Міністерство освіти і науки України
Сумський державний педагогічний університет
імені А.С.Макаренка

Олена Мартиненко, Ярослав Чкана

Вибрані питання теорії аналітичних функцій

Навчально-методичний посібник

Суми - 2024

УДК 512.2/.3(075.8.057.875)
М 29

Рекомендовано вченою радою Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка (протокол № 11 від 20.05. 2024 р.)

Рецензенти:
Ірина Шуда, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу і методів отимізації Сумського державного університету
Михайло Шуляк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Агроінжинірінгу» Сумського національного аграрного університету

Мартиненко О.В., Чкана Я.О.
М 29 **Вибрані питання теорії аналітичних функцій.** Навчально-методичний посібник / О.В. Мартиненко, Я.О. Чкана. Суми, ФОП Литовченко Є.Б., 2024. 121 с.

Посібник написано відповідно до діючих програм з курсу «Математичний аналіз» для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Він зорієнтований на набуття студентами теоретичних знань та практичних умінь з математичного аналізу в частині основних положень теорії аналітичних функцій.

Матеріал, поданий в кінці цього посібника, є керівництвом до організації аудиторної, індивідуальної та самостійної роботи студентів.

Навчальний посібник рекомендовано для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних та технічних університетів, а також вчителів математики загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 512.2/.3(075.8.057.875)

ЗМІСТ

ВСТУП

Метою та завданням навчального курсу «Вибрані питання теорії аналітичних функцій» є узагальнення основних положень теорії функцій дійсної змінної на комплексну область, вивчення важливих властивостей аналітичних функцій, що мають широке прикладне застосування не тільки в математиці, але й в інформатиці, природознавстві, фізиці та інших сферах наукового знання, та оволодіння основними методами розв'язування задач комплексного аналізу.

Заплановані результати навчання

У результаті вивчення курсу студент повинен:

знати: основні елементарні функції комплексної змінної та їхні властивості; умови диференційовності та аналітичності функцій комплексної змінної; означення, властивості та методи обчислення інтегралів функцій комплексної змінної; основні поняття теорії лишків та їх застосування;

уміти: досліджувати функції комплексної змінної на диференційовність та аналітичність; відновлювати аналітичну функцію за її дійсною чи уявною частиною; обчислювати різними методами інтеграли від функцій комплексної змінної; розкладати функції комплексної змінної в ряд Лорана; визначати і класифікувати ізольовані особливі точки функцій та обчислювати лишки функцій відносно особливих точок; застосовувати лишки до обчислення інтегралів функцій комплексної чи дійсної змінної.

Доцільність вивчення запропонованого курсу полягає не лише в отриманні математичних знань, але і в розвитку критичного та логічного мислення, аналітичних навичок, що допоможе студентам краще розуміти глибокі математичні концепції, засвоїти методи та прийоми розв'язання складних математичних завдань.

Цей навчальний курс є важливою складовою професійної підготовки вчителів математики та відіграє значну роль у формуванні основних математичних компетентностей, необхідних для розуміння математики в цілому та викладанні її на різних рівнях освіти.

Комплексні числа

Історична довідка

Комплексні числа виникли з практики розв'язування алгебраїчних рівнянь: було встановлено, що коли квадратне рівняння має від'ємний дискримінант, то його корені не можуть бути дійсними, також не всі корені рівнянь вище другого степеня є дійсними. Нерозв'язність цих рівнянь на множині дійсних чиел привела до необхідності її розширення.

З комплексними числами вперше зустрілися індійські вчені, які вже мали поняття про квадратний корінь і від'ємні числа. Вони вважали, що квадратні корені з від'ємних чисел не існують, а тому не розглядали квадратні рівняння з недійсними коренями.

У XVI ст. значний внесок у розвиток алгебри зробили італійські математики, розв'язавши в радикалах рівняння третього і четвертого степенів. Зокрема, в науковій праці «Велике мистецтво» італійського математика Джироламо Кардано (1501—1576) , опублікованій у 1545 р., було наведено формулу алгебраїчних розв'язків кубічного рівняння $x^3 + px + q = 0$. Цікавим є той факт, що коли всі коефіцієнти цього рівняння та усі його корені дійсні, проміжні обчислення приводять до уявних чисел (їх називали «фальшивими», «неіснуючими») вигляду $a \pm \sqrt{-b}, (b > 0)$, яким спочатку не надали будь-якого змісту, але оперували ними, поширюючи при цьому правила дій з дійсними числами. Такий випадок розв'язування кубічного рівняння називали «незвідним».

Правила дій над комплексними числами майже у сучасному вигляді вперше виклав італійський математик Раффаеле Бомбеллі (1530 — 1572). Рене Декарт (1596 – 1650) ототожнював дійсні числа з відрізками координатної осі, він вважав, що для комплексних чисел не може існувати жодного реального тлумачення, а тому вони назавжди залишаються уявними. Такого погляду дотримувалися й інші математики того часу, зокрема, Ісаак Ньютон (1643 – 1727) і німецький учений Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646—1716).

У XVII ст. англійський математик Джон Валліс (1616— 1703) у своїй праці «Алгебра, історичний і практичний трактат» (1685) вказав на можливість геометричного тлумачення уявних чисел, хоча потреба у геометричній інтерпретації комплексних чисел для розв'язування численних задач математичного аналізу, механіки і геометрії виникла лише у XVIII ст.

Початок застосування комплексних чисел у диференціальному та інтегральному численні поклали Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646 – 1716) і швейцарський математик Йоганн Бернуллі (1667 – 1748), які ще в 1702 році формально використовували логарифми уявних чисел для інтегрування дробів з уявними знаменниками. В 1712 році між Лейбніцем та Бернуллі виникла суперечка щодо природи логарифмів комплексних і від'ємних чисел: Лейбніц стверджував, що логарифми від'ємних чисел уявні, а Бернуллі вважав, що вони дійсні. Це питання у 1749 році розв'язав Леонард Ейлер (1707 – 1783) на користь Лейбніца.

Цікаво, що Лейбніц, називаючи комплексні числа «притулком божественного духу», заповів викарбувати на своєму надгробку знак $\sqrt{-1}$ як символ потойбічного світу.

Літеру i, як позначення уявної одиниці, запропонував Ейлер у 1777 р. (опубліковано у 1794 р.), узявши для цього першу літеру слова imaginarius (уявний).

Французький учений Жан Лерон Д' Аламбер (1717—1783) вперше виділив модуль і аргумент комплексного числа. Самі ж терміни «модуль» і «аргумент» були введені у XIX ст. швейцарським математиком Жаном Робертом Арганом (1768—1822) і французьким математиком Огюстеном Луї Коші (1789—1857).

Після виходу у 1831 р. роботи німецького математика Карла Фрідріха Гаусса (1777— 1855) «Теорія біквадратних лишків» у математиці остаточно закріпилось геометричне тлумачення комплексних чисел і дій над ними. Гаусс замінив назву «уявні числа» на «комплексні числа», а сам термін «комплексне число» був введений у 1881 році Карлом Вейєрштрасом (1815— 1897).

У 70-х роках XVIII ст. застосували поняття комплексного числа та комплексної змінної до розв'язування багатьох задач: побудови геометричних карт (Леонард Ейлер і Жозе́ф-Луї́ Лагранж (1736 – 1813)), задачі з гідродинаміки (Д' Аламбер та Ейлер) тощо.

Теорія функції комплексної змінної створила потужний математичний апарат для розв’язання багатьох проблем аеро- і гідродинаміки, теорії пружності, радіотехніки та ін. На сучасному етапі розвитку науки комплексний аналіз має широкий спектр застосувань в теоретичній фізиці, інформатиці, фрактальній геометрії та інших сферах наукового знання.

Відомо, що довільна алгебраїчна операція (наприклад, операція ділення на множині цілих чисел або операція видобування кореня парного степеня з від’ємного числа на множині дійсних чисел) виконується не на кожній числовій множині. Так, квадратне рівняння $x^2+1=0$ не має розв’язків на множині дійсних чисел R. Отже, виникає потреба в розширенні множини R до такої, щоб це рівняння мало розв’язок. Такою множиною є множина комплексних чисел C.

З іншого боку, множину C можна ввести з геометричних міркувань. Дійсні числа інтерпретуються точками числової прямої, причому кожному числу $x \in R$ відповідає єдина точка осі і навпаки. Якщо розглянути площину *XOY*, то точці *M*, що належить осі *OX*, відповідає впорядкована пара $(x;0)$, а в загальному випадку будь-якій точці площини *XOY* відповідає пара $(x;y)$, $x \in R, y \in R$.

Множина таких пар може розглядатися як розширення множини дійсних чисел, коли на такій множині ввести алгебраїчні дії так, щоб у частинному випадку (на осі OX) вони співпадали з операціями на множині дійсних чисел, а в загальному випадку дозволяли виконати операцію видобування кореня з будь-якого дійсного числа.

Розглянемо множину впорядкованих пар (x, y), кожен елемент множини позначимо як $z=(x, y)$ і визначимо поняття рівних елементів, суми елементів та їх добутку.

Означення. Елементи $z_1=(x_1; y_1)$ і $z_2=(x_2; y_2)$ називаються ***рівними***, якщо їх відповідні компоненти рівні: $x_1=x_2;\ \ y_1=y_2;\ \ x_1, x_2, y_1, y_2 \in R.$

Означення. ***Сумою*** елементів $z_1=(x_1; y_1)$ і $z_2=(x_2; y_2)$ називається елемент $z_1+z_2=(x; y)$, де $x=x_1+x_2,\ \ y=y_1+y_2;\ \ x_1, x_2, y_1, y_2 \in R.$

Означення. ***Добутком*** елементів $z_1=(x_1; y_1)$ і $z_2=(x_2; y_2)$ називається елемент $z=(x, y)$, такий, що $x=x_1x_2-y_1y_2$, $y=x_1y_2+x_2y_1$.

Розглянемо добуток $z_1=(0;1)$ і $z_2=(0;1)$, отримаємо елемент $z=(-1;0)$, тобто, $(0;1)\cdot(0;1)=-1$. Елемент $(0;1)$ побудованої множини є елементом, квадрат якого дорівнює -1, його позначають буквою i.

Отже, побудувана множина має підмножиною множину R і містить елемент, квадрат якого дорівнює -1. Вона називається ***множиною комплексних чисел*** і позначається буквою C, а її елементи z називаються ***комплексними числами***. З геометричної точки зору множині C відповідає ***комплексна площина,*** тобто множина впорядкованих пар $(x; y),\ x \in R,\ y \in R$.

Розглянемо добуток чисел $i=(0;1)$ і $y=(y;0)$, отримаємо $i \cdot y=(0; y)$. Сума чисел $x+yi$, де $x=(x;0)$, дає число $(x; y)$, тобто $x+yi=z$. Отже, будь-яке комплексне число z можна подати у вигляді $x+yi$. Таку форму запису комплексного числа називають ***алгебраїчною***. Дійсну частину x комплекного числа позначають $\operatorname{Re} z$, уявну частину y позначають як $\operatorname{Im} z$, тобто $z=\operatorname{Re} z+i \operatorname{Im} z$.

Як і в дійсній області, на множині C вводять поняття нескінченності та нескінченно віддаленої точки.

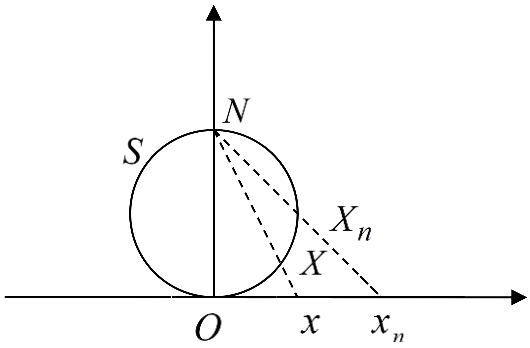


Рис. 1.

Розглянемо коло S, яке дотикається до осі Ox в точці O, діаметрально протилежну точку кола позначимо через N. Точку x осі з'єднаємо прямою з точкою N, а точку її перетину з колом позначимо через X. Отже, для $\forall x \in R \ \ \exists X \in S$. Очевидно, що чим далі x на осі віддалена від точки O, тим ближче її образ на колі до точки N. Якщо побудувати таку послідовність точок, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, то граничну точку називають ***нескінченно віддаленою точкою***, а точку N на колі можна вважати образом нескінченно віддаленої точки.

Аналогічно розглядають площину XOY і сферу S, яка дотикається до площини в точці O.

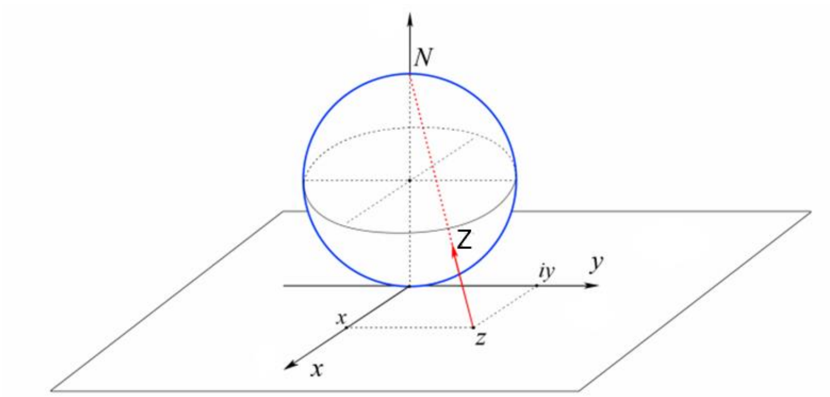


Рис. 2

Промені, які з'єднують точку z площини C з точкою N перетинають сферу в точці Z. Причому будь-якій точці $z \in C$ відповідає єдина точка $Z \in S$ і навпаки. Чим далі розташована точка $z \in C$ від початку координат, тим ближче її образ $Z \in S$ до точки N.

$$\rho_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\ ;\ \lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty;\ \rho_n - \text{довжина радіус вектора точки } z_n = (x_n; y_n).$$

Для повної відповідності введемо поняття ***нескінченно віддаленої точки*** як точки площини, образом якої на сфері S є точка N, і позначимо її «∞». Площина, доповнена елементом «∞», називається ***розширеною комплексною площиною*** і позначається $\overline{C}$, а сфера S називається ***сферою Рімана***. Побудована взаємно однозначна відповідність сфери S і розширеної площини $\overline{C}$ називається ***стереографічною проекцією***.

Алгебраїчні операції на множині комплексних чисел

Якщо $z_1 = x_1 + y_1 i$ та $z_2 = x_2 + y_2 i$, то:

1. $z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$;

2. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1x_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)i + y_1y_2 i^2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$;

3. $\overline{z} = (x - yi)$, де $\overline{z}$ – спряжене до числа z

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + xyi - xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2;$$

4. $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \dfrac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$.

Приклад. Нехай $z_1 = -2 + 5i$ і $z_2 = 4 - 3i$. Обчислити $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Розв'язання.

$z_1 + z_2 = (-2 + 4) + (5 - 3)i = 2 + 2i$,

$z_1 + z_2 = (-2 - 4) + (5 - (-3))i = -6 + 8i$,

$z_1 z_2 = (-2 + 5i)(4 - 3i) = -8 + 6i + 20i - 15i^2 = 7 + 26i$,

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-2 + 5i}{4 - 3i} = \dfrac{(-2 + 5i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \dfrac{-8 - 6i + 20i - 15}{16 + 9} = \dfrac{-23 + 14i}{25} = -\dfrac{23}{25} + i\dfrac{14}{25}$.

Комплексні числа в тригонометричній та показниковій формі

Будь-якому комплексному числу $z = x + iy$ геометрично відповідає точка $M(x;y), (x;y) \in R$. Її положення на площині можна визначити за допомогою полярних координат $(r;\varphi)$ (рис. 3), де радіус-вектор r є невід'ємною величиною, що визначається єдиним чином, а кут φ може набувати нескінченну кількість значень (якщо z відповідає деяке φ_0, то цій точці $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, k \in Z$).

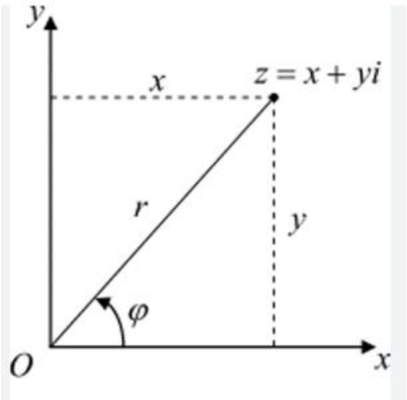


Рис. 3

Використовуючи зв'язок декартових і полярних координат для точки $M(x;y)$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

і алгебраїчний запис комплексного числа $z = x + iy$, отримаємо тригонометричну форму комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Якщо позначити комплексне число z, у якого $\operatorname{Re} z = \cos\varphi$, $\operatorname{Im} z = \sin\varphi$ через $e^{i\varphi}$, то отримаємо показникову форму комплексного числа $z = re^{i\varphi}$. Рівність $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ називається ***формулою Ейлера***.

Число r є довжиною радіус-вектора OM і називається ***модулем комплексного числа***, позначається $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Полярний кут φ точки $M(x;y)$ називається ***аргументом комплексного числа*** $z = x + iy$ і позначається як $\varphi = \arg z$ (під $\arg z$ розуміємо таке значення кута φ, яке задовольняє умову $-\pi < \varphi \le \pi$).

Знаходження аргументу при $x \neq 0$ зводимо до розв’язування тригонометричного рівняння $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, з якого

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \quad x > 0; \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, \quad x < 0, y \geq 0; \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, \quad x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \quad x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \quad x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Будь-який кут, який відрізняється від аргументу z на число, що кратне 2π, позначається $Arg\, z = \arg z + 2\pi k,\ k \in Z$, де $\arg z$ – це ***головне*** значення аргументу, $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Приклад. Знайти аргумент числа $z = -1 + 2i$.

Розв’язання. Розв’яжемо тригонометричне рівняння $tg\varphi = -2$ ($x < 0,\ y > 0$),

$$\varphi = \pi + arctg(-2),$$

$$\varphi = \pi - arctg2.$$

Приклад. Записати в тригонометричній та показниковій формах комплексне число $z = -1 - i$.

Розв’язання. Знайдемо модуль комплексного числа $z = -1 - i$: $r = \sqrt{2}$.

Розв’яжемо тригонометричне рівняння $tg\varphi = 1$ $(x < 0,\ y < 0)$: $\arg z = \varphi = \dfrac{\pi}{4} - \pi = -\dfrac{3\pi}{4}$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

$$z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}.$$

Зауваження. Іноді визначення аргументу комплексного числа значно полегшує геометричне зображення відповідної точки на комплексній площині.

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Нехай маємо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ та $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Множення комплексних чисел в тригонометричній формі, корінь з комплексного числа:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + r_1 r_2(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)i =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Аналогічно,

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = r_1 r_2 r_3(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)),\ \ldots,$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0,1,\ldots,n-1\ –$$

формули Муавра піднесення до степеня та видобування кореня.

Ділення комплексних чисел у тригонометричній формі:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right),$$

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_1}\right|, \quad Argz = Argz_1 - Argz_2.$$

Формулу для ділення комплексних чисел отримаємо із співвідношення $z = \frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$ і формули Муавра.

З геометричного змісту модуля та аргументу комплексного числа запишемо умови рівності $z_1 = z_2$ комплексних чисел: якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то повинні виконуватись умови $r_1 = r_2$ (тобто $|z_1| = |z_2|$) та $\varphi_1 - \varphi_2 = Argz_1 - Argz_2 = 2\pi k, k \in Z$.

Для пари спряжених комплексних чисел z та $\bar{z}$ мають місце рівності: $|z| = |\bar{z}|$, $\arg\bar{z} = -\arg z$.

Приклад. Записати в тригонометричній формі число $z = (1+i)^5(\sqrt{3} - i)^7$.

Розв'язання. Знаходимо модулі та аргументи комплексних чисел $z_1=\left(1+i\right)^5$ та $z_2=\left(\sqrt{3}-i\right)^7$.

$|z_1|=\sqrt{2}$, $\arg z_1=\dfrac{\pi}{4}$; $|z_2|=2$, $\arg z_2=-\dfrac{\pi}{6}$.

$\left|z_1^5\cdot z_2^7\right|=\left(\sqrt{2}\right)^5(2)^7=2^9\sqrt{2}$

$\arg z_1^5=\dfrac{5\pi}{4}$, $\arg z_2^7=-\dfrac{7\pi}{6}$; $\arg z_1^5+\arg z_2^7=\dfrac{\pi}{12}$.

$z=(1+i)^5(\sqrt{3}-i)^7=\sqrt{2}\cdot 2^9\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}+2\pi k\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}+2\pi k\right)\right), k\in Z$.

Приклад. Знайти корені рівняння $z^4-1+i=0,\ \operatorname{Re} z<0, \operatorname{Im} z>0$.

Розв'язання. Задача рівносильна знаходженню коренів рівняння

$$z=\sqrt[4]{1-i},\ \operatorname{Re} z<0, \operatorname{Im} z>0.$$

Маємо

$$r=|1-i|=\sqrt{2},$$

$$\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}.$$

Для знаходження шуканого розв'язку не потрібно виписувати всі значення кореня, а доцільно вибрати такі значення k $(k=0,1,2,3)$, при яких аргумент z задовольняє умову $\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi$. З множини всіх значень кореня $z=\sqrt[8]{2}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right)}$, $k=0,1,2,3$, очевидно, умову $\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi$ задовольняє значення при $k=2$: $z_2=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{15\pi}{16}}$.

Множини на комплексній площині

Означення. Множина точок z, віддалених від заданої точки z_0 на відстані менше, ніж деяке задане число ε, називається ***ε-околом*** z_0 і позначається як $O_\varepsilon(z_0)$ або $O(\varepsilon, z_0)$.

З геометричної точки зору множина $O_\varepsilon(z_0)=\{z:|z-z_0|<\varepsilon\}$ є кругом з центром у точці $(x_0;y_0)$ і радіусом ε.

Якщо множина точок z задовольняє нерівність $0<|z-z_0|<\varepsilon$, то це є виколотий окіл точки z_0, він позначається $O_\varepsilon(z_0)\backslash_{z_0}$.

Означення. Точка z_0 називається ***внутрішньою точкою*** множини M, якщо вона належить цій множині разом з деяким околом, тобто $\exists\varepsilon>0: O_\varepsilon(z_0)\subset M$.

Означення. Множина, що складається тільки з внутрішніх точок, називається ***відкритою***.

Означення. Точка називається ***межовою точкою*** множини M, якщо в будь-якому її околі є точки, які належать цій множині, і точки, які їй не належать:

$$\forall\varepsilon>0 \ \ \exists z_1, z_2: \ z_1\in O_\varepsilon(z_0), \ \ z_2\in O_\varepsilon(z_0) \quad \text{і} \quad z_1\in M, z_2\notin M.$$

Сукупність межових точок утворює ***межу*** множини.

Означення. Множина, що містить усі свої межові точки, називається ***замкненою*** і позначається $\overline{M}$.

Означення. Множина називається ***зв'язною***, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати неперервною кривою, всі точки якої належать цій множині.

Відкрита зв'язна множина називається ***областю***. Якщо до області приєднати межу, то область називається ***замкненою***.

Означення. Область називається ***однозв'язною***, якщо її межею є лише одна неперервна крива (можливо, замкнена) без самоперетинів (рис.4). В іншому випадку область є ***багатозв'язною*** (рис. 5).

Рис. 4

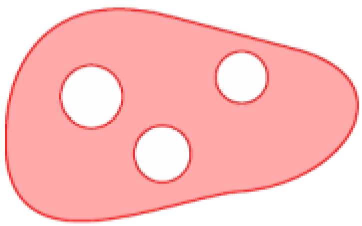


Рис. 5

Приклад. Зобразити множину всіх точок комплексної площини, які задовольняють умову:

а) $|1+z|<|1-z|$;

б) $\operatorname{Re}(z\cdot(1-i))<\sqrt{2}$;

в) $-\dfrac{\pi}{2}\le \arg(z+1-i)\le \dfrac{3\pi}{4}$.

Розв'язання.

а) Нехай $z=x+iy$, тоді: $|z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$, $|1-z|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$.

За умовою $\sqrt{(x+1)^2+y^2}<\sqrt{(x-1)^2+y^2}\Rightarrow x<0$, тобто нерівність $|1+z|<|1-z|$ геометрично визначає множину точок, які розташовані у півплощині $x<0$ (рис. 6).

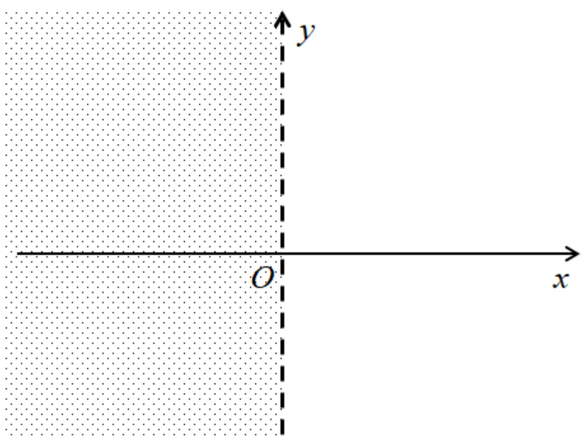


Рис. 6

б) Нехай $z = x + iy$, тоді:

$$z \cdot (1-i) = (x+iy)(1-i) = x - xi + yi + y = (x+y) + i(-x+y).$$

Маємо, що $\mathrm{Re}(z \cdot (1-i)) = x + y$, і за умовою задачі $x + y < \sqrt{2}$. Ця нерівність геометрично визначає множину точок, розташованих у півплощині, розташованій під прямою $x + y = \sqrt{2}$, без точок цієї прямої (рис. 7).

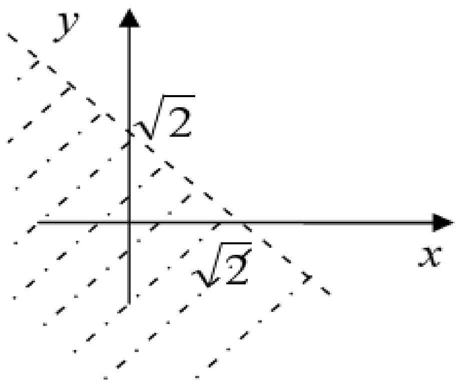


Рис. 7

в) Комплексне число $z + 1 - i = z - (-1 + i)$ зображується вектором, початок якого є точка $-1+i$, а кінцем – точка z. Кут між цим вектором та віссю Ox є $\arg(z+1-i)$ і він змінюється в межах від $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{3\pi}{4}$. Тобто, маємо кут між прямими, що виходять з точки $-1+i$ та утворюють з віссю Ox кути в $-\dfrac{\pi}{2}$ та $\dfrac{3\pi}{4}$ відповідно (рис. 8).

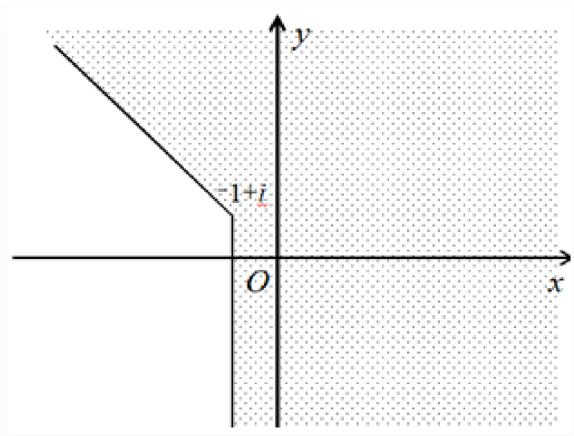


Рис. 8

Границя та неперервність функції комплексної змінної. Похідна

Нехай маємо послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$, $z_n \in C$ для $\forall n \in N$.

Означення. Комплексне число $c = a + bi$ називається ***границею послідовності*** $\{z_n\}$, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$ такий, що для $\forall n > n_0 \Rightarrow |z_n - c| < \varepsilon$.

З геометричної точки зору, нерівність $|z_n - c| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$ або $(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 < \varepsilon^2$ визначає відкритий круг з центром в точці $(a;b)$ і радіусом ε, позначається $\rho(z_n, c) < \varepsilon$.

Означення. Точка c називається ***граничною точкою*** послідовності $\{z_n\}$, якщо який би малий круг радіуса ε із центром в точці $c = a + bi$ ми не взяли, завжди можна знайти такий номер n_0 $(n_0 \in N)$, що всі точки z_n з номерами $n > n_0$ будуть лежати всередині даного круга.

Означення. Комплексна змінна z_n називається ***нескінченно великою***, якщо для будь-якого дійсного числа $M > 0$ $\exists n_0$, $n_0 \in N : \forall z_n$, $n > n_0 \Rightarrow |z_n| > M$.

З геометричної точки зору це означає, що всі елементи z_n з номерами $n > n_0$ розташовані зовні круга радіуса M з центром $(0;0)$.

Означення. Комплексна змінна z_n називається ***обмеженою***, якщо існує додатне дійсне число $M > 0 : \forall z_n$, $n \in N \Rightarrow |z_n| < M$.

Теорема. ***Нехай*** $z_n = x_n + y_n i$***,*** $n \in N$***, а*** $c = a + bi$***. Для того, щоб послідовність*** $z_n \to c$ ***необхідно і достатньо, щоб*** $x_n \to a$, $y_n \to b$ ***при*** $n \to \infty$***.***

Доведення. *Достатність*. Нехай маємо $x_n \to a$, $y_n \to b$ при $n \to \infty$. Із співвідношення $\rho(c, z_n) = \sqrt{(a - x_n)^2 + (b - y_n)^2}$ випливає, що $\rho(c, z_n) \to 0$ при $n \to \infty$, тобто $z_n \to c$.

Необхідність. Нехай $z_n \to c$. З означення граничної точки послідовності $\{z_n\}$ маємо, що $\rho(c, z_n) = \sqrt{(a - x_n)^2 + (b - y_n)^2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Очевидно, що $|x_n - a| \le \sqrt{(a - x_n)^2 + (b - y_n)^2}$ і $|y_n - b| \le \sqrt{(a - x_n)^2 + (b - y_n)^2}$, тому $x_n \to a,\, y_n \to b$. **Теорему доведено.**

Означення. Нехай змінна z змінюється в деякій області D комплексної площини. Якщо існує закон, за яким кожному значенню $z \in D$ ставиться у відповідність деяке комплексне число ω, то говорять, що в області D визначена ***функція*** $\omega = f(z)$.

Геометричною інтерпретацією функції дійсної змінної є її графік, для функції комплексної змінної закон відображення області зміни комплексної змінної z в точки ω комплексної площини значень функції графічно зобразити не можна.

Нехай $z = x + yi$, тоді $\omega = f(z)$ можна записати у вигляді $\omega = u + vi,\ u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ – дійсні функції двох дійсних змінних. Дійсна та уявна частини функції $\omega = f(z)$ мають свої позначення відповідно: $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z),\ v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Приклад. Записати дійсну та уявну частини функції:

1) $\omega = z^2,\ z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$,

$u(x, y) = x^2 - y^2,\ v(x, y) = 2xy$;

2) $\omega = \dfrac{1}{z}$,

$$\omega = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{(x - iy)(x + iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} i,$$

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},\ v(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Означення. Число A називається ***границею функції*** $f(z)$ в точці z_0, тобто $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, де $z_0 \in D$, якщо для будь-якого довільно малого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0 : |z - z_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon, \forall z \ne z_0$.

У частинному випадку, якщо $A = f(z_0)$, функція $f(z)$ називається ***неперервною*** в точці z_0.

Означення. Функція $\omega = f(z)$ називається ***неперервною в точці*** $z = z_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує додатне число $\delta(\varepsilon) > 0 : \left| f(z) - f(z_0) \right| < \varepsilon$ для всіх z, що задовольняють умову $\left| z - z_0 \right| < \delta(\varepsilon)$.

Геометрично це означає, що для всіх z, які належать відкритому кругу $\left| z - z_0 \right| < \delta$ з центром в точці z_0 досить малого радіуса δ, відповідні значення функції ω належать відкритому кругу $\left| \omega - \omega_0 \right| < \varepsilon$ з центром в точці $\omega_0 = f(z_0)$ як завгодно малого радіуса ε.

Означення. Функція $\omega = f(z)$ називається ***неперервною в точці*** z_0, якщо для будь-якого z з досить малого околу точки z_0 відповідні значення функції належать довільно малому околу точки $\omega_0 = f(z_0)$.

Якщо функція неперервна в кожній точці області, то вона є неперервною скрізь у цій області.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $\omega = |z|$.

Розв'язання. Функція $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ є визначеною для всіх точок $z \in C$. $\lim\limits_{z \to z_0} |z| = \omega(z_0) = |z_0|$, отже, вона неперервна в кожній точці області.

Означення. Функція $\omega = f(z)$ ***неперервна в точці*** z_0, якщо вона визначена в цій точці і деякому її околі і виконується умова $\lim\limits_{z \to z_0} \omega(z) = \omega(z_0)$.

Теорема (необхідна і достатня умова неперервності функції). *Для того, щоб функція* $\omega = f(z)$ *була неперервною в точці* z_0 *необхідно і достатньо, щоб в точці* $(x_0; y_0)$ *були неперервними функції*

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z),$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)\ .$$

Отже, неперевність фунеції комплексної змінної $\omega = f(z)$ рівносильна неперервності двох дійсних функцій двох дійсних змінних $u(x, y)$ та $v(x, y)$ **.**

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{2z - 1}$.

Розв’язання. Очевидно, що дана функція є неперервною в усіх точках, крім точки $z=\dfrac{1}{2}$.

Приклад. Дослідити функцію $\omega = f(z) = \arg z,\quad z \neq 0,\quad -\pi < \arg z \le \pi$ на неперервність.

Розв’язання. Дана функція визначена скрізь, крім точки $z=0$, оскільки аргумент числа 0 невизначений. Оскільки значеннями функції є дійсні числа, то її дійсна та уявна частини відповідно дорівнюють $u=\arg z,\ v=0$.

Ця функція є неперервною скрізь, крім точок, які належать від’ємній частині дійсної осі. В цих точках функція має розрив. Дійсно, нехай z_0 – деяка точка, де $x<0$. Тоді $f(z_0)=\arg z_0=\pi$.

Нехай $z \to z_0$ у додатному напрямі $\left(x \to x_0, y>0, y\to 0\right)$, тоді $\arg z \to \pi$.

Нехай $z \to z_0$ у від’ємному напрямі $\left(x \to x_0, y<0, y\to 0\right)$, тоді $\arg z \to -\pi$.

Бачимо, що різні шляхи прямування z до z_0 дають різні значення границі функції $\omega = f(z)$. Це суперечить теоремі про єдиність границі, отже, функція $\omega = f(z)$ не має границі в точці z_0. Очевидно, що функція $\omega = f(z) = \arg z,\quad z \neq 0,\quad -\pi < \arg z \le \pi$ не є неперервною.

Розглянемо поняття похідної для функції комплексної змінної. Зазначимо, що воно вводиться аналогічно поняттю похідної в дійсній області.

Означення. Нехай функція $\omega = f(z)$ визначена в точці z_0 і деякому її околі. Скінченна границя відношення приросту функції в точці z до спонукавшого його приросту незалежної змінної за умови, що приріст незалежної змінної прямує до 0, називається ***похідною функції*** $\omega = f(z)$ в точці z:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \qquad (1)$$

Зауваження. В цьому означенні є суттєвою умова існування границі (1) при будь-якому прямуванні Δz до 0.

Оскільки означення похідної функції комплексної змінної аналогічно означенню похідної функції дійсної змінної і всі твердження теорії границь є вірними, то є справедливими правила диференціювання суми, добутку, частки, оберненої і складеної функції.

Розглянемо функцію $f(z)=\bar{z}$ і покажемо, що ця функція не має похідної в жодній точці комплексної площини.

Надамо z приросту $\Delta z=\Delta x+\Delta yi$. Відповідний приріст функції $\Delta\omega=(x+\Delta x)-(y+\Delta y)i-x+yi=\Delta x-\Delta yi$.

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\frac{\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}$$

1) Нехай $\Delta z\to 0$, набуваючи дійсних значень $(\Delta x\to 0,\ y=0)$:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

2) Нехай $\Delta z\to 0$, набуваючи уявних значень $(\Delta x=0,\ y\to 0)$:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-i\Delta y}{i\Delta y}=-1.$$

Отже, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ не існує, це означає, що функція $f(z)=\bar{z}$ не має похідної в жодній точці z.

Для існування похідної $f'(z)$ не досить існування похідних її дійсної та уявної частин, потрібно, щоб виконувались певні додаткові умови.

Теорема. ***Нехай функція*** $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ***визначена у відкритій області*** D***. Для того, щоб в точці*** $z=(x,y)$ ***існувала похідна функції*** $f(z)$ ***необхідно і достатньо, щоб функції*** $u(x,y)$ ***і*** $v(x,y)$ ***були диференційованими в цій точці як дійсні функції двох дійсних змінних, і щоб в цій точці виконувались умови:***

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}\tag{2}$$

Ці умови називають умовами Коші-Рімана або умовами Ейлера-Даламбера (КРЕД або CR).

Доведення. *Достатність.* Нехай виконуються умови (2) для диференційовних функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$. Доведемо, що існує $f'(z)$.

За означенням диференційовної в точці $M(x,y)$, маємо:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$$

де $\alpha=\alpha(x,y,\Delta x,\Delta y)$ і $\beta=\beta(x,y,\Delta x,\Delta y)$ є нескінченно малими в точці M,

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\beta_1\Delta y,$$

де $\alpha_1(x,y,\Delta x,\Delta y),\ \beta_1(x,y,\Delta x,\Delta y)$ є нескінченно малими в точці M.

$$\Delta f(z)=\Delta u+i\Delta v,$$

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\beta_1\Delta y\right)}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+\Delta yi)+\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta xi-\Delta y)+\Delta x(\alpha+\alpha_1 i)+\Delta y(\beta+\beta_1 i)}{\Delta x+\Delta yi}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i+\frac{\Delta x}{\Delta x+\Delta yi}(\alpha+\alpha_1 i)+\frac{\Delta y}{\Delta x+\Delta yi}(\beta+\beta i).$$

Очевидно, що перші два доданки не залежать від Δz і є сталими. Оцінимо вирази з третього і четвертого доданків:

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta x+\Delta yi}\right|=\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le 1,\ \left|\frac{\Delta y}{\Delta x+\Delta yi}\right|=\frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le 1.$$

Отже, коли $\Delta z\to 0$ довільним шляхом, то при цьому обов'язково $\Delta x\to 0$ та $\Delta y\to 0$, тобто третій і четвертий доданки прямують до 0.

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i \quad \text{або}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i,\ f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}i.$$

Необхідність. Нехай функція $f(z)$ в деякій точці z має скінченну похідну

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+\Delta vi}{\Delta x+\Delta yi}=f'(z). \qquad (3)$$

Оскільки $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ може прямувати до нуля довільним чином, то можна вважати, що $\Delta y=0$ і $\Delta x\to 0$. Геометрично це означає, що точка $z+\Delta z$ наближається до точки z по прямій лінії, паралельній дійсній осі. При цьому з умови (3) отримаємо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=f'(z)$ або $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=f'(z)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=f'(z). \qquad (4)$$

Аналогічно, для $\Delta x=0$ і $\Delta y\to 0$ маємо, що $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}-i\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}=f'(z)$ або

$$\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=f'(z). \qquad (5)$$

Праві частини співвідношень (4) і (5) рівні між собою, тому є рівними й їх ліві частини: $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ або

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теорему доведено.

Означення. Функція, яка має похідну в точці, називається ***диференційовною*** в цій точці.

Приріст диференційовної в точці z_0 функції можна записати у вигляді

$$\Delta f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\alpha(z_0,\Delta z)\Delta z,$$

де $\alpha(z_0,\Delta z)$ – нескінченно мала, якщо $\Delta z\to 0$.

Геометричний зміст модуля та аргументу похідної

Похідна $f'(z)$, яка є функцією комплексної змінної, визначає відображення деякої області D диференційованості функції $f(z)$ на область G. Кожній точці $z_0\in D$ відповідає комплексне число $f'(z_0)$, $\arg f'(z_0)$ $(f'(z_0)\neq 0)$.

Геометрично величина $|f'(z_0)|$ визначає довжину радіус-вектора точки $f'(z_0)$, а $\arg f'(z_0)$ – кут нахилу цього радіус-вектора до додатного напряму осі Ox.

Нагадаємо, що для функції дійсної змінної $f'(z_0)$ визначає кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_0, f(x_0))$.

Позначимо $|f'(z_0)| = k,\ \arg f'(z_0) = \alpha$ і з'ясуємо геометричний зміст та властивості даних величин.

За означенням $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega(z_0)}{\Delta z}$, причому ця границя не залежить від напрямку і способу прямування Δz до 0, а отже, можна взяти довільну гладку криву v, що проходить через точку z_0 і на ній вибрати довільну точку z з околу точки z_0. Образ кривої v при відображенні ω позначимо Γ. Образи точок z та z_0 позначимо через ω та ω_0 відповідно.

З неперервності відображення слідує, що $\omega \in \Gamma$, $\omega_0 \in \Gamma$; $\Delta z = z - z_0$, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ – це вектори, довжини яких дорівнюють $|\Delta z|$ і $|\Delta\omega|$ відповідно.

За означенням похідної і властивістю границі маємо, що $\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = f'(z_0) + \alpha$ і

$$\left|\frac{\Delta\omega}{\Delta z}\right| = |f'(z_0) + \alpha| \le |f'(z_0)| + |\alpha|$$

або

$$\left|\left|\frac{\Delta\omega}{\Delta z}\right| - |f'(z_0)|\right| \le |\alpha| < \varepsilon .$$

Остання нерівність означає, що $|f'(z_0)| = \lim\limits_{\Delta z \to 0}\left|\frac{\Delta\omega(z_0)}{\Delta z}\right|$.

Запишемо це співвідношення як $|f'(z_0)| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta l_\Gamma}{\Delta l_v} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{dl_\Gamma}{dl_v}$, де $\Delta l_\Gamma, \Delta l_v$ – довжини відповідних двох кривих Γ та v, які при $|\Delta z| \to 0$ еквівалентні відповідним хордам $|\Delta\omega|$ та $|\Delta z|$; dl_Γ, dl_v – елементи довжин дуг Γ та v в точках ω_0 та z_0

відповідно. Співвідношення $\frac{dl_\Gamma}{dl_v}$ означає зміну масштабу (розтяг або стиск) в точці z_0 при відображенні $\omega = f(z)$. У цьому і полягає геометричний зміст модуля похідної.

Величина $|f'(z_0)|$ не залежить від вигляду кривої v, а отже, дане твердження є вірним для будь-якої гладкої кривої, що проходить через z_0. Величина $k = |f'(z_0)|$ є сталою для даної функції $f(z)$ і даної точки z_0.

Отже, модуль $|f'(z_0)|$ диференційовної в околі точки z_0 функції $f(z)$ є ***коефіцієнтом лінійного розтягу кривої*** в цій точці при відображенні $\omega = f(z)$, причому маємо розтяг при $k > 1$ і стиск, коли $k < 1$.

Для аргументу похідної виконується рівність $\arg f'(z_0) = \theta - \varphi$, де θ і φ – кути між дійсними осями площин (ω) та (z) і дотичними, проведеними до кривих Γ в точці ω_0 і v в точці z_0 відповідно. Якщо сумістити точки ω_0 і z_0, то утвориться кут $\alpha = \arg f'(z_0) = \theta - \varphi$, що є кутом повороту кривої в точці z_0 при відображенні $\omega = f(z)$. Це і є ***геометричний зміст аргументу похідної*** функції.

Ця властивість виконується і для будь-якої іншої пари гладких кривих Γ_1 і V_1, які проходять через точки z_0 та ω_0, тобто $\alpha = \theta_1 - \varphi_1$.

З рівності $\theta - \varphi = \theta_1 - \varphi_1$ маємо $\theta_1 - \theta = \varphi_1 - \varphi$. Це означає, що кут β між кривими Γ_1 і Γ $(\beta = \theta_1 - \theta)$ дорівнює куту між кривими V_1 і V $(\beta = \varphi_1 - \varphi)$. Отже, при відображенні $\omega = f(z)$ зберігаються кути між кривими. Такі ***відображення*** називаються ***конформними.***

Приклад. Знайти кут повороту та коефіцієнт розтягу при відображенні $\omega = \frac{z+1}{z+i}$ в точці $z = 2i$.

Розв'язання. $\omega'(z) = \frac{z+i-z-1}{(z+i)^2} = \frac{i-1}{(z+i)^2}$, $k = \left|\frac{-1+i}{-9}\right| = \frac{\sqrt{2}}{9}, k < 1.$

Отже, функція $\omega = \frac{z+1}{z+i}$ задає відображення стиску.

$$\arg\omega'(2i)=\frac{-1+i}{-9}=\frac{1-i}{9},\ x=\frac{1}{9},\ y=-\frac{1}{9},$$

$$\arg\omega'(2i)=arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

Приклад. З'ясувати, яка частина площини при відображенні $\omega=z^2$ розтягується, а яка стискається.

Розв'язання. $\omega'(z)=2z,\ |\omega'(z_0)|=2|z_0|,\quad k=2|z_0|.$

Множина точок z_0, для яких $k>1$, тобто $2|z_0|>1, |z_0|>\frac{1}{2}$, утворює частину площини, яка розтягується. Це є зовнішня частина відкритого круга радіуса $\frac{1}{2}$ з центром $(0{,}0)$. Внутрішня частина цього круга $|z_0|<\frac{1}{2}$ є частиною площини, яка стискається.

Гармонічні функції

Означення. Функція $\omega=f(z)$, визначена в деякій області $G\subset\mathbb{C}$, називається ***аналітичною*** в G (або ***голоморфною,*** або ***регулярною),*** якщо вона в кожній точці цієї області є диференційовною, тобто виконуються умови Коші-Рімана або Ейлера-Даламбера (CR)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

Диференційовність функції рівносильна тому, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що

$$\left|\frac{\Delta\omega}{\Delta z}-f'(z)\right|<\ \varepsilon,$$

за умови $|\Delta z|<\delta$. Звідси слідує ***неперервність диференційовної в точці*** $\boldsymbol{z}$ ***функції*** $\boldsymbol{f(z)}$ **.**

Означення аналітичної функції можна переформулювати так: однозначна функція $f(z)$ називається ***аналітичною*** в деякій області, якщо в кожній її точці вона має неперервну похідну.

Зауваження. Аналітичність функція $f(z)$ в точці z означає її аналітичність у деякому околі цієї точки.

Приклад. Дослідити на аналітичність функцію

$$f\ (z) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Розв'язання. Маємо $f\ (z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$, її дійсна й уявна частини:

$$u(x, y) = e^x \cos y,$$

$$v\ (x, y) = e^x \sin y.$$

Знайдемо частинні похідні функцій $u(x, y)$ та $v\ (x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y\,;\ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y\,;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\,e^x \sin y\,;\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y.$$

Очевидно, що умови Коші-Рімана виконуються для всіх $x \in R,\ \ y \in R$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\,e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отже, функція $f\ (z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ аналітична на всій комплексній площині.

Означення. Будь-яка дійсна функція $u(x, y)$, яка має неперервні частині похідні до другого порядку включно і задовольняє рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, називається ***гармонічною***.

Розглянемо зв'язок між аналітичними і гармонічними функціями.

Нехай $\omega(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналітична функція в області D і $u(x, y), v(x, y)$ – дві дійсні функції двох дійсних змінних, які мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

Покажемо, що функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ є гармонічними. Дійсно, оскільки $u(x,y)$ та $v(x,y)$ аналітичні функції в області D, то вони задовольняють умови Коші-Рімана (CR):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{7}$$

Продиференціюємо (6) по змінній x, а (7) – по змінній y і почленно додамо отримані вирази:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Отже, функція $u(x,y)$ задовольняє рівняння Лапласа, тобто є гармонічною.

Аналогічно, продиференціюємо (6) по змінній y, а (7) по змінній x і віднімемо від першого виразу другий, отримаємо

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

тобто $v(x,y)$ є гармонічною функцією.

Дійсна і уявна частини аналітичної в області D функції $\omega(x,y)$ є гармонічними функціями в цій області і вони пов'язані між собою умовами CR.

Дві гармонічні функції, які задовольняють умови Коші-Рімана-Ейлера-Даламбера, називаються парою ***спряжених гармонічних функцій***.

Отже, дослідження аналітичної функції комплексної змінної зводиться до вивчення пари спряжених гармонічних функцій.

Покажемо, що коли відома одна з двох спряжених гармонічних функцій, то можна з точністю до сталої знайти іншу, тобто поновити аналітичну функцію $f(z)$ за відомою її дійсною частиною $u(x,y)$ або уявною $v(x,y)$.

Нехай відома гармонічна функція $u(x, y)$, тобто вона задовольняє рівняння Лапласа ($-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$). Знайдемо спряжену до неї гармонічну функцію $v(x, y)$.

Частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}$ отримаємо безпосередньо диференціюванням по змінним x та y, а $\frac{\partial v}{\partial x}$ і $\frac{\partial v}{\partial y}$ знайдемо із співвідношень (6) і (7) та переконаємось, що функція $v(x, y)$ є спряженою гармонічною до $u(x, y)$.

Повний диференціал функції $v(x, y)$ запишемо у вигляді:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy .$$

Функцію $v(x, y)$ знайдемо за допомогою криволінійного інтеграла від точки (x_0, y_0) до точки (x, y):

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy .$$

Проте, можна застосувати інший метод. З рівності $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ знаходимо, що

$$v(x, y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y} dx + \varphi(y), \qquad (8)$$

де інтегрування відбулося по змінній x. Змінна y в цьому випадку є параметром (функція залежить від нього), який входить до правої частини у вигляді деякої функції $\varphi(y)$. Цю функцію знайдемо з іншого рівняння умов CR: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$.

Продиференціюємо вираз (8) по змінній y, отримаємо:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int \frac{\partial u}{\partial y} dx\right) + \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \frac{\partial u}{\partial y} dx\right).$$

Функцію $\varphi(y)$ знайдемо інтегруванням по змінній y останнього співідношення і підставимо у (8).

Тоді шукану аналітичну функцію $\omega(z)$ (або $f\ (z)$) запишемо у вигляді $f\ (z) = u(x, y) + iv(x, y)$ і перейдемо від змінних x, y до змінної z $(z = x + iy)$.

Приклад. Знайти аналітичну функцію $f\ (z)$ за відомою дійсною частиною $u(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2 - 2xy\right)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції *u(x,y)* по змінній x та по змінній y: $\frac{\partial u}{\partial x} = x - y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -y - x$.

З рівностей (6) та (7) отримаємо, що $\frac{\partial v}{\partial y} = x - y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = y + x$.

Функція $v(x, y)$ є гармонічною, оскільки $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -1$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 1$ і вона задовольняє рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Повний диференціал шуканої функції $v(x, y)$ має вигляд

$$dv(x, y) = (x + y)dx + (x - y)dy,$$

з якого

$$v(x, y) = \int (x + y)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y).$$

Продиференціюємо отримане співвідношення по змінній y:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x + \varphi'(y).$$

За умовою $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, прирівняємо його до $\frac{\partial u}{\partial x} = x - y$ і знайдемо $\varphi'(y)$:

$$x + \varphi'(y) = x - y, \quad \varphi'(y) = -y.$$

Проінтегруємо останній вираз по змінній y, отримаємо:

$$\varphi(y) = \int \varphi'(y)dy = \int -ydy = -\frac{y^2}{2} + C.$$

Отже, $v(x, y) = \frac{x^2}{2} + yx - \frac{y^2}{2} + C$ і

$$f\,(z) = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2 - 2xy) + i\left(\tfrac{x^2}{2} - xy - \tfrac{y^2}{2} + C\right).$$

Перейдемо від змінних x, y до змінної z:

$$f\,(z) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 - 2xy) + i\left(\frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} + C\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\big((x^2 - 2xyi - y^2) + i(x^2 + 2xyi - y^2)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{z}^2 + z^2 i).$$

Для відновлення аналітичної функції $f\,(z)$ за відомою її дійсною або уявною частиною застосовують такий ***алгоритм****:*

1. Знайти частинні похідні до другого порядку включно відомої з умови дійсної $u(x, y)$ (або уявної $v(x, y)$) частини шуканої аналітичної функції $f\,(z)$.
2. Перевірити, чи є ця функція $u(x, y)$ (або $v(x, y)$) гармонічною, тобто виконання умови Лапласа.
3. За умовами CR і виразу для повного диференціалу $dv(x, y)$ $(du(x, y))$ знайти спряжену до $u(x, y)$ (або $v(x, y)$) гармонічну функцію.
4. Записати функцію $f\,(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ і перейти від змінних x та y до змінної z.
5. Якщо відома додаткова умова, тобто значення функції f (z) в деякій точці z з області аналітичності функції, то її використовують для знаходження сталої C.

Означення. Функція, аналітична в околі деякої точки називається ***аналітичною в*** цій ***точці***.

Зазначимо, що в теорії функції комплексної змінної зазвичай розглядають диференційовні функції, які мають похідні не в окремих точках, а на множинах (в областях).

Означення. Функція, диференційована в кожній точці області, називається ***аналітичною в*** цій ***області***.

Означення. Точки, в яких порушується аналітичність функції, називаються її ***особливими точками***.

Справедлива

Теорема. ***Якщо функція*** $f(z)$ ***неперервна в деякій області*** G ***і в кожній точці цієї області виконуються умови CR, то*** $f(z)$ ***є аналітичною в області*** G (без доведення)**.**

Для дослідження функції на аналітичність застосовують ***алгоритм***:

1. Виділити дійсну та уявну частини функції:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} z, \quad v(x, y) = \operatorname{Im} z.$$

2. Знайти частинні похідні функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$.

3. Встановити множину точок (область), в яких $f(z)$ є неперервною і виконуються умови CR.

Приклад. Дослідити на аналітичність функцію $\omega = |z|^2$.

Розв'язання. Виділимо дійсну та уявну частини заданої функції $\omega = |z|^2 = x^2 + y^2$: $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$.

Знайдемо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Очевидно, що умови CR виконуються тільки в точці $(0,0)$, отже, функція не є аналітичною, оскільки вона диференційована тільки в одній точці.

Приклад. Дослідити на аналітичність функцію $f(x) = c$, де $c = c_1 + c_2 i$, а c_1, c_2 – довільні сталі.

Розв'язання. Маємо, що $u(x, y) = c_1, v(x, y) = c_2$.

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, то умови CR виконуються для довільної сталої c, а отже, $f(x) = c$ є аналітичною функцією на всій комплексній площині.

Історична довідка

Основи загальної теорії аналітичних функцій були закладені в роботах трьох видатних математиків XIX століття — Коші (1789—1857), Б. Рімана (1826—1866) і Вейєрштраса (1815—1897). Кожний з них по-своєму підійшов до побудови теорії аналітичних функцій.

■ **За Коші** функцію $f(z)$ називають аналітичною в області D, якщо вона має в цій області неперервну похідну $f'(z)$.

■ **За Ріманом** функцію $f(z)$ називають аналітичною в області D, якщо дійсна й уявна частини цієї функції мають в області D неперервні частинні похідні, що задовольняють в D умови CR.

■ **За Вейєрштрассом** функцію $f(z)$ називають аналітичною в області D, якщо вона регулярна в кожній точці цієї області, тобто для довільного $z_0 \in D$ можна вказати такий окіл цієї точки, в якому функцію $f(z)$ можна розвинути у степеневий ряд.

Елементарні функції

Історична довідка

Теорію елементарних функцій e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексної змінної побудував Ейлер у 40-х роках XVIII століття і системно обґрунтував її в своїй відомій праці «Введення в аналіз нескінченно малих» (1748). У наступному році вченим було опубліковано теорію логарифмів комплексної змінної.

Однозначна функція є аналітичною в області D, якщо в кожній точці цієї області вона має скінченну похідну. Поряд з терміном «аналітична» також вживають термін «голоморфна».

Означення. Многочлен $P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n$, де $n = 0,1,2,...$, $c_n \in C$, називається ***цілою раціональною функцією***.

Очевидно, що дана функція є визначеною і неперервною на всій комплексній площині.

Дробово-раціональною функцією називається функція, яка має вигляд

$$f(z)=\frac{c_0+c_1z+c_2z^2+...+c_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+...+b_mz^m}\text{, де } n,m=0,1,2,...;\ c_k,b_i\in C,\ k=0\div n,\ i=0\div m.$$

Ця функція визначена на всій комплексній площині, крім точок, в яких знаменник обертається на 0, і є неперервною на всій області визначення.

Означення. Сума степеневого ряду

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+...+\frac{z^n}{n!}+...$$

називається ***показниковою функцією*** комплексної змінної z і позначається $\exp z$ («експонента»):

$$\exp z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}. \qquad (9)$$

Для функції дійсної змінної було показано, що функція $y=e^x$ визначена і розкладається на всій дійсній осі в степеневий ряд (ряд Маклорена): $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Отже, для всіх $x\in R$ маємо $\exp z=e^x$.

Властивості показникової функції

Властивості показникової функції $y=e^x$ узагальнюються на комплексну область.

1) Для $\forall z_1,z_2\in C:\exp z_1\cdot\exp z_2=\exp(z_1+z_2)$. (10)

$\triangleright$ Дійсно, $\exp z_1\cdot\exp z_2=\left(1+\frac{z_1}{1!}+\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1^3}{3!}+...\right)\left(1+\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_2^3}{3!}+...\right)=$

$$=1+(z_1+z_2)+\frac{(z_1+z_2)^2}{2!}+\frac{(z_1+z_3)^3}{3!}+...=\exp(z_1+z_2).\triangleleft$$

2) $\exp(-z)=\frac{1}{\exp z}$. (11)

$\triangleright$ Якщо покласти в (10) $z_2 = -z_1$, отримаємо:

$\exp z_1 \cdot \exp(-z_1) = \exp(z_1 + (-z_1)) = \exp 0 = e^0 = 1$, або $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp z}$. $\triangleleft$

3) $\exp z_1 : \exp z_2 = \exp(z_1 - z_2)$. (12)

$\triangleright$ $\exp z_1 \cdot \dfrac{1}{\exp z_2} = \exp z_1 \cdot \exp(-z_2) = \exp(z_1 - z_2)$. $\triangleleft$

4) Показникова функція є ***регулярною*** на всій комплексній площині, тобто вона має похідну в усіх точках.

Нехай $z = x + iy$, тоді

$$\exp z = \exp(x + iy) = \exp x \cdot \exp(iy) = e^x \exp iy, \tag{13}$$

$$\exp iy = \cos y + i \sin y, \tag{14}$$

де $\cos y$ та $\sin y$ – дійсні тригонометричні функції дійсної змінної y.

Підставимо вираз (14) у (13): $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$,

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Очевидно, що умови CR виконуються:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y.$$

Отже, функція $\exp z$ є регулярною на всій комплексній площині.

Похідна показникової функції в комплексній області:

$$(\exp z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = \exp z,$$

$$(\exp z)' = \exp z. \tag{15}$$

5) Модуль показникової функції $|\exp z| = \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} = e^x \neq 0$, отже,

$$|\exp z| \neq 0 \text{ для } \forall z \in C.$$

Якщо $z = x + iy \to \infty$ так, що $x \to \infty$, то $|\exp z| \to +\infty$.

Якщо $z = x + iy \to \infty$ так, що $x \to -\infty$, то $|\exp z| = e^x \to 0$.

6) Показникова функція є періодичною, її періодом є чисто уявне число $2\pi i$.

Дійсно, $\exp(z+2\pi i)=\exp z\cdot\exp 2\pi i=\exp z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=\exp z$,

$$\exp 2\pi i=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1,$$

$$\exp 2\pi i=1.$$

Тригонометричні функції

Означення. Сума степеневого ряду

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \qquad (16)$$

називається ***синусом*** комплексної змінної z.

Означення. Сума степеневого ряду

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{2n}z^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad (17)$$

називається ***косинусом*** комплексної змінної z.

Оскільки степеневі ряди (16) і (17) є абсолютно збіжними на всій комплексній площині, то функції $\sin z$ і $\cos z$ є визначеними на всій комплексній площині

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Зауважимо, що для дійсної змінної, функції $\sin x$ і $\cos x$ розкладаються на всій числовій осі у відповідні степеневі ряди:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Функції $\exp(iz)$, $\sin z$ та $\cos z$ пов’язані між собою ***формулами Ейлера***:

$$\begin{aligned}\exp(iz)&=\cos z+i\sin z,\\ \exp(-iz)&=\cos z-i\sin z;\end{aligned} \qquad (18)$$

$$\cos z = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2},$$
$$\sin z = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}. \qquad (19)$$

Властивості тригонометричних функцій

1) Функції $\sin z$ та $\cos z$ є ***регулярними*** на всій комплексній площині.

$$(\cos z)' = \frac{(\exp(iz)+\exp(-iz))'}{2} = \frac{i\exp(iz)-\exp(-iz)}{2} =$$
$$= \frac{(\exp(iz)-\exp(-iz))i^2}{2i} = -\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i} = -\sin z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad \forall z \in C.$$

$$(\sin z)' = \frac{(\exp(iz)-\exp(-iz))'}{2i} = \frac{i\exp(iz)+\exp(-iz)}{2i} =$$
$$= \frac{(\exp(iz)+\exp(-iz))i^2}{2i^2} = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2} = \cos z.$$

$$(\sin z)' = \cos z, \ \forall z \in C.$$

2) Оскільки $\sin z$ та $\cos z$ співпадають при дійсному значенні $z = x$ з $\sin x$ та $\cos x$, то $\sin 2\pi = 0, \ \cos 2\pi = 1.$

3) Функції $\sin z$ та $\cos z$ є ***періодичними*** функціями з основним періодом 2π . Дійсно,

$$\sin(z+2\pi) = \sin z \cos 2\pi + \sin 2\pi \cos z = \sin z;$$

$$\cos(z+2\pi) = \cos z \cos 2\pi - \sin 2\pi \sin z = \cos z.$$

Зауваження. Для $\sin z$ та $\cos z$ зберігаються всі основні формули тригонометрії, зокрема, і основна тригонометрична тотожність

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

4) Функція $\sin z$ дорівнює нулю тільки при дійсних значеннях $z = k\pi, \ k \in Z$, а $\cos z$ – при дійсних значеннях $z = \frac{2k+1}{2}\pi, \ k \in Z$.

5) Функції $\sin z$ та $\cos z$ є необмеженими за модулем, вони можуть досягати як завгодно великих за модулем значень.

Дійсно, $\sin z = \sin(x + yi) = \sin x \cos yi + \sin yi \cos x$. За формулами Ейлера:

$$\cos iy = \frac{\exp(-y) + \exp y}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = ch\, y, \qquad (20)$$

$$\sin iy = \frac{\exp(-y) - \exp y}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} i = i\, sh\, y. \qquad (21)$$

На практиці зручним є використання зв'язку між тригонометричними та гіперболічними функціями комплексної змінної. За означенням маємо:

$$ch\, z = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2}, \qquad sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},$$

$$th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}, \qquad cth\; z = \frac{ch\, z}{sh\, z} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}.$$

Легко перевірити, що

$$\cos iz = ch\, z,$$

$$\sin iz = i\, shz,$$

$$tg\, iz = i\, thz,$$

$$ctg\, iz = -i\, cthz,$$

$$shiz = i \sin z,$$

$$chiz = \cos z,$$

$$th\, iz = i\, tg\, z,$$

$$cth\, iz = -i\, ctgz$$

$$ch^2 z - sh^2 z = 1.$$

Враховуючи, що $\sin z = \sin(x + yi) = \sin x \cos yi + \sin yi \cos x$ та (20), (21) запишемо $\sin z$ у вигляді $\sin z = \sin x chy + i \cos x shy$, де дійсні та уявна частини відповідно дорівнюють

$$u(x, y) = \sin x\, ch\, y, \qquad v(x, y) = \cos x\, sh\, y.$$

Оцінимо $\sin z$ за модулем:

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x\, ch^2 + \cos^2 x\, sh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x\left(1 + sh^2 y\right) + \cos^2 x\, sh^2 y} = \\ &= \sqrt{\sin^2 x + sh^2 y\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)} = \sqrt{\sin^2 x + sh^2 y}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Аналогічно, для модуля $\cos z$ маємо: $|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + sh^2 y}$.

При $y \to \infty$ за формулою (21) $\operatorname{sh}^2 y \to \infty$, тому $|\sin z|$ та $|\cos z|$ є необмеженими і можуть досягати як завгодно великих значень.

Знайдемо $\sin^2 i + \cos^2 i$:

$$\sin i = \frac{e^{-1} - e}{2i}, \quad \sin^2 i = \left(\frac{1 - e^2}{2ei}\right)^2,$$

$$\cos i = \frac{e^{-1} + e}{2}, \quad \cos^2 i = \left(\frac{1 + e^2}{2e}\right)^2,$$

$$\sin^2 i + \cos^2 i = -\frac{(1 - e^2)^2}{4e^2} + \frac{(1 + e^2)^2}{4e^2} = \frac{4e^2}{4e^2} = 1.$$

Отже, $\sin^2 i + \cos^2 i = 1$, але $|\sin i| = \dfrac{e^2 - 1}{2e} > 1$, $|\cos i| = \dfrac{e^2 + 1}{2e} > 1$.

Приклад. Обчислити $ch\left(2 + \dfrac{\pi i}{2}\right)$.

Розв'язання. Маємо гіперболічний косинус для $z = 2 + \dfrac{\pi i}{2}$, значення якого обчислимо за формулою $ch\, z = \dfrac{e^{-z} + e^{z}}{2}$.

$$ch\left(2 + \frac{\pi i}{2}\right) = \frac{e^{-\left(2 + \frac{\pi i}{2}\right)} + e^{2 + \frac{\pi i}{2}}}{2} = \frac{e^{-2} e^{-\frac{\pi i}{2}} + e^2 e^{\frac{\pi i}{2}}}{2} = \frac{-ie^{-2} + ie^2}{2} = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} i.$$

$$e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i, \qquad e^{-\frac{\pi}{2} i} = \cos\frac{\pi}{2} - i \sin\frac{\pi}{2} = -i.$$

Логарифм комплексного числа. Логарифмічна функція

Для комплексної змінної z логарифмічна функція визначається як функція обернена до показникової $\omega = \exp z$.

Означення. ***Логарифмом*** комплексного числа $z \neq 0$ називається кожне комплексне число ω, що задовольняє умову $\exp\omega = z$. Позначається $\omega = Ln\,z$.

Нехай

$$\omega = u + iv,\ z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (23)$$

де $\varphi = \arg z,\ -\pi < \varphi \leq \pi$.

Підставимо в $\exp\omega = z$ вирази (23) для z і ω, отримаємо:

$$\exp(u + iv) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$e^u(\cos v + i\sin v) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

З умови рівності комплексних чисел в тригонометричній формі маємо, що

$$e^u = |z|,\ v = Arg\,z = \varphi + 2\pi k, k \in Z, \qquad (24)$$

де $u = \ln|z|,\ \varphi = \arg z$.

Підставляючи в $\omega = Ln\,z$ рівності (24), отримаємо:

$$\omega = Ln\,z = \ln|z| + iArg\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\quad k \in Z,\quad -\pi < \varphi \leq \pi$$

або

$$\omega = Ln\,z = \ln|z| + i\varphi + 2\pi k i,\quad k \in Z,\quad -\pi < \varphi \leq \pi. \qquad (25)$$

Отже, в області комплексних чисел, на відміну від області дійсних чисел, дія знаходження логарифма числа є неоднозначною: для будь-якого $z \neq 0$ маємо нескінченну множину логарифмів, дійсна частина яких визначена однозначно, а уявна – з точністю до доданку кратністі 2π.

При $k = 0$ в (25) отримаємо так зване ***головне значення логарифма***:

$$\ln z = \ln|z| + i\varphi. \qquad (26)$$

Приклад. Обчислити $Ln(1+i)$, виділити головне значення.

Розв'язання. Маємо $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$, тоді за (25) отрмаємо, що

$$Ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in Z.$$

$$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i.$$

Співвідношення $\omega = Ln\, z$ в області $C \setminus \{0\}$ задає логарифмічну функцію, яка є багатозначною, її вітки визначаються вітками функції $Arg\, z = \varphi + 2\pi k,\ k \in Z$.

При $k = 0$ отримаємо однозначну функцію, яка називається ***головним значенням*** логарифмічної функції або її ***нульовою віткою***. Раніше було показано, що функція $\varphi = \arg z$ має розриви для всіх дійсних від'ємних z, тому функція $\omega = \ln z$ є визначеною і неперервною на всій комплексній площині, крім точок осі Ox, де $x < 0$.

Похідна $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$, крім $z = 0$ і дійсних від'ємних чисел.

Якщо $z \in R_+$, то головне значення логарифма співпадає з відомим дійсним натуральним логарифмом. Дійсно, при $z = x > 0,$ $Ln\, z = \ln x + 0 \cdot i + 2k\pi i$, а $\ln z = \ln x$.

Якщо $z = x < 0$, то $Ln\, z = \ln|x| + \pi i + 2k\pi i, k \in Z$, а $\ln z = \ln|x| + i\pi$.

Властивості логарифмів та логарифмічної функції

1) $Ln(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i\, Arg(z_1 z_2) = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(Arg\, z_1 + Arg\, z_2) =$

$= \ln|z_1| + i\, Arg\, z_1 + \ln|z_2| + i\, Arg\, z_2 = Ln\, z_1 + Ln\, z_2$.

2) $Ln \dfrac{z_1}{z_2} = \ln\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| + i\, Arg\, \dfrac{z_1}{z_2} = \ln|z_1| - \ln|z_2| + i|Arg\, z_1 - Arg\, z_2| = Ln\, z_1 - Ln\, z_2$.

3) $a^b = \exp(b\, Ln\, a),\quad a \neq 0, b \in \mathrm{C}$.

На логарифми комплексних чисел узагальнюються відомі властивості логарифмів:

$$Ln(z^n) = n\, Ln\, z,$$

$$Ln\left(\sqrt[n]{z}\right) = \frac{1}{n} Ln\, z.$$

Зауваження. Ці рівності слід розуміти не як рівності чисел, а як рівності множин – множин значень функцій.

Очевидно, що вітки багатозначної функції $\omega = Ln\, z$ визначаються вітками функції $\omega = Arg\, z$. Отже, виділення вітки функції $\omega = Ln\, z$ можливе в будь-якій області, де можливе виділення вітки багатозначної функції $\omega = Arg\,z$: це комплексна площина (або будь-яка її частина) з розрізом по будь-якій необмеженій кривій, що з'єднує точки $z=0$ та $z=\infty$.

Приклад. Розглянемо комплексну площину D з розрізом по проміню $[0,\infty)$ і виділимо вітку функції $\omega = Ln z$ для якої $\ln(-1)=\pi i$, $(k=0)$. Ця вітка відповідає вітці багатозначної функції $\omega = Arg\,z$, для якої $Arg(-1)=\pi$.

Для заданої вітки логарифма обчислимо значення $Ln i$, $Ln(-i)$. Для цього знайдемо значення $Arg\,i$, $Arg\,(-i)$ відповідної вітки аргументу:

1) $Arg\,i = Arg(-1)+\Delta_{v_1} Arg\,z = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, де за довільну криву v_1 виберемо дугу кола радіуса $|z|=1$, що з'єднує точку (-1) з точкою i;

2) $Arg(-i) = Arg(-1)+\Delta_{v_2} Arg\,z = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$, де за v_2 можна взяти дугу кола радіуса $|z|=1$, що з'єднує точку (-1) з точкою $-i$.

Отже,

$$Ln i = \ln|i| + i\,Arg\,i = \ln 1 + \frac{\pi}{2} i = \frac{\pi}{2} i,$$

$$Ln(-i) = \ln|-i| + i\,Arg(-i) = \ln 1 + \frac{3\pi}{2} i = \frac{3\pi}{2} i.$$

Розглянемо операцію піднесення комплексного числа до довільного комплексного степеня. За означенням маємо, що

$$a^z = e^{z\,Ln\,a},\ \ a \neq 0. \qquad (27)$$

При фіксованому $a \neq 0$ дане співвідношення визначає ***загальну показникову функцію*** $\omega = a^z$. Як і в випадку логарифма виділяють головне значення показникової функції $e^{z\ln a}$.

Співвідношення $z^a = e^{a\,Ln\,z}$ при фіксованому a визначає багатозначну функцію в області $C\setminus\{0\}$, яка має назву ***загальної степеневої функції.***

Приклад. Обчислити i^i.

Розв'язання. За (27) маємо:

$i^i = e^{i\,Ln\,i} = e^{i\left(\ln|i|+\frac{\pi}{2}i+2\pi k i\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}$, $k \in Z$, а головне значення $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Розглянемо функції $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$. Вони є оберненими до відповідних тригонометричних функцій і визначаються за допомогою співвідношень:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln} i(z+\sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+i}{z-i}.$$

Ці рівності треба розуміти як рівності множин, причому мають місце такі співвідношення:

$$\operatorname{Arcsin} z + \operatorname{Arccos} z = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{Arctg} z + \operatorname{Arcctg} z = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад. Обчислити $\operatorname{Arcsin} 3i$.

Розв'язання. Застосуємо формулу

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln} i(z+\sqrt{z^2-1}) = -i\operatorname{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$$

для $z = 3i$:

$$\operatorname{Arcsin} 3i = -i\operatorname{Ln}\left(i\cdot 3i+\sqrt{1-(3i)^2}\right) = -i\operatorname{Ln}\left(-3+\sqrt{10}\right).$$

Задача зводиться до знаходження $\operatorname{Ln}\left(-3+\sqrt{10}\right)$ за формулою (25) $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi + 2\pi k i,\ \ k\in Z,\ \ -\pi<\varphi\le\pi$. Очевидно, що $z=-3+\sqrt{10}$ є дійсним додатним числом, тому $|z| = \sqrt{10}-3$, $\varphi = 0$ і

$$\operatorname{Ln}\left(-3+\sqrt{10}\right) = \ln\left(\sqrt{10}-3\right) + 2\pi k i,\quad k\in Z.$$

Отже, $\operatorname{Arcsin} 3i = -i\ln\left(-3+\sqrt{10}\right) - 2\pi k,\ k\in Z$.

Інтегрування функцій комплексної змінної. Інтеграл Коші

Історична довідка

Означення інтеграла функції комплексної змінної та основну теорему інтегрування було опубліковано Огюстеном-Луи Коші в науковій праці «Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires» (1825), а інтегральну формулу він опублікував у 1831 році, але тільки для частинного випадку, коли контуром інтегрування C є коло. Сучасний вигляд цієї формули для довільного контуру належить учню Коші – Пюїзо (1850).

Теорема та формула, сформулювані О. Коші, виконувалися не для довільних аналітичних функцій, а лише для тих, у яких у кожній точці скінченна похідна не тільки існує, але й є неперервною в області. Проте, французький математик Едуа́р Жан-Бати́ст Гурса́ (1858–1936) показав, що додаткова умова неперервності похідної є зайвою, оскільки неперервність є наслідком існування похідної.

Подальші узагальнення теореми Коші та інтегральної формули Коші були отримані в XX столітті в працях Альфреда Прингсгейма (1850-1941), Миколи Лузіна (1883-1950), Івана Привалова (1891-1941) тощо. Було доведено, що крива інтегрування не обов'язково має бути кусково-гладкою, достатньо, щоб вона була спрямлюваною. Показано, що для підінтегральної функції f(z) достатньо, щоб вона була аналітичною всередині деякої області D, обмеженої контуром C, і при прямуванні до граничних точок на цьому контурі мала граничні значення, можливо нескінченні, що забезпечують інтегровність функції f(z) на контурі C.

На площині C комплексної змінної z розглянемо спрямлювальну криву Жордано Γ з кінцями в точках α і β та задану на ній неперервну функцію $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$. Позначимо через $z_k = x_k + iy_k \quad (k = 0 \div n)$ фіксовані точки на Γ, що слідують одна за одною в додатному напрямку і складемо суму

$$S=\sum_{k=0}^{n} f(\gamma_k)\Delta z_k\,, \tag{28}$$

де $\gamma_k=\xi_k+i\eta_k$ – деяка точка дуги $z_k z_{k+1}$ кривої Γ,

$$\Delta z_k=z_{k+1}-z_k=\Delta x_k+i\,\Delta y_k\,,\ z_0=\alpha\,,\ z_{n+1}=\beta\,,$$

тоді суму (28) можна записати у вигляді:

$$S=S_1+S_2=\sum_{k=0}^{n}\bigl(u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k-v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\bigr)+i\sum_{k=0}^{n}\bigl(u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k+v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k\bigr).$$

Переходячи до границі при $n\to\infty$ ($\max\limits_{0\le k\le n}|\Delta z_k|\to 0$) у виразі для S (це можливо в силу спрямлюваності кривої Γ і неперервності функції $f(z)$), маємо

$$\lim_{n\to\infty} S_1=\int_{\Gamma} u\,dx-v\,dy,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_2=\int_{\Gamma} u\,dy+v\,dx.$$

Тоді існує границя S, яку називають ***інтегралом*** від функції $f(z)$ по контуру Γ:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\Gamma} u\,dx-v\,dy+i\int_{\Gamma} u\,dy+v\,dx. \tag{29}$$

Формула (29) визначає криволінійний інтеграл ІІ-ого роду від функції комплексної змінної. З (28) слідує, що існує і границя суми $\sum\limits_{k=0}^{n} f(\gamma_k)(z_k-z_{k+1})$, яку позначимо $\int\limits_{\Gamma^-} f(z)dz$. Знак "$-$" вказує на те, що інтегрування відбувається в протилежному напрямку.

Зауваження. Додатним вважається напрямок, що залишає зліва скінчену область G, обмежену лінією Γ.

Властивості інтеграла Коші

1. $\int\limits_{\Gamma} c\cdot f(z)dz=c\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$, де $c=const$.
2. $\int\limits_{\Gamma}\bigl(f_1(z)+f_2(z)+...+f_n(z)\bigr)dz=\int\limits_{\Gamma} f_1(z)dz+...+\int\limits_{\Gamma} f_n(z)dz$.
3. Якщо кусково-гладка лінія Γ складається з гладких ліній $\Gamma_1,\Gamma_2,...,\Gamma_n$ (адитивність області), то за означенням маємо, що

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + ... + \int_{\Gamma_n} f(z)dz .$$

4. $\int_{\Gamma^-} f(z)dz = -\int_{\Gamma^+} f(z)dz$, де Γ^-, Γ^+ – шляхи інтегрування в залежності від напрямку.
5. Якщо вздовж лінії Γ, яка має довжину l, функція $f(z)$ задовольняє умову $|f(z)| \le M, \quad M = const$, то $\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \le M\,l$.
6. $\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \le \int_{\Gamma} |f(z)|dz$.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_{\Gamma} |z|\bar{z}\, dz$ по контуру Γ, що є верхньою частиною півкола $|z| = 1$. Обхід кривої здійснюється проти годинникової стрілки.

Розвязання. Верхня частина півкола $|z| = 1$ в параметричному вигляді задається рівнянням $z = e^{it}, \quad 0 \le t \le \pi$. Маємо, що $\bar{z} = e^{-it}$, $dz = e^{it} \cdot i\,dt$, тоді

$$\int_{\Gamma} |z|\bar{z}dz = i\int_{\Gamma} e^{-it}e^{it}dt = i\int_0^{\pi} dt = \pi i .$$

Теорема Коші

Лема. ***Нехай*** $f(z)$ ***– неперервна функція, визначена в області*** G***,*** Γ ***– довільна кусково-гладка лінія, що належить області*** G***. Для будь-якого як завгодно малого*** $\varepsilon > 0$ ***в області*** G ***існує ламана лінія*** P***, вписана в*** Γ***, така що***

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz - \int_{p} f(z)dz\right| < \varepsilon . \qquad (30)$$

Отже, значення $\int_{\Gamma} f(z)dz$ можна апроксимувати (наблизити) з будь-якою наперед заданою точністю за допомогою інтеграла, взятого вздовж ламаної лінії P.

Теорема. ***Якщо функція*** $f(z)$ ***аналітична в деякій однозв'язній області*** G***, то*** $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$***, взятий вздовж будь-якого замкненого контуру*** Γ***, що належить області G, дорівнює нулю.***

Доведення. Спочатку доведемо, що для аналітичної в деякій однозв'язній області G функції $f(z)$ інтеграл $\int\limits_{\Delta} f(z)dz$, взятий вздовж контура (надалі периметра) довільного трикутника, що належить G, дорівнює нулю.

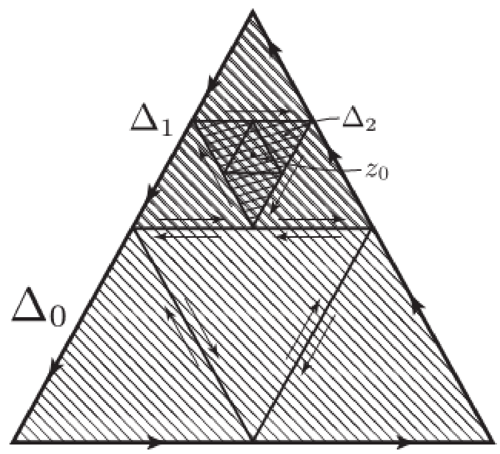


Рис. 9

Нехай $\left|\int\limits_{\Delta} f(z)dz\right| = M$, покажемо, що $M = 0$.

Розіб'ємо сторони трикутника навпіл і з'єднаємо точки поділу (рис. 9). Отримаємо чотири конгруентних трикутники з периметрами $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ і

$$\int\limits_{\Delta} f(z)dz = \int\limits_{\Delta_1} + \int\limits_{\Delta_2} + \int\limits_{\Delta_3} + \int\limits_{\Delta_4} . \qquad (31)$$

Інтегрування по кожному з відрізів, що з'єднують точки поділу, відбувається двічі в протилежних напрямках, тому сума інтегралів по цих відрізках дорівнює нулю. Оскільки $\left|\int\limits_{\Delta} f(z)dz\right| = M$, то з (31) маємо, що знайдеться хоча б один периметр Δ_k, $k = 1 \div 4$, для якого $\left|\int\limits_{\Delta_k}\right| \geq \frac{M}{4}$. Нехай, наприклад, це буде Δ_1, тобто $\left|\int\limits_{\Delta_1} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4}$. Розіб'ємо цей трикутник аналогічно на чотири рівні трикутники і знову знайдеться такий трикутник з периметром $\Delta^{(2)}$, для якого $\left|\int\limits_{\Delta^{(2)}} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4^2}$.

Продовжуючи далі цей процес, отримаємо послідовність вкладених трикутників, для яких

$$\left|\int\limits_{\Delta^{(n)}} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4^n}. \qquad (32)$$

Тепер оцінимо $\left|\int\limits_{\Delta^{(n)}} f(z)dz\right|$ зверху. Очевидно, що довжини периметрів трикутників прямують до нуля при необмеженому зростанні n і кожен наступний трикутник належить попередньому, а отже, існує точка z_0, що належить всім трикутникам даної послідовності. Функція $f(z)$ є аналітичною в точці $z_0 \in G$, тому $f(z)$ має в z_0 скінчену похідну, тобто для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon)$, таке що для всіх z, які задовольняють умову $|z - z_0| < \delta$, виконується нерівність

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon. \qquad (33)$$

Помножимо (33) на $|z - z_0|$, отримаємо:

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|. \qquad (34)$$

Очевидно, що ця нерівність виконується для будь-якого z, що лежить в середині круга з центром в точці z_0 і радіусом δ. Починаючи з досить великого n периметр $\Delta^{(n)}$ лежить всередині цього круга, тому для оцінки $\left|\int\limits_{\Delta^{(n)}} f(z)dz\right|$ скористаємося співвідношенням (34). Зауважимо, що оскільки $\int\limits_{\Delta^{(n)}} dz = 0$, $\int\limits_{\Delta^{(n)}} zdz = 0$, то

$$\int\limits_{\Delta^{(n)}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]dz = \int\limits_{\Delta^{(n)}} f(z)dz. \qquad (35)$$

Тоді з (34) та (35) маємо, що

$$\left|\int\limits_{\Delta^{(n)}} f(z)dz\right| < \int\limits_{\Delta^{(n)}} \varepsilon |z - z_0| dz. \qquad (36)$$

Величина $|z - z_0|$ визначає відстань довільної точки z трикутника з периметром $\Delta^{(n)}$ від точки z_0, що належить цьому трикутнику, тоді $|z - z_0| < \frac{u}{2^n}$, де u – довжина периметра трикутника. Отже, з (36) маємо

$$\left|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)dz\right| < \varepsilon \cdot \frac{u}{2^n} \cdot \frac{u}{2^n} = \varepsilon \cdot \frac{u^2}{4^n}. \qquad (37)$$

Порівняємо оцінки (32) і (37), отримаємо, що $\frac{M}{4^n} < \varepsilon \frac{u^2}{4^n}$ або $M < \varepsilon u^2$. Оскільки $\varepsilon -$довільне як завгодно мале додатне число, то $M = 0$.

Розглянемо тепер загальний випадок довільної замкнутої ламаної лінії P, що належить області G $\left(P \subset G\right)$. Отриманий многокутник з периметром P розіб'ємо на n трикутників з периметрами Δ_i, $i = 1,...,n$ (число n визначається формою многокутника). Тоді, за доведеним раніше, маємо

$$\int_P f(z)dz = \int_{\Delta_1} + \int_{\Delta_2} + ... + \int_{\Delta_n} .$$

Інтегрування по кожній діагоналі многокутника відбувається двічі в протилежних напрямках, тому значення суми інтегралів дорівнює нулю.

Ця теорема є вірною для будь-якої замкненої кусково-гладкої лінії. Дійсно, за лемою для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ в області G існує ламана лінія P, вписана в Γ, така що $\left|\int_\Gamma f(z)dz - \int_P f(z)dz\right| < \varepsilon$. Оскільки $\left|\int_P f(z)dz\right| = 0$, то з останньої нерівності слідує, що $\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| < \varepsilon$, а це означає, що $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.

Теорему доведено.

Наслідок. Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в однозв'язній області G, то значення $\int_\Gamma f(z)dz$, взятого вздовж довільної кусково-гладкої лінії $\Gamma \subset G$ не залежить від лінії Γ, а визначається тільки точками, які є початком і кінцем лінії Γ.

Приклад. Обчислити $\int_\Gamma \left(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z\right)dz$, де $\Gamma : \Delta\, ABC,\ A(0,0),\quad B(1,0),\quad C(1,2)$.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння ліній (рис. 10).

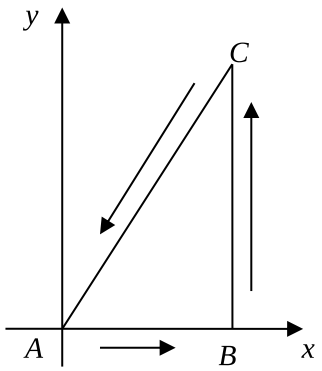


Рис. 10

AB $(y=0)\colon \operatorname{Re} z = t,\ \ 0 \le t \le 1,\ \ \operatorname{Im} z = 0.$

$$\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = t,\ \ dz = dt.$$

BC $(x=1)\colon\ \operatorname{Re} z = 1,\ \ \operatorname{Im} z = t,\ \ 0 \le t \le 2.$

$$\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = 1 + it,\ \ dz = idt.$$

AC $(y=2x)\colon\ \operatorname{Re} z = t,\ \operatorname{Im} z = 2t,\ \ 0 \le t \le 1.$

$$\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = t + 2ti,\ \ dz = (1+2i)dt.$$

Обчислимо значення інтеграла вздовж заданого контуру в додатному напрямку:

$$\int_{\Gamma} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} = \int_0^1 t\, dt + i\int_0^2 (1+t)dt - \int_0^1 (t+2t)(1+2i)dt =$$

$$= \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + i\left(t\Big|_0^2 + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^2 \right) - \left.\frac{3}{2}t^2\right|_0^1 - i\cdot 3t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 4i - \frac{3}{2} - 3i = -1 + i.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_L z \operatorname{Im} \bar{z} dz$, де L:

1) $z = 3\cos t + i\cdot 2\sin t,\ \ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1;\ \ 3 \to 2i$.

Розв'язання. 1) Маємо, що $z = 3\cos t + i\cdot 2\sin t$, $\bar{z} = 3\cos t - i\cdot 2\sin t$, $\operatorname{Im}\bar{z} = -2\sin t$, $dz = (3\cos t + i\cdot 2\sin t)' dt = (-3\sin t + 2i\cos t)dt$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді

$$\int_L z \operatorname{Im} \bar{z} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t + 2i\sin t)(-2\sin t)(-3\sin t + 2i\cos t)dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(26\cos t \sin^2 t + 12i\sin^3 t - 12i\cos^2 t \sin t\right)dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(26\cos t\sin^2 t - 12i\sin t\cdot\cos 2t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(26\cos t\sin^2 t - 6i\sin 3t + 6i\sin t\right)dt =$$

$$= \left.\left(26\cdot\frac{\sin^3 t}{3} + 2i\cos 3t - 6i\cos t\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{26}{3} + 4i.$$

2) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1;\ \ 3\to 2i$.

Умова $3\to 2i$ рівносильна умові руху вздовж лінії L від точки $A(3;0)$ до точки $B(0;2)$. Тоді відрізок BA у параметричному вигляді задається так: $x=t,\ \ 0\le t\le 3$, а $y=2\left(1-\dfrac{x}{3}\right)$ у вигляді $y=2-\dfrac{2}{3}t$. Виразимо z через параметр t: $z=t+\left(2-\dfrac{2}{3}t\right)i$, тоді $\bar{z}=t-\left(2-\dfrac{2}{3}t\right)i$, $dz=\left(1-\dfrac{2}{3}i\right)dt$, $\operatorname{Im}\bar{z}=-\left(2-\dfrac{2}{3}t\right)=\dfrac{2}{3}t-2$.

$$\int\limits_L z\operatorname{Im}\bar{z}dz=\int\limits_{AB}=-\int\limits_{BA}=-\int\limits_0^3\left(t+\left(2-\frac{2}{3}t\right)i\right)\cdot\left(\frac{2}{3}t-2\right)\left(1-\frac{2}{3}i\right)dt=$$

$$=-\int\limits_0^3\left(\frac{10}{27}t^2-\frac{8}{9}t^2i-\frac{2}{9}t+4ti-4i-\frac{8}{3}\right)dt=\frac{17}{3}+2i.$$

Інтегральна формула Коші

Теорема. ***Нехай G – деяка однозв'язна область, обмежена довільною кусково-гладкою лінією Γ, а функція $f(z)$ аналітична в замкненій області $\overline{G}$. Формула Коші виражає значення функції $f(z)$ в кожній внутрішній точці області G через значення цієї функції на контурі Γ, а саме***

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi, \tag{38}$$

де z – довільна внутрішня точка області G. Інтегрування по контуру Г відбувається в додатному напрямі.

Доведення. Нехай z – довільна точка області G. Розглянемо допоміжну функцію

$$\varphi(\xi)=\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}. \tag{39}$$

Очевидно, що вона є аналітичною скрізь в області $\overline{G}$, крім точки $\xi=z$. Навколо точки z (як центра) опишемо коло γ довільно малого радіуса ρ, яке цілком належить області G. Функція $\varphi(\xi)$ є аналітичною в області між контурами γ і Г, включаючи самі контури.

За теоремою Коші

$$\int_{\Gamma}\varphi(\xi)d\xi=\int_{\gamma}\varphi(\xi)d\xi, \qquad (40)$$

тобто значення інтеграла не залежить від значення ρ і є величиною сталою, що дорівнює $\int_{\Gamma}\varphi(\xi)d\xi$.

Перейдемо в (39) до границі при $\xi\to z$:

$$\lim_{\xi\to z}\varphi(\xi)=\lim_{\xi\to z}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}=f'(z).$$

Отже, якщо взяти $f'(z)$ як значення функції $\varphi(\xi)$ в точці $\xi=z$, то $\varphi(\xi)$ стає неперервною скрізь в $\overline{G}$, а тому обмеженою в кожній точці $\xi\in G$: $|\varphi(\xi)|<M$, $M=const$.

Маємо, що $\left|\int_{\gamma}\varphi(\xi)d\xi\right|\le\int_{\gamma}|\varphi(\xi)d\xi|<M\cdot 2\pi\rho$. Оскільки ρ можна взяти як завгодно малим, а значення інтеграла $\int_{\gamma}\varphi(\xi)d\xi$ є сталою величиною, то $\int_{\gamma}\varphi(\xi)d\xi=0$ і за (40)

$$\int_{\Gamma}\varphi(\xi)d\xi=0. \qquad (41)$$

Замінивши в даному інтегралі $\varphi(\xi)$ виразом (39), маємо:

$$\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}d\xi=0$$

або

$$\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=f(z)\int_{\Gamma}\frac{d\xi}{\xi-z}. \qquad (42)$$

Оскільки, $\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=2\pi i$, то (42) має вигляд

$$\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=f(z)\cdot 2\pi i. \qquad (43)$$

Пояснення до (43): розглянемо інтеграл $\int\limits_C \frac{dz}{z}$, де $z=0$ лежить всередині замкненого контуру С – кола радіуса R з центром в точці $(0,0)$. Параметричне рівняння цього кола має вигляд $z = R\cdot e^{i\varphi}$, тоді $dz = i\cdot R\cdot e^{i\varphi}d\varphi$, а $\frac{dz}{z} = \frac{i\cdot R\cdot e^{i\varphi}d\varphi}{R\cdot e^{i\varphi}} = i\,d\varphi$, $\int\limits_C \frac{dz}{z} = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$.

Теорему доведено.

Зауваження. На практиці інтегральну формулу Коші для зручності записують у вигляді:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz,$$
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz. \qquad (44)$$

Приклад. Обчислити: $\int\limits_C \frac{dz}{z^2+1}$, якщо C: 1) $|z-i|=1$; 2) $|z+i|=1$; 3) $|z|=3$.

Розв'язання. Для обчислення використаємо формули **(44)**.

1) Для області $|z-i|=1$ аналітичність підінтегральної функції порушується в точці $z_0 = i$, тоді $f(z) = \frac{1}{z+i}$, а $\int\limits_C \frac{dz}{(z-i)(z+i)} = \int\limits_C \frac{1}{z+i}\cdot\frac{dz}{z-i} = 2\pi i\cdot\frac{1}{i+i} = \pi$;

2) $z_0 = -i$: $\int\limits_C \frac{1}{z-i}\cdot\frac{dz}{z+i} = 2\pi i\cdot\left(\frac{-1}{2i}\right) = -\pi$;

3) для контура С: $|z|=3$ аналітичність підінтегральної функції порушується в точках $z_0 = i$ та $z_0 = i$. Тоді

$$\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{A(z+i)+B(z-i)}{z^2+1},$$

$$z = i: \quad 1 = 2iA, \quad A = \frac{1}{2i},$$

$$z = -i: \quad 1 = -2iB, \quad B = -\frac{1}{2i}.$$

$$\int_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\int_C \frac{dz}{z-i} - \int_C \frac{dz}{z+i}\right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i}(1-1) = 0.$$

Зауважимо, що в обох інтегралах $f(z) = 1$.

Теорема (про нескінченну диференційовність аналітичних функцій). ***Аналітична в області*** G ***функція є нескінченно диференційовною і має місце формула:***

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi.$$

Зауваження.

1. $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$ від функції $f(z)$, неперервної на кривій Γ, є аналітичною функцією в будь-якій області G, яка не містить Γ.

2. Якщо крива Γ задана параметрично $z = z(t)$ або $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, де $\alpha \le t \le \beta$, то

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt.$$

При цьому можна користуватися таким ***алгоритмом***:

1) записати параметричне рівняння кривої $z = z(t)$. З нього визначити межі інтегрування: $t = \alpha$ відповідає початковій точці шляху інтегрування, $t = \beta$ – кінцевій точці;

2) знайти диференціал функції $z(t): dz = z'(t)dt$;

3) підставити $z(t)$ у підінтегральний вираз, записати інтеграл у вигляді $\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$ та обчислити визначений інтеграл.

Зауваження. Інтегрування функцій комплексної змінної майже не відрізняється від інтегрування функцій дійсної змінної; єдина відмінність – це наявність у першому випадку множника i.

Приклад. Обчислити $\int_\Gamma \operatorname{Re} z\, dz$, де Γ – пряма, що з’єднує точки $z_1 = 0,\ z_2 = 2 + i$.

Розв'язання. Рівняння прямої, що з'єднує точки $(0;0)$ і $(2;1)$ має вигляд $y=\frac{1}{2}x$ або $x=2y$. Запишемо параметричне рівняння лінії та визначаємо межі інтегрування. Покладемо $y=t$, тоді $z=(2+i)t,\quad 0\le t\le 1.$

Підінтегральна функція $\operatorname{Re} z=2t$, а диференціал $z(t)$ має вигляд $dz=(2+i)dt$.

Тоді $\int\limits_0^{2+i}\operatorname{Re} z\,dz=2\int\limits_0^1 t(2+i)dt=\left.\frac{4t^2}{2}\right|_0^1+\left.it^2\right|_0^1=2+i$.

Степеневі ряди

Означення. ***Степеневим рядом*** називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\,, \tag{45}$$

де z_0 – довільне фіксоване комплексне число, $a_n\in C$ – коефіцієнти цього ряду.

Теорема Коші-Адамара. ***Нехай маємо степеневий ряд (45) і*** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=D$***, тоді***

1) при $D=0$ ***ряд є абсолютно збіжним в усій комплексній області;***

2) при $D=\infty$ ***ряд збігається тільки в точці*** $z=z_0$ ***і є розбіжним в усіх інших точках;***

3) при $0<D<\infty$ ***ряд є абсолютно збіжним у крузі*** $|z-z_0|<\frac{1}{D}$ ***і розбіжним ззовні.***

Доведення. Розглянемо ряд з модулів $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|z-z_0|^n$.

1. Нехай $D=0$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$. Тоді для $\forall z$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|\,|z-z_0|^n}=0$ і за радикальною ознакою Коші ряд (45) є абсолютно збіжним для $\forall z$.

2. Нехай $D=\infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|\,|z-z_0|^n}=\infty$. В цьому випадку не виконується необхідна умова збіжності ряду і він є розбіжним скрізь, крім точки $z=z_0$.

3. Нехай $0 < D < \infty$. Тоді $0 < \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ і для $\forall z$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|\,|z-z_0|^n} = |z-z_0|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = |z-z_0|\cdot D.$$

Якщо $|z-z_0| < \dfrac{1}{D}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|\,|z-z_0|^n} < 1$ і ряд з модулів $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n||z-z_0|^n$ є збіжним за радикальною ознакою Коші. Отже, ряд (45) збігається абсолютно в крузі $|z-z_0| < \dfrac{1}{D}$.

Якщо $|z-z_0| > \dfrac{1}{D}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|\,|z-z_0|^n} > 1$ і за радикальною ознакою Коші ряд є розбіжним ззовні круга $|z-z_0| > \dfrac{1}{D}$.

Теорему доведено.

Наслідком з даної теореми є теорема Абеля.

Теорема Абеля. ***Якщо ряд (45) збігається в точці*** z_1***,*** $z_1 \neq z_0$***, то він абсолютно збігається в крузі*** $|z-z_0| < |z_1-z_0|$**.**

Доведення. Точка z_1, в якій степеневий ряд збігається, не може лежати ззовні круга збіжності, тому вона належить або кругу збіжності, або колу збіжності, тобто $|z_1-z_0| \le R$.

Отже, в крузі $|z-z_0| < |z_1-z_0| \le R$ степеневий ряд збігається абсолютно. **Теорему доведено.**

Зауваження. Область збіжності степеневого ряду (45) є кругом (збіжність ряду на колі потребує додаткового дослідження) радіуса $R = \dfrac{1}{D}$ з центром в точці $z = z_0$, який при $D = 0$ $(R = \infty)$ співпадає з усією комплексною площиною, а при $D = \infty$ $(R = 0)$ вироджується в точку z_0.

Означення. Нехай функції $f_k(z)$ $(k = 1,2,...)$ визначені на деякій множині E. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ називається ***рівномірно збіжним*** до функції $F(z)$ на множині

$E_1,\ E_1 \subset E$, якщо для $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)$ такий, що нерівність $\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) - F(z)\right| < \varepsilon$ виконується водночас для всіх $z \in E_1$ і для всіх $n > n_0(\varepsilon)$.

Теорема. ***Степеневий ряд (45) збігається рівномірно в будь-якому замкненому крузі $\overline{K}$, який цілком міститься всередині круга збіжності степеневого ряду.***

Доведення. Розглянемо замкнений круг $\overline{K_1}: |z - z_0| \le R_1$, який містить в собі замкнений круг $\overline{K}$, а сам міститься всередині круга збіжності степеневого ряду (45). Очевидно, що $R_1 < R$, де $R -$ радіус збіжності степеневого ряду.

Для $\forall z \in \overline{K_1}$, а отже і $\overline{K}$, маємо $\left|a_n (z - z_0)^n\right| \le \left|a_n \left(z_1^* - z_0\right)^n\right|$ $\quad (n = 0,1,...)$ або

$$\left|a_n (z - z_0)^n\right| \le |a_n| \left|z_1^* - z_0\right|^n, \tag{46}$$

де z_1^* вибираємо так, щоб $R_1 \le \left|z_1^* - z_0\right| < R$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ є абсолютно збіжним в кожній точці z, зокрема при $z = z_1^*$, а тому є збіжним і числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left|z_1^* - z_0\right|^n$. Звідси та з нерівності (46) в силу теореми Вейєрштрасса маємо, що ряд (45) є рівномірно збіжним в крузі $\overline{K}$.

Теорему доведено.

Зауваження. Теорема про рівномірно збіжні ряди дійсної змінної переноситься на випадок функції комплексної змінної.

Справедливими є наступні теореми:

Теорема. ***Якщо функції $f_k(z),\ k \in N$, є неперервними на множині E_1 і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ рівномірно збігається на E_1, то функція $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ неперервна для $\forall z \in E_1$.***

Теорема. ***Нехай*** E_1 ***спрямлювана крива і функції*** $f_k(z)$ ***неперервні на*** E_1***. Якщо ряд*** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ ***збігається рівномірно на множині*** E_1 ***і*** $S(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$***, то*** $\int_{E_1} S(z)\,dz=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_1} f_k(z)\,dz$***, тобто функціональний ряд можна почленно інтегрувати.***

Теорема. ***Нехай*** $f(z)$ ***аналітична функція в області*** G***,*** z_0 ***– довільна фіксована точка цієї області,*** R ***– відстань точки*** z_0 ***до найближчої точки, що лежить на межі області*** G***. Тоді функція*** $f(z)$ ***в крузі*** $K=\{z : |z-z_0|<R\}$ ***розкладається в степеневий ряд за степенями*** $(z-z_0)$***, тобто***

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \text{ де } z\in K, \qquad (47)$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi, \qquad (48)$$

де Γ_r ***– коло з центром в точці*** z_0 ***і радіусом*** r $(0<r<R)$***.***

Доведення. Виберемо довільну фіксовану точку $z\in K$ і коло Γ_r з центром в точці z_0, радіуса r, таке що $|z-z_0|<r<R$.

За інтегральною формулою Коші маємо:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0+z_0-z}\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)}\,d\xi. \qquad (49)$$

Підінтегральну функцію в останньому інтегралі запишемо в такому вигляді:

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha},\quad \alpha=\frac{z-z_0}{\xi-z_0}.$$

$$\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)}=\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}=$$

$$=\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{\xi-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n+\frac{\left(\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}\right).$$

Інтеграл (49) можна подати у вигляді суми інтегралів і отже

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots+a_n(z-z_0)^n+R_n(z,z_0),$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi,$$

$$R_n(z,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\xi)\left(\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^{n+1}}{\xi-z}d\xi. \qquad (50)$$

Покажемо, що $R_n(z,z_0)\to 0$ при $n\to\infty$. Функція $f(\xi)$, будучи неперервною на колі Γ_r, є обмеженою на цьому колі, тобто $|f(\xi)|\le M, \quad \forall\xi\in\Gamma_r$.

Позначимо $\tau=\min\limits_{\xi\in\Gamma_r}|\xi-z|, \quad q=\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|=\dfrac{z-z_0}{r}$. Очевидно, що $\tau>0,\ q<1$.

Оцінимо модуль підінтегральної функції в рівності (50)

$$\left|\frac{f(\xi)\left(\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^{n+1}}{\xi-z}\right|\le\frac{M\cdot q^{n+1}}{\tau},$$

тому $|R_n(z,z_0)|\le\dfrac{1}{2\pi}\cdot\displaystyle\int_{\Gamma_r}\left|\frac{f(\xi)\left(\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^{n+1}}{\xi-z}\right|d\xi\le\frac{1}{2\pi}\frac{M\cdot q^{n+1}}{\tau}\cdot 2\pi r=\frac{M\cdot q^{n+1}}{\tau}\cdot r.$

Оскільки $q<1, \quad n\to\infty$, то $\dfrac{Mq^{n+1}}{\tau}\cdot r\to 0$. **Теорему доведено.**

При доведенні теореми ми вважали, що радіус r кола Γ_r задовольняє умову $|z-z_0|<r<R$. Проте, в рівності (48) для обчислення коефіцієнтів a_k можна брати коло Γ_r довільного радіуса $0<r<R$, оскільки величина інтеграла в (48) не залежить від величини радіуса r кола Γ_r.

Наслідок. ***Функція*** $f(z)$ ***аналітична в області*** G***, має в цій області похідні всіх порядків і справедлива формула***

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}.$$

Приклад. Обчислити інтеграл в заданій області: $\int\limits_{|z|=\frac{1}{3}}\frac{1-2z+4z^2}{2z^2}dz$.

Розв'язання. Функція $f(z)=\dfrac{1-2z+4z^2}{2}$ є аналітичною скрізь в області, обмеженій колом $|z|=\dfrac{1}{3}$. Для обчислення заданого інтеграла скористаємось формулою $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r}\dfrac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}$ або $\int\limits_{\Gamma_r}\dfrac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}=\dfrac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z)$. Для $z=0$ маємо $n+1=2,\ n=1,\ f'(z)=\dfrac{12z^2-2}{2}=6z^2-1,\ f'(0)=-1$, отже,

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{3}}\frac{1-2z+4z^2}{2z^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\cdot(-1)=-2\pi i.$$

Зауваження. В теорії функції дійсної змінної функція $y=f(x)$ може мати неперервну на відрізку $[a,b]$ похідну $f'(x)$ і не мати похідної другого порядку в жодній точці відрізка $[a,b]$.

Приклад. Розкласти функцію $f(z)=z\cos\dfrac{\pi z}{z-a}$ в степеневий ряд в околі точки $z=a$.

Розв'язання. Для розкладу в степеневий ряд виділимо множник $(z-a)$ і використаємо означення функції $\cos z$:

$$f(z)=(z-a+a)\cos\frac{\pi(z-a+a)}{z-a}=((z-a)+a)\cos\pi\left(1+\frac{a}{z-a}\right)=$$

$$=((z-a)+a)\cos\left(\pi+\frac{\pi a}{z-a}\right)=-((z-a)+a)\cos\frac{\pi a}{z-a}=$$

$$=-((z-a)+a)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\pi a)^{2n}}{(z-a)^{2n}\cdot(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\pi a)^{2n}((z-a)+a)}{(z-a)^{2n}\cdot(2n)!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\left(\frac{(\pi a)^{2n}}{(z-a)^{2n-1}}+\frac{\pi^{2n}\cdot a^{2n+1}}{(z-a)^{2n}}\right).$$

Ряд Лорана

Означення. Степеневий ряд виду $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, який є сумою двох степеневих рядів $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}$, $a_n\in C$, називається ***рядом Лорана***. При цьому степенвий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}\dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ називається ***головною частиною*** ряду Лорана, а степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ – його ***правильною частиною***.

Ряд Лорана вважають ***збіжним*** в точці z тоді і тільки тоді, коли в цій точці є збіжними обидва ряди.

Нехай $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ є збіжним в крузі $|z-z_0|<R$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ збігається в області $|z-z_0|>R_1$. Якщо при цьому $R_1<R$, то ряд Лорана збігається в кільці $R_1<|z-z_0|<R$.

Отже, областю збіжності ряду Лорана є кругове кільце, а його сумою є аналітична функція (як сума двох аналітичних функцій).

Теорема Лорана (опублікована в 1843 році). *Кожну функцію* $f(z)$, *однозначну і аналітичну в круговому кільці* $R_1 < |z - z_0| < R$, *можна розкласти в цьому кільці у ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{51}$$

де коефіцієнти a_n *цього ряду визначаються за формулою*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \tag{52}$$

а Γ_ρ – *коло радіуса* ρ *з центром в точці* z_0 $(R_1 < \rho < R)$.

Теорема. *Якщо функцію* $f(z)$ *в кільці* $r < |z - z_0| < R$ *можна розкласти в ряд Лорана, то цей ряд єдиний і його коефіцієнти* a_n *визначаються формулою* (52).

Доведення. Дійсно, ряд Лорана (51) є сумою двох рядів $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{53}$$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}. \tag{54}$$

Він є збіжним в точці z тоді і тільки тоді, коли в цій точці збігаються ряди (53) і (54), причому на колі Γ_ρ їх збіжність є рівномірною. На збіжність не впливає множення (53) і (54) на функцію $\frac{1}{2\pi i}(z - z_0)^{-k-1}$, де k – довільне фіксоване ціле число. Отримані ряди проінтегруємо по контуру Γ_ρ:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f_1(z)(z - z_0)^{-k-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\Gamma_\rho} (z - z_0)^{n-k-1} dz,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f_2(z)(z - z_0)^{-k-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} \int_{\Gamma_\rho} (z - z_0)^{n-k-1} dz.$$

Отже,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f_1(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f_2(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\Gamma_\rho} (z - z_0)^{n-k-1} dz, \tag{55}$$

якщо $n \neq k$, то $\int\limits_{\Gamma_\rho} \left(z - z_0\right)^{n-k-1} = 0$.

Дійсно, рівняння кола Γ_ρ має вигляд $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, $dz = \rho \cdot i \cdot e^{i\varphi} d\varphi$.

Отже,

$$\int\limits_{\Gamma_r} \left(z - z_0\right)^{n-k-1} dz = \int\limits_0^{2\pi} \rho^{n-k-1} e^{i(n-k-1)\varphi} \rho \cdot i \cdot e^{i\varphi} d\varphi = i\rho^{n-k} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-k)\varphi} d\varphi =$$

$$= i\rho^{n-k} \left(\int\limits_0^{2\pi} \cos(n-k)\varphi \, d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \sin(n-k)\varphi \, d\varphi \right) = i \cdot \rho^{n-k} \cdot 0 = 0.$$

Якщо $n = k$, то $\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$. Звідси та з (55) маємо $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} dz$.

Теорему доведено.

Приклад. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ в околі точки $z_0 = 0$.

Розв'язання. Точки $z = 0$ і $z = 1$ є особливими. Функція аналітична в двох кругових кільцях: $0 < |z| < 1, \quad |z| > 1$.

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} = \frac{A(1-z) + B \cdot z}{z(1-z)} = \frac{A - A \cdot z + B \cdot z}{z(1-z)},$$

$$z^1: \quad -A + B = 0, \quad -A = -B,$$

$$z^0: \quad A = 1, \quad B = 1.$$

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}.$$

Розглянемо розвинення в областях:

1) функція $\frac{1}{1-z}$ є аналітичною в області $0 < |z| < 1$ і її можна розглядати як суму геометричної прогресії зі знаменником $q = z, \quad |q| = |z| < 1$. Отже, розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана в цій області має вигляд

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots;$$

2) функція $\frac{1}{1-z}$ є аналітичною в області $|z|>1$ і її можна розглядати як суму геометричної прогресії зі знаменником $q=\frac{1}{z}$, оскільки $f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$. Отже, розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана в цій області має вигляд

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)=-\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots+\frac{1}{z^{n+1}}+\ldots\right).$$

Приклад. Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$ в околі точки $z_0=0$.

Розв'язання. Подамо задану функцію у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}=\frac{5z-50}{(2z^2+5z-25)z}=\frac{5z-50}{z(z+5)(2z-5)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+5}+\frac{C}{2z-5}=$$
$$=\frac{A(z+5)(2z-5)+Bz(2z-5)+Cz(z+5)}{z(z+5)(2z-5)}.$$

Знайдемо коефіцієнти A,B,C:

$z=0:\quad -50=-25A,\quad A=2;$

$z=-5:\quad -75=75B,\quad B=-1;$

$z=\frac{5}{2}:\quad -\frac{75}{2}=\frac{75}{4}C,\quad C=-2.$

Тоді $\dfrac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}=\dfrac{2}{z}-\dfrac{1}{z+5}-\dfrac{2}{2z-5}$, де доданок $\dfrac{2}{z}$ залишаємо незмінним.

Для розвинення доданку $\dfrac{1}{z+5}$ в околі точки $z_0=0$ застосуємо відомий розклад у степеневий ряд геометричної прогресії, де $|q|<1$.

1) В області $|z|>5$ розклад $\dfrac{1}{z+5}$ є таким:

$$\frac{1}{z+5}=\frac{1}{z\left(1+\frac{5}{z}\right)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{5}{z}\right)}=\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{5}{z}+\left(\frac{5}{z}\right)^2-\left(\frac{5}{z}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{5}{z}\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{5}{z^2}+\frac{5^2}{z^3}-\frac{5^3}{z^4}+\ldots+(-1)^n\frac{5^n}{z^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{z^{n+1}},\quad |q|=\left|-\frac{5}{z}\right|=\frac{5}{|z|}<1,\ |z|>5.$$

2) В області $|z|<5$ розклад $\frac{1}{z+5}$ є таким:

$$\frac{1}{z+5}=\frac{1}{5\left(1+\frac{z}{5}\right)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{5}\right)}=\frac{1}{5}\cdot\left(1-\frac{z}{5}+\left(\frac{z}{5}\right)^2-\left(\frac{z}{5}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{z}{5}\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{z}{5^2}+\frac{z^2}{5^3}-\frac{z^3}{5^4}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{5^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{5^{n+1}},\quad |q|=\left|-\frac{z}{5}\right|=\frac{|z|}{5}<1,\ |z|<5.$$

Виконуючи аналогічні математичні операції, знайдемо розвинення доданку $\frac{2}{2z-5}$ у степеневі ряди.

3) В області $|z|>\frac{5}{2}$:

$$\frac{2}{2z-5}=\frac{1}{z\left(1-\frac{5}{2z}\right)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{2z}}=\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{5}{2z}+\left(\frac{5}{2z}\right)^2+\left(\frac{5}{2z}\right)^3+\ldots+\left(\frac{5}{2z}\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{5}{2z^2}+\frac{5^2}{2^2z^3}-\frac{5^3}{2^3z^4}+\ldots+\frac{5^n}{2^nz^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{2^nz^{n+1}},\quad |q|=\frac{5}{2|z|}<1,\ |z|>\frac{5}{2}.$$

4) В області $|z|<\frac{5}{2}$:

$$\frac{1}{2z-5}=\frac{-2}{5\left(1-\frac{2z}{5}\right)}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{2z}{5}}=-\frac{2}{5}\cdot\left(1+\frac{2z}{5}+\left(\frac{2z}{5}\right)^2+\left(\frac{2z}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2z}{5}\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=-\left(\frac{2}{5}-\frac{2^2z}{5^2}+\frac{2^3z^2}{5^3}+\frac{2^4z^3}{5^4}+\ldots+\frac{2^{n+1}z^n}{5^{n+1}}+\ldots\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}z^n}{5^{n+1}},\quad |q|=\frac{2|z|}{5}<1,\ |z|<\frac{5}{2}.$$

Отже, розвинення функції $f(z)=\frac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$ в околі точки $z_0=0$ має вигляд:

в області $|z|>5$:

$$f(z)=\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{2^n z^{n+1}}=\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\cdot 5^n-\frac{5^n}{2^n}\right)\frac{1}{z^{n+1}};$$

для $\frac{5}{2}<|z|<5$:

$$f(z)=\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{5^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{2^n z^{n+1}}=\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5^n}{2^n z^{n+1}}-(-1)^n\frac{z^n}{5^n}\right);$$

в області $|z|<\frac{5}{2}$:

$$f(z)=\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{5^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}z^n}{5^{n+1}}=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{5^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}\right)z^n=$$

$$=\frac{2}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-(-1)^n}{5^{n+1}}z^n.$$

Ізольовані особливі точки функції комплексної змінної

Важливою задачею в теорії функцій комплексної змінної є знаходження особливих точок функції (точок, де порушується аналітичність) та з'ясування її поведінки в околах цих точок, тобто дослідження $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Будемо досліджувати ізольовані особливі точки функції, тобто особливі точки, для кожної з яких існує такий її окіл, який не містить інших особливих точок.

Означення. Скінченна особлива точка $z_0\in C$ називається ***ізольованою особливою точкою*** для функції $f(z)$, якщо існує число $r>0$: $|z-z_0|<r$, причому в проколотому околі цієї точки функція $f(z)$ є аналітичною.

Означення. ***Нескінчено віддалена особлива точка*** $z_0=\infty$ є ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо існує таке число $R>0$, що в області $|z|>R$ ця точка є єдиною особливою точкою функції $f(z)$, а в кільці $R<|z|<\infty$ функція $f(z)$ аналітична.

Очевидно, що для $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ можливі три випадки:

1) границя існує і дорівнює скінченому числу;

2) границя існує і дорівнює нескінченості;

3) границя не існує.

Означення. Ізольована особлива точка $z_0 \in C$ функції $f(z)$ називається:

- ***усувною особливою точкою***, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ існує і дорівнює скінченому числу;
- ***полюсом***, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;
- ***істотно особливою точкою***, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не існує.

Зауваження. Якщо у випадку усувної особливої точки покласти, що $f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, то функція $f(z)$ стає аналітичною в деякому скінченому околі точки z_0 і точку z_0 можна вважати правильною, а не особливою.

Дослідження границі в комплексній області в більшості випадків є досить складним, оскільки прямування z до z_0 повинно відбуватися по будь-якому напрямку. Тому часто при обчисленні границі функції в особливій точці використовують розвинення функції в степеневий ряд. За теоремою Лорана функція, аналітична в деякій області, може бути представлена рядом Лорана, а отже, її дослідження в ізольованій особливій точці зводиться до дослідження відповідного ряду Лорана.

Приклад. Визначити тип особливої точки $z = 0$ для функції $\dfrac{\sin z}{z}$.

Розв'язання. Розкладемо функцію в степеневий ряд:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Очевидно, що в правій частині цього розкладу всі доданки, крім першого, при $z \to 0$ прямують до нуля, тому $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ і функцію $\frac{\sin z}{z}$ можна доозначити, поклавши $f(0) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. Отже, $z = 0$ – усувна особлива точка.

Теорема. ***Для того, щоб ізольована особлива точка*** z_0 ***однозначної аналітичної функції*** $f(z)$ ***була усувною, необхідно і достатньо, щоб*** $f(z)$ ***в цій точці мала скінчену границю*** a_0**.**

Доведення.

Необхідність. Дійсно, нехай ізольована особлива точка z_0 аналітичної функції $f(z)$ є усувною. Оскільки $f(z)$ аналітична в області D, то за (47) в околі цієї точки $0 < |z - z_0| < R$ її розклад у степеневий ряд має вигляд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Оскільки сума степеневого ряду є неперервною функцією всередині його круга збіжності, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$, тобто в точці z_0 функція $f(z)$ має скінчену границю a_0.

Достатність. Нехай тепер аналітична функція $f(z)$ має скінчену границю в ізольованій особливій точці z_0: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$. Тоді в області $D_1 : 0 < |z - z_0| < R_1$ при досить малому радіусі $R_1 > 0$ ця функція є обмеженою, тобто для $\forall z \in D_1$ існує $M \in R^+$, що $|f(z)| \le M$.

Виберемо $0 < \rho < R_1$ так, щоб коло γ_p включалося в D_1. Тоді для коефіцієнтів ряду Лорана маємо оцінку: $|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_p} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} dz \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M \, 2\pi\rho}{\rho^{n+1}} = \frac{M}{\rho^n}$. При $n = -1, -2, \ldots$ отримаємо, що $|a_n| \le \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{M}{\rho^n} = 0$. Отже, в ряді Лорана є тільки правильна частина і $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, а отже, доозначивши цю функцію в точці z_0 як

$f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a_0$, отримаємо, що особливість точки z_0 зникла і z_0 є усувною особливою точкою.

Теорему доведено.

Зауваження. При доведенні цієї теореми ми також довели твердження: ***якщо в околі ізольованої особливої точки*** z_0 ***аналітична функція*** $f(z)$ ***є обмеженою, то вона в цій точці має скінчену границю.***

Розглянемо класифікацію особливих точок через розвинення аналітичної функції в ряд Лорана.

1. Нехай розвинення функції $f(z)$ в ряд Лоран має вигляд $f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+...+c_n(z-z_0)^n+...$. Точка z_0 називається ***усувною особливою точкою*** $f(z)$, якщо в усіх точках круга збіжності $|z-z_0|<R$, крім точки $z=z_0$, даний ряд є збіжним до функції $f(z)$, а в точці $z=z_0$ (де $f(z)$ не є аналітичною) ряд збігається до числа c_0.

Якщо покласти $f(z_0)=c_0$, то дане розвинення є справедливим в усіх точках круга $|z-z_0|<R$ включно з точкою z_0.

Приклад. З'ясувати тип особливої точки $z=0$ для функції $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

Розв'язання. Розкладемо дану функцію в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...\right)=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-...$$

Очевидно, що в даному розвиненні є тільки правильна частина і $c_0=\dfrac{1}{2}$, отже, точка $z=0$ є усувною особливою точкою.

2. Нехай розвинення функції в ряд Лорана має в головній частині скінчену кількість членів, наприклад m членів, тобто

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+...+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \text{ де } c_{-m}\neq 0.$$

У цьому випадку особлива точка $z = z_0$ називається ***полюсом*** $m-$ого порядку. Якщо $m = 1$, то полюс називається ***простим***.

Приклад. З'ясувати тип особливої точки $z = 0$ для функції $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^4}$.

Розв'язання. Розкладемо дану функцію в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^4} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^4}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) = \frac{1}{z^2 \cdot 2!} - \frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} - \ldots$$

Головна частина даного розвинення містить тільки один член $\dfrac{1}{z^2 \cdot 2!}$, тому $m = 2$ і точка $z = 0$ є полюсом другого порядку.

Означення. Якщо головна частина розвинення функції в ряд Лорана в околі точки $z = z_0$ містить нескінчену кількість членів, то ця точка є ***істотно-особливою точкою*** функції $f(z)$.

Приклад. З'ясувати тип особливої точки $z = 0$ для функції $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Розв'язання. Розкладемо дану функцію в ряд Лорана:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \ldots.$$

У даному розвиненні головна частина містить нескінченну кількість членів, тому $z = 0$ є істотно-особливою точкою функції $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

З'ясуємо зв'язок між нулем та полюсом аналітичної функції.

Означення. Точка $z = z_0$ називається ***нулем*** аналітичної функції $f(z)$, якщо $f(z_0) = 0$.

Якщо $f(z_0) \neq 0$ в деякому околі свого нуля (точки z_0), то розвинення цієї функції в ряд Тейлора в околі точки z_0 має вигляд $f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots$, де $c_m \neq 0 \quad (m \geq 1)$.

Число, що визначає номер (індекс, порядок) найменшого відмінного від нуля коефіцієнта цього розвинення, називається ***порядком нуля***. Якщо $m = 1$, то нуль називається ***простим***.

Теорема. ***Якщо точка z_0 є нулем m-го порядку аналітичної функції $f(z)$, то вона є полюсом $m-$ого порядку для функції $\psi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.***

Доведення. Нехай z_0 є нулем m-го порядку функції $f(z)$, тоді в околі точки z_0 функцію можна подати у вигляді $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, де $\varphi(z)-$ деяка аналітична функція в околі цієї точки, причому $\varphi(z_0)\neq 0$.

Функцію $\psi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ можна представити як

$$\psi(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}, \tag{56}$$

де функція $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ аналітична в досить малому околі z_0 (як частка двох аналітичних функцій), а отже, в цьому околі її можна розкласти в степеневий ряд:

$$\frac{1}{\varphi(z)}=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots,$$

причому $c_0\neq 0$.

Звідси та з (56) маємо, що

$$\psi(z)=\frac{c_0}{(z-z_0)^m}+\frac{c_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\frac{c_2}{(z-z_0)^{m-2}}+\ldots+\frac{c_n}{(z-z_0)^{m-n}}+\ldots,\ \text{де}\ c_0\neq 0.$$

Головна частина отриманого ряду Лорана містить тільки *m* членів, тобто точка z_0 є полюсом *m*-го порядку функції $\psi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Теорему доведено.

Зауваження. Кількість доданків із знаменниками $(z-z_0)^{m-n}$ визначається числами $n=0,1,..,m-1$, де $c_0\neq 0$, і є скінченою, тому z_0 – полюс m-го порядку функції $\psi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Справедливе і обернене твердження.

Теорема. ***Якщо точка*** z_0 ***– полюс*** m***-го порядку функції*** $f(z)$***, то вона є нулем*** m***-го порядку функції*** $\psi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$**.**

Доведення. Нехай точка z_0 є полюсом m-го порядку функції $f(z)$, тоді її ряд Лорана має вигляд

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\,,\ a_{-m}\neq 0\,.$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(z)=f(z)(z-z_0)^m=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^{m+n}\,, \qquad (57)$$

для якої z_0 є усувною особливою точкою. Дійсно, поклавши $\varphi(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=a_{-m}$, доозначимо функцію $\varphi(z)$ в точці z_0 до аналітичної.

З умови (57) маємо, що функція

$$\psi(z)=\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{\varphi(z)}\,. \qquad (58)$$

За допомогою рівності $\psi(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\psi(z)=0$ доозначимо її в точці z_0 до аналітичної. Оскільки $\varphi(z_0)\neq 0$, то з аналітичності функції слідує, що $\varphi(z)\neq 0$ і в досить малому околі точки z_0. Тому в цьому околі $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ також буде аналітичною і її можна подати у вигляді степеневого ряду $\dfrac{1}{\varphi(z)}=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots$, де $c_0=\dfrac{1}{\varphi(z_0)}\neq 0$. Звідси та з (58) маємо, що $\psi(z)=c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+\ldots$, тобто z_0 є нулем $m-$го порядку функції $\psi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Теорему доведено.

Наслідок. ***Для того щоб точка z_0 була полюсом $m-$го порядку функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб $f(z)$ можна було подати у вигляді $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, де функція $\varphi(z)$ є аналітичною в точці z_0 і $\varphi(z_0)\neq 0$.***

Розглянемо поведінку аналітичної функції $f(z)$ в околі істотно-особливої точки.

Теорема Сохоцького (доведена в 1868 р.). ***Нехай $z=a$ – істотно особлива точка аналітичної функції $f(z)$. Тоді для довільного числа $A\in C$ знайдеться послідовність (z_n) точок $z_n\in C$ така, що $z_n\to a$ при $n\to\infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$.***

Доведення. Нехай $z=a$ – істотно особлива точка аналітичної функції $f(z)$.

1. Розгялнемо випадок, коли $A=\infty$. Функція $f(z)$ є необмеженою в околі точки $z=a$, оскільки в іншому випадку всі коефіцієнти її розвиненя в ряд Лорана при від'ємних степенях $(z-a)$ дорівнювали б нулю, тобто вона б мала скінчену границю в точці $z=a$ і ця точка була б усувною, що суперечить умові теореми. Отже, для будь-якого $n\in N$ в кільці $0<|z-a|<\dfrac{1}{n}$ можна вибрати таку точку z_n, що $|f(z_n)|>n$. Тобто ми виділили послідовність (z_n) точок $z_n\in C$ таку, що $z_n\to a$ при $n\to\infty$, для якої $f(z_n)\to\infty$ або $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$.

2. Розглянемо випадок, коли $A\neq\infty$. Якщо в будь-якому околі точки $z=a$ є точки, в яких $f(z)=A$, то з цих точок ми можемо виділити послідовність (z_n), для якої $z_n\to a$ при $n\to\infty$. Для цієї послідовності $f(z_n)=A$ і тому $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$.

3. Розглянемо випадок, коли існує окіл $|z-a|<\delta$ точки $z=a$, в якому $f(z)\neq A$ і розглянемо функцію $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$, причому $\varphi(z)$ аналітична в цьому околі, а $z=a$ є для неї ізольованою особливою точкою.

Дійсно, якби точка $z=a$ була б усувною, то існувала б скінчена границя функції $f(z)$ в точці $z=a$, але тоді $f(z)=A+\dfrac{1}{\varphi(z)}$ в цій точці мала б скінчену або нескінчену границю, тобто $z=a$ була б для функції $f(z)$ або усувною, або полюсом, що суперечить умові теореми.

Якби точка $z=a$ була б полюсом для $\varphi(z)$, то вона б була нулем для $\frac{1}{\varphi(z)}$ і $\lim\limits_{z\to a} f(z)=A$, тобто $z=a$ була б усувною точкою для функції $f(z)$.

Отже, $z=a$ – істотно особлива точка функції $\varphi(z)$. За доведеним існує послідовність точок $\{z_n\}$, яка збігається до a і така, що $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(z_n)=\infty$. Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\lim\limits_{n\to 0}\left(A+\frac{1}{\varphi(z_n)}\right)=A$, що і треба було довести.

Теорему доведено.

Розглянемо випадок, коли особливою точкою аналітичної функції є нескінченно віддалена точка.

Околом нескінченно віддаленої точки називається зовнішня частина круга з центром в точці (0, 0) і радіусом $R>0$, тобто множина $|z|>R$.

Нескінченно віддалену точку називають ***ізольованою особливою точкою*** функції $f(z)$, якщо можна вказати окіл, в якому $f(z)$ однозначна і аналітична.

Покладемо $z=\frac{1}{z'}$ і розглянемо функцію $\varphi(z')=f\left(\frac{1}{z'}\right)=f(z)$. Вона є аналітичною і однозначною в околі $0<|z'|<\frac{1}{R}$ комплексної площини (z'), тому нескінченно віддалена точка може бути усувною особливою точкою функції $f(z)$, або полюсом m-го порядку, або істотно особливою залежно від типу точки $z'=0$ для функції $\varphi(z')$.

Нехай нескінченно віддаленої точка є ізольованою особливою точкою однозначної аналітичної функції $f(z)$ в області $|z|>R$ при досить великому R.

За теоремою Лорана $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ в області $|z|>R$, тоді розвинення функції $\varphi(z')$ в околі нуля $(z'\neq 0)$ має вигляд

$$\varphi(z')=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\cdot\frac{1}{(z')^n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m(z')^m \text{, де } m=-n,\ c_m=a_{-n}.$$

Справедливими є наступні твердження:

а) Якщо $z'=0$ усувна особлива точка функції $\varphi(z')$, то $c_m=0$ для $m=-1,-2,\ldots$

б) Якщо $z'=0$ полюс порядку m, то коефіцієнт $c_{-m}\neq 0$ і всі коефіцієнти $c_{-(m+1)},c_{-(m+2)},\ldots=0$.

в) Якщо $z'=0$ істотно особлива точка, то серед c_m, де $m=-1,-2,\ldots$ існує нескінчена кількість відмінних від нуля коефіцієнтів.

Приклад. Визначити тип особлиивих точок функції

1) $\dfrac{\mathrm{sh}6z-6z}{\mathrm{ch}z-1-\frac{1}{2}z^2}$, $z_0=0$;

2) $\dfrac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$.

Розв’язання. Функція $f(z)=\dfrac{\mathrm{sh}6z-6z}{\mathrm{ch}z-1-\frac{1}{2}z^2}=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z)=\mathrm{sh}6z-6z$, а $\psi(z)=\mathrm{ch}z-1-\dfrac{1}{2}z^2$. Рокладемо чисельник і знаменник в степеневі ряди в точці $z_0=0$:

$$\varphi(z)=6z-\frac{(6z)^3}{3!}+\ldots+\frac{(6z)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots-6z=z^3\left(\frac{6^3}{3!}+\frac{6^5z^2}{5!}\ldots+\frac{6^{2n+1}z^{2n-2}}{(2n+1)!}+\ldots\right),$$

$$\psi(z)=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots-1-\frac{1}{2}z^2=z^4\left(\frac{1}{4!}+\frac{z^2}{6!}\ldots+\frac{z^{2n-4}}{(2n)!}+\ldots\right).$$

Отримаємо, що

$$f(z)=\frac{z^3\left(\frac{6^3}{3!}+\frac{6^5z^2}{5!}+\ldots\right)}{z^4\left(\frac{1}{4!}+\frac{z^2}{6!}+\ldots\right)}=\frac{\frac{6^3}{3!}+\frac{6^5z^2}{5!}+\ldots}{z\left(\frac{1}{4!}+\frac{z^2}{6!}+\ldots\right)}$$

і

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{6^3}{3!} + \frac{6^5 z^2}{5!} + \dots}{z\left(\frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} + \dots\right)} = \infty .$$

Точка $z_0 = 0$ є простим полюсом, оскільки

$$\lim_{z\to 0} f(z)\cdot z = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\frac{6^3}{3!} + \frac{6^5 z^2}{5!} + \dots}{z\left(\frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} + \dots\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{6^3}{3!} + \frac{6^5 z^2}{5!} + \dots}{\frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} + \dots} = \frac{6^3 \cdot 4!}{3!} \neq 0 .$$

2) Особливими точками функції $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3 (z+1)^2}$ є $z = 0$ і $z = -1$. Розглянемо точку $z = 0$:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z^3 (z+1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} \cdot \frac{1}{z^2 (z+1)^2} = \infty ,$$

а

$$\lim_{z\to 0} f(z)\cdot z^2 = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z (z+1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} = 1 \neq 0 .$$

Отже, точка $z = 0$ є полюсом другого порядку.

Міркуючи аналогічно, для точки $z = -1$ маємо, що

$$\lim_{z\to -1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{e^z - 1}{z^3 (z+1)^2} = \infty ,$$

$$\lim_{z\to -1} f(z)(z+1)^2 = \lim_{z\to -1} \frac{e^z - 1}{z^3} = -\left(e^{-1} - 1\right) = 1 - \frac{1}{e} \neq 0$$

і точка $z = -1$ є також полюсом другого порядку.

Лишки та їх застосування

Історична довідка

Одним із найбільш важливих застосувань теорії аналітичних функцій в математичному аналізі є її застосування до обчислення інтегралів по замкнутому контуру, визначених інтегралів, невласних інтегралів, підсумовування рядів тощо. Визначальним поняттям цих застосувань є поняття лишку функції відносно особливої точки. Теорія лишків була розроблена Огюстеном Луї Коші в 1826–1830 роках і опублікована протягом цього періоду в 16 математичних працях.

Нехай функція $f(z)$ є однозначною й аналітичною в області D. За теоремою Лорана $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, $a_n \in C$, де ряд збігається для $\forall z \in D$ і $0<\left|z-z_0\right|<R$.

Означення. Коефіцієнт a_{-1} при $\left(z-z_0\right)^{-1}$ в лоранівському розвиненні однозначної аналітичної функції $f(z)$ називається ***лишком*** цієї функції в точці $z=z_0$ і позначається як $\underset{z=z_0}{res} f(z)$ або $\underset{z=z_0}{Res} f(z)$.

За формулою (52) маємо: $a_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_p} f(z)dz$, де γ_p −коло радіуса p з центром в точці z_0. Отже,

$$\underset{z=z_0}{res} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_p} f(z)dz. \qquad (59)$$

Лишки функції та ізольовані особливі точки пов’язані наступними співвідношеннями:

1. Якщо z_0 ***– усувна особлива точка функції*** $f(z)$***, то*** $a_{-1}=0$**.**

Дійсно, розвинення аналітичної функції $f(z)$ в ряд Лорана в крузі $0<|z-z_0|<R$ містить тільки правильну частину, тобто $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, отже, $a_{-1}=0$.

2. Якщо z_0 є полюсом або істотно особливою точкою, то лишок функції $f(z)$ відносно точки z_0 взагалі кажучи є відмінним від нуля.

Дійсно, в цьому випадку головна частина лоранівського розвинення функції $f(z)$ містить скінченну або нескінченну кількість членів, а отже, $a_{-1}\neq 0$.

Наприклад, нехай z_0 – простий полюс, тоді $f(z)=\dfrac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=.}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$. Звідси $f(z)(z-z_0)=a_{-1}+(z-z_0)\sum_{n=.}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ і

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z)=a_{-1}=\lim_{z\to z_0}\big(f(z)(z-z_0)\big). \qquad (60)$$

Приклад. Обчислити $\underset{z=2}{res}\dfrac{2z}{(z-2)(3z+1)}$.

Розв'язання. Точка $z=2$ є простим полюсом для даної функції, тоді за формулою (60) маємо: $\underset{z=2}{res}\dfrac{2z}{(z-2)(3z+1)}=\lim_{z\to 2}\dfrac{2z}{3z+1}=\dfrac{4}{7}$.

3. Якщо функцію $f(z)$ можна подати у вигляді частки $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ – аналітичні функції в околі точки z_0, причому $\psi(z_0)=0,\quad \varphi(z_0)\neq 0,\quad \psi'(z_0)\neq 0$, то

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z)=res\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (61)$$

4. Якщо z_0 – полюс m-го порядку, то

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$f(z)(z-z_0)^m=a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-z_0)+\ldots+a_1(z-z_0)^{m-1}+(z-z_0)^m\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

Продиференціюємо отримане співвідношення $(m-1)$ разів:

$$\frac{d^{(m-1)}(f(z)(z-z_0)^m)}{dz^{m-1}} = (m-1)!a_{-1} + \ldots$$

Отже,

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{(m-1)}(f(z)(z-z_0)^m)}{dz^{m-1}}. \qquad (62)$$

Приклад. Обчислити лишок функції $f(z) = \dfrac{2z+1}{(z-1)^2(z+3)}$ в точці $z=1$.

Розв'язання. Очевидно, точка $z=1$ є полюсом другого порядку ($m=2$), тоді за формулою (62) отримаємо:

$$\operatorname*{res}_{z=1}\frac{2z+1}{(z-1)^2(z+3)} = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{(2z+1)(z-1)^2}{(z-1)^2(z+3)}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{2(z+3)-(2z+1)}{(z+3)^2} = \frac{5}{16}$$

Теорема (основна теорема про лишки). ***Інтеграл від функції $f(z)$ по кусково-гладкому контуру Жордана Γ, що цілком лежить в області D, де $f(z)$ однозначна і аналітична, крім скінченого числа ізольованих особливих точок z_k, $k=1,2,\ldots,n$ дорівнює***

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (63)$$

Доведення. Нехай в області, обмеженій контуром Γ, є, наприклад, три ізольовані особливі точки функції $f(z): z_1, z_2, z_3$ (рис. 11). Навколо кожної точки z_k, $k=1,2,3$, опишемо коло γ_k з центром в цій точці так, щоб кожен з контурів γ_k лежав всередині контуру Γ, причому $\gamma_i \cap \gamma_j = \phi$, якщо $i \neq j$ $(i, j = 1,2,3)$.

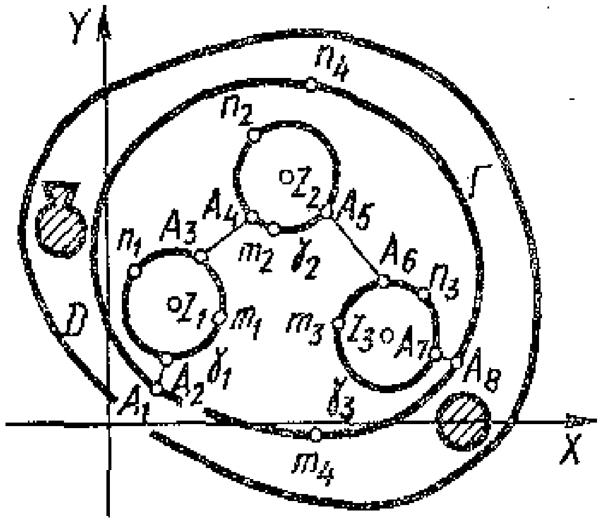


Рис. 11

Розглянемо такі замкнені контури інтегрування функції $f(z)$:

$$L_1 : A_1A_2n_1A_3A_4n_2A_5A_6n_3A_7A_8n_4A_1$$

$$L_2 : A_1m_4A_8A_7m_3A_6A_5m_2A_4A_3m_1A_2A_1$$

За інтегральною теоремою Коші маємо $\int\limits_{L_1} f(z)dz = 0$ і $\int\limits_{L_2} f(z)dz = 0$, тому

$$\int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2} f(z)dz = 0. \qquad (64)$$

Інтеграл по контуру L_1 подамо у вигляді суми інтегралів по дугах A_1A_2, $A_2n_1A_3$, A_3A_4, $A_4n_2A_5$, A_5A_6, $A_6n_3A_7$, A_7A_8, $A_8n_4A_1$.

Аналогічно інтеграл по контуру L_2 запишемо у вигляді суми інтегралів по дугах A_8A_7, $A_7m_3A_6$, A_6A_5, $A_5m_2A_4$, A_4A_3, $A_3m_1A_2$, A_2A_1, $A_1m_4A_8$.

Оскільки інтеграли, які беруться по дугах A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6, A_7A_8, відрізняються тільки знаком від інтегралів, які беруться відповідно по дугах A_2A_1, A_4A_3, A_6A_5, A_8A_7, то у рівності (64) вони взаємно знищаться. Отже, рівність (64) запишемо так:

$$\int\limits_{A_2n_1A_3} f(z)dz + \int\limits_{A_4n_2A_5} f(z)dz + \int\limits_{A_6n_3A_7} f(z)dz + \int\limits_{A_8n_4A_1} f(z)dz + \int\limits_{A_1m_4A_8} f(z)dz + \int\limits_{A_7m_3A_6} f(z)dz + \int\limits_{A_5m_2A_1} f(z)dz + \int\limits_{A_3m_1A_2} f(z)dz = 0$$

Згрупуємо перший інтеграл з восьмим, другий – з сьомим, третій – з шостим, четвертий – з п’ятим, отримаємо

$$\int\limits_{-\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{-\gamma_2} f(z)dz + \int\limits_{-\gamma_3} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

або

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_3} f(z)dz$$

За формулою (59) $\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz = \underset{z=z_k}{res}\, f(z)\cdot 2\pi i \quad (k=1,2,3)$, отже,

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} \underset{z=z_k}{res}\, f(z).$$

Теорему доведено.

Розглянемо деякі застосування теорії лишків, що ґрунтуються на наступних теоремах.

Теорема. ***Нехай функція $f(z)$ є однозначною та аналітичною в області D, Γ – кусково-гладкий контур Жордана, $\Gamma \subset D$, причому на Γ немає нулів функції $f(z)$, а всередині може міститися лише скінчена кількість полюсів цієї функції і ніяких інших точок, що не належать D, всередині Γ немає. Тоді***

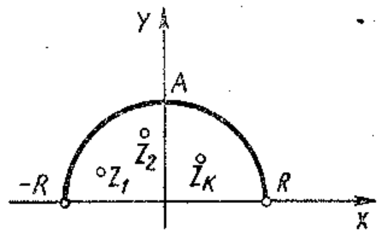
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P,$$

де $N -$ кількість нулів, $P -$ кількість полюсів, яка міститься всередині Γ, причому кожен нуль і кожен полюс рахується стільки разів, яка його кратність.

Теорема (основна теорема алгебри). ***Кожне алгебраїчне рівняння n-го степеня ($n \geq 1$) має n коренів, якщо кожний корінь рахується стільки разів, яка його кратність.***

Теорема. ***Нехай дробово-раціональна функція***

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_0}$$



не має полюсів на дійсній осі, причому степінь многочлена $Q_m(z)$, принаймні на 2 одиниці перевищує степінь $P_n(z)$ $\quad (m \geq n+2)$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \underset{}{res}\ f(z),$$

де сума лишків поширюється на ті полюси функції $f(z)$, які містяться у верхній півплощині.

Приклад. Знайти лишки в особливих точках функції $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$.

Розв'язання. Особливими точками функції є $z_1 = 3, z_2 = -1$, вони є полюсами першого порядку. Отже,

$$\underset{z=-1}{res}\frac{z+2}{z^2-2z-3} = \left.\frac{z+2}{\left(z^2-2z-3\right)'}\right|_{z=-1} = \frac{-1+2}{2\cdot(-1)-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\underset{z=3}{res}\frac{z+2}{z^2-2z-3} = \left.\frac{z+2}{\left(z^2-2z\_3\right)'}\right|_{z=3} = \frac{3+2}{2\cdot 3-2} = \frac{5}{4}.$$

Для знаходження лишка у нескінченно віддаленій точці $z=\infty$ застосуємо правило: якщо функція $f(z)$ в розширеній комплексній площині має скінченне число особливих точок, то сума всіх її лишків, включно з лишком в точці $z=\infty$, дорівнює нулю, тобто

$$\underset{z=\infty}{res} f(z) = -\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res} f(z).$$

Отже, $\underset{z=\infty}{res} f(z) = -\left(\underset{z=-1}{res} f(z) + \underset{z=3}{res} f(z)\right) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -1.$

Приклад. Знайти особливі точки $f(z) = \dfrac{\sin z}{z\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^2}$ та обчислити лишки в цих точках.

Розв'язання. Особливими точками заданої функції є $z_1 = 0$ та $z_2 = -\frac{\pi}{4}$.

Оскільки $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}\cdot\dfrac{1}{\left(z+\dfrac{\pi}{4}\right)^2}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{\left(z+\dfrac{\pi}{4}\right)^2}=\dfrac{16}{\pi^2}$, то точка $z_1=0$ є усувною особливою точкою і $\underset{z=0}{res}\, f(z)=0$.

Зясуємо тип особливої точки $z_2=-\dfrac{\pi}{4}$. Оскільки $\lim\limits_{z\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin z}{z}\cdot\dfrac{1}{\left(z+\dfrac{\pi}{4}\right)^2}=\infty$ і

$f(z)=\dfrac{\dfrac{\sin z}{z}}{\left(z+\dfrac{\pi}{4}\right)^2}$, де функція $\dfrac{\sin z}{z}$ є аналітичною в околі точки $z=-\dfrac{\pi}{4}$, то ця особлива точка є полюсом другого порядку. Тоді за формулою (62):

$$\underset{z=-\frac{\pi}{4}}{res}\, f(z)=\lim_{z\to -\frac{\pi}{4}}\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin z}{z\left(z+\dfrac{\pi}{4}\right)^2}\cdot\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^2\right)=\lim_{z\to -\frac{\pi}{4}}\frac{z\cos z-\sin z}{z^2}=\frac{8\sqrt{2}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\pi^2}.$$

Розглянемо деякі застосування теорії лишків до обчислення інтегралів.

1) Обчислення інтегралів $\oint f(z)dz$ по замкненому контуру

Алгоритм:

1. Знайти особливі точки функції $f(z)$.
2. Визначити, які з цих точок належать області D, що обмежена контуром Γ. Для цього досить виконати рисунок: зобразити контур та позначити особливі точки.
3. Обчислити лишки в знайдених особливих точках, які належать області D.
4. Застосувати формулу $\oint f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}\underset{z=z_k}{res}\, f(z),\quad z_k\in D, k=1\div n$.

Приклад. Обчислити інтеграл $\oint\dfrac{z+1}{(z\text{-}1)\sin z}dz$ по замкненому контуру $|z|=2$.

Розв'язання. Особливі точки:

$z=1$ – простий полюс, що належить області, обмеженій контуром $|z|=2$ (коло з центром в точці (0;0) і радіусом 2);

$z=\pi k, k\in Z$ – прості полюси, причому лише $z=0$ належить області, що обмежена контуром.

Знаходимо лишки в особливих точках, що належать області:

$$\underset{z=1}{res}\frac{z+1}{(z-1)\sin z}=\lim_{z\to 1}\frac{(z+1)(z-1)}{(z-1)\sin z}=\lim_{z\to 1}\frac{z+1}{\sin z}=\frac{2}{\sin 1},$$

$$\underset{z=0}{res}\frac{z+1}{(z-1)\sin z}=\left.\frac{z+1}{\sin z+(z-1)\cos z}\right|_{z=0}=\frac{1}{\sin 0+(0-1)\cos z}=-1.$$

Застосовуючи формулу $\oint f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}\underset{z=z_k}{res}\, f(z)$, обчислюємо значення інтеграла:

$$\oint_{|z|=2}\frac{z+1}{(z-1)\sin z}dz=2\pi i\left(\frac{2}{\sin 1}-1\right).$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2 4iz}dz$.

Розв’язання. Виразимо гіперболічний синус через косинус за формулою:

$\mathrm{sh}^2 4iz=\frac{1-\mathrm{ch}8iz}{2}=\frac{1-\cos 8z}{2}$, тоді $f(z)=\frac{2\left(e^{2z}-1-2z\right)}{z(1\text{-}\cos 8z)}$. Точка $z=0$ є особливою точкою, що належить області, обмеженій колом $|z|=\frac{1}{2}$, і

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{2\left(e^{2z}-1-2z\right)}{z(1-\cos 8z)}=\lim_{z\to 0}\frac{2\left(2e^{2z}-2\right)}{1-\cos 8z+z\cdot 8\sin 8z}=4\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}-1}{1-\cos 8z+8z\sin 8z}=$$

$$=4\lim_{z\to 0}\frac{2e^{2z}}{8\sin 8z+8\sin 8z+8z\cdot 8\cos 8z}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}}{\sin 8z+4z\cos 8z}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2e^{2z}}{8\cos 8z+4\cos 8z-32z\sin 8z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{12}=\frac{1}{12}.$$

Точка $z=0$ є усувною, а отже, $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2 4iz}dz=0$.

Приклад. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}} \frac{e^z-1}{\sin z}dz$.

Розв'язання. Особливою точкою підінтегральної функції $f(z)=\frac{e^z-1}{\sin z}$, що належить області $|z-3|=\frac{1}{2}$, є точка $z_0=\pi$, де $\sin z=0$, а $e^z-1\neq 0$. Маємо, що $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z)=e^z-1$, $\psi(z)=\sin z$. Функції $\varphi(z)$, $\psi(z)$ є аналітичними в області, обмеженій колом $|z-3|=\frac{1}{2}$, причому точка $z_0=\pi$ є простим полюсом. Тоді

$$\underset{z=\pi}{res}\ f(z)=\frac{\varphi(\pi)}{\psi'(\pi)}=\frac{e^{\pi}-1}{\cos\pi}=-\left(e^{\pi}-1\right)=1-e^{\pi},$$

$$\oint\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}} \frac{e^z-1}{\sin z}dz=2\pi i\left(1-e^{\pi}\right).$$

2) Обчислення визначених інтегралів вигляду $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x,\cos x)dx$ від дійсних функцій

За формулами Ейлера виразимо синус і косинус

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\ \sin z=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},$$

виконаємо заміну $z=e^{ix}$ і зведемо визначений інтеграл до контурного по колу $|z|=1$.

Приклад. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos x}$.

Розв'язання. Маємо, що $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $z=e^{ix}$, $dx=\frac{dz}{iz}$, отже, $\cos x=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos x}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(4+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)}=\oint_{|z|=1}\frac{2dz}{iz\left(8+z+\frac{1}{z}\right)}=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+8z+1}.$$

Знайдемо особливі точки функції $\frac{1}{z^2+8z+1}$:

$z^2+8z+1=0,\ D=64-4=60,$

$z_1=\frac{-8+2\sqrt{15}}{2}=-4+\sqrt{15}$ – належить області, обмеженій контуром $|z|=1$,

$z_1=\frac{-8-2\sqrt{15}}{2}=-4-\sqrt{15}$ – не належить області, обмеженій контуром $|z|=1$.

Для обчислення значення інтеграла знаходимо лишок в точці $z_0=-4+\sqrt{15}$, що є простим полюсом:

$$\operatorname*{Res}_{z=-4+\sqrt{15}}\frac{1}{(z+4-\sqrt{15})(z+4+\sqrt{15})}=\lim_{z\to-4+\sqrt{15}}\frac{1}{(z+4+\sqrt{15})}=\frac{1}{-4+\sqrt{15}+4+\sqrt{15}}=\frac{1}{2\sqrt{15}}$$

Отже, $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos x}=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+8z+1}=2\pi i\cdot\frac{2}{i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{15}}=\frac{2\pi}{\sqrt{15}}.$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}$.

Розв'язання. З формули Ейлера маємо, що $\sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$. Виконаємо підстановку $z=e^{it}$, де $0\le t\le 2\pi$. Тоді $t=\frac{1}{i}\ln z$, $dt=\frac{1}{i}\frac{dz}{z}$, $\sin z=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2-1}{2iz}$, $|z|=1$.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}=\int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{i}\frac{dz}{z}}{7+4\sqrt{3}\cdot\frac{z^2-1}{2iz}}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{7iz+2\sqrt{3}z^2-2\sqrt{3}}.$$

Особливими точками підінтегральної функції є корені рівняння $2\sqrt{3}z^2+7iz-2\sqrt{3}=0$, тобто $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_1=-\frac{2\sqrt{3}}{3}i$. Колу $|z|=1$ належить точка $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, яка є простим полюсом. Отже, шуканий інтеграл I дорівнює:

$$I=2\pi i\cdot \underset{z=-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{res} f(z)=2\pi i\cdot \lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\frac{z+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{2\sqrt{3}\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)}=2\pi i\cdot \lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\frac{1}{2\sqrt{3}\left(z+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)}=$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)}=2\pi.$$

3) ***Обчислення невласних інтегралів***

Випадок $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, де функція $f(x)$ має аналітичне продовження на комплексній площині. Для обчислення заданого інтеграла продовжимо підінтегральну функцію $f(x)$ на верхню півплощину $\operatorname{Im} z>0$, тобто розглянемо функцію $f(z)$ комплексної змінної z, яка є аналітичною в області $\operatorname{Im} z\ge 0$ і на межі цієї області співпадає при дійсних значеннях z з функцією $f(x)$. Якщо підінтегральна функція є дробово-раціональною $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $m\ge n+2$, та неперервною на всій дійсні осі, тобто її знаменник не має нулів на дійсній осі, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_k \underset{z=z_k}{res} f(z),$$

де лишки обчислюємо у тих полюсах z_k, які належать верхній півплощині $\operatorname{Im} z>0$.

Приклад. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Розв'язання. Для функції $f(z)=\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}$ точки $z_1=i$ та $z_2=-i$ є полюсами другого порядку, але у верхній півплощині знаходиться тільки $z_1=i$, тому

$$\underset{z=i}{res}\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\cdot(z-i)^2\right)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)=$$
$$=\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=-\frac{2}{(2i)^3}=\frac{1}{4i},$$

отже, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=2\pi i\cdot\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{2}$.

Приклад. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2-x+1\right)^2}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $\frac{1}{\left(z^2-z+1\right)^2}$, яка при $z=x$ неперервна і співпадає з підінтегральною функцією $f(x)$.

Знайдемо полюси функції $f(z)$, що містяться у верхній півплощині. Це будуть корені рівнняня $z^2-z+1=0$, тобто $z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, z_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Точка $z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ є полюсом $f(z)$, кратності 2, який належить верхній півплощині. Знайдемо лишок функції $f(z)$ в цій точці:

$$\underset{z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{res} f(z)=\lim_{z\to\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\frac{d}{dz}\left(\frac{\left(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(z-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)=\lim_{z\to\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\frac{d}{dz}\left(z-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}=$$
$$=\lim_{z\to\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\frac{-2}{\left(z-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=\frac{-2}{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=-\frac{2}{\left(i\sqrt{3}\right)^3}=\frac{2}{3\sqrt{3}i}.$$

Отже, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2-x+1\right)^2}=2\pi i\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}i}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$.

Випадок ***обчислення інтегралів вигляду*** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx$**,** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$**,** де $\lambda > 0$ і $R(x)$ – правильний раціональний дріб. Розглянемо функцію $f(z) = R(z)e^{i\lambda z}$, що має скінчену кількість ізольованих особливих точок – полюсів, які є нулями знаменника раціонального дробу. За формулами Ейлера маємо: $\operatorname{Re} f(x) = R(x)\cos\lambda x$ і $\operatorname{Im} f(x) = R(x)\sin\lambda x$. Якщо степінь чисельника раціональної функції $R(z)$ менше степеня її знаменника та $R(z)$ не має особливих точок на дійсній осі, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum_k \underset{z=z_k}{res}\, R(z)e^{i\lambda z},$$

де лишки беремо по всім полюсам у верхній півплощині $\operatorname{Im} z > 0$.

Для обчислення інтегралів вигляду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$ виділимо в останній рівності дійсну і уявну частини. Маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_k \underset{z=z_k}{res}\, R(z)e^{i\lambda z}\right) = -2\pi \operatorname{Im}\left(\sum_k \underset{z=z_k}{res}\, R(z)e^{i\lambda z}\right),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_k \underset{z=z_k}{res}\, R(z)e^{i\lambda z}\right) = 2\pi \operatorname{Re}\left(\sum_k \underset{z=z_k}{res}\, R(z)e^{i\lambda z}\right).$$

Приклад. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}dx}{1+x^2}$.

Розв'язання. Для функції $f(z) = \frac{ze^{iz}}{1+z^2}$ точки $z_1 = i$ та $z_2 = -i$ є простими полюсами, умову $\operatorname{Im} z > 0$ задовольняє тільки точка $z_1 = i$.

Отже, $\underset{z=i}{\operatorname{Res}} \frac{ze^{iz}}{1+z^2} = \lim\limits_{z\to i} \frac{ze^{iz}}{i+z} = \frac{1}{2e}$ і інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}dx}{1+x^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2e} = \frac{\pi}{e} i$.

Приклад. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos x dx}{x^4+5x^2+6}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є дійсною частиною функції $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x^4+5x^2+6}e^{ix}$, значення якої на дійсній осі співпадають із значеннями функції $f(z)=\dfrac{z+1}{z^4+5z^2+6}e^{iz}=F(z)\cdot e^{iz}$.

Знайдемо особливі точки функції $F(z)$: $z^4+5z^2+6=0,\quad z=\pm\sqrt{2}i,\ z=\pm\sqrt{3}i$.

Функція $F(z)$ є аналітичною на всій дійсній осі, вона має у верхній півплощині два простих полюси $z_1=\sqrt{2}i$ і $z_2=\sqrt{3}i$ та $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$. Тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)e^{ix}dx}{x^4+5x^2+6}=2\pi i\left(\underset{z=z_1}{res}\,f(z)+\underset{z=z_2}{res}\,f(z)\right)=$$

$$=2\pi i\left(\lim_{z\to\sqrt{2}i}\frac{(z+1)e^{iz}\left(z-\sqrt{2}i\right)}{\left(z-\sqrt{2}i\right)\left(z+\sqrt{2}i\right)\left(z^2+3\right)}+\lim_{z\to\sqrt{3}i}\frac{(z+1)e^{iz}\left(z-\sqrt{3}i\right)}{\left(z-\sqrt{3}i\right)\left(z+\sqrt{3}i\right)\left(z^2+2\right)}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\lim_{z\to\sqrt{2}i}\frac{(z+1)e^{iz}}{\left(z+\sqrt{2}i\right)\left(z^2+3\right)}+\lim_{z\to\sqrt{3}i}\frac{(z+1)e^{iz}}{\left(z+\sqrt{3}i\right)\left(z^2+2\right)}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{\left(\sqrt{2}i+1\right)e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}i}-\frac{\left(\sqrt{3}i+1\right)e^{-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}i}\right)=\pi\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}-\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\right)-i\cdot\pi\left(e^{-\sqrt{2}}+e^{-\sqrt{3}}\right).$$

Враховуючи, що $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\cos x dx}{x^4+5x^2+6}+i\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\sin x dx}{x^4+5x^2+6}=\pi\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}-\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\right)-i\cdot\pi\left(e^{-\sqrt{2}}+e^{-\sqrt{3}}\right).$$

Прирівнюючи дійсні частини, отримаємо значення заданого інтеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\cos x dx}{x^4+5x^2+6}=\pi\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}-\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\right).$$

Зауваження. При обчисленні заданого інтеграла ми також знайшли і значення інтеграла $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\sin x dx}{x^4+5x^2+6}=-\pi\left(e^{-\sqrt{2}}+e^{-\sqrt{3}}\right)$.

Основні поняття та формули

1. *Комплексні числа*

Алгебраїчна форма комплексного числа: $z = x + yi$.

Алгебраїчні операції над комплексними числами

- сума комплексних чисел: $z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$,
- добуток комплексних чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i + y_1 y_2 i^2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i,$$

- частка комплексних чисел:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Тригонометрична форма комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа, а аргумент $\arg z = \varphi$ визначається співвідношеннями

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, x > 0; \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, x < 0, y \ge 0; \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі:

– множення комплексних чисел в тригонометричній формі:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)i = \\ = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \text{ – } \textit{формула Муавра}.$$

– ділення комплексних чисел в тригонометричній формі:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Показникова форма комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$.

2. *Диференційовність функції комплексної змінної*

Умови CR (Коші-Рімана)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ або } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

3. *Елементарні функції комплексної змінної*

Ціла раціональна функція

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n, \; c_k \in C, \; k = \overline{0,n}$$

Дробово-раціональна функція

$$f(z) = \frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_m z^m}, \; c_k \in C, \; k = \overline{0,n}, \; b_i \in C, \; i = \overline{0,m}$$

Показникова функція

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Тригонометричні функції

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Логарифмічна функція

$$\omega = Lnz = \ln|z| + i\varphi + 2\pi ki, \; k \in Z, \; -\pi < \varphi \le \pi.$$

4. Інтегральна формула Коші (різні форми запису)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\,,$$

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

5. Ряд Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

де $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}$ – головна частина, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ – правильна.

6. Класифікація ізольованих особливих точок

Ізольовану особливу точку $z_0\in C$ функції $f(z)$ називають:

- усувною особливою точкою, якщо $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ існує і дорівнює скінченому числу;
- полюсом, якщо $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$;
- істотно особливою точкою, якщо $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ не існує.

7. Лишки

$$a_{-1}=\operatorname*{res}_{z=z_0}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}f(z)dz\,.$$

8. Зв'язок між лишками функції та ізольованими особливими точками

1. Якщо z_0 є усувною особливою точкою $f(z)$, то $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0}f(z)=a_{-1}=0$.

2. Якщо z_0 – простий полюс функції $f(z)$, то лишок відносно точки z_0 $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0}f(z)=a_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0}\big(f(z)(z-z_0)\big)$.

3. Якщо $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ – аналітичні функції в точці z_0, причому $\psi(z_0)=0, \quad \varphi(z_0)\neq 0, \quad \psi'(z_0)\neq 0$, то $\underset{z=z_0}{res}\, f(z)=res\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

4. Якщо z_0 – полюс m-го порядку, то ряд Лорана функції має вигляд

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \text{, а}$$

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{(m-1)}\left(f(z)(z-z_0)^m\right)}{dz^{m-1}}.$$

Завдання для індивідуальної роботи

Завдання для індивідуальної роботи містить 20 варіантів.

Завдання для індивідуальної роботи з теми:

«Функції комплексної змінної. Похідна»

1. Знайти всі значення кореня:

1. $\sqrt[4]{-1}$	11. $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$
2. $\sqrt[3]{-1}$	12. $\sqrt[3]{\dfrac{i}{8}}$
3. $\sqrt[4]{-16}$	13. $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$
4. $\sqrt[3]{-8}$	14. $\sqrt[4]{-128+128\sqrt{3}i}$
5. $\sqrt[4]{-\dfrac{1}{16}}$	15. $\sqrt[4]{\dfrac{-1}{32}-\dfrac{\sqrt{3}}{32}i}$
6. $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}}$	16. $\sqrt[3]{\dfrac{i}{27}}$
7. $\sqrt[4]{\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$	17. $\sqrt[3]{-\dfrac{i}{27}}$
8. $\sqrt[4]{\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$	18. $\sqrt[3]{-i}$
9. $\sqrt[4]{\dfrac{-1}{32}+\dfrac{\sqrt{3}}{32}i}$	19. $\sqrt[4]{-\dfrac{i}{16}}$
10. $\sqrt[3]{-8i}$	20. $\sqrt{256i}$

2. Подати в алгебраїчній формі:

2. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2i\right)$	11. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2i\right)$
3. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+2i\right)$	12. $sh\left(3+\dfrac{\pi}{6}i\right)$

4. $ch\left(2+\frac{\pi}{2}i\right)$

5. $sh\left(2+\frac{\pi}{2}i\right)$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+i\right)$

7. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$

8. $sh\left(1+\frac{\pi}{2}i\right)$

9. $ch(1-\pi i)$

10. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-5i\right)$

11. $ch\left(1+\frac{\pi}{3}i\right)$

13. $\sin\left(\frac{\pi}{6}-3i\right)$

14. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+3i\right)$

15. $sh\left(1-\frac{\pi}{3}i\right)$

16. $ch\left(2-\frac{\pi}{6}i\right)$

17. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2i\right)$

18. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-i\right)$

19. $sh(2-\pi i)$

20. $ch\left(3+\frac{\pi}{4}i\right)$

3. Зобразити область, задану нерівностями:

1. $|z-1-i|\le 1,\ \operatorname{Im} z>1,\ \operatorname{Re} z\ge 1$
2. $|z-1+i|\ge 1,\ \operatorname{Re} z<1,\ \operatorname{Im} z\le -1$
3. $|z-2-i|\le 2,\ \operatorname{Re} z\ge 3,\ \operatorname{Im} z<1$
4. $|z-1-i|\ge 1,\ 0\le \operatorname{Re} z<2,\ 0<\operatorname{Im} z\le 2$
5. $|z+i|<2,\ 0<\operatorname{Re} z\le 1$
6. $|z-i|\le 1,\ 0<\arg z<\frac{\pi}{4}$
7. $|z-i|\le 2,\ 0<\operatorname{Im} z<2$
8. $|z+i|>1,\ -\frac{\pi}{4}\le \arg z<0$

9. $|z-1-i|<1,\ |\arg z|\le \frac{\pi}{4}$

10. $1<|z-1|\le 2,\ \operatorname{Im} z\ge 0,\ \operatorname{Re} z<1$

11. $1\le |z-1|<2,\ \operatorname{Re} z\le 0,\ \operatorname{Im} z>1$

12. $|z-1|>1,\ -1\le \operatorname{Im} z<0,\ 0\le \operatorname{Re} z<3$

13. $|z+i|<1,\ -\frac{3\pi}{4}\le \arg z\le -\frac{\pi}{4}$

14. $|z-i|\le 1,\ -\frac{\pi}{2}<\arg(z-i)<\frac{\pi}{4}$

15. $z\bar{z}<2,\ \operatorname{Re} z\le 1,\ \operatorname{Im} z>-1$

16. $z\bar{z}\le 2,\ \operatorname{Re} z<1,\ \operatorname{Im} z>-1$

17. $1<z\bar{z}<2,\ \operatorname{Re} z>0,\ 0\le \operatorname{Im} z\le 1$

18. $|z-1|<1,\ \arg z\le \frac{\pi}{4},\ \arg(z-1)>\frac{\pi}{4}$

19. $|z-i|<1,\ \arg z\le \frac{\pi}{4},\ \arg(z+1-i)\le \frac{\pi}{4}$

20. $|z-2-i|\ge 1,\ 1\le \operatorname{Re} z<3,\ 0<\operatorname{Im} z\le 3$

4. Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою дійсною $u(x,y)$ чи уявною $v(x,y)$ частинами і значенням $f(z_0)$:

1. $u=x^2-y^2+x,\ \ f(0)=0$
2. $u=x^3-3xy+1,\ \ f(0)=1$
3. $v=e^x\left(y\cos y+x\sin y\right),\ \ f(0)=0$
4. $u=x^2-y^2-2y,\ \ f(0)=0$
5. $v=e^{-y}\sin x+y,\ \ f(0)=1$
6. $v=e^x\cos y,\ \ f(0)=1+i$
7. $u=e^{-y}\cos x,\ \ f(0)=1$

8. $u = y - 2xy, \; f(0) = 0$

9. $v = x^2 - y^2 + 2x + 1, \; f(0) = i$

10. $u = x^2 - y^2 - 2x + 1, \; f(0) = 1$

11. $v = 3x^2 y - y^3 - y, \; f(0) = 0$

12. $v = 2xy + y, \; f(0) = 0$

13. $v = 3x^2 y - y^3, \; f(0) = 1$

14. $u = e^x (x\cos y - y\sin y), \; f(0) = 0$

15. $u = 1 - e^x \sin y, \; f(0) = 1 + i$

16. $v = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y, \; f(0) = 2$

17. $u = e^{-y} \cos x + x, \; f(0) = 1$

18. $v = e^{-y} \sin x, \; f(0) = 1$

19. $v = x^2 - y^2 - x, \; f(0) = 0$

20. $u = x^3 - 3xy^2 - x, \; f(0) = 0$

5. Визначити тип кривої:

1. $z = 3\sec t + i2tgt$
2. $z = 2\sec t - i3tgt$
3. $z = 3tgt + i4\sec t$
4. $z = -4tgt - i2\sec t$
5. $z = 3\cos ect + i3ctgt$
6. $z = 4\cos ect - i2ctgt$
7. $z = ctgt - i2\cos ect$
8. $z = -ctgt + i3\cos ect$
9. $z = 3ch2t + i2sh2t$
10. $z = 5sh4t + i4ch4t$

11. $z = 2e^{it} + \dfrac{1}{2e^{it}}$

12. $z = 3e^{it} - \dfrac{1}{2e^{it}}$

13. $z = -2e^{it} - \dfrac{1}{e^{it}}$

14. $z = 2e^{2it} - \dfrac{1}{e^{2it}}$

15. $z = \dfrac{1+t}{1-t} + \dfrac{2+t}{2-t}i$

16. $z = \dfrac{t-1+ti}{t(t-1)}$

17. $z = \dfrac{1+t}{1-t} + \dfrac{t}{1-t}(2-4i)$

18. $z = \dfrac{2+t}{2-t} + \dfrac{1+t}{1-t}i$

19. $z = t^2 + 2t + 5 + \left(t^2 + 2t + 1\right)i$

20. $z = t - 2 + \left(t^2 - 4t + 5\right)i$

Завдання для індивідуальної роботи з теми:

«Інтеграл функції комплексної змінної»

1. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної вздовж даної кривої:

1. $\int\limits_{AB} \overline{z}^{-2} dz;\ AB: \left\{ y = x^2,\ z_A = 0,\ z_B = 1+i \right\}$

2. $\int\limits_{L} (z+1)e^{z} dz;\ L: \left\{ |z| = 1, \operatorname{Re} z \ge 0 \right\}$

3. $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz;\ AB$ – відрізок прямої, $z_A = 0,\ z_B = 2+2i$

4. $\int\limits_{AB} \left(z^2 + 7z + 1\right) dz;\ AB$ – відрізок прямої, $z_A = 1,\ z_B = 1-i$

5. $\int\limits_{ABC}|z|dz;\ ABC$ – ламана, $z_A=0,\ z_B=-1+i,\ z_C=1+i$

6. $\int\limits_{AB}\bar{z}^{-2}dz;\ AB$ – відрізок прямої, $z_A=0,\ z_B=1+i$

7. $\int\limits_{ABC}z^3e^{z^4}dz;\ ABC$ – ламана, $z_A=i,\ z_B=1,\ z_C=0$

8. $\int\limits_{ABC}\mathrm{Re}\,\frac{\bar{z}}{z}dz;\ AB:\{|z|=1,\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\},\ BC$ – відрізок, $z_B=1,\ z_C=2$

9. $\int\limits_{ABC}\left(z^2+\cos z\right)dz;\ ABC$ – ламана, $z_A=0,\ z_B=1,\ z_C=i$

10. $\int\limits_{L}\frac{\bar{z}}{z}dz;\ L$ – лінія, що обмежує область: $\{1<|z|<2,\ \mathrm{Re}\,z>0\}$

11. $\int\limits_{L}|z|\bar{z}dz;\ L:\{|z|=4,\ \mathrm{Re}\,z\ge 0\}$

12. $\int\limits_{L}|z|\,\mathrm{Re}\,z^2dz;\ L:\{|z|=R,\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\}$

13. $\int\limits_{AB}\left(3z^2+2z\right)dz;\ AB:\{y=x^2,\ z_A=0,\ z_B=1+i\}$

14. $\int\limits_{L}z\,\mathrm{Re}\,z^2dz;\ L:\{|z|=R,\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\}$

15. $\int\limits_{ABC}(z^2+1)dz;\ ABC$ – ламана, $z_A=0,\ z_B=-1+i,\ z_C=i$

16. $\int\limits_{AB}z\,\mathrm{Re}\,z^2dz;\ AB$ – відрізок прямої, $z_A=0,\ z_B=1+2i$

17. $\int\limits_{AB}(2z+1)dz;\ AB:\{y=x^3,\ z_A=0,\ z_B=1+i\}$

18. $\int\limits_{ABC}z\bar{z};\ AB:\{|z|=1,\ \mathrm{Re}\,z\ge 0,\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\},\ BC$ – відрізок, $z_B=1,\ z_C=0$

19. $\int\limits_{AB}z\,\mathrm{Im}\,z^2dz;\ AB$ – відрізок прямої, $z_A=0,\ z_B=1+i$

20. $\int\limits_{L}z|z|dz;\ L:\{|z|=1,\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\}$

2. Знайти всі розвинення в ряд Лорана даної функції за степенями z:

1. $\dfrac{z-2}{2z^3+z^2-z}$;
2. $\dfrac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$;
3. $\dfrac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$;
4. $\dfrac{2z-16}{4z^4+2z^3-8z^2}$;
5. $\dfrac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$;
6. $\dfrac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$;
7. $\dfrac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}$;
8. $\dfrac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}$;
9. $\dfrac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}$;
10. $\dfrac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}$;
11. $\dfrac{z+2}{z+z^2-2z^3}$;
12. $\dfrac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}$;
13. $\dfrac{z+4}{2z^2+3z^3-z^4}$;
14. $\dfrac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$;
15. $\dfrac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$;
16. $\dfrac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}$;
17. $\dfrac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$;
18. $\dfrac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$;
19. $\dfrac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}$;
20. $\dfrac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$.

3. Знайти всі лоранівські розвинення даної функції за степенями $z-z_0$:

1. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=1+2i$;
2. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=2-3i$;
3. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=-3-2i$;
4. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=-2+i$;
11. $\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=2+i$;
12. $\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=1-2i$;
13. $\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=-3+i$;
14. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=-1-3i$;

5. $\dfrac{z-1}{z(z+1)},\ z_0=1+3i;$

6. $\dfrac{z-1}{z(z+1)},\ z_0=2-i;$

7. $\dfrac{z-1}{z(z+1)},\ z_0=-1+2i;$

8. $\dfrac{z-1}{z(z+1)},\ z_0=-2-3i;$

9. $\dfrac{z+3}{z^2-1},\ z_0=2+i;$

10. $\dfrac{z+3}{z^2-1},\ z_0=3-i;$

15. $\dfrac{2z}{z^2+4},\ z_0=-3+2i;$

16. $\dfrac{2z}{z^2+4},\ z_0=2+3i;$

17. $\dfrac{2z}{z^2+4},\ z_0=3+2i;$

18. $\dfrac{2z}{z^2-4},\ z_0=-1+3i;$

19. $\dfrac{2z}{z^2-4},\ z_0=2+2i;$

20. $\dfrac{2z}{z^2-4},\ z_0=3-2i.$

4. Дану функцію розвинути у ряд Лорана в околі точки z_0:

1. $z\cos\dfrac{1}{z-2},\ z_0=2;$

2. $ze^{\frac{z}{z-5}},\ z_0=5;$

3. $\cos\dfrac{3z}{z-i},\ z_0=i;$

4. $\sin\dfrac{z}{z-1},\ z_0=1;$

5. $\sin\dfrac{5z}{z-2i},\ z_0=2i;$

6. $\sin\dfrac{3z-i}{3z+i},\ z_0=-\dfrac{i}{3};$

7. $z\cos\dfrac{3z}{z-1},\ z_0=1;$

8. $z\sin\dfrac{z}{z-1},\ z_0=1;$

11. $\sin\dfrac{z+i}{z-i},\ z_0=i;$

12. $ze^{\frac{1}{z-2}},\ z_0=2;$

13. $e^{\frac{z}{z-3}},\ z_0=3;$

14. $\sin\dfrac{2z}{z-4},\ z_0=4;$

15. $\sin\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2},\ z_0=2;$

16. $ze^{\frac{\pi z}{z-\pi}},\ z_0=\pi;$

17. $ze^{\frac{z}{z-4}},\ z_0=4;$

18. $z^2\sin\dfrac{z+3}{z},\ z_0=0;$

9. $\sin\dfrac{z}{z-3}$, $z_0 = 3$;

10. $z\cos\dfrac{z}{z+2i}$, $z_0 = -2i$;

19. $z\cos\dfrac{z}{z-3}$, $z_0 = 3$;

20. $z\cos\dfrac{z}{z-5}$, $z_0 = \pi$.

5. Визначити тип особливої точки $z = 0$ для даної функції:

1. $\dfrac{e^{9z}-1}{\sin z - z + \dfrac{z^3}{6}}$;

2. $z^3 e^{\frac{z}{z^2}}$;

3. $\dfrac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + \dfrac{z^2}{2}}$;

4. $\dfrac{\cos 7z - 1}{shz - z - \dfrac{z^3}{6}}$;

5. $\dfrac{ch5z - 1}{e^z - 1 - z}$;

6. $z\sin\dfrac{6}{z^2}$;

7. $\dfrac{e^z - 1}{\sin z - z + \dfrac{z^3}{6}}$;

8. $\dfrac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$;

9. $z^4\cos\dfrac{5}{z^2}$;

11. $\dfrac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + \dfrac{z^3}{6}}$;

12. $ze^{\frac{4}{z^3}}$;

13. $\dfrac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + \dfrac{z^3}{6}}$;

14. $\dfrac{e^{7z}-1}{\cos z - 1 + \dfrac{z^2}{2}}$;

15. $z\sin\dfrac{3}{z^3}$;

16. $\dfrac{\cos 5z - 1}{chz - 1 - \dfrac{z^2}{2}}$;

17. $\dfrac{sh4z - 4z}{e^z - 1 - z}$;

18. $z\ \ \cos\dfrac{2}{z^3}$;

19. $\dfrac{\sin z^4 - z^4}{shz - z - \dfrac{z^3}{6}}$;

10. $\dfrac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + \dfrac{z^2}{2}}$;

20. $\dfrac{e^{z^5} - 1}{e^z - 1 - z}$.

6. Для даної функції знайти ізольовані особливі точки та визначити їх тип:

1. $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin\frac{1}{z}}$;
2. $\dfrac{1}{\cos z}$;
3. $tg^2 z$;
4. $\dfrac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2}$;
5. $z \cdot tgz \cdot e^{\frac{1}{z}}$;
6. $ctg\dfrac{1}{z}$;
7. $tg\dfrac{1}{z}$;
8. $\dfrac{1}{e^z + 1}$;
9. $\dfrac{1}{\sin z^2}$;
10. $\dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$;
11. $\dfrac{1}{\sin z}$;
12. $\dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$;
13. $\dfrac{e^z - 1}{\sin \pi z}$;
14. $\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$;
15. $\dfrac{1}{z^2} + \sin\dfrac{1}{z^2}$;
16. $z^2 \sin\dfrac{1}{z}$;
17. $\dfrac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}$;
18. $\dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$;
19. $ctg\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2}$;
20. $\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^4 - 1}$.

7. Обчислити інтеграл:

1. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(z^2+1)};$

2. $\oint\limits_{|z-1-i|=\frac{5}{4}} \frac{2dz}{z^2(z-1)};$

3. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz;$

4. $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z}dz;$

5. $\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz;$

6. $\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2} \frac{2z(z-1)}{\sin z}dz;$

7. $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz;$

8. $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)}dz;$

9. $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}dz;$

10. $\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz;$

11. $\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{tgz+2}{4z^2+\pi z}dz;$

12. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z}dz;$

13. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2-1}{z^3}dz;$

14. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z}}+1}{z}dz;$

15. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z}dz;$

16. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1-\cos z^2}{z^2}dz;$

17. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z^2}-1}{z^3}dz;$

18. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4}dz;$

19. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2}dz;$

20. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z^2-1}{z^4}dz.$

Методичні матеріали для організації аудиторної та самостійної роботи студентів

Тема: Алгебраїчна, тригонометрична та показникові форми комплексного числа, дії над комплексними числами. Множини в комплексній області

Основні теоретичні положення до розв'язування завдань:

1. Алгебраїчна форма комплексного числа.
2. Тригонометрична форма комплексного числа, модуль і аргумент.
3. Формули Муавра.
4. Формула Ейлера.
5. Показникова форма комплексного числа.
6. Множини в комплексній області. Окіл точки.

Завдання для розв'язання:

1. Обчислити:

а) $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^2, $\sqrt{z_1}$, якщо $z_1 = -4 - 3i$, $z_2 = -1 + 2i$;

б) $\operatorname{Re} \dfrac{(1-3i)^2 - (1+i^9)^3}{(1+i^{21})^3 - (2-i)^3}$.

2. Подати числа в тригонометричній та показниковій формах і знайти їх 25 степінь:

а) $z = 1 + i^{2017}$; б) $z = -\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

3. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{-2+2i\sqrt{3}}$.

4. Зобразити множину комплексних чисел:

а) $|1+z| < |2-z|$;

б) $|z| = \operatorname{Re} z + 2$;

в) $\begin{cases} |z-5i| \ge 5 \\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

5. Яка лінія на комплексній площині задана рівнянням $z^2 + \bar{z}^2 = 1$?

Домашнє завдання:

1. Обчислити $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{18}}+\dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{18}}$.

2. Знайти та зобразити множину точок комплексної площини, що задовольняють умови:

а) $\dfrac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<3$; б) $\begin{cases}\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{2} \\ \operatorname{Im} z<0\end{cases}$.

3. За допомогою нерівностей описати множини точок комплексної площини:

а) півплощину, розташовану зліва від уявної осі;

б) третю чверть;

в) смугу шириною 2π, паралельну осі Oy;

г) зовнішню частину одиничного кола з ценром в точці i.

Тема: Функції комплексної змінної

Основні теоретичні положення до розв'язування завдань:

1. Послідовність комплексних чисел та її границя.
2. Означення функції комплексної змінної. Одно- та багатозначні функції. Однолиста функція.
3. Границя функції комплексної змінної.
4. Неперервність функції комплексної змінної.
5. Виділення дійсної та уявної частин функції комплексної змінної.

Завдання для розв'язання:

1. Довести обмеженість послідовності комплексних чисел $z_n=\dfrac{2ni}{n+i}$.

2. Довести за означенням, що число $-3i$ є границею послідовності $z_n=\dfrac{3n^2+i}{in^2-5}$.

3. Обчислити границі послідовностей:

а) $z_n = \left(\sin\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)^n + i\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n$;

б) $z_n = n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) + i\,\frac{n-1}{3n}$.

4. Виділити дійсну та уявну частини функцій:

а) $w = \frac{z-1}{z+2}$; б) $w = \frac{|z|}{\bar{z}^2}$; в) $w = ze^{iz}$.

5. За допомогою функції $w = z^3$ відобразити на площину Ouv лінію $y = x$.

6. Довести, що $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{|z^2|}$ є нескінченно віддалена точка.

7. Знайти точки розриву функції $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 2}$.

Домашнє завдання:

1. Обчислити границі послідовностей:

а) $z_n = n\sin\frac{1}{n} + i\,\frac{a^n}{n!}$, $a > 0$;

б) $z_n = \left(\sqrt{n^2 + n} - n\right) + i\,\frac{\ln(2+n)}{\ln(3+n)}$.

2. Виділити дійсну та уявну частини функцій:

а) $w = \bar{z}\,\mathrm{Re}(z-1)$; б) $w = \sin(1 + iz)$.

3. Обчислити границю функції $\lim\limits_{z\to -i} 2\arg z$.

4. Знайти точки розриву функції $w = \frac{1}{z^4 + 1}$.

5. Знайти образ кола $x^2 + y^2 + 2x - 3 - 4y + 1 = 0$ при відображенні $w = \frac{1}{z}$.

Тема: Основні елементарні функції комплексної змінної. Обчислення їх значень. Розв'язування рівнянь у комплексній області

Основні теоретичні положення до розв'язування завдань:

1. Степенева функція.
2. Експонента.
3. Тригонометричні функції та їх властивості.
4. Гіперболічні функції.
5. Логарифм комплексного числа. Логарифмічна функція.
6. Узагальнена степенева функція.

Завдання для розв'язання:

1. Обчислити:

а) $e^{i\frac{\pi}{2}}$; б) $\sin i$; в) $\cos(2+i)$;

г) i^i; д) $ch3i$; є) $Ln\left(-1-i\sqrt{3}\right)$, $\ln\left(-1-i\sqrt{3}\right)$.

2. Розв'язати рівняння:

а) $\sin\bar{z}=1-i$; б) $sh\,z=\dfrac{i}{2}$;

в) $\ln\dfrac{z+1}{i}=1$; г) $1^z=\sqrt{7}$.

Домашнє завдання:

1. Обчислити: $\cos i\dfrac{\pi}{3}$, $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{3i}$, $th(1+i)$, $Ln(-8)$.

2. Розв'язати рівняння $\sin(z-1)=i$.

Тема: Похідна функції комплексної змінної. Аналітичні функції

Основні теоретичні положення до розв'язування завдань:

1. Поняття похідної функції комплексної змінної.
2. Диференційовність функції комплексної змінної, умови Коші-Рімана.
3. Аналітичні функції.

4. Гармонічні функції.

5. Відновлення аналітичної функції за відомою її дійсною або уявною частинами.

6. Геометричний зміст модуля та аргументу похідної функції комплексної змінної.

Завдання для розв'язання:

1. Дослідити на диференційовність функцію $f(z)=\bar{z}$.

2. Використовуючи умови Коші-Рімана, знайти множини точок комплексної площини, в яких функція диференційовна та аналітична:

а) $w=\frac{z}{|z|}$; б) $w=z\operatorname{Re}z$;

в) $w=z^3-(\operatorname{Im}z)^3$; г) $w=\sin\bar{z}$.

3. Визначити, чи є функція $f(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$ гармонічною.

4. Побудувати аналітичну функцію $f(z)$ за її уявною частиною $v(x,y)=x^3-3xy^2$.

5. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту при зображенні в точці $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

Домашнє завдання:

1. Знайти множини точок комплексної площини, в яких функція диференційовна та аналітична:

а) $w=\frac{1}{z^3}$; б) $w=\ln z^2$; в) $w=ich\bar{z}$.

2. Побудувати аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною частиною $u(x,y)=arctg\frac{y}{x},\quad f(1)=0$.

3. Знайти множини точок комплексної площини, в яких коефіцієнт розтягу відображення $w=z^3-z$ дорівнює 1.

Тема: Інтеграли від функції комплексної змінної. Інтегральна формула Коші

Основні теоретичні положення до розв'язування завдань:

1. Поняття інтеграла функції комплексної змінної.
2. Основні властивості інтеграла.
3. Інтегральна теорема Коші.
4. Інтегральна формула Коші та наслідки з неї.
5. Застосування інтегральної формули Коші до обчислення інтегралів.

Завдання для розв'язання

1. Обчислити інтеграл $\int\limits_C (1+i-2\bar{z})dz$, де C – лінія, що з'єднує точки $z_1=0$ і $z_2=1+i$, якщо:

а) C – пряма,

б) C – парабола $y=x^2$,

в) C – ламана $z_1z_2z_3$, де $z_3=1$.

2. Обчислити інтеграл $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z^2dz$, якщо C: $|z|=1, -\pi\le\arg z\le 0$.

3. Обчислити інтеграли: а) $\int\limits_0^{1+i}(z^2-2iz)dz$, б) $\int\limits_0^{2i} z\,sh\,z\,dz$.

4. Визначити, в яких випадках до інтеграла $\int\limits_L \frac{dz}{z^2-4}$ можна застосувати інтегральну теорему Коші, якщо контур L задається рівнянням:

а) $|z|=\frac{1}{2}$, б) $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$,

в) $|z-1|=2$, г) $|z-2|=2$, д) $|z|=3$.

5. Використовуючи інтегральну формулу Коші, обчислити інтеграл $\int\limits_L \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)}dz$, якщо:

а) $L = \{z : |z-1| = 1\}$,

б) $L = \left\{z : |z| = \dfrac{1}{2}\right\}$,

в) $L = \{z : |z-1-i| = \sqrt{2}\}$.

6. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \dfrac{\sin z\, dz}{(z-2)^{100}}$, де $L = \{z : |z| = 3\}$.

Домашнє завдання:

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_L z \operatorname{Re} z dz$, якщо L – коло $|z| = 1$;

б) $\int\limits_L e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, якщо L – відрізок прямої, що з’єднує точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 1+i$;

в) $\int\limits_L \dfrac{(z+i)\sin^2 z dz}{z^2+9}$, де $L = \{z : |z+3| + |z-3| = 10\}$.

Тема: Розклад функції комплексної змінної у степеневий ряд. Ряд Лорана. Ізольовані особливі точки

Основні теоретичні положення до розв’язування завдань:

1. Степеневі ряди в комплексній області.
2. Ряд Тейлора для функції комплексної змінної.
3. Ряд Лорана. Правильна та головна його частини.
4. Поняття ізольованої особливої точки функції комплексної змінної.
5. Усувна особлива точка.
6. Нуль та полюс аналітичної функції, зв'язок між ними.
7. Істотно особлива точка.

Завдання для розв’язування:

1. Знайти радіус збіжності степеневого ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{n}} z^n$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left(\frac{z-\pi i}{1-2i} \right)^n$.

2. Розкласти функцію в ряд Тейлора в околі вказаної точки *a*:

а) $f(z) = e^{2z}$, $a = z - i$;

б) $f(z) = \frac{1}{z+4}$, $a = -1$;

в) $f(z) = \frac{z-1}{2z^2+5z+2}$, $a = -1$.

3. Розкласти функцію $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$ в ряд Лорана в кільці $0 < |z-1| < 2$ двома способами (за означенням і за відомими розкладами).

4. Знайти всі розклади функції $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+3)}$ в ряд Лорана в околі її особливих ізольованих точок.

Домашнє завдання:

1. Розкласти функцію $f(z) = \frac{2z-5}{z^2-5z+6}$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$.

2. Знайти всі розклади функції п.1 в ряд Лорана в околі її особливих точок.

3. Розкласти функцію $f(z) = \left(\frac{z^2}{2} - 2z + \frac{5}{2} \right) \cos \frac{1}{z-2}$ в ряд Лорана за степенями $(z-2)$ в кільці $0 < |z-2| < \infty$.

Тема. Лишки та їх застосування до обчислення інтегралів

Основні теоретичні положення до розв'язування завдань:

1. Поняття лишку функції.

2. Обчислення лишків.
3. Застосування лишків до обчислення інтегралів по замкненому контуру.
4. Обчислення визначених інтегралів виду $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$.
5. Обчислення невласних інтегралів.

Завдання для розв'язування:

1. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ і визначити їх характер:

а) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$;

б) $f(z) = \dfrac{z^6}{(z+1)(z^2+4)}$;

в) $f(z) = \dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$;

г) $f(z) = \dfrac{z-\pi}{\sin 2z - 2\sin z}$;

д) $f(z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{e^z - 1}$.

2. Знайти головну частину розвинення функції в ряд Лорана в околі точки a і визначити тип цієї особливої точки:

а) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$, $a = 0$;

б) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $a = i$;

в) $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z-1}$, $a = 1$.

3. Знайти лишок функції $f(z)$ у вказаній точці a:

а) $f(z) = \dfrac{z^2+7z}{z^2-z-2}$, $a = -1$;

б) $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$, $a=\infty$;

в) $f(z)=\dfrac{2\cos z-\cos^3 z}{\sin z}$, $a=\pi$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{z\left(e^{2z}-1\right)}$, $a=0$;

д) $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$, $a=1$.

4. Знайти лишки функції $f(z)$ в усіх її скінченних особливих точках:

а) $f(z)=\dfrac{z^4}{1+z^4}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(z-\pi)}$.

5. Обчислити інтеграли:

а) $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{z^4dz}{e^z+1}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^4}dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx,\quad \alpha\in R$.

Домашнє завдання:

1. Обчислити інтеграли:

а) $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{z^2}{z^2-9}\sin\dfrac{1}{z}dz$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xe^{ix}dx}{1+x^2}$.

Зразок варіанту контрольної роботи

1. Зобразити область комплексної площини, задану нерівностями:

$|z-1|>1,\ -1\le \operatorname{Im} z<0,\ 0\le \operatorname{Re} z<3$.

2. Відновити аналітичну в околі z_0 функцію $f(z)$ за відомою її дійсною частиною $u(x,y)$ та значенням $f(z_0)$: $u(x,y)=x^2-y^2+x,\quad f(0)=0$.

3. Знайти всі лоранівські розклади даної функції за степенями $z-z_0$:

$f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)},\quad z_0=1+2i$.

4.Обчислити інтеграл двома способами: $\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{tgz+2}{4z^2+\pi z}dz$.

Список рекомендованої літератури

1. Ahlfors L. Complex analysis / L. Ahlfors. N.J. : Kluver, 1981. 317 p.

2. Балк М.Б., Петров В.А., Полухин А.А. Задачник-практикум по теории аналитических функций. М., Просвещение, 1976. 136 с.

3. Білоколос Є.Д., Шека Д.Д. Збірник задач з комплексного аналізу: Навчальний посібник для студентів природничих факультетів. К., 2004. 57 с.

4. Бохан К.А. и др. Курс математического анализа. Т.2. Учеб. пособие для студентов заочников физ.-мат. фак-тов ин-тов. / под ред. проф. Б.З.Вулиха. М., Просвещение, 1972. 440 с.

5. Гольберг А.А., Шеремета М.М., Заболоцький М.В., Скасків О.Б. Комплексний аналіз. Львів, Афіша, 2002. 242с.

6. Грищенко О.Ю. та ін. Теорія функцій комплексної змінної: Розв'язування задач: Навч. посібник. Київ, Вища шк., 1994. 375 с.

7. Грищенко О.Ю., Ляшко С.І. Теорія функцій комплексної змінної. Київ, 2009. 495 с.

8. Грищенко О.Ю., Нагнібіда М.І., Настасієв П.П. Теорія функцій комплексної змінної. Розв'язування задач. Київ, Вища школа. 1994. 375 с.

9. Давидов М.О. Елементи теорії функцій комплексної змінної: Навчальний посібник. К., Рад. школа, 1968. 212 с.

10. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 3. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. К.: Вища шк., 1992. 359 с.

11. Єжов С. М., Разумова М.А. Теорія функцій комплексної змінної: навч. посіб. для студентів фізичних спеціальностей університетів К., Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. 191 с.

12. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз: Підручник. К., Вища школа, 2008. 421 с.

13. Капшивий О.О., Кириченко А.М. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Теорія функцій комплексної змінної» для студентів механіко-математичного факультету. Київ, 1992. 60 с.

14. Комплексний аналіз. Розрахункова робота [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів спеціальністі 111 ”Математика” / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В. В. Дрозд, Н. М. Задерей, П. В. Задерей, І. І. Голіченко. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. 110 с.

15. Комплексний аналіз. Приклади і задачі : навч. посібник / В.Г. Самойленко, В.А. Бородін, Г.В. Верьовкіна, А.В. Ловейкін, І.Б. Романенко; за ред. В.Г. Самойленка. Київ, 2010. 224 с.

16. Краєвський В.О. Функції комплексної змінної. Вінниця, Вид-во Вінницького ун-ту, 2013. 142 с.

17. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М., Наука, 1965. 736 с.

18. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. Ч 2. К., Вища школа, 1992. 495 с.

19. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М., 1957. 335 с.

20. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посібник / Л.І.Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко та ін. К., Вища шк., 2003. Ч.2. 470 с.

21. Мельник Т. А. Комплексний аналіз : підручник / Т. А. Мельник. К., ВПЦ "Київський університет", 2015. 192 с.

22. Павленко А.В., Кагадій Л.П., Копорулін В.Л. Теорія функцій комплексної змінної: Навч. посібник. Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. 188 с.

23. Павленко А.В., Кагадій Л.П., Копорулін В.Л. Теорія функцій комплексної змінної. Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. 188 с.

24. Привалов И.И. Введение в теорию функцій комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 432 с.

25. Сборник задач по теории аналитических функций / под ред. А.Евграфова. М., Наука, 1972. 415 с.

26. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1989. 480 с.

27. Хапланов М.Г. Теория функций комплексного переменного. М., Просвещение, 1965. 208 с.

28. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969. 576 с.

29. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч. 2. К.: Вища шк., 2005. 510 с.

30. Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометри. М., Госд. изд. физ-матем. л-ры, 1963. 192 с.

Навчальне видання

Мартиненко Олена Вікторівна

Чкана Ярослав Олегович

Вибоані питання теорії аналітичних функцій

Навчально-методичний посібник

(Українською мовою)

Суми: СумДПУ, 2024

Свідоцтво ДК №231 від 02.11.2000 р.

Комп'ютерний набір та верстка Чкана Я.О.

Редактор Мартиненко О.В.

Здано в набір 01.02.2012 Підписано до друку 1.09.12

Формат 60×84/16. Гарн. Times New Roman. Папір друк. Друк ризогр. Умовн. друк. арк. 4. Обл.-вид. арк.. Тираж 100.

СумДПУ імені А.С.Макаренка

40002 Суми, вул. Роменська, 87

Виготовлено на обладнанні СумДПУ ім. А.С.Макаренка