та миттєвої швидкості у термінах границі («за нескінченно малий проміжок часу») надають вже у підручнику десятого класу під час повторення та поглиблення всіх тем курсів фізики 7-9 класів (Бар'яхтар та ін., 2018). Там вказується, що миттєва швидкість – це фізична величина, яка дорівнює відношенню шляху, який пройдено тілом за деякий достатньо малий проміжок часу до величини цього проміжку часу. В такий спосіб, у підручнику неявним чином вказується на те, що швидкість тіла у момент часу дорівнює значенню похідної функції руху матеріальної точки у цей момент часу (Бар'яхтар та ін., 2018).

Наприкінці дев'ятого класу програма з фізики передбачає знайомство учнів з поняттями прискорення та рівноприскореного руху. При означенні прискорення у підручнику з фізики дев'ятого класу неявним чином визначають той факт, що прискорення є похідною функції швидкості (Навчальна програма з фізики для учнів 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, 2017; Бар'яхтар та ін., 2017).

Як ми знаємо, основна задача механіки – це визначення положення тіла (координату тіла, наприклад за віссю Ox) у даний момент часу t , тобто знаходження за вихідними даними задачі функції $x = x(t)$. У сьомому класі – це задача про знаходження координати точки у кожний момент часу при рівномірному прямолінійному русі, у випадку, коли швидкість є сталою величиною, тобто, $v_x(t) = c$, $c = \text{const}$ (Навчальна програма з фізики для учнів 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, 2017; Бар'яхтар та ін., 2017).

Тоді, ми маємо найпростіше диференціальне рівняння першого порядку, які містить похідну функції руху: $x'(t) = c$, розв'язок якого можна знайти інтегруванням: $x(t) = ct + x(0)$. У звичних термінах фізики, враховуючи початкову умову $x(0) = x_0$, маємо: $x(t) = v_x t + x_0$.

Потім у дев'ятому класі (Бар'яхтар та ін., 2017) учні розглядають рівноприскорений рух як рух зі сталим прискоренням. Оскільки прискорення є похідною від швидкості, а швидкість є похідною від функції руху тіла, то основна задача механіки зводиться до знаходження розв'язку диференціального рівняння другого порядку: $x''(t) = c$, $c = \text{const}$.

Це рівняння можна розв'язати двома послідовними інтегруваннями:

$$\begin{aligned}x'(t) &= ct + c, \\x(t) &= ct^2 + c_1 t + x(0).\end{aligned}$$

У звичних термінах фізики, враховуючи початкові умови

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_{0x},$$

маємо:

$$x(t) = \frac{a_x}{2} t^2 + v_{0x} t + x_0,$$

де a_x – проекція прискорення на вісь Ox , v_{0x} – проекція початкової швидкості на вісь Ox .

У підручнику дев'ятого класу це рівняння не виокремлюється і не розв'язується, а переміщення пропонують знаходити як площу фігури розташовану під графіком функції швидкості (Бар'яхтар та ін., 2017).

При розгляді руху тіла під дією сили тяжіння, зокрема, при вільному падінні (або киданні тіла вгору) ми зустрічаємося з рівноприскореним рухом, для якого прискорення $\vec{a} = -\vec{g}$, $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння.

Оберемо за вісі OY вертикальну пряму, якою рухається (падає) точка; початок координат розташуємо на поверхні землі, а додатній напрямок умовимося відраховувати вгору. Щоб знати положення нашої точки у будь-який момент часу t після початку руху (відповідного до значення $t = 0$), необхідно знати закон зміни єдиної координати цієї точки у як функції часу t . Отже, незалежною змінною у нас є час t , а шуканою функцією – координата y . Складемо рівняння для знаходження y . З механічного змісту другої похідної випливає, що прискорення дорівнює $\frac{d^2 y}{dt^2}$; з іншого боку, ми знаємо, що прискорення сили тяжіння в кожній точці Земної поверхні та поблизу неї є постійним і (наближено) дорівнює 981 см/сек^2 , позначається $g = 981 \text{ см/сек}^2$; оскільки прискорення спрямоване донизу, то у обраній системі координат йому треба надати знак «-». Прирівнявши два знайдені вирази для прискорення точки, отримаємо рівняння, з якого можна буде визначити функцію y : $\frac{d^2 y}{dt^2} = -g$.

Оскільки тут маємо другу похідну від змінної y , то розв'язуватимемо за допомогою подвійного інтегрування. Двічі знайдемо невизначений інтеграл від обох частин рівняння за змінною t . Отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -gt + C_1, \\y &= -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2\end{aligned}$$

Останнє отримане рівняння – загальний розв’язок розглянутого диференціального рівняння, яке містить дві сталі C_1 і C_2 . З’ясуємо їх фізичний зміст:

- 1) в першому рівнянні при $t = 0$, $C_1 = \frac{dy}{dt} = v_0$ (початкова швидкість матеріальної точки);
- 2) аналогічно, з другого рівняння маємо при $t = 0$, $C_2 = y$ (початкове положення точки).

Після введення нових позначень для даних довільних констант отримаємо загальний розв’язок розглянутого диференціального рівняння у вигляді:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0$$

Стає зрозумілим, які додаткові данні необхідно мати, щоб отримати частинний розв’язок, а саме: числове значення y_0 початкового положення точки та початкову швидкість v_0 .

У підручнику з фізики десятого класу (Бар’яхтар та ін., 2018) під гармонічними коливаннями розуміють коливання за законами синусу або косинусу: $x = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Насправді, фізична величина, яка характеризує тіло, яке здійснює гармонічні коливання, задовольняє наступне диференціальне рівняння:

$$a_x = -\omega^2 x, \quad \text{де } a_x = \ddot{x}.$$

У підручнику з фізики (Бар’яхтар та ін., 2018) пропонують з’ясувати фізичний зміст кожної величини у наведених рівняннях гармонічних коливань, пояснення наведено у таблиці підручника; але виведення рівнянь гармонічних коливань не наводиться. Насправді, ці формули можна вивести, використовуючи диференціальні рівняння.

Формули гармонічної швидкості та гармонічного прискорення також пропонують в підручнику без жодних обґрунтувань.

Ми пропонуємо наступне виведення рівняння гармонічного прискорення $a_x = -\omega^2 x$: запишемо першу та другу похідні величин, що гармонічно коливаються в залежності від часу:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

та

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi).$$

Маємо гармонічні коливання з тією ж циклічною частотою, тоді амплітуди швидкості та прискорення відповідно дорівнюють $A\omega_0$ та $A\omega_0^2$.

З виразу $\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$ впливає диференціальне рівняння гармонічних коливань $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$. Розв’язком цього рівняння є функція, представлена запропонованою у підручнику формулою:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Тепер доведемо обернене твердження: якщо в будь-який момент часу руху тіла його прискорення є прямо пропорційним до його зміщення та спрямоване у бік, протилежний до зміщенню, такий рух являє собою гармонічні коливання.

Запишемо загальне диференціальне рівняння гармонічних коливань: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$. Розв’яжемо диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Для цього запишемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \\ \lambda^2 = -\omega_0^2.$$

Таке рівняння має два комплексних кореня: $\lambda = \pm \omega i$. Загальний розв’язок диференціального рівняння гармонічних коливань має вигляд: $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Що й треба було довести.

Отже, ми переконалися у тому, що доведення цих формул не є занадто складним, більш того, запропоновані нами доведення є корисними для розуміння старшокласниками теми «Гармонічні коливання».

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження базується на порівняльному аналізі програм та підручників з математики та фізики для учнів 9, 10 і 11 класів закладів загальної середньої освіти як рівня «стандарт», так і поглибленого рівнів навчання, щодо їх узгодженості стосовно явного чи неявного використання поняття про диференціальне рівняння та його розв’язок. При цьому використовуються міркування як індуктивного, так і дедуктивного характеру.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Представлено змістове наповнення факультативного курсу з елементів теорії диференціальних рівнянь для учнів 10-11 класів закладів загальної середньої освіти та методичні рекомендації щодо його впровадження. Запропонований курс «Елементи теорії диференціальних рівнянь» не вимагає дуже глибоких знань з математичного аналізу. У той же час такий курс представляється вельми корисним для майбутнього студента ЗВО з позиції наявності початкових уявлень про предмет, який він буде опанувати у майбутньому.

Розроблений факультативний курс більше розраховано на учнів 11-их класів в силу того, що його теоретичне підґрунтя складають базові теми саме курсу алгебри та початків аналізу 11-го класу. Залучення до роботи десятикласників не виключається, бо поняття про похідну, згідно діючих на даний час навчальних програм, вводиться саме наприкінці 10-го класу, і, як правило, серед учнів 10-х класів завжди знаходиться кілька обдарованих осіб, здатних навчатися самостійно та опановувати необхідний матеріал за мінімальної допомоги викладача (Навчальні програми з математики (алгебри і початків аналізу та геометрії) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту, для класів з поглибленим вивченням математики, 2017).

При розробці даного факультативного курсу ми виходили з того, що учні, які виявили бажання його прослухати, вже ознайомлені з поняттями похідної та інтеграла зі шкільного курсу алгебри і початків аналізу, календарно вже пройшли

цей матеріал. Тому, у запропонованому факультативному курсі дані теми лише повторюються. При знайомстві з методами розв'язання найпростіших диференціальних рівнянь, акцент зроблено саме на практичній стороні – на вмінні розпізнати відповідний вид рівняння та розв'язати його за допомогою одного із вивчених методів. Курс не представляється переважаним теоретичними відомостями. У ньому розглянуто методи розв'язання найпростіших диференціальних рівнянь першого та другого порядків, які, зокрема, зустрічаються у курсах фізики закладів загальної середньої освіти.

Отже, на початку факультативного курсу передбачено повторення основних методів диференціювання та інтегрування функцій. При цьому, треба переконатися у тому, що учні правильно розуміють терміни «похідна» та «інтеграл», чітко уявляють собі їх сутність та властивості. Для подальшого вдалого введення поняття про диференціальні рівняння варто присвятити деякий час розгляданню різних методів інтегрування в силу того, що навіть елементарні диференціальні рівняння розв'язуються саме за допомогою інтегрування.

Після повторення матеріалу з тем «Похідна функції. Геометричний та фізичний зміст похідної» та «Первісна та інтеграл» вводиться поняття інтегралу зі змінною верхньою межею, яке зв'язує поняття первісної з поняттям визначеного інтегралу (цей матеріал є новим для більшості школярів, у той же час він не представляється занадто складним; одночасно, він є дуже важливим для введення поняття про диференціальне рівняння).

Далі розглядаються теоретичні обґрунтування різних методів розв'язання диференціальних рівнянь, для визначених методів наводяться відповідні приклади їхнього застосування. Представлені теоретичні питання з диференціальних рівнянь не є складними, на знайомство з ними в одинадцятому класі достатньо виділити 1 годину на тиждень. Отже, краще за все, для опанування контенту вищевказаного курсу мати 30 навчальних годин впродовж учебного року.

У таблиці 1 представлено тематичне планування розробленого факультативного курсу.

Таблиця 1.

Тематичне планування факультативного курсу «Елементи теорії диференціальних рівнянь»

№	Тема заняття	Кількість годин
1.	Похідна функції.	2
2.	Первісна та інтеграл. Поняття про інтеграл зі змінною верхньою межею.	3
3.	Загальне поняття про диференціальне рівняння.	2
4.	Метод ізоклін побудови інтегральних кривих.	3
5.	Рівняння з відокремлюваними змінними.	3
6.	Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.	3
7.	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку та методи їх розв'язання: метод Лагранжа, метод Бернуллі.	3
8.	Однорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.	3
9.	Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, способи їх розв'язання у випадку спеціального виду правої частини.	3
10.	Задачі навчальних курсів закладів загальної середньої освіти, які зводяться до диференціальних рівнянь першого та другого порядків.	4
11.	Узагальнення та систематизація засвоєних знань, умінь та навичок. Підсумковий контроль.	1
	Усього	30 годин

Отже, до змістового наповнення представленого факультативного курсу включено наступні теми: метод ізоклін, диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні диференціальні рівняння першого порядку, лінійні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку, лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Ми не ставили собі за мету навчити відповідних здобувачів освіти розв'язувати якомога більше різних типів диференціальних рівнянь, обрали лише ті, які, на наш погляд, є найпростішими, найчастіше використовуються на практиці. Обраних видів рівнянь цілком достатньо для занурення учнів у сутність предмету, для формування їхньої готовності до розширення знань з теорії диференціальних рівнянь під час подальшого навчання у ЗВО відповідного профілю (Bibi et al., 2019).

У процесі висвітлення змістового наповнення десятої теми представленого тематичного плану курсу ми проаналізували взаємний зв'язок між диференціальними рівняннями та задачами курсів фізики закладів загальної середньої освіти. Під час аналізу шкільних підручників з фізики було визначено три розділи, у практичному контенті яких зустрічаються диференціальні рівняння. Це задачі на знаходження закону руху матеріальної точки, гармонічні коливання та радіоактивний розпад елементів. Для кожного з цих розділів було показано, яким чином можна обґрунтувати справедливості відповідних формул руху, коливання, розпаду тощо використовуючи диференціальні рівняння тих видів, що розглянуто попередньо, а не тільки навести відповідні формули як аксіоми. Нам також вдалося проілюструвати можливості використання теорії диференціальних рівнянь при розв'язуванні фізичних задач.

Зрозуміло, що у межах розробленого факультативного курсу ми не мали можливості навести достатньої кількості прикладів, необхідних для повноцінного опанування розглянутих методів розв'язання визначених типів диференціальних рівнянь. Передбачається, що кожний викладач, виходячи із можливостей та потреб відповідних учнів, повинен проводити

самостійну роботу із пошуку доцільних завдань. Основними джерелами прикладів при цьому можуть бути відповідні навчальні посібники та збірники задач для ЗВО ((Самойленко, 2003), наприклад).

Взагалі, готуючись до будь-якого заняття, викладач повинен враховувати велику кількість факторів. Насамперед, важливою представляється дидактична типологія уроку. Структура кожного параграфу розробленого курсу, тісно перегукується з найбільш поширеними типами уроків. Так, теоретична частина викладається у рамках уроку засвоєння нових знань; додаток, що містить задачі з фізики, – це урок застосування знань, навичок та умінь; сюди ж ми можемо зарахувати й ту частину параграфу, в якій наводяться приклади розв'язання завдань; додаток із завданнями для самостійної роботи можна також використовувати для перевірки та корекції знань, умінь та навичок учнів (Wadhwa, 2004; Posamentier & Smith, 2014).

Зрозуміло, що якісне викладання факультативного курсу «Елементи теорії диференціальних рівнянь» може відбуватися лише за університетською схемою. Реалізувати це можна за допомогою наступних видів уроків: урок-лекція – для викладу нової теми; урок-семінар – до розглядання застосувань у курсах фізики та спільного з учнями розв'язування прикладів; урок-практикум – для самостійного розв'язування завдань відповідними здобувачами освіти; урок-консультація – для роботи з учнями, які слабо встигають або пропустили заняття; урок-залік для контролю набутих знань, умінь та навичок.

Переконані, що завдяки відібраному нами теоретичному та практичному матеріалу, проведенню занять відповідно до розробленого календарного планування, може бути досягнуто визначену навчальну мету представленого факультативного курсу.

Під час розробки домашніх завдань варто враховувати індивідуальні особливості відповідних учнів. Учень вдома у меншому ступені є обмеженим часовими рамками, ніж викладач під час уроку, і тому в нього є можливість витратити більше часу на розпізнавання виду рівняння та пошук доцільного методу його розв'язання. Але, здається, навіть найкращим учням не варто задавати додому рівняння, що вимагають громіздких перетворень. У підсумку, ми схиляємося до думки, що найбільш ефективними є самостійні роботи з єдиною основою, яка, залежно від рівня підготовки учнів, може коригуватися за допомогою наборів вказівок до виконання запропонованого завдання.

Отже, методика проведення занять з факультативного курсу «Елементи теорії диференціальних рівнянь» на базі закладів загальної середньої освіти не надто відрізняється від проведення уроків з будь-якого розділу математики, якщо викладач враховує специфіку курсу, аудиторії та матеріалу, що викладається. Ґрунтовні знання самого педагога, чітке планування кожного заняття та увага до всіх учнів, безумовно, стануть запорукою успішних результатів.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Запропоновані методичні матеріали до факультативного курсу не передбачають наявності в учнів занадто глибоких знань з відповідних розділів математичного аналізу, для учнів 10-11 класів закладів загальної середньої освіти вони є цілком доступними. Водночас, їх змістове наповнення представляється корисним як з позиції сприяння усвідомленню учнями наявності міждисциплінарних зв'язків математики та фізики, так і, з пропедевтичної точки зору, для тих учнів, які будуть опановувати теорію диференціальних рівнянь на наступному рівні освіти.

Зрозуміло, що представлений факультативний курс вимагає апробації у формі впровадження у реальний навчальний процес, передувати подібну апробацію буде розробка детальних планів-конспектів відповідних занять. І лише унаслідок такої апробації може бути остаточно сформоване переконання у його доцільності для відповідних категорій здобувачів середньої освіти, виникнуть додаткові ідеї щодо його подальшого вдосконалення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бар'яхтар, В. Г., Довгий, С. О., Божинова, Ф. Я., & Кірюхіна, О. О. (2017). *Фізика: підруч. для 9 кл. загал. серед. освіти* Х.: «Ранок». URL: <https://shkola.in.ua/864-fizyka-9-klas-bar-iahtar-2017.html>
2. Бар'яхтар, В. Г., Довгий, С. О., Божинова, Ф. Я., & Кірюхіна, О. О. (2018). *Фізика. Рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти* Х.: «Ранок». URL: <https://shkola.in.ua/1719-fizyka-10-klas-bar-iahtar-2018.html>
3. *Навчальні програми з математики (алгебри і початків аналізу та геометрії) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту, для класів з поглибленим вивченням математики*. Затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
4. *Навчальна програма з фізики для учнів 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів*. Затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>
5. *Навчальна програма з фізики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту та профільний рівень*. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
6. Самойленко, А. М., Кривошея, С. А., & Перестюк М. О. (2003). *Диференціальні рівняння в задачах*. К: Либідь. URL: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Samoylenko_2003_504.pdf
7. Thomas, E.J., Brunsting, J.R., & Warrick, P.L. (2010). *Styles and Strategies for Teaching High School Mathematics*. Corwin Press. <https://www.amazon.com/Styles-Strategies-Teaching-School-Mathematics/dp/1412968356>
8. Wadhwa S. *Modern Methods of Teaching Mathematics* (2004). New Delhi: Sarup&Sons. <https://books.google.com.gh/books?id=vLcIR7qVkhYC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>
9. Posamentier, A.S., & Smith, B.S. (2014). *Teaching Secondary Mathematics: Techniques and Enrichment Units*. Pearson Education: Pearson College Division. <https://www.amazon.com/Teaching-Secondary-Mathematics-Techniques-Enrichment/dp/0135000033>
10. Bibi, A., Ahmad, M., Shahid, W., Zamri, S. N. S., & Abedalaziz, N. A. M. (2019). An Evolving Research to Tackle Teaching and Learning Challenges during Differential Equations Course: A Combination of Non-routine Problems and Teacher Training. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(3), 647-656. <https://doi.org/10.29333/iejme/5777>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bariakhtar, V. H., Dovhyi, S. O., Bozhynova, F. Ya., & Kiriukhina, O. O. (2017). Fyzyka. pidruch. dlia 9 kl. zahal. sered. osvity [Physics: a textbook for 9th grade. institutions of secondary education]. Kh.: «Ranok». URL: <https://shkola.in.ua/864-fyzyka-9-klas-bar-iahtar-2017.html> (in Ukrainian).
2. Bariakhtar, V. H., Dovhyi, S. O., Bozhynova, F. Ya., & Kiriukhina, O. O. (2018). Fyzyka. Riven standartu: pidruch. dlia 10 kl. zakl. zahal. sered. osvity. [Physics. Standard level: textbook for 10th grade of general secondary education institutions]. Kh.: «Ranok». URL: <https://shkola.in.ua/1719-fyzyka-10-klas-bar-iahtar-2018.html> (in Ukrainian).
3. Navchalni prohramy z matematyky (alheby i pochatkiv analizu ta heometrii) dlia uchniv 10-11 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Riven standartu, dlia klasiv z pohlyblenym vyvchenniam matematyky [Educational programs in mathematics (algebra and the beginnings of analysis and geometry) for students of 10-11 grades of general educational institutions. Standard level, for advanced math classes]. Zatverdzhena Nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrainy vid 07.06.2017 № 804. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (in Ukrainian).
4. Navchalna prohrama z fizyky dlia uchniv 7-9 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Physics curriculum for students of grades 7-9 of general educational institutions]. Zatverdzhena Nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrainy vid 07.06.2017 № 804. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas> (in Ukrainian).
5. Navchalna prohrama z fizyky dlia uchniv 10-11 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Physics curriculum for students of 10-11 grades of general educational institutions]. Riven standartu ta profilnyi riven.]. Zatverdzhena Nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrainy vid 07.06.2017 № 804. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (in Ukrainian).
6. Samoilenko, A. M., Kryvosheia, S.A., & Perestiuk M.O. (2003). Dyferentsialni rivniannia v zadachakh [Differential equations in problems]. K: Lybid. URL: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Samoylenko_2003_504.pdf (in Ukrainian).
7. Thomas, E.J., Brunsting, J.R., & Warrick, P.L. (2010). Styles and Strategies for Teaching High School Mathematics. Corwin Press. <https://www.amazon.com/Styles-Strategies-Teaching-School-Mathematics/dp/1412968356>
8. Wadhwa, S. *Modern Methods of Teaching Mathematics* (2004). New Delhi: Sarup&Sons. <https://books.google.com.gh/books?id=vLcIR7qVkhYC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>
9. Posamentier, A.S., & Smith, B.S. (2014). Teaching Secondary Mathematics: Techniques and Enrichment Units. Pearson Education: Pearson College Division. <https://www.amazon.com/Teaching-Secondary-Mathematics-Techniques-Enrichment/dp/0135000033>
10. Bibi, A., Ahmad, M., Shahid, W., Zamri, S. N. S., & Abedalaziz, N. A. M. (2019). An Evolving Research to Tackle Teaching and Learning Challenges during Differential Equations Course: A Combination of Non-routine Problems and Teacher Training. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(3), 647-656. <https://doi.org/10.29333/iejme/5777>



Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
 Has been issued since 2013.
 Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
 Видається з 2013.



p-ISSN 2413-1571
 e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571
<https://fmo-journal.org/>

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-2-008

УДК 53-021.131-028.77: 378.018.43

ВІРТУАЛЬНИЙ ФІЗИЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ЯК ЗАСІБ УДОСКОНАЛЕННЯ ФАХОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ В УМОВАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

A VIRTUAL PHYSIC EXPERIMENT AS A MEANS OF IMPROVING THE PROFESSIONAL COMPETENCIES OF STUDENTS IN THE CONDITIONS OF DISTANCE EDUCATION

Ольга ФЕДЧИШИН ✉

Тернопільський національний педагогічний університет
 імені Володимира Гнатюка, Україна
 olga.fedchishin.77@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-3050-3584>

Сергій МОХУН

Тернопільський національний педагогічний університет
 імені Володимира Гнатюка, Україна
 mohun_sergey@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0001-7215-6977>

Павло ЧОПИК

Тернопільський національний педагогічний університет
 імені Володимира Гнатюка, Україна
 chip.ukraine@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6631-078x>

Olha FEDCHYSHYN ✉

Ternopil Volodymyr Hnatiuk National
 Pedagogical University, Ukraine
 olga.fedchishin.77@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-3050-3584>

Serhii MOKHUN

Ternopil Volodymyr Hnatiuk National
 Pedagogical University, Ukraine
 mohun_sergey@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0001-7215-6977>

Pavlo CHOPYK

Ternopil Volodymyr Hnatiuk National
 Pedagogical University, Ukraine
 chip.ukraine@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6631-078x>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Проблема проведення якісного фізичного експерименту у закладах освіти на сьогодні є надзвичайно актуальною. Сучасна система освіти неможлива без активного використання цифрових технологій, онлайн-сервісів і платформ. Тому в освітній діяльності активно використовується нова форма наочності – віртуальна, яка є ефективною у випадку доповнення реального фізичного експерименту. Використання віртуального фізичного експерименту активізує пізнавально-пошукову діяльність здобувачів освіти, але лише поєднання віртуального та реального експерименту забезпечує якісний результат під час навчання фізики. Тому одним із основних завдань у процесі підготовки майбутніх учителів фізики є пошук оптимальних форм і методів інтегрування реального та віртуального експериментів, що сприятимуть удосконаленню фахових компетентностей здобувачів освіти.

Матеріали і методи. З метою з'ясування стану дослідженості проблеми в педагогічній теорії та практиці використано: теоретичні методи – аналіз, порівняння, систематизація та узагальнення навчально-методичних, наукових та прикладних джерел, електронних ресурсів з проблеми дослідження.

Результати. Розглянуто дидактичні та методичні можливості віртуального фізичного експерименту як засобу удосконалення фахових компетентностей здобувачів освіти. У дослідженні запропоновано виконання лабораторної роботи «Визначення індуктивності котушки методом використання явища самоіндукції при замиканні кола». В якості середовища для моделювання електричних схем використано програмне забезпечення Proteus від Labcenter Electronics. Представлено результати опитування студентів щодо ефективності використання віртуального експерименту в освітній діяльності.

Висновки. Використання віртуального фізичного експерименту в освітньому процесі забезпечує реалізацію експериментального методу навчання фізики в умовах дистанційного навчання, формування дослідницьких умінь та навичок, застосування набутих знань у практичній діяльності, значно розширює можливості залучення здобувачів освіти до пізнавально-пошукової діяльності.

ABSTRACT

Formulation of the problem. The problem of conducting a high-quality physic experiment in educational institutions is extremely relevant today. A modern education system is impossible without the active use of digital technologies, online services, and platforms. Therefore, a new form of visualization is actively used in educational activities - virtual, which is effective when supplementing a real physic experiment. The use of a virtual physic experiment activates the cognitive and research activities of students, but only a combination of a virtual and a real experiment provides a high-quality result during physics education. Therefore, one of the main tasks in the process of training future physics teachers is the search for optimal forms and methods of integration of real and virtual experiments, which will contribute to the improvement of the professional competencies of the students.

Materials and methods. In order to clarify the state of investigation of the problem in pedagogical theory and practice, the following theoretical methods were used - analysis, comparison, systematization, and generalization of educational and methodological, scientific and applied sources, and electronic resources on the research problem.

Results. The didactic and methodical possibilities of the virtual physic experiment as a means of improving the professional competencies of the students of education were considered. In the research, it is proposed to carry out the laboratory work "Determination of coil inductance by the method of using the phenomenon of self-induction when closing a circuit". Proteus software from Labcenter Electronics was used as an environment for modeling electrical circuits. The results of a student survey on the effectiveness of using a virtual experiment in educational activities are presented.

Conclusions. The use of a virtual physic experiment in the educational process ensures the implementation of the experimental method of teaching physics in the conditions of distance learning, the formation of research abilities and skills, and the application of acquired knowledge in practical activities, significantly expands the possibilities of engaging students in cognitive and research activities, activates their independent activities. The virtual physic experiment contributes to the formation and improvement of the general and professional competencies of the students.

Для цитування:

Федчишин О., Мохун С., Чопик П. Віртуальний фізичний експеримент як засіб удосконалення фахових компетентностей здобувачів освіти в умовах дистанційного навчання. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 2. С. 50-55. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-2-008

For citation:

Fedchishyn, O., Mokhun, S., & Chopyk, P. (2023). A virtual physic experiment as a means of improving the professional competencies of students in the conditions of distance education. *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 50-55. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-008>

активізує їх самостійну діяльність. Віртуальний фізичний експеримент сприяє формуванню та удосконаленню загальних та фахових компетентностей здобувачів освіти.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: віртуальний фізичний експеримент; освітній процес; фахові компетентності; дистанційне навчання; Proteus.

KEYWORDS: virtual physic experiment; educational process; professional competencies; distance education; Proteus.

ВСТУП

Постановка проблеми. Актуальною проблемою сучасної педагогічної освіти є підготовка компетентного фахівця. Це значною мірою стосується і підготовки вчителів фізики у закладах вищої освіти в умовах дистанційного навчання. Як показує досвід, здійснити професійну підготовку майбутніх вчителів природничих дисциплін – вчителів нової генерації готових до організації різних форм освітнього процесу, у тому числі, дистанційної надзвичайно складно, оскільки існує низка об'єктивних і суб'єктивних факторів, суперечностей, що викликані суспільними перетвореннями, технічними здобутками тощо. Сучасна система освіти неможлива без активного використання цифрових технологій, онлайн-сервісів і платформ. Відповідно активно в освітній діяльності використовується нова форма наочності – віртуальна, яка є ефективною у випадку доповнення реального фізичного експерименту. Використання реального або віртуально фізичного експериментів безумовно активізують пізнавальну діяльність здобувачів освіти, але лише їх поєднання приносить бажаний результат під час навчання фізики. Тому одним із основних завдань, які ставляться у процесі підготовки майбутніх учителів фізики є пошук оптимальних форм і методів інтегрування реального та віртуального експериментів, що сприятимуть наочності та доступності сприйняття матеріалу, а також удосконаленню фахових компетентностей здобувачів освіти.

На фізико-математичному факультеті Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка підготовка майбутніх учителів фізики на бакалаврському рівні вищої освіти здійснюється за освітніми програмами: Середня освіта (Фізика, інформатика, основи робототехніки), Середня освіта (Фізика, англійська мова і література); на магістерському рівні – за освітньою програмою Середня освіта (Фізика, математика)

Фахові (спеціальні) компетентності здобувачів освіти першого та другого рівнів вищої освіти спеціальності 014 Середня освіта за предметною спеціальністю 014.08 Середня освіта (Фізика), за відсутності Державного стандарту професійної підготовки фахівців цієї спеціальності, представлені в Освітніх програмах (https://tnpu.edu.ua/about/public_inform/akredytatsiia%20ta%20litsenzuvannia/osvitni_prohramy/bakalavr/fizmat/014.08_r_2021.pdf), розроблених групою викладачів кафедри фізики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка.

У підготовці майбутніх учителів фізики важливою є якісна організація та проведення навчального фізичного експерименту. Освітній процес в умовах дистанційного навчання вимагає оновлених підходів до змісту, методів і засобів навчання. Тому пріоритетним завданням методики навчання фізики є використання віртуального фізичного експерименту для удосконалення фахових компетентностей здобувачів освіти

Метою статті є обґрунтування доцільності використання віртуального фізичного експерименту як засобу удосконалення фахових компетентностей здобувачів освіти.

Аналіз попередніх досліджень. Аналіз літературних джерел засвідчив, що означеній проблемі присвячено праці як зарубіжних та вітчизняних науковців. Застосування віртуального фізичного експерименту як засобу формування в учнів наукової картини світу висвітлено у роботах Н. Куриленко, С. Меньйова, І. Сліпухіної, І. Чернецького (Slipukhina et al., 2019). Проблеми підготовки вчителя фізики до використання на уроках віртуального фізичного експерименту досліджувала В. Шарко (Шарко, 2013).

Питання комп'ютеризації експериментально-дослідницької роботи з фізики, моделюванням віртуального фізичного експерименту неодноразово порушувалися у наукових і навчально-методичних працях В. Заболотного, М. Головка, В. Мацюка, Ю. Жука, М. Моклюка, О. Желюка, О. Соколюк, М. Шута, П. Атаманчука, В. Мендерецького, Ю. Федорової, І. П'яних, В. Клятченка, А. Петриці, Н. Сосницької, С. Величка та ін. Формування предметної компетентності засобами ІКТ розглядали Н. Баловсяк, Л. Карпова, О. Слободяник, О. Ліскович, О. Пінчук, В. Шарко; дистанційні технології у навчанні фізики – М. Моклюк; питання активізації пізнавальної діяльності та розвитку творчих здібностей засобами ІКТ в процесі навчання фізики – В. Краснополський, Н. Литкіна, А. Сільвейстр., І. Теплицький; використання комп'ютерів у самостійній роботі з фізики – Ю. Рева, Ю. Жук; організацію навчальної діяльності у комп'ютерно-орієнтованому навчальному середовищі та проектування інформаційно-освітнього середовища досліджували М. Головка, Ю. Жук, О. Іваницький, О. Соколюк; проблеми оптимізації використання ІКТ у навчанні фізики – Л. Непорожня, Р. Майер, А. Петриця, Є. Самойлова; використання інформаційних технологій у шкільному навчальному експерименті – П. Величко, В. Ізвозчиков, Л. М. Наконечна, Н. Сосницька та ін. (Головка та ін., 2015; Сальник, 2014). С. Подласов та О. Матвійчук досліджували особливості організації та проведення лабораторних робіт у дистанційному форматі (Podlasov & Matviichuk, 2023). У наукових доробках (Wong et al., 2020; Named & Aljanazrah, 2020) висвітлено переваги та ефективність застосування онлайн-лабораторій в освітньому процесі. У роботах (Named & Aljanazrah, 2020; Husnaini & Chen 2019; Chang et al., 2008; Hasan et al., 2017) досліджено, що застосування різних програмних ресурсів для моделювання фізичних процесів забезпечує підвищення якості знань здобувачів освіти, формування фахових знань та умінь, якісніше розуміння фізичних концепцій. Окремі дослідники (Ma & Nickerson, 2006) вважають, що онлайн-лабораторії ідеально доповнюють теоретичні курси, але не замінюють реальні лабораторні роботи та не забезпечують набуття студентами досвіду експериментальної діяльності.

Проблема професійної підготовки вчителя постійно знаходиться у центрі уваги науковців, дослідників та методистів. Проблеми формування професійної підготовки вчителів фізики присвячені роботи П. Атаманчука, І. Богданова, С. Гончаренка, А. Касперського, Н. Ничкало, В. Суса, В. Сергієнка, М. Шута та ін. У науковому дослідженні (Samoylenko et al., 2021) автори представляють розроблену комплексну модель розвитку компетентності, призначену для використання

в професійній підготовці вчителів, в тому числі, в умовах дистанційного навчання. Компетентності фахівців різних професій досліджено у науково-методичних працях В. Заболотного, Н. Масюкової, Л. Мітіної, П. Самойленка, О. Сергєєва, О. Смірної, В. Стрельнікова, В. Шарко та ін. (Іваницький, 2018).

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

З метою з'ясування стану дослідженості проблеми в педагогічній теорії та практиці використано: теоретичні методи – аналіз, порівняння, систематизація та узагальнення навчально-методичних, наукових та прикладних джерел, електронних ресурсів з проблеми дослідження.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В умовах дистанційного навчання актуальності набуває застосування віртуального фізичного експерименту. Виконання лабораторних робіт є обов'язковою частиною навчального процесу з фізики. У процесі вивчення курсу «Загальної фізики» на бакалаврському рівні вищої освіти передбачено виконання лабораторної роботи «Визначення індуктивності котушки методом використання явища самоіндукції при замиканні кола». Метою роботи є ознайомитись з явищем самоіндукції, навчитися визначати індуктивність котушки методом використання явища самоіндукції при розмиканні кола.

В якості середовища для моделювання електричних схем ми використали програмне забезпечення Proteus від Labcenter Electronics (<https://www.labcenter.com/>). Proteus об'єднує у собі інструменти для моделювання схем, PCB-проектування, симуляції і аналізу електричних сигналів, що дозволяє зробити весь процес проектування електронних пристроїв більш ефективним.

Програма є потужним інструментом для моделювання схем, який має наступні переваги порівняно з аналогами: має інтуїтивний інтерфейс користувача, що дозволяє швидко створювати схеми та проводити симуляції; містить велику бібліотеку елементів, що дозволяє використовувати різноманітні компоненти для проектування та аналізу роботи електронних пристроїв; використовується продуктивний двигун симуляції SPICE, що дозволяє проводити швидкі симуляції електронних схем; надає зручні можливості візуалізації результатів симуляції, що дозволяє користувачам аналізувати електричні сигнали і дані результати в зручному форматі.

Компанія-розробник Proteus, Labcenter Electronics, пропонує спеціальну ліцензію для закладів освіти, яка дозволяє використовувати її для навчання та досліджень студентами і викладачами.

Для визначення індуктивності котушки методом використання явища самоіндукції при замиканні кола скористаємося моделлю **REALIND**. На відміну від стандартної простої моделі SPICE **INDUCTOR** в ній враховані додаткові параметри індуктивності, такі як еквівалентний послідовний опір, еквівалентний паралельний опір і еквівалентна паралельна ємність. Без врахування, наприклад, послідовного паралельного опору при симуляції можна отримати помилку. Використання моделі **REALIND** дозволяє не використовувати при моделюванні додаткові резистори, тому схема краще відповідає реальній (рис. 1).

Окрім індуктивності в схемі моделі використані такі елементи: джерело живлення (BATTERY), одинарний та подвійний ключ (SWITCH, SW-DPST), резистор (RESISTOR), віртуальні вимірювальні прилади (вольтметр, амперметр, секундомір) (рис.2).

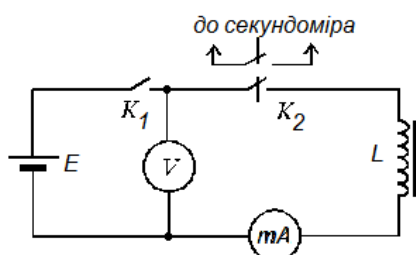


Рис. 1. Схема лабораторної установки

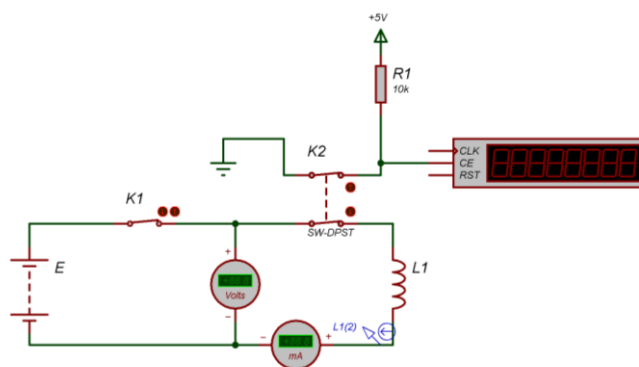


Рис. 2. Схема віртуальної моделі

Перед початком симуляції встановимо необхідні параметри елементів, максимально наближені до реальних приладів, які використовуються в лабораторній роботі:

- 1) напруга джерела живлення: 4,5 В;
- 2) опір ключа у вимкненому стані: 10^6 МОм;
- 3) межі вимірювання амперметра: міліампери;
- 4) індуктивність котушки: 43 Гн;
- 5) еквівалентний послідовний опір котушки: 46 Ом;
- 6) параметри секундоміра: полярність імпульсів Low.

Решта параметрів залишаємо за замовчуванням, оскільки вони не суттєво впливають на результат. Значення параметрів напруги джерела та індуктивності котушки приховуємо на схемі.

Після запуску симуляції та замикання ключа K1 визначаємо за показами вольтметра напругу джерела, а після замикання кола ключем K2 максимальне значення сили струму $I_{\max}$ в колі. Обчислимо значення сили струму $i_{2\tau} = 0,86 I_{\max}$.

За вказаними вище параметрами елементів, отримаємо $I_{\max} = 97,6$ мА, і відповідно $i_{2t} \approx 84$ мА. Тепер можна визначати час τ_1 протягом якого струм в колі досягне значення i_{2t} . Для цього фіксуємо час, протягом якого зростає струм, секундоміром замикаючи і розмикаючи ключ К2 (рис. 3).

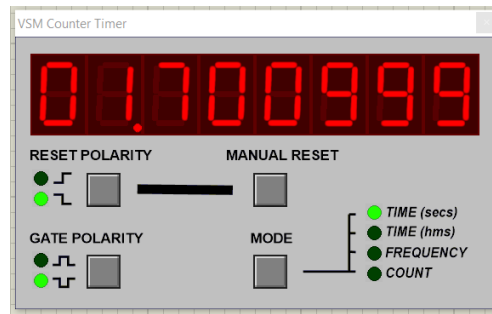


Рис. 3. Вікно віртуального секундоміра

Отримані результати повністю відповідають реальним, проте точність їх невисока, оскільки момент розмикання кола лише наближено відповідає необхідному значенню струму.

Проте Proteus має потужні віртуальні інструменти, які дозволяють отримати графічні залежності необхідних величин від часу під час симуляції. Для цього розмістимо пробник струму CURRENT з групи PROBES на нижній вивід котушки індуктивності і додамо на схему аналізатор аналогових сигналів (ANALOGUE) групи GRAPH. В параметрах аналізатора встановлюємо час зупинки симуляції 2 с і додаємо Trase, який відповідає пробнику струму. Запускаємо симуляцію натисканням клавіші SPACE на графіку (рис. 4.).

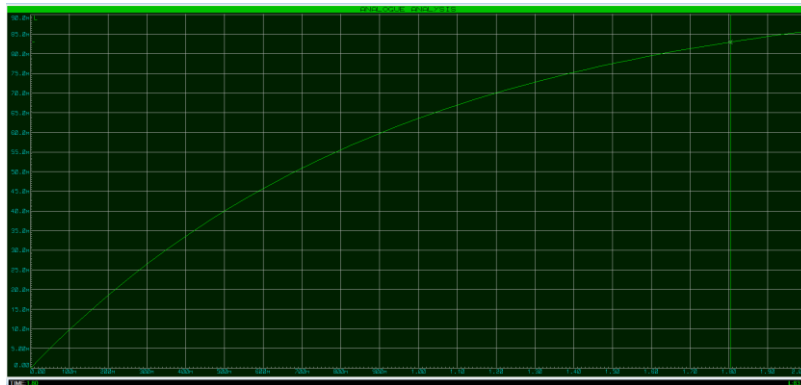


Рис. 4. Графік залежності струму, що протікає через котушку індуктивності від часу

З графіка видно, що струм досягає необхідного значення протягом 1,8 с. Розрахована індуктивність котушки згідно з отриманими даними становить 41,5 Гн, що відрізняється від заданої лише на 3%.

Організація такого виду діяльності сприяє формуванню у здобувачів освіти якостей дослідника: здатність працювати з великим обсягом інформації, вміння систематизувати, аналізувати, узагальнювати, формулювати змістовні висновки, здатність до самостійності тощо (Mokhun et al, 2022).

Якщо освітній процес відбувається в офлайн режимі, то здобувачі освіти виконують лабораторні роботи у фізичних лабораторіях. В умовах дистанційного чи змішаного навчання виконання реальних дослідів та віртуального експерименту є взаємодоповнюючими способами вивчення фізичного (реального) навколишнього світу, його законів і закономірностей розвитку як в методичному так і в методологічному аспекті.

Досвід організації віртуального фізичного експерименту показав, що в умовах дистанційного навчання такий вид діяльності може частково замінити роботу здобувачів освіти з реальним обладнанням.

Опитування студентів щодо ефективності використання віртуального експерименту в освітній діяльності показало, що на запитання: «Чи сприяє організація віртуального експерименту розумінню фізичних процесів явища електромагнітної індукції» 72 % студентів відповіли позитивно (рис. 5); 84 % – зможуть виконати лабораторну роботу на реальному обладнанні після проведення віртуального експерименту (рис. 6); 68 % опитаних вважають, що віртуальний експеримент не зможе замінити реальну лабораторну роботу (рис. 7). В умовах дистанційного навчання лабораторні роботи онлайн є, чи не єдиним, засобом формування умінь здобувачів освіти проводити дослідження.

ОБГОВОРЕННЯ

Використання віртуального фізичного експерименту в освітній діяльності сприяє глибокому розумінню фізичних процесів, які моделюються, розвитку інтелектуальних умінь, формуванню дослідницьких умінь, забезпечує формування та розвиток у здобувачів освіти компетентності в галузі природничих наук, техніки і технологій (Федчишин та ін., 2022); формує у здобувачів освіти вміння самостійно проектувати у віртуальному середовищі моделі фізичних процесів, об'єктів, керувати ними; досліджувати роботу віртуальної моделі; фіксувати результати експерименту раціональним способом; забезпечує формування та удосконалення фахових компетентностей.



Рис. 5. Розподіл відповідей на запитання: «Чи сприяє організація віртуального експерименту розумінню явища електромагнітної індукції?»



Рис. 6. Розподіл відповідей на запитання: «Чи зможете Ви виконати лабораторну роботу на реальному обладнанні після проведення віртуального експерименту?»



Рис. 7. Розподіл відповідей на запитання: «На вашу думку, чи може віртуальний експеримент замінити реальну лабораторну роботу?»

Використання віртуального фізичного експерименту забезпечує формування та удосконалення: навичок використання інформаційних і комунікаційних технологій (ЗК 6); здатності застосовувати сучасні інформаційні та комунікаційні технології навчання, здатності до пошуку, оброблення й аналізу інформації з різних джерел, необхідної для розв'язування наукових і професійних завдань (ЗК 3); здатності застосовувати сучасні освітні технології, у тому числі й інформаційно-цифрові, для забезпечення освітнього процесу, проведення освітніх досліджень та навчально-дослідницької діяльності з предметної галузі, впровадження STEM-освіти (СК 6); знань спеціалізованих мов програмування та пакетів програмного забезпечення (СК 7); здатності застосовувати знання з фізики, електроніки та інформатики в обсязі, необхідному для розуміння основних принципів робототехніки (СК 8); здатності до проектування, програмування та використання робототехнічних засобів (СК 9); здатності застосовувати набуті знання з предметної галузі, сучасних методик і освітніх технологій для формування ключових і предметних компетентностей здобувачів освіти (СК 10) тощо.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У статті розглянуто організацію віртуального експерименту в умовах дистанційного навчання та обґрунтовано доцільність такого виду діяльності для удосконалення фахових компетентностей здобувачів вищої освіти; представлено методичні основи проведення лабораторної роботи «Визначення індуктивності котушки методом використання явища самоіндукції при замиканні кола». Для моделювання електричних схем використано програмне забезпечення Proteus, яке об'єднує інструменти для моделювання схем, РСВ-проектування, симуляції і аналізу електричних сигналів, що забезпечує ефективність проектування електронних пристроїв.

Дидактичні та методичні можливості віртуального фізичного експерименту в освітньому процесі забезпечують реалізацію експериментального методу навчання фізики в умовах дистанційного навчання, формування умінь та навичок, застосування набутих знань у практичній діяльності, значно розширюють можливості залучення здобувачів освіти до пізнавально-пошукової діяльності, активізують їх самостійну діяльність. Віртуальний фізичний експеримент сприяє формуванню та удосконаленню загальних та фахових компетентностей здобувачів освіти.

У наступних дослідженнях планується розглянути можливості програмного забезпечення Proteus від Labcenter Electronics для формування дослідницької компетентності здобувачів вищої освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Головко, М. В., Крижановський, С. Ю., & Мацюк, В. М. (2015). Моделювання віртуального фізичного експерименту для систем дистанційного навчання в загальноосвітній і вищій педагогічній школах. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 47 (3), 36-48.
- Іваницький, О. І. (2018). Формування фахових компетентностей майбутніх учителів фізики в процесі самостійної роботи. *Вісник Запорізького університету*, 1 (30), 107-113.
- Ma, J. & Nickerson, J. (2006). Hands-on, simulated, and remote laboratories: A comparative literature review", *ACM Computing Surveys*, 38 (3). <https://doi.org/10.1145/1132960.1132961>.
- Mokhun, S. (2022). Stellarium Software as a Means of Development of Students' Research Competence While Studying Physics and Astronomy. Fedchyshyn, O., Kasianchuk, M., Chopyk, P., & Matsyuk V. *12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2022*, Ruzomberok, Slovakia, September 26-28. 587-591. <https://doi.org/10.1109/ACIT54803.2022.9913116>
- Подласов, С. О. & Матвійчук, О. В. (2023). Особливості проведення лабораторних робіт з фізики в технічному університеті під час дистанційного навчання. *ITLT*, 93 (1), 152-162.
- Сальник, І. В. (2014). Проблеми використання електронних засобів навчального призначення в системі шкільного фізичного експерименту. *Психолого-педагогічні проблеми сільської школи*, (48), 138-143. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Ppps_2014_48_23.
- Samoylenko, O., Snitovska, O., Fedchyshyn, O., Romanyshyna O. & Kravchenko, O. (2021). The Use of a Synthesis Approach to Develop a Model for Training Teachers' Competencies in Distance Teaching. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*. 20 (7) 308-327. <https://doi.org/10.26803/ijlter.20.7.17>.
- Slipukhina, I., Kuzmenkov, S., Kurilenko, N., & Sundenko, S. (2019). Virtual educational physics experiment as a means of formation of the scientific worldview of the pupils: ICT in Education, Research, and Industrial Applications. *Proc. 15 th Int. Conf. ICTERI*. Volume I: Main Conference. Kherson, Ukraine, June 12-15, 2019.
- Федчишин, О., Мохун, С., & Чопик, П. (2022). Методичні основи використання РНЕТ-симуляцій у процесі вивчення фізики. *Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія: педагогіка*, 1(1), 16-24. <https://doi.org/10.25128/2415-3605.22.1.2>
- Hamed, G., & Aljanazrah, A. (2020). The effectiveness of using virtual experiments on students' learning in the general physics lab. *Journal of Information Technology Education: Research*, (19). 977 – 996.

11. Hasan, R. B., Aziz, F. B., Mutaleb, H.A., & Umar, Z. (2017). Virtual reality as an industrial training tool: a review. *Journal of Advanced Review on Scientific Research*, 29 (1), 20–26.
12. Husnaini, S. & Chen, S. (2019). Effects of guided inquiry virtual and physical laboratories on conceptual understanding, inquiry performance, scientific inquiry self-efficacy, and enjoyment. *Physical Review Physics Education Research*, 15 (1). 1-16. doi: 10.1103/physrevphyseducres.15.010119.
13. Chang, K. E., Chen, Y. L., Lin, H Y & Sung, Y. T. (2008). Effects of learning support in simulation based physics learning. *Computers & Education*, 51 (4), 1486–1498.
14. Wong, W. K., Chen, K. P., & Chang, H. M. (2020). A comparison of a virtual lab and a microcomputer-based lab for scientific modeling by college students. *Journal of Baltic Science Education*. 19 (1), 157-173. <https://doi.org/10.33225/jbse/20.19.157>.
15. Шарко, В. Д. (2013). Підготовка вчителя до розвитку пізнавальної активності учнів засобами віртуального фізичного експерименту як методична проблема. *Інформаційні технології в освіті*. (14), 34–41.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Holovko, M. V., Kryzhanovskiy, S. Yu., & Matsiuk, V. M. (2015). Modeliuvannya virtualnoho fizychnoho eksperymentu dlia system dystantsiinoho navchannia v zahalnoosvitnii i vyshchii pedahohichnii shkolakh [Simulation of a virtual physical experiment for distance learning systems in general education and higher pedagogical schools]. *Informatsiini tekhnologii i zasoby navchannia - Information technologies and teaching aids*, 47 (3), 36-48. (in Ukrainian).
2. Ivanytskyi, O. I. (2018). Formuvannya fakhovykh kompetentnostei maibutnikh uchyteliv fizyky v protsesi samostiinoi roboty [Formation of professional competences of future physics teachers in the process of independent work]. *Visnyk Zaporizkoho universytetu - Bulletin of Zaporizhzhya University*, 1 (30), 107-113. (in Ukrainian).
3. Ma, J. & Nickerson, J. (2006). Hands-on, simulated, and remote laboratories: A comparative literature review", *ACM Computing Surveys*, 38 (3). 2006. doi: <https://doi.org/10.1145/1132960.1132961>.
4. Mokhun, S. (2022). Stellarium Software as a Means of Development of Students' Research Competence While Studying Physics and Astronomy. Fedchyshyn, O., Kasianchuk, M., Chopyk, P., & Matsyuk V. *12th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2022*, Ruzomberok, Slovakia, September 26-28, 587-591. <https://doi.org/10.1109/ACIT54803.2022.9913116>
5. Podlasov, S. O. & Matviichuk, O. V. (2023). Osoblyvosti provedennia laboratornykh robit z fizyky v tekhnichnomu universyteti pid chas dystantsiinoho navchannia [Peculiarities of laboratory work in physics at a technical university during distance learning]. *ITLT*, 93 (1), 152–162.
6. Salnyk, I. V. (2014) Problemy vykorystannia elektronnykh zasobiv navchalnoho pryznachennia v systemi shkilnoho fizychnoho eksperymentu [Problems of using electronic means of educational purpose in the school physical experiment system]. *Psykholoho-pedahohichni problemy silskoi shkoly – Psychological and pedagogical problems of the village school*, (48), 138-143. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Ppps_2014_48_23. (in Ukrainian).
7. Samoylenko, O. (2021). The Use of a Synthesis Approach to Develop a Model for Training Teachers' Competencies in Distance Teaching. Snitovska, O., Fedchyshyn, O., Romanyshyna O. & Kravchenko, O. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*. 20 (7) 308-327. <https://doi.org/10.26803/ijlter.20.7.17>.
8. Slipukhina, I. (2019). Virtual educational physics experiment as a means of formation of the scientific worldview of the pupils: ICT in Education, Research, and Industrial Applications. Kuzmenkov, S., Kurilenko, N., Mienailov, Sundenko, S. *Proc. 15 th Int. Conf. ICTERI*. Volume I: Main Conference. Kherson, Ukraine, June 12-15, 2019. <http://ceurws.org/Vol-2387/20190318.pdf>
9. Fedchyshyn, O., Mokhun, S., & Chopyk, P. (2022). Metodichni osnovy vykorystannia PhET-symulatsii u protsesi vyvchennia fizyky [Methodological fundamentals of using PhET simulations in the process of studying physics]. *Naukovi zapysky Ternopilskoho natsionalnoho pedahohichnoho universytetu imeni Volodymyra Hnatiuka. Seriya: pedahohika – Scientific notes of Ternopil National Pedagogical University named after Volodymyr Hnatiuk. Series: pedagogy*, 1(1), 16–24. <https://doi.org/10.25128/2415-3605.22.1.2>. (in Ukrainian).
10. Hamed, G. & Aljanazrah, A. (2020). The effectiveness of using virtual experiments on students' learning in the general physics lab. *Journal of Information Technology Education: Research*, (19). 977 – 996.
11. Hasan, R. B., Aziz, F. B., Mutaleb, H.A., & Umar, Z. (2017). Virtual reality as an industrial training tool: a review. *Journal of Advanced Review on Scientific Research*, 29(1), 20–26.
12. Husnaini, S. & Chen, S. (2019). Effects of guided inquiry virtual and physical laboratories on conceptual understanding, inquiry performance, scientific inquiry self-efficacy, and enjoyment. *Physical Review Physics Education Research*, 15 (1). 1-16. doi: 10.1103/physrevphyseducres.15.010119.
13. Chang, K. E., Chen, Y. L., Lin, H Y & Sung, Y. T. (2008). Effects of learning support in simulation based physics learning. *Computers & Education*. 51 (4). 1486–1498.
14. Wong, W. K., Chen, K. P., & Chang, H. M. (2020). A comparison of a virtual lab and a microcomputer-based lab for scientific modeling by college students. *Journal of Baltic Science Education*. 19 (1), 157-173. <https://doi.org/10.33225/jbse/20.19.157>.
15. Sharko, V. D. (2013). Pidhotovka vchytelia do rozvytku piznavalnoi aktyvnosti uchniv zasobamy virtualnoho fizychnoho eksperymentu yak metodychna problema [Teacher preparation for the development of students' cognitive activity by means of a virtual physical experiment as a methodical problem]. *Informatsiini tekhnologii v osviti – Information technologies in education*. (14), 34–41. (in Ukrainian).



Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
 Has been issued since 2013.
 Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
 Виходить з 2013.



p-ISSN 2413-1571
 e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571
<https://fmo-journal.org/>

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-2-009

УДК 37.025.7::167

РЕЦЕНЗІЯ НА КНИГУ: «АБЕТКА ЛОГІЧНОГО МИСЛЕННЯ»

Таяна ДЕОРДИЦА ✉

Благодійний фонд «e-Terra», Україна
 tdeorditsa@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3409-7168>

Марина ВОРОНІНА

Київський національний університет
 культури і мистецтв, Україна
 M_Voronina@i.ua
<https://orcid.org/0000-0003-3838-7194>

BOOK REVIEW: «THE ALPHABET OF LOGICAL THINKING»

Taiana DIEORDITSA ✉

Charitable Foundation «e-Terra», Ukraine
 tdeorditsa@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-3409-7168>

Maryna VORONINA

Kyiv National University of Culture and Arts, Ukraine
 M_Voronina@i.ua
<https://orcid.org/0000-0003-3838-7194>

ABSTRACT

Azbuka Logichnogo Myshlenii [The Alphabet of Logical Thinking], by Yuri Petrov. MSU (1991). ISBN: 5-211-01486-3. Open access to the online resource: https://www.phantastike.com/intellect/azbuka_logichnogo_myshleniya/djvu/view/. Logical thinking helps to solve intellectual problem situations in a methodologically correct way. These situations occur in ordinary as well as scientific thinking. The peer-reviewed book deals with many such situations and offers rules for solving them. These situations and rules concern operation with concepts, ways of asking questions and giving answers, estimating the truth of propositions, making conclusions, etc. Of particular value in this book are many carefully selected examples that allow you to comprehend the essence of the considered rules. The rules constitute the logic of cultural thinking, which is very necessary for writing educational and scientific papers and also for any other kind of intellectual activity. The peer-reviewed book is addressed to students and teachers.

KEYWORDS: thinking; logical; problem situation; rule; practical logic; theoretical logic; question.



Автор: Юрій Олександрович Петров (20.08.1927 – 17.08.2001)

Оригінальна назва: «Азбука логічного мислення»

Рік видання: 1991

Кількість сторінок: 104

Видавництво: МДУ

ISBN: 5-211-01486-3

Джерело вільного доступу: <http://kyiv-heritage-guide.com/page/literatura-dlya-rozvitku-osobistosti#19-6>

Ключові слова: мислення; логічний; проблемна ситуація; правила; практична логіка; теоретична логіка; питання.

Науково-популярна книга «Абетка логічного мислення» авторства Ю.О. Петрова не є книжковою новинкою, адже її вихід у світ датований ще 1991 роком. Однак завдяки Інтернету вона отримала нове життя і продовжує слугувати усім тим, хто пише та оцінює навчальні й наукові роботи, незамінним довідником із правил практичної логіки. Ці правила покликані слугувати засобом розв'язання цілої низки розумових проблемних ситуацій, що масово виникають як у звичайному, так і в науковому мисленні. Серед прикладів таких ситуацій — семантична невизначеність використовуваних термінів, некоректне складання плану, помилковість змістовного міркування тощо. На нашу думку, особливу цінність «Абетці» додає набір ретельно підібраних прикладів, які дають змогу осягнути суть розглянутих у ній правил. За визначенням самого Ю.О. Петрова, «читацька адреса» цієї книги — для старшокласників, студентів, вчителів та викладачів.

У філософській спадщині доктора філософських наук, професора Ю.О. Петрова «Абетка логічного мислення» — мабуть, єдина науково-популярна книга. Переглянувши назви публікацій цього професійного мислителя, ми припустили, що найцікавішим для нього було вирішувати наукові проблеми міждисциплінарного характеру. Про це свідчить тема його докторської дисертації — «Математична логіка і гносеологія» (1973). Ще одним підтвердженням цього нашого припущення є монографія Ю.О. Петрова «Культура мислення: методологічні проблеми науково-практичної роботи» (1990). Дослідник

Для цитування:

Деордіца Т., Вороніна М. Рецензія на книгу: «Абетка логічного мислення». *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 2. С. 56-58. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-2-009

Деордіца Т., & Вороніна, М. (2023). Рецензія на книгу: «Абетка логічного мислення». *Фізико-математична освіта*, 38(2), 56-58. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-009>

For citation:

Dieorditsa, T., & Voronina, M. (2023). Book review: «The alphabet of logical thinking». *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 56-58. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-009>

Dieorditsa, T., & Voronina, M. (2023). Retenzia na knyhu: «Azbuka lohichnogo myshleniya» [Book review: «The alphabet of logical thinking»]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(2), 56-58. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-009>

описав у ній сукупність правил подолання інтелектуальних утруднень, які трапляються у процесі написання наукових робіт. Одна їх частина належить до компетенції логіки, а решта — до компетенції методології науки. За нашими спостереженнями, основні ідеї цієї суто наукової книги Ю.О. Петров висвітлив у науково-популярному стилі в «Абетці логічного мислення». За його словами, щоб досягти популярності, він прагнув вживати менше слів, до яких читачам необхідно звикати, повніше і простіше (але так, щоб не жертвувати правильністю) пояснювати основні поняття і тлумачити їх на показових прикладах.

Для уникнення семантичної невизначеності основних термінів нашої рецензії з'ясуємо їхній зміст. *Мислення* — інформаційна діяльність, що набула якості опосередкованого, узагальненого пізнання, яке за допомогою абстрагування, міркувань (зіставлень пізнавальних образів та логічного виведення думок) і типізації даних про світ явищ розкриває їх необхідні зв'язки, закономірності, тенденції розвитку (ФЕС, 20002). *Логічний* — у якому є внутрішня закономірність; розумний, послідовний. *Ситуація* — сукупність умов та обставин, що створюють певне становище, викликають ті чи інші взаємини людей (СУМ, 2011). *Проблемна ситуація* — це ситуація, для оволодіння якою індивід повинен знайти і застосувати нові для себе засоби і способи діяльності (Карпенко, 1985). За Ю.О. Петровим, *логічно мислити* означає успішно розв'язувати задачі, що виникають в інтелектуальній діяльності. *Практична логіка* — царица логічної науки, для якої характерна практично-контекстуальна спрямованість, інтерес до конкретно-життєвих, повсякденних технік міркування (Батаєва, 2005). *Правила* — зібрання якихось положень, що визначають порядок ведення або дотримання чого-небудь (СУМ, 2011). Словосполученням «практична логіка» Ю.О. Петров послуговувався для позначення сукупності вироблених ним правил, спрямованих на розв'язання масових розумових проблемних ситуацій, що виникають під час написання навчальних і наукових текстів. Словосполученням «теоретична логіка» він позначив сукупність тих правил традиційної (Арістотелевої) логіки, які становлять основу його практичної логіки. Згідно з Ю.О. Петровим, *питання* — це *форма мислення*, пов'язана із затребуванням інформації. Граматично таке затребування може виражатися і у вигляді питального речення, і у вигляді розповідного речення, а також словосполученням.

Обговоримо основні частини «Абетки логічного мислення» — заголовок, мету і зміст.

Звертає на себе увагу, що Ю.О. Петров зміг усього трьома словами адекватно виразити зміст рецензованої книги й одночасно підкреслити її популярний характер. Однак зрозуміти, яке питання він втілює у назві «Абетка логічного мислення», нам вдалося тільки за допомогою його коментарів. За словами Ю.О. Петрова, використаний ним заголовок є стилістичною обробкою назви: «Логічне мислення як мислення за правилами розв'язання проблемних ситуацій». Саме вона очевидніше виражає основне питання аналізованої роботи: *за якими правилами і в який спосіб можна досягти більшої логічності мислення?*

Наше прагнення з'ясувати основне питання «Абетки» не є даремним, адже правило практичної логіки, спрямоване на розв'язання проблемної ситуації «вибір назви наукової роботи» наголошує: *заголовок наукової роботи має виражати її основне питання, відповіддю на яке є основний результат цієї роботи*. З нього випливає, що у разі вибору назви (1) у готовому вигляді, передусім, має бути наявний основний результат роботи; (2) необхідно на його основі виявити, відповіддю на яке питання він є; (3) виявлене питання необхідно вкласти у граматичну форму, прийнятну для заголовків книг. Ю.О. Петров зауважує, що на формулювання назви можуть впливати й інші чинники, наприклад, стилістика, характерна для певних робіт; вимога стислості; рекламні міркування тощо. Однак усі ці обставити не повинні затушовувати зв'язок заголовку роботи з основним результатом, він має залишатися безпосередньо очевидним.

З огляду на викладене вище, ми замислилися над тим, що є основним результатом розглядуваної книги. На нашу думку, це структурна триєдність «опис інтелектуальних ситуацій — правила їх подолання — показові приклади застосування цих правил». Нашу гіпотезу підтверджує формулювання мети «Абетки», викладене у вступі до книги: 1) *сформулювати інтелектуальні проблемні ситуації*; 2) *сформулювати правила, за допомогою яких ці ситуації розв'язують і які складають зміст практичної логіки*; 3) *показати на прикладах, як ці правила діють, і таким чином продемонструвати ті засоби, що певною мірою забезпечують логічність мислення*. У коментарі до проблемної ситуації «постановка мети наукової роботи» Ю.О. Петров пояснює, що мета наукової роботи формулюється для того, аби інформувати читача, які саме основні результати будуть викладатися та обґрунтовуватися у цій роботі. Правило, спрямоване на розв'язання проблемної ситуації «постановка мети наукової роботи», говорить: *для формулювання мети наукової роботи необхідно звести її основне питання до допоміжних питань першого рівня*.

Зміст «Абетки» складається зі вступу, основного змісту і підсумків. Засобом логічної організації основного змісту слугує план. Для того, щоб уникнути ситуації некоректного складання плану, Ю.О. Петров пропонує таке правило:

- 1) уточнити основне питання роботи шляхом чіткого визначення його основного терміна (ключового слова);
- 2) вибрати підходящу ознаку зведення основного питання до допоміжних питань;
- 3) виконати поділ основного поняття за обраною ознакою;
- 4) поставити отримані члени поділу під питання та сформулювати допоміжні питання;
- 5) якщо на отримані у такий спосіб питання можна відповісти відразу і повністю, то зведення припиняється;

у протилежному випадку правило застосовують до виведених питань.

Спробуємо згідно з цим правилом реконструювати дії автора зі складання плану «Абетки». Напевно, ключовим словом її основного питання Ю.О. Петров обрав поняття «мислення», а основою для поділу його обсягу — ознаку «форми мислення». Членами поділу виступили поняття, позначені такими термінами: «поняття», «питання», «судження», «умовивід». Назви глав показують, що допоміжні питання сформульовані для таких пар слів: «поняття/термін»; «питання/відповідь»; «судження/умовивід». Враховуючи популярний характер «Абетки», Ю.О. Петров виніс у заголовки глав розповідні речення: I. *Правильне вживання термінів — основа логічного мислення*. II. *Логічність питально-відповідного мислення та його практичне значення*. III. *Логічність міркувань і практика подолання помилок висновків*. Оскільки на питання, втілених у цих назвах, не можливо відповісти відразу і повністю, процес зведення був продовжений. Назвами параграфів у кожній главі стали назви розумових проблемних ситуацій. Ось кілька прикладів із першої глави: «Ситуація (C1), коли вас не розуміють або «спотворюють»; «Ситуація (C4) неправильного вибору визначення»; «Ситуація (C10) надлишковості визначень». Назви параграфів другої глави є такими: «Ситуація (C1) правильності питання»; «Ситуація (C2)

недоступності відповіді»; «Ситуація (С3) складання плану»; «Ситуація (С4) побудови відповіді»; «Ситуація (С5) організації наукової роботи». Очевидно, що цей план здатний забезпечити достатньо точну і повну відповідь на поставлене основне питання. Усього у книзі розглянуто 19 проблемних ситуацій, але загальна кількість правил їх подолання трохи більша. Це пов'язано з тим, що деякі проблемні ситуації дробляться на підситуації, а для подолання низки ситуацій необхідно кілька правил. Кожне правило пояснюється кількома показовими прикладами.

Підводячи підсумки, Ю.О. Петров наголошує, що вже само знання запропонованих ним правил практичної логіки дозволяє досягнути більшої логічності мислення. Однак крім знання правил необхідне ще вправлятися у їх застосуванні. І це є головною проблемою. Самі правила є простими, але їх необхідно застосовувати майже автоматично, аналогічно тому, як грамотна людина послуговується правилами граматики. Культура мислення теж потребує грамотності, тільки грамотності логіко-методологічної.

На власному досвіді ми переконалися у дієвості правил практичної логіки, запропонованих Ю.О. Петровим. «Абетка логічного мислення» стала для нас настільною книгою. Застосування цих правил допомогло нам поліпшити якість нашого зворотного зв'язку зі студентами. До того ж, ми відповідальніше стали ставитися до формулювання назв як власних, так і студентських робіт.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Батаева, Е. (2005). О трансформации формальной логики. *Философская думка*, 4, 3-14.
2. Карпенко, Л.А. (1985). *Краткий психологический словарь*. Политиздат.
3. Петров, Ю.А. (1990). *Культура мышления: методологические проблемы научно-педагогической работы*. МГУ.
4. СУМ-11: *Словник української мови* (1970-1980). Наукова думка. sum.in.ua.
5. ФЕС: *Філософський енциклопедичний словник* (2002) Абрис. <https://slovnuk.me/dict/fes>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bataeva K. (2005). O transformacii formal'noj logiki [On the Transformation of Formal Logic]. *Filosofska dumka [Philosophical thought]*.
2. Karpenko, L.A. (1985). *Kratkij psihologicheskij slovar' [Concise Psychological Dictionary]*. Politizdat.
3. FES: *Filosofskij entsyklopedychnyj slovnyk [Philosophical encyclopedic dictionary]* (2002). Abrys.
4. Petrov, Ju.A. (1990). *Kul'tura myshlenija: metodologicheskie problemy nauchno-pedagogicheskoy raboty [Culture of thinking: methodological problems of scientific and pedagogical work]*. MGU [MSU].
5. SUM-11: *Slovnuk ukraïnskoï movy [Dictionary of Ukrainian language]*. (1970-1980). Naukova dumka.



АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

А	М
Авдонін К. 7	Матвєєва І. 15
Б	Меняйлов С. 27
Бохонов Ю. 11, 15	Мохун С. 50
Бохонова Т. 11, 15	Мулеса П. 37
В	П
Вороніна М. 56	Петренко О. 43
Воскоглоу М. 22	С
Г	Сліпухіна І. 27
Гроза В. 15	Т
Д	Тихонова В. 15
Деордіца Т. 56	Томашук О. 15
К	Ф
Куриленко Н. 27	Федчишин О. 50
Л	Ч
Лещинський О. 15	Чепок О. 43
	Чопик П. 50

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Науковий журнал

Key title: Fiziko-matematična osvita

Abbreviated key title: Fiz.-mat. osv.

Том 38, № 2

2023

Друкується в авторській редакції
Матеріали подані мовою оригіналу

Відповідальний за випуск

О.В. Семеніхіна

Комп'ютерна верстка

О.М. Удовиченко

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
КВ № 22304 – 12204Р від 29.08.2016 р.

Фізико-математичний факультет
СумДПУ імені А.С. Макаренка
вул. Роменська, 87
м. Суми, 40002
тел. (0542) 68 59 10

<https://fmo-journal.org/>