Ключевые слова: *проблемный подход, предметные компетентности, биология, экология, профильный уровень, метод обучения, старшая школа, физиология растений, исследовательская деятельность.*

Moskalenko M. P., Vakal A. P., Mironets L. P. Problem approach in the formation of subject competences in the process of teaching biology and ecology at the core level.

The article describes the methodology of forming the subject competences in biology and ecology in the 10th form at the level using the problem method of teaching. The purpose of this article is to study the didactic possibilities of using the problem approach during the formation of subject competences in high school students during the study of the topic "Plastic exchange".

Involving students in the cognitive process by creating a problem situation can contribute to the formation of various subject competences. One of the skills sections is the ability to apply the acquired theoretical knowledge and practical skills in the field of biology and ecology in the execution of tasks, which involves making decisions in variables and non-standard situations. A presentation by a student or a group of students of a joint mini-project at a lesson forms a communicative subject competence – the ability to describe verbally and in writing the facts, it is understandable for the audience to communicate their views on the actual scientific and social problems in the field of biology. If students also use the appropriate technical means, then this will be the achievement of competence – the ability to formulate and argue their own hypotheses using information and communication technologies. When solving problem situations, there is an intensification of thinking, not simply memorization of ready. It contributes to the formation of substantive competence from the sphere of autonomy and responsibility – the ability to independently search and learn new knowledge in the field of biology and ecology, to generate new ideas and defend their own thoughts. The solution of the problem at the level of the plant cell emphasizes the ecological importance of water and sunlight at the level of the biosphere of our planet. Thus, subject competence can be formed – the ability to form a causal relationship between the phenomena of wildlife and human economic activity, their impact on human health and safety.

Key words: *problem approach, subject competence, biology, ecology, profile level, teaching method, senior school, plant physiology, research activity.*

УДК 378+517.1+517.2
DOI 10.5281/zenodo.2109438

В. Д. Погребний
ORCID ID 0000-0002-1625-7893
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

ПРО ДЕЯКІ ПИТАННЯ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

В статті обговорюються деякі методичні аспекти викладання математичного аналізу. Ця математична наука є настільки великою і важливою в системі математичної освіти, що створити ідеальний курс лекцій чи ідеальну книгу на всі ситуації практично не можливо. Завжди залишаються можливості для удосконалення. В процесі виникнення і розвитку Аналізу складалась термінологія і символіка. Іноді цей процес йшов стихійно і недостатньо продумано. Вносити зміни важко, але необхідно. В сучасних умовах повинна бути загально-математична термінологія і символіка. Деякі моменти в цьому плані в статті обговорюються. Пропозиції автора стосуються термінології про збіжність, порядку означення поняття границі, способу означення границі функції і порядку її введення, термінології про збіжність рядів, введення поняття похідної, диференційовності функцій, частинних похідних, схеми узагальнення поняття означеного інтегралу, порядку вивчення тем у вступі в аналіз, вивченні дійсних чисел. Висловлені пропозиції всі практично перевірені при читанні лекцій. Кращі студенти, порівнюючи виклад на лекціях і в книгах, *погоджуються з автором стосовно цих пропозицій. Стаття призначена для викладачів університетів, які викладають математичний аналіз і запрошує їх до творчих пошуків в цьому напрямі. Звичайно, кожний лектор в конкретних умовах в межах своїх обов'язків, можливостей і методичних поглядів будує своє бачення викладання і має на це право. Дана стаття не є директивою, а лише запрошенням до обговорення, оскільки математичний аналіз дає широкий простір для творчих пошуків та удосконалення педагогічної майстерності.*

Ключові слова: *математичний аналіз, викладання, функція, границя, похідна, диференційовність, інтеграл, ряд, збіжність, послідовність.*

Постановка проблеми. Математичний аналіз являє собою абсолютно необхідну складову частину математичної освіти. Ця частина надзвичайно важлива і в теоретичному, і в прикладному плані. Зрозуміло, що особливості викладання математичного аналізу для конкретно взятої спеціальності об'єктивно завжди присутні і їх необхідно враховувати постійно. В даній статті мова буде йти про викладання математичного аналізу студентам-математикам. В процесі розвитку математики складалась термінологія і символіка. Цей процес йшов різними напрямами, іноді продумано, іноді стихійно. Та термінологія і символіка, що склалась на теперішній час є подекуди доцільною, подекуди не дуже доцільною. В свій час в кожній математичній науці складався свій «математичний жаргон». В процесі розвитку і побудови математики на сучасній аксіоматичній базі на основі теорії множин і математичної логіки, в деяких моментах відбулася уніфікація, а в деяких ні. Наприклад, спеціалістам з математичного аналізу дивно чути від спеціалістів з теорії груп термін «норма» як назву спеціальної підгрупи. Втім, і в рамках математичного аналізу термінологія і символіка на даний момент, на наш погляд, не завжди є оптимальною. Обговоренню цих проблем і присвячена дана стаття.

Аналіз актуальних досліджень. Автору невідомі роботи, що присвячені даній проблемі, що, звичайно, не означає, що їх немає.

Метою даної статті є обговорення деяких моментів у викладанні математичного аналізу, пов'язаних з введенням деяких важливих понять математичного аналізу.

Виклад основного матеріалу. 1. Першим поняттям, про яке йде мова буде поняття границі. Почнемо з границі послідовності. Практично у всіх відомих автору книгах з математичного аналізу (наприклад, [3, с. 36]) розрізняють збіжні і розбіжні послідовності. До збіжних відносяться послідовності, що мають скінчену границю. До розбіжних ті, для яких границя не існує, або ті, що необмежено наближаються до (–∞) чи (+∞) відповідно з збільшенням номера. На наш погляд, слід розглядати не дві, а три ситуації. Справа в тому, що випадки не існування границі взагалі і прямування елементів послідовності до (–∞) чи (+∞) принципово різні. В другому випадку ми все ж маємо цілком визначену тенденцію поведінки послідовності. Наприклад, для послідовностей $a_n = -n^2$, та $b_n = (-1)^n 2^n$ поведінка їх принципово різна. На наше переконання, математика, зокрема, класичний аналіз, має і право, і зобов'язання працювати з нескінченостями. Тому ми пропонуємо для послідовностей вводити три випадки для збіжності:

1. Власна збіжність. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_0 \in R$.

2. Невласна збіжність. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty \vee \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

3. Розбіжність. $\bar{\exists} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Така термінологія, на наш погляд, більш логічна, зрозуміліша студентам і доцільніша. Прикладами цих ситуацій можна взяти такі:

1. $a_n = \dfrac{n+1}{n}$, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1 \in R$. Послідовність власно збіжна.

2. $b_n = (-1)^n$. $\bar{\exists} \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \in \overline{R}$. Послідовність розбіжна.

3. $c_n = n^2$. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$. Послідовність невласно збіжна.

Слід відмітити, що Г.М. Фіхтенгольц уже зробив крок у цьому напрямі у своєму знаменитому трьохтомнику. Він вживає термін «варианта имеет предел (+∞) или (–∞)» [7, с. 65] (підкреслено нами). Також важливою є така його фраза: «Можно было бы дать для этих случаев и независимое определение». Також: «Введение бесконечных пределов не нарушает теоремы о единственности предела» [7, с. 65].

Як бачимо, Г.М. Фіхтенгольц дуже близько викладає це питання до того, що пропонуємо ми. Але, на жаль, він не виклав відразу чітко те, що є три принципово різні ситуації з збіжністю послідовностей. Трьохтомник Г.М. Фіхтенгольца, на наше переконання, є найкращим підручником з класичного аналізу, з усіх нам відомих на українській і російській мовах. І ця книга найближче підходить до наших пропозицій. Це питання, на наш погляд, принципове і важливе для правильного засвоєння даного матеріалу студентами.

2. Порядок введення границь послідовностей і функцій. У більшості книг спочатку вводиться поняття границі послідовності, а потім вже і поняття границі функції. Є і інший підхід. Наприклад, в [2] відразу вводиться границя функції, а границя послідовності – як частинний випадок загальної ситуації. Теоретично можливі різні варіанти. Питання це конкретне, і залежить від конкретних обставин. Для студентів-математиків педагогічних університетів, які мають слабку шкільну математичну підготовку, краще все ж починати з границі послідовності. Наш багаторічний досвід показує, що поняття границі психологічно складне для першокурсників, які починають вивчати математичний аналіз. Доцільно починати вивчення теорії границь з порівняно простого класу функцій – послідовностей.

3. Введення самого поняття границі. Звичайно, можливі різні підходи. Часто починають з умови Коші («мова $\varepsilon - n_0$, $\varepsilon - \delta$»). Доцільно почати з прикладів і аналізу поведінки елементів послідовностей при необмеженому зростанні номера *n*. Це зроблено у багатьох підручниках, наприклад в [1]. І це найбільш доцільно, на наше переконання. Далі, як правило дається означення по Коші. В [1] дається спочатку означення границі через інтервали (а це є околи). Умову Коші названо критерієм, і доведено це. В [3], навпаки, границя вводиться через умову Коші, а через інтервали дається еквівалентна умова.

Ми пропонуємо такий шлях. Оскільки при подальшому вивченні аналізу треба буде розглядати границі для функцій кількох змінних, послідовностей в просторі E^m, на комплексній площині, в метричних, лінійних нормованих просторах, топологічних просторах, а границя є основною лінією, суттю Аналізу, то слід цю основну лінію і вести з самого початку. При вивченні теми «Дійсні числа» слід ввести поняття околу точки $x_0 \in R$, ε-околу, і околів невласних точок (–∞), (+∞) в $\overline{R}$. Поняття границі послідовності і функції з самого початку формулювати в термінах околів. Наприклад, так:

Означення 1. Точка $a_0 \in \overline{R}$ називається границею послідовності $(a_n)_{n\in N}$, $a_n \in R$, якщо для кожного околу $V(a_0)$ існує номер n_0, залежний від цього околу, такий, що виконана умова: $n > n_0 \Rightarrow a_n \in V(a_0)$. Запис: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_0$, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_0$.

Можна додати пояснення, що ця умова означає, що в кожному околі $V(a_0)$ будуть міститися всі елементи a_n, крім, можливо, скінченої їх кількості.

Означення 2. Точка $y_0 \in \overline{R}$ називається границею функції $f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо для кожного околу $V(y_0)$ існує окіл $U(+\infty)$, такий, що $x \in U(+\infty) \Rightarrow f(x) \in V(y_0)$.

Аналогічно вводиться поняття при $x \to -\infty$.

Поняття проколеного околу точки $x_0 \in R$ треба ввести разом з поняттями околів.

Означення 3. Точка $y_0 \in \overline{R}$ називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0 \in R$, якщо $\forall V(y_0)$ існує проколений окіл $U^*(x_0)$ такий, що $x \in U^*(x_0) \Rightarrow f(x) \in V(y_0)$.

Порядок розгляду границь, на наш погляд, краще всього такий: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, потім узагальнення на $x\to+\infty$, підкреслюючи, що $a_n = f(n)$, а $x\to+\infty$ – узагальнення $n\to+\infty$. Потім, по аналогії, для $x\to-\infty$. А далі $x\to x_0\in R$ з поясненням про проколені околи.

Ці означення вводяться після інтуїтивного аспекту границі, як наближення значень a_n до a_0, $f(x)$ до y_0. Після цього треба поставити проблему одержання інструмента для практичного оперування з границями. З поняття околів, як інтервалів на прямій переходимо до їх задання нерівностями. Далі формулюємо критерій границі – умову Коші. Доведення дуже просте. Одержуємо практичні умови для доведення фактів про границі і ілюструємо це кількома прикладами. Умови Коші для границь слід повністю і чітко записати:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a_0 \in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon): n>n_0 \Rightarrow |a_n - a_0| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon): n>n_0 \Rightarrow a_n < -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon): n>n_0 \Rightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = y_0 \in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: x<-\delta \Rightarrow |f(x)-y_0| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = y_0 \in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: x>\delta \Rightarrow |f(x)-y_0| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: x<-\delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: x>\delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: x<-\delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: x>\delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{x\to x_0\in R} f(x) = y_0 \in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-y_0| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to x_0\in R} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{x\to x_0\in R} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

Такий підхід дає можливість продовжувати основну лінію границь до сучасного аналізу і конкретизувати ситуацію в кожному класі просторів.

4. Границя функції по Гейне (E. Heine). І тут можливі різні підходи, і вони реалізовані в відомих нам книгах. Наприклад, в [3] границя функції вводиться через умову Гейне, далі вводиться умова Коші і доводиться їх еквівалентність. В [4] систематично проводиться лінія послідовностей. Часто формулюють «Означення по Коші», «Означення по Гейне» і доводять їх еквівалентність. Наша позиція в цьому питанні полягає в наступному. Оскільки студенти-математики вивчають Аналіз не лише класичний, а й основи сучасного аналізу, то вживати слово «означення» для умови Гейне не слід. Справа в тому, що еквівалентність умов Коші і Гейне відображає глибокий факт, який прояснюється повністю лише в сучасному аналізі. Цей факт полягає в тому, що дійсна пряма, комплексна площина, евклідовий простір E^m, метричні, нормовані лінійні простори є просторами Фреше-Урисона і їх топологічна структура адекватна збіжності послідовностей. В загальних топологічних просторах це далеко не завжди вірне, а лінія границь повинна йти до самого кінця. Тому ми є прихильниками означення поняття границі на основі околів. Умову Гейне слід розглядати як необхідну і достатню умову існування границі. Слід пояснити її роль як

показника значення послідовностей в границях і її застосування в практичних задачах, зокрема, для доведення того, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq y_0$, та $\bar{\exists}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

5. Збіжність рядів. Оскільки числові ряди нерозривно пов'язані з числовими послідовностями, то для числових рядів теж треба розглядати три випадки:

1. Ряд власно збіжний: $\exists S(A) = S_0 \in R$.

2. Ряд невласно збіжний: $\exists S(A) = -\infty \vee \exists S(A) = +\infty$.

3. Ряд розбіжний: $\bar{\exists} S(A)$.

Оскільки в класичному аналізі не розглядаються функції, що приймають нескінчені значення в нескінченій множині точок, то для функціональних рядів область збіжності є множина тих точок, де відповідний числовий ряд є власно збіжним.

6. Введення поняття похідної. При загальноприйнятому способі означення похідної у деяких (мислячих) студентів виникає питання: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ є число, звідки ж береться $f'(x)$ як функція? Не всі знаходять правильну відповідь. Пропонуємо такий порядок висвітлення цього питання.

Нехай функція $y = f(x)$ задана на множині $X \subset R$, $X \neq \emptyset$. Наприклад, $X = \langle a,b \rangle$, $a,b \in \overline{R}$, $a < b$, $x_0 \in (a,b)$, $x = x_0 + \Delta x \in (a,b)$. Нехай $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$. Це значення називається похідним або диференціальним числом для функції $f(x)$ в точці $x = x_0$. Запис: $f'(x)$, $y'(x_0)$, $y'_x(x_0)$. Позначимо $D = \{x_0 \in (a,b) : \exists f'(x_0)\}$. Розглянемо функцію $g : D \to R$, $g(x_0) = f'(x_0)$. Ця функція називається похідною функцією від функції $f(x)$ по змінній на множині *D*.

Далі вводяться позначення для похідної функції. Такий підхід повністю прояснить ситуацію для всіх студентів.

7. Диференційовність функцій і похідні. Диференціальне числення дійсних функцій однієї дійсної змінної звичайно починають з задач, що приводять до поняття похідної, а потім вводять і саму похідну. Диференційовність функції або зразу означають, як існування скінченої двосторонньої похідної, або означають пізніше і встановлюють еквівалентність цих умов. Але при вивченні диференціального числення дійсних функцій кількох дійсних змінних ситуація ускладнюється. Виявляється, що єдиного поняття похідної не існує, а диференційовність функції означає іншу умову. А лінія диференційовності природно продовжується з випадку однієї на випадок кількох дійсних змінних (вона продовжується і далі – в сучасний аналіз). Тому ми пропонуємо такий порядок вивчення. Фактично диференційовність в точці x_0 означає можливість «хорошого», «зручного» вираження Δf через Δx: $\Delta f = \Delta y = A \cdot \Delta x + 0(\Delta x)$, $A(\Delta x) = const$. Для функцій кількох змінних ситуація цілком аналогічна:

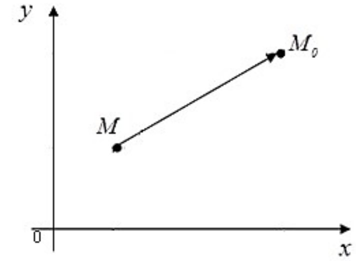
$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \ldots + C\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \ldots + \gamma\Delta z\,,\ f = f(x,y,\ldots,z).$$

Пропонується спочатку ввести поняття диференційовності, розглянути найпростіші факти стосовно нього, після цього розглядати задачі, що приводять до поняття похідної, вводити похідну і встановлювати зв'язок диференційовності з похідною. При переході до функцій кількох змінних теж починати з поняття похідної, як частинної, на наш погляд не оптимально. Слід ввести поняття диференційовності функції як продовження лінії лінійного представлення Δf через прирости аргументів. Що стосується частинних похідних, то тут ми теж маємо пропозиції, про які скажемо в наступному пункті.

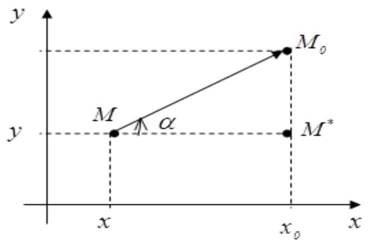
8. Частинні похідні. Як правило, диференціальне числення дійсних функцій кількох дійсних змінних починається з введення частинних похідних. Як правило не пояснюється, чому немає єдиного поняття похідної функції кількох змінних. Виникає деяка неясність. Поняття функції по даному напряму вводиться пізніше і виводиться формула для її

обчислення. У кращих студентів виникає відчуття деякої незавершеності питання про похідні функцій кількох змінних. Ми пропонуємо наступний підхід.

Починаємо з поняття диференційовності функції. Далі формулюємо проблему введення похідної для функції кількох змінних. Можна розпочати для більшої наглядності з функцій двох змінних. Нагадуємо поняття похідної функції $f(x)$. Звертаємо увагу на умову існування $f'(x_0): \exists f_l'(x_0) \wedge \exists f_r'(x_0) \wedge f_l'(x_0) = f_r'(x_0)$. Тобто один і той же результат для $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$. На площині способів $M \to M_0$ безліч: по різним напрямам, по різним лініям різної форми. Підводимо студентів до висновку, що мабуть умови існування похідної в просторі E^m значно більш складні, ніж на прямій. Пробуємо означити похідну $f'(M_0)$ по аналогії з прямою. $\Delta f = f(M) - f(M_0)$, це зрозуміло. Що брати замість Δx? Можна спробувати взяти $\Delta l = l\left(\overset{\smile}{M_0 M}\right)$. Спростимо задачу. Будемо розглядати лише прямолінійні шляхи.



Значення $f'(M_0)$ не повинно залежати від напряму вектора $\overrightarrow{MM_0}$. Розглянемо функцію $f(x,y) = x$. $M(x,y)$, $M_0(x_0,y_0)$, $\left(\overrightarrow{MM_0} \overset{\wedge}{,} OX\right) = \alpha$. $M \to M_0 \Rightarrow x \to x_0,\ y \to y_0$.

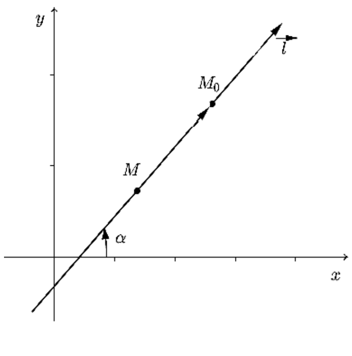


$$\Delta l = \frac{\Delta x}{\cos\alpha}\cdot$$

$$\Delta f = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x\cdot$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta l} = \frac{\Delta x}{\dfrac{\Delta x}{\cos\alpha}} = \cos\alpha\cdot$$

При різних значеннях α, $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta l} = \cos\alpha$ приймає різні значення, єдиного значення не існує. Це означає, що неможливо для всіх функцій $f(x,y)$ ввести єдине поняття похідної, незалежне від способу $M \to M_0$. Формулюємо наступну, «більш скромну» задачу. Виберемо даний напрям, заданий променем $\vec{l}$, що проходить через точку M_0 і спробуємо ввести поняття похідної по цьому напряму.



Позначимо $\Delta l = \begin{cases} \|MM_0\|, \overrightarrow{MM_0} \uparrow\uparrow \vec{l} \\ -\|MM_0\|, \overrightarrow{MM_0} \downarrow\uparrow \vec{l} \end{cases}$

$\Delta l \in R$, $\Delta f \in \Delta_l f$.

Розглянемо $\dfrac{\Delta_l f}{\Delta l}$. Якщо $\exists \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l f}{\Delta l}$, то це значення називається похідною функції $f(x,y)$ в точці M_0 по напряму $\vec{l}$. Запис: $\dfrac{\partial f}{\partial l}(M_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0)$. Далі робиться природнє узагальнення для функції $f(x,y,z)$ в просторі E^3.

Далі ставиться проблема: які напрями найбільш важливі? Як правило, студенти відразу відповідають, що це напрями по осям координат. Тут приходимо логічно до поняття частинних похідних. Формулюємо правило їх практичного обчислення. Далі робимо узагальнення для простору E^m. Виводимо формулу вираження похідної по будьякому напряму в E^2, E^3 через частинні похідні. Така методика, на наш погляд, дозволить студентам повніше зрозуміти походження частинних похідних.

9. Узагальнення поняття означеного інтегралу. При традиційному порядку вивчення інтегрального числення дійсних функцій кількох дійсних змінних, спочатку розглядаються подвійні інтеграли, потім потрійні, потім криволінійні і поверхневі. На наш погляд, більш логічно проводити вивчення по такій схемі. $(R)\int_a^b f(x)dx$ розглядається для функції $f(x)$ на $[a,b]$. Які узагальнення можливі? Можна розглядати функцію $f(M)$ задану на $[AB]$ на площині чи в просторі: $f(M)=f(x,y)$ чи $f(M)=f(x,y,z)$. Але $[AB]$ можна задати канонічним рівнянням: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}\left(=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)$ і виражається y та z через x. Приходимо до $\int_a^b f(x)dx$ на $[a,b]$. Але якщо $f(M)$ задана на кривій лінії (L) на площині чи в просторі, то це вже зовсім інша ситуація. Далі виникає думка, треба розглядати $f(M)$ на деякій плоскій фігурі (Φ) на площині і т.д.

Отже, лінія узагальнення $\int_a^b f(x)dx$ на більш загальні випадки буде така:

1. $f(M)$ на $(L)\subset D^2$
2. $f(M)$ на $(L)\subset D^3$
3. $f(M)$ на $(\Phi)\subset D^2$
4. $f(M)$ на поверхні $(P)\subset D^3$
5. $f(M)$ на тілі $(W)\subset D^3$
6. $f(M)$ на області $(W)\subset E^m$

Отже, узагальнення йде по мірі узагальнення області задання функції $f(M)$. Така схема вивчення нам здається більш логічною і зрозумілою для студентів.

10. Порядок вивчення тем в I семестрі. Традиційно вивчення математичного аналізу починається з теорії дійсних чисел. Але ця тема складна для новоспечених студентів. Вона була складною майже для всіх студентів і давно, коли автор був сам студентом. На нашому потоці лише 2 студенти її достатньо повно розуміли (які в школі цікавились математикою і читали вузівські книги). В даний час підготовка випускників середніх шкіл з математики катастрофічно знизилась. Теорія дійсних чисел складна сама по собі, навіть і для магістрів. Її достатньо глибоко слід вивчати в основах арифметики (числові системи). Тому при вивченні математичного аналізу в I семестрі ми пропонуємо першим розділом брати «Функції». Це простіше для студентів і дозволяє їм трохи адаптуватись. Все рівно строго дедуктивно і аксіоматично прочитати аналіз для студентів неможливо. Осмислення, узагальнення, поглиблення – це вже після одержання диплому, і то для вибраних.

11. Вивчення дійсних чисел. Цей розділ ми пропонуємо вивчати другим. Знову таки; традиційно відразу вводять дійсні числа якимось шляхом, а це непосильно для студентів у сучасних умовах. Ми пропонуємо згадати натуральні, цілі, раціональні числа, позначення, найпростіші властивості, необхідність і спосіб розширення цих числових систем. Дійсні числа розглядати оглядово. Їх можна ввести як нескінчені десяткові дроби, сказати про дії над ними, відношення порядку. Розглянути абсолютну величину, розширену множину $\overline{R}$, основні множини на прямій (включно з околами). Далі розглянути основні джерела ірраціональності. Неперервність множини дійсних чисел можна розглянути у оглядовому порядку. Сформулювати принципи Архімеда, Вайерштрасса, Дедекінда, Кантора, Коші. Сформулювати (без доведення) теорему про еквівалентність умов неперервності множини дійсних чисел по Дедекінду, Вайерштрассу, Коші, Кантору. Назвати способи побудови множини дійсних чисел по Дедекінду, Кантору, Вайерштрассу, на основі принципу

стягуваних сегментів. Можна трохи сказати про аксіоматичний метод. слід детально розглянути і довести основні властивості, що випливають з неперервності множини дійсних чисел.

Такого ознайомлення достатньо для дальшого успішного вивчення математичного аналізу.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Математичний аналіз в сучасному розумінні («великий Аналіз») являє собою грандіозну математичну науку, яка постійно розвивається. Вивчення математичного аналізу є абсолютно необхідним і надзвичайно важливим елементом кожного типу математичної освіти. Особливо це стосується студентів-математиків. Викладання аналізу в кожних конкретних умовах має свої особливості. Вищенаведені методичні моменти є результатом багаторічного практичного досвіду автора, міркувань, спроб, модифікацій викладання. Звичайно, були обговорені далеко не всі методичні нюанси викладання аналізу. Кожний достатньо досвідчений лектор має свій досвід, свої уподобання, свої умови викладання. Автор не вважає свої пропозиції істиною в останній інстанції, а лише висловлює свою точку зору. Викладання аналізу – це настільки велика методична тема, що завжди є простір для творчого методичного пошуку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Courant, R. (1945). Differential and integral calculus. New York.
2. Давидов, М. О. (1976). Курс математичного аналізу. Ч.1. Київ. (Davidov, M. O. (1976). Course of mathematical analysis. Part 1. Kyiv)
3. Заболоцький, М. В., Сторож, О. Г., Тарасюк, С. І. (2008). Математичний аналіз. Київ. (Zabolotsky M. V., Storozh O. G., Tarasyuk S. I. (2008). Mathematical Analysis. Kyiv).
4. Ильин, В. А., Позняк, Э. Г. (1967). Основы математического анализа. Москва. (Ilyin, V. A., Poznyak, E. G. (1967). Fundamentals of mathematical analysis).
5. Коровкин, П. П. (1972). Математический анализ. Ч.1. Москва. (Korovkin, P. P. (1972). Mathematical analysis. Part 1. Moscow)
6. Уваренков, И. М., Маллер, М. З. (1966). Курс математического анализа. Том 1. Москва. (Uvarenkov, I. M., Muller, M. Z. (1966). Course of mathematical analysis. Volume 1. Moscow).
7. Фихтенгольц, Г. М. (1969). Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I. Москва. (Fikhtengolts, G. M. (1969). Course of differential and integral calculus. Volume I. Moscow).
8. Шилов, Г. Е. (1969). Математический анализ. Москва. (Shilov, G. E. (1969). Mathematical analysis. Moscow)

Погребной В. Д. О некоторых вопросах преподавания математического анализа.

В статье обсуждаются некоторые методические аспекты преподавания математического анализа. Эта математическая наука является настолько большой и важной в системе математического образования, что создать идеальный курс лекций или идеальную книгу для всех ситуаций практически невозможно. Всегда остаются возможности для усовершенствования. В процессе возникновения и развития Анализа складывалась терминология и символика. Иногда этот процесс шел стихийно и недостаточно продуманно. Вносить изменения сложно, но необходимо. В современных условиях должна быть общематематическая терминология и символика. Некоторые моменты в этом плане в статье обсуждаются. Предложения автора касаются терминологии о сходимости, порядку определения понятия предела, способа определения предела и порядку ее введения, терминологии о сходимости рядов, введения понятия производной, дифференцируемости функций, частных производных, схемы обобщения понятия определенного интеграла, порядка изучения тем во введении в анализ, изучения действительных чисел. Высказанные предложения практически проверены при чтении лекций. Лучшие студенты, сравнивая изложения на лекциях и в книгах, соглашаются с *автором касательно этих предложений. Статья предназначена для преподавателей университетов, которые читают математический анализ и приглашает их к творческим поискам в этом направлении. Конечно, что каждый лектор в конкретных условиях в рамках своих обязанностей, возможностей и методических взглядов строит свое видение изложения и имеет на это право. Данная статья не является директивой, а всего лишь приглашением к обсуждению, поскольку математический анализ дает широкий простор для творческих поисков и усовершенствования педагогического мастерства.*

Ключевые слова: *математический анализ, преподавание, функция, предел, производная, дифференцируемость, интеграл, ряд, сходимость, последовательность.*

Pogrebnoy V. D. On some issues of teaching mathematical analysis.

In the article some methodical aspects of the teaching of mathematical analysis are discussed. This mathematical science is so big and important in the system of mathematical education that it is almost impossible to create an ideal course of lectures or an ideal book for all situations. There are always opportunities for improvement. In the process of the emergence and development of the Analysis, terminology and symbols developed. Sometimes this process was spontaneous and insufficiently thought out. It is difficult to make changes, but it is necessary. In modern conditions, there should be general mathematical terminology and symbols. Some points in this regard in the article are discussed. The author's proposals concern the terminology of convergence, the order of definition of the concept of a limit, the method of determining the limit and the order of its introduction, the terminology on the convergence of series, the introduction of the concept of the derivative, the differentiability of functions, partial derivatives, the generalization scheme for the concept of a definite integral, the order of studying topics in introduction to analysis, real numbers. The suggestions made are practically verified when reading lectures. The best students, comparing the lectures and books, agree with the author about these proposals. The article is intended for university teachers who read mathematical analysis and invites them to creative searches in this direction. Of course, every lecturer, in the concrete conditions, builds his vision in the framework of his duties, opportunities and methodological views and has the right to do so. This article is not a directive, but merely an invitation to discussion, since mathematical analysis gives a wide scope for creative searches and improvement of pedagogical skills.

Key words: *mathematical analysis, teaching, function, limit, derivative, differentiability, integral, series, convergence, sequence.*

УДК 159.9 : 519.6
DOI 10.5281/zenodo.2109618

Р. Я. Романишин
ORCID 0000-0001-8480-2702
ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ДІЯЛЬНІСТЬ: СТРУКТУРА ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ ЧАСТИНИ

У статті на основі аналізу психолого-педагогічних джерел подається визначення поняття обчислювальна діяльність. Визначається її структура та функціональні частини. Для цього були застосовані такі методи дослідження: теоретичний – аналіз, систематизація й узагальнення науково-методичної літератури для порівняння та зіставлення різних підходів до представленої проблеми, розкриття вжитих у публікації дефініцій та емпіричний – спостереження за обчислювальною діяльністю учнів.

У результаті аналізу психологічних джерел визначається структура діяльності. Розглядаються розумові дії як змістовний структурний елемент розумової діяльності до