Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-3-004 УДК 378.147

ФУНДУВАННЯ ЗНАНЬ У СИСТЕМІ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ПРИ ВИВЧЕННІ МЕТОДУ МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Тетяна ЛУКАШОВА
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
tanya.lukashova2015@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1465-9530

Марина ДРУШЛЯК ✉
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
marydru@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0002-9648-2248

Юрій ХВОРОСТІНА
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
khvorostina13@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8354-944X

KNOWLEDGE FOUNDATION IN THE SYSTEM OF PROFESSIONAL TRAINING OF PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS IN STUDYING THE MATHEMATICAL INDUCTION METHOD

Tetiana LUKASHOVA
Sumy State Pedagogical University named after A. S. Makarenko, Ukraine
tanya.lukashova2015@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1465-9530

Marina DRUSHLYAK ✉
Sumy State Pedagogical University named after A. S. Makarenko, Ukraine
marydru@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0002-9648-2248

Yurii KHVOROSTINA
Sumy State Pedagogical University named after A. S. Makarenko, Ukraine
khvorostina13@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8354-944X

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Одним з основоположних дидактичних принципів в системі професійної підготовки майбутніх учителів математики є принцип фундування, який передбачає нелінійний характер накопичення математичних знань та створення умов для поетапного поглиблення та розширення шкільних знань у напрямі професіоналізації та формування цілісної системи наукових та методичних знань. Вивчення основних змістових ліній різних математичних курсів у підготовці вчителів математики має спіралеподібний характер та ґрунтується на відповідних базових поняттях та методах, які вивчаються у шкільному курсі математики.*

Матеріали і методи. *Для досягнення мети були використані методи теоретичного рівня наукового пізнання: аналіз наукової літератури, синтез, формалізація наукових джерел, опис, зіставлення, узагальнення власного досвіду. Для розгортання спіралі фундування знань використано освітні програми «Середня освіта (Математика. Інформатика)» першого (бакалаврського) та другого (магістерського) рівнів вищої освіти Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка.*

Результати. *Описано рівні фундування знань. На першому рівні фундування студенти розглядають класичну схему методу математичної індукції та знайомляться зі схемами методів узагальненої та узагальнено-посиленої індукції. На другому рівні фундування відбувається теоретичне узагальнення знань, отриманих на попередньому етапі, студенти активно використовують різні схеми методу математичної індукції як при доведенні математичних тверджень (теорем, властивостей), так і при розв'язуванні задач. На третьому рівні фундування метод індукції вивчається в контексті методичного обґрунтування та застосувань у шкільному курсі математики. Четвертий (прикладний) рівень фундування передбачає аналіз розвитку методу математичної індукції, його схем та модифікацій в історичному контексті, а також застосування методу математичної індукції та його модифікацій до розв'язування прикладних задач.*

ABSTRACT

Formulation of the problem. *One of the fundamental didactic principles in the system of professional training of pre-service mathematics teachers is the foundation principle, which provides for the non-linear nature of the accumulation of mathematical knowledge and the creation of conditions for the gradual deepening and expansion of school knowledge in the direction of professionalization and the formation of a complete system of scientific and methodical knowledge. The study of the main content lines of various mathematics courses in pedagogical institutions of higher education has a spiral character and is based on the relevant basic concepts and methods studied in the school mathematics course.*

Materials and methods. *To achieve the goal, methods of the theoretical level of scientific knowledge were used: analysis of scientific literature, synthesis, formalization of scientific sources, description, comparison, generalization of own experience.*

Results. *The unfolding of the spiral of knowledge foundation of students of mathematical specialties of pedagogical institutions of higher education is illustrated by the example of studying the mathematical induction method, based on the educational programs "Secondary education (Mathematics. Informatics)" of the first (bachelor's) and second (master's) levels of higher education of Sumy State Pedagogical University named after A. S. Makarenko. At the first foundation level, students consider the classical scheme of the mathematical induction method and get acquainted with the schemes of the methods of generalized and generalized-enhanced induction. At the second level of foundation, there is a theoretical generalization of the knowledge obtained at the previous stage, students actively use various schemes of the method of mathematical induction both when proving mathematical statements (theorems, properties) and when solving problems. At the third foundation level, the induction method is studied in the context of methodological reasoning and applications in the school mathematics course. The fourth (applied) level of foundation involves the analysis of the development of the method of mathematical induction, its schemes, and modifications in the historical context, as well as the application of the method of mathematical induction and its modifications to solving applied problems.*

Для цитування:

Лукашова Т., Друшляк М., Хворостіна Ю. Фундування знань у системі професійної підготовки майбутніх учителів математики при вивченні методу математичної індукції. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 3. С. 29-35. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-3-004

Лукашова, Т., Друшляк, М., & Хворостіна, Ю. (2023). Фундування знань у системі професійної підготовки майбутніх учителів математики при вивченні методу математичної індукції. *Фізико-математична освіта*, 38(3), 29-35. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-3-004

For citation:

Lukashova, T., Drushlyak, M., & Khvorostina, Yu. (2023). Knowledge foundation in the system of professional training of pre-service mathematics teachers in studying the mathematical induction method. *Physical and Mathematical Education*, 38(3), 29-35. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-3-004

Lukashova, T., Drushlyak, M., & Khvorostina, Yu. (2023). Funduvannia znan u systemi profesiinoi pidhotovky maibutnikh uchyteliv matematyky pry vyvchenni metodu matematychnoi induktsii [Knowledge foundation in the system of professional training of pre-service mathematics teachers in studying the mathematical induction method]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(3), 29-35. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-3-004

✉ Corresponding author

Висновки. *Приклад впровадження принципа фундування при вивченні методу математичної індукції підтверджує важливість усвідомлення майбутніми вчителями математики важливості формування, накопичення та поглиблення знань не лише у контексті вивчення фундаментальних понять, а й математичних методів для професійної діяльності та розуміння міжпредметних зв'язків. Проєктування навчальних дисциплін з урахуванням принципу фундування основних математичних понять та методів дає можливість студенту вибирати траєкторію своєї майбутньої діяльності – це не тільки робота за фахом, а й виконання фундаментальних та прикладних досліджень, експериментальних розробок під час навчання в аспірантурі.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: фундування знань; спіраль фундування; майбутні вчителі математики; професійна підготовка майбутніх учителів математики; метод математичної індукції.

Conclusions. *The example of the implementation of the principle of foundation when studying the method of mathematical induction confirms the importance of awareness by future teachers of mathematics of the importance of forming, accumulating, and deepening knowledge not only in the context of studying fundamental concepts but also mathematical methods for professional activity and understanding interdisciplinary connections. The design of educational disciplines taking into account the principle of the foundation of basic mathematical concepts and methods gives the student the opportunity to choose the trajectory of his future activity - this is not only working by profession but also the performance of fundamental and applied research, experimental development during graduate studies.*

KEYWORDS: knowledge foundation; pre-service mathematics teachers; professional training of pre-service mathematics teachers; mathematical induction method.

ВСТУП

Постановка проблеми. Ефективна організація професійної підготовки майбутніх учителів математики вимагає реалізації низки важливих для математичної діяльності дидактичних принципів. Основоположну роль при цьому відіграють принципи цілісності, систематичності, наступності, активності та свідомості. Останнім часом, коли мова йде про фахову підготовку майбутніх вчителів математики, ці принципи доповнюють принципом фундування, який передбачає нелінійний характер накопичення математичних знань та створення умов для поетапного поглиблення та розширення шкільних знань у напрямі професіоналізації та формування цілісної системи наукових та методичних знань.

Вивчення основних змістових ліній різних математичних курсів в педагогічних закладах вищої освіти має спіралеподібний характер та ґрунтується на відповідних базових поняттях та методах, які вивчаються у шкільному курсі математики. При цьому відбувається повернення до вже вивчених об'єктів та методів, але на більш високому рівні узагальнення та абстракції, внаслідок чого елементи нового знання, базуючись на попередніх, утворюють новий виток у інтелектуальному розвитку й фаховій підготовці студента-математика. Найпростішим прикладом фундування є розвиток поняття вектора: спочатку в шкільному курсі математики поняття «вектор» має такий зміст – «напрямлений відрізок на площині або у просторі»; далі в курсах лінійної алгебри та аналітичної геометрії формується уявлення про вектор як впорядкований набір *n* чисел, згодом – як елемент лінійного простору (при цьому властивості векторів описуються вже аксіоматично – через систему аксіом лінійного простору), і, нарешті, – як окремий випадок більш загального поняття – тензора.

Незважаючи на активізацію наукових досліджень у цьому напрямку в останні роки, проблема фундування основних математичних понять і, особливо, методів у фаховій підготовці майбутніх вчителів математики вивчена недостатньо і потребує подальшої розробки.

Аналіз актуальних досліджень. Уперше ідея фундування знань була окреслена у роботах В. Д. Шадрікова та Є. І. Смірнова (2002). Зокрема, Є. І. Смірнов (2013) розглядає фундування знань як процес створення умов для поетапного поглиблення та розширення шкільних знань у напрямку професіоналізації та формування цілісної системи наукових та методичних знань, професійно-педагогічної діяльності. Принциповою відмінністю принципу фундування є визначення основи для спіралевидної схеми моделювання базових знань, умінь, навичок математичної підготовки учнів, їх системний та узагальнений характер.

М. М. Ковтонюк (2012) робить акцент на тому, що розвиток основних змістових ліній математичних дисциплін у педагогічних закладах вищої освіти спирається на вивчення основних понять шкільного курсу математики та логічно їх продовжує з наступним теоретичним узагальненням структурних одиниць, які розкривають цілісність, сутність, трансдисциплінарні зв'язки та спрямовані на інтелектуальний розвиток майбутніх вчителів математики.

О. А. Жерновнікова (2014) відзначає, що принцип фундування відіграє одну з провідних ролей у побудові цілісної дидактичної системи математичної освіти майбутнього вчителя математики. Зокрема, проєктування прикладного модуля такої системи «визначається наступними завданнями: забезпечення мотивацією спіралей фундування блоку прикладних задач; конкретизація теоретичних знань, як практичного розуміння; обґрунтування практичного вміння по спіралі: вміння – навички; науковий ретроспективний погляд на шкільну математику; розв'язування прикладних задач природничих і суміжних наук; конкретизація як наочно-модельна ілюстрація теоретичних знань; конкретизація як методична функція теоретичного знання; конкретизація як дослідницька функція нового теоретичного знання; конкретизація теоретичних знань (понять, теорем, алгоритмів тощо), як чинник засвоєння».

Зауважимо, що автори вже зверталися до проблеми впровадження принципу фундування знань у систему професійної підготовки майбутніх учителів математики, зокрема, при вивченні функціональної змістової лінії (Лукашова & Друшляк, 2022) та узагальненні поняття похідної (Шишенко та ін., 2022).

Мета статті. Обґрунтувати необхідність впровадження (можливість реалізації) принципа фундування знань майбутніх учителів математики в систему їх професійної підготовки на прикладі побудови спіралі фундування при вивченні методу математичної індукції.

Мета статті: деталізувати особливості фундування знань майбутніх учителів математики при вивченні методу математичної індукції.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення мети були використані методи теоретичного рівня наукового пізнання: аналіз наукової літератури, синтез, формалізація наукових джерел, опис, зіставлення, узагальнення власного досвіду.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Згідно (Жерновникова, 2014; Ковтонюк, 2012) принцип фундування шкільних математичних елементів (математичних понять та методів) в процесі математичної підготовки студентів передбачає розгортання наступних компонентів:

– визначення змісту рівнів базового шкільного навчального елементу (знання, вміння, навички, математичні методи);

– визначення вмісту рівнів та етапів (професійного, фундаментального і спеціального) розгортання базового університетського навчального елементу;

– визначення технології фундування (діагностується цілепокладання, наочне моделювання рівнів глобальної структури, локальної модельності, управління пізнавальною і творчою діяльністю студентів, блоки мотивації базових навчальних елементів);

– визначення методичної адекватності базових шкільних та університетських навчальних елементів на основі сучасних методологічних концепцій.

У Державних Стандартах шкільної математичної освіти визначено вісім змістових ліній шкільного курсу математики, на основі яких виділяються вихідні об'єкти фундування для подальшого їх вивчення, узагальнення і реалізації міждисциплінарних зв'язків у педагогічних ЗВО. При цьому кожна змістова лінія визначає базові поняття і методи, розподілені за оптимальним набором навчальних дисциплін, що включені до підготовки майбутніх учителів математики. Важливим є те, що всі базові шкільні знання включаються у перелік навчальних елементів підготовки студентів-математиків і переведення їх із бази даних (тобто, формального оперування у шкільному курсі математики) у базу предметних і професійних компетентностей майбутнього вчителя математики.

Для ілюстрації впровадження принципу фундування знань студентів математичних спеціальностей педагогічних ЗВО будемо використовувати загальну модель, запропоновану М. М. Ковтнюк (2012), на базі освітніх програм «Середня освіта (Математика. Інформатика)» першого (бакалаврського) (https://cutt.ly/i71GBvf) та другого (магістерського) (https://cutt.ly/U71G9jC) рівнів вищої освіти Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка.

Віднесемо на перший – базовий рівень фундування навчальні дисципліни «Елементарна математика» ($ОК_Б$ 20), «Аналітична геометрія» ($ОК_Б$ 17), «Лінійна алгебра» ($ОК_Б$ 11), «Математичний аналіз» ($ОК_Б$ 13), які вивчаються переважно на першому та на другому курсах бакалаврату.

До другого рівня фундування, який визначає рівень теоретичного узагальнення (це, зазвичай, 3–7 семестри освітнього рівня «бакалавр»), віднесемо навчальні дисципліни – «Алгебра і теорія чисел» ($ОК_Б$ 10), «Комплексний аналіз» ($ОК_Б$ 15), «Дискретна математика» (вибіркова дисципліна – ВД), «Проєктивна геометрія та методи зображень» ($ОК_Б$ 18), «Математична логіка і теорія алгоритмів» ($ОК_Б$ 19), «Теорія ймовірностей і математична статистика» ($ОК_Б$ 16), «Диференціальні рівняння» ($ОК_Б$ 14), «Диференціальна геометрія і топологія» (ВД), «Функціональний аналіз» (ВД), «Основи геометрії» (ВД), «Числові системи» ($ОК_Б$ 12).

Третій рівень – рівень методичного обґрунтування та спеціалізації (це, в основному, 7-8 семестри освітнього рівня «бакалавр» та 1-3 семестри освітнього рівня «магістр»). Він включає різні практикуми розв'язування задач шкільного курсу математики, курси «Методика навчання математики» ($ОК_Б$ 21, $ОК_М$ 6), «Олімпіадна математика» ($ОК_М$ 5), «Навчання математики з комп'ютерною підтримкою» (ВД), «Наукові основи шкільного курсу математики» (ВД), різноманітні вибіркові дисципліни з розв'язування задач підвищеної складності, педагогічні практики.

На четвертому, прикладному, рівні (це 7-8 семестри освітнього рівня «бакалавр» та 1-2 семестри освітнього рівня «магістр») вивчається моделювання реальних процесів, в тому числі, освітніх, математичними методами. До цього рівня відносяться курси «Історія математики» (ВД), «Теорія ігор» (ВД), різні вибіркові курси прикладного характеру, комп'ютерне моделювання в математиці тощо.

Проілюструємо розгортання спіралі фундування на прикладі вивчення методу математичної індукції.

Як відомо, загальні висновки, отримані на підставі вивчення окремих випадків, називають індуктивними, а сам метод таких міркувань – індуктивним методом або індукцією. Індуктивні міркування досить поширені як у математиці, так і в інших науках. При цьому виділяють кілька методів, що ґрунтуються на індукції. Метод міркувань, при якому загальний висновок робиться на основі дослідження усіх можливих випадків, називається повною індукцією. Цей метод використовується, якщо число випадків скінченне і порівняно невелике (його ще називають методом повного перебору).

При доведенні математичних тверджень часто виникає ситуація, коли кількість випадків нескінченна, а само твердження залежить від натурального числа n. У цьому разі застосовується один із спеціальних методів доведення математичних тверджень – *метод математичної індукції*, який ґрунтується на *принципі математичної індукції*: *якщо твердження* $\mathrm{T}(n)$, *що залежить від натурального числа* n, *істинне для* $n = 1$ (*або для* $n = n_0$, де $n_0 \in \mathbb{N}$), *та з припущення про те, що воно істинне при* $n = k$ *випливає його істинність для натурального числа* $n = k + 1$, *то це твердження істинне при всіх натуральних значеннях* n (*при всіх натуральних* $n \geq n_0$).

Принцип математичної індукції спирається так звану на аксіому індукції – одну з аксіом арифметики натуральних чисел (аксіом Пеано), яка є ключовою при доведенні асоціативності та комутативності додавання і множення, розподільного закону множення відносно додавання натуральних чисел та впорядкованості множини натуральних чисел.

Практичне використання принципу математичної індукції здійснюється за наступною схемою:

1) перевіряють істинність твердження $\mathrm{T}(n)$ при $n = 1$ (відповідно, при $n = n_0 \geq 1$);

2) припускають, що воно істинне для всіх натуральних $n = k \geq 1$ $(n = k \geq n_0)$ і на основі цього доводять, що твердження є істинним для $n = k + 1$;

3) роблять висновок, що твердження $\mathrm{T}(n)$ є істинним для всіх натуральних n (відповідно, для всіх $n \geq n_0$).

Іноді цей метод називають *методом повної математичної індукції* (Нікулін&Кукуш, 1999). Метод математичної індукції є строгим дедуктивним методом доведення (тобто, спирається на аксіоми і раніше встановлені тверджень) і лише на першому кроці, що називається базою індукції, включає в себе елемент індукції – перевірку істинності твердження для найменшого допустимого значення n_0.

Окрім наведеної вище схеми методу математичної індукції використовуються й інші, еквівалентні їй форми. Одна з них полягає у виконанні наступних кроків:

1) перевіряють істинність твердження $\mathrm{T}(n)$ при $n = 1$ (відповідно, при $n = n_0 \geq 1$);

2) припускають, що воно істинне для всіх натуральних $k < n$ (відповідно, $n_0 \leq k < n$) і на основі цього доводять, що твердження є істинним для $n = k$;

3) роблять висновок про істинність твердження $\mathrm{T}(n)$ для всіх натуральних n (відповідно, для всіх $n \geq n_0$).

Останню схему іноді називають методом посиленої (відповідно, посилено-узагальненої) математичної індукції.

Зазначимо, що раніше метод математичної індукції вивчався в закладах загальної середньої освіти у курсі «Алгебра і початки аналізу» (Колмогоров та ін., 1979), проте згодом був вилучений із шкільної програми з математики і зараз розглядається лише у класах з поглибленим вивченням математики (Мерзляк, Полонський&Якір, 2021).

Виділимо основні дисципліни, а також відповідні компоненти (компетенції, уміння, знання), які формуються у студентів в ході вивчення методу математичної індукції на кожному з вказаних вище рівнях фундування знань.

На ***першому рівні*** студенти розглядають класичну схему методу математичної індукції та знайомляться зі схемами методів узагальненої та узагальнено-посиленої індукції. Наприклад, в курсі «Елементарна математика» розглядаються основні типи задач на використання методу математичної індукції – це задачі на доведення подільності, тотожностей та нерівностей, в яких умова задачі залежить від натурального параметра n. У курсі «Математичний аналіз» методом математичної індукції доводяться деякі тотожності, наприклад, формула бінома, розв'язуються деякі приклади з теорії границь та теорії рядів. У курсі «Лінійна алгебра» математична індукція використовується як метод доведення цілої низки теорем та задач у теорії матриць та визначників, теорії n-вимірних лінійних просторів.

На ***другому рівні*** фундування відбувається теоретичне узагальнення знань, отриманих на попередньому етапі. Студенти активно використовують різні схеми методу математичної індукції як при доведенні математичних тверджень (теорем, властивостей), так і при розв'язуванні задач. Наприклад, цей метод широко застосовується в курсі «Алгебра та теорія чисел» при доведенні низки теорем теорії чисел (наприклад, теореми про зображення натурального числа у різних системах числення, теореми про ділення з остачею) та теорії многочленів (теорема про ділення з остачею – індукція виконується по степеню многочлена) і є обов'язковим для доведення подільності, в якій фігурує натуральний параметр n. Різні схеми математичної індукції можна застосовувати для аналізу тверджень, які залежать від кількох натуральних параметрів. Тоді їх застосовують спочатку по одній змінній, а потім по другій (вважаючи при цьому іншу змінну фіксованою).

Метод математичної індукції є гарним інструментом обґрунтування тверджень, які вивчаються в курсі «Дискретна математика». Цей метод активно використовується при доведенні низки тверджень теорії множин; при вивченні комбінаторних сполук, послідовностей, заданих рекурентно (з метою виключення рекурсії) та рекурентних співвідношень, біноміальної та поліноміальної теорем, вивченні властивостей чисел Фібоначчі, в теорії графів, в яких умова включає натуральний параметр n. Слід зазначити, що в теорії графів індуктивні міркування є природними і проводяться або за числом вершин, або числом ребер графа (зокрема, це теорема про кількість ребер дерева, найменше число ребер зв'язного n-вершинного графа тощо.

При вивченні рекурентних співвідношень і встановленні властивостей членів послідовностей, заданих рекурентно, використовується ще одна модифікація методу математичної індукції, в якій база індукції складається з перевірки k тверджень, а висновок про істинність $(n + k)$-го твердження $\mathrm{T}(n + k)$ робиться на основі істинності k попередніх тверджень $\mathrm{T}(n), \mathrm{T}(n + 1), \ldots, \mathrm{T}(n + k - 1)$.

Ще одне важливе узагальнення методу математичної індукції, яке розглядається в курсах «Дискретної математики» та «Функціонального аналізу» при вивченні потужності множин – це *трансфінітна індукція*, яка працює за тією ж схемою, що й метод математичної індукції, але для кардинальних чисел.

На другому рівні фундування в рамках курсу «Числові системи» студенти розглядають аксіоматичну теорію натуральних чисел (на базі системи аксіом Пеано). Одна з аксіом Пеано – аксіома індукції – еквівалентна принципу математичної індукції, який закладено в основу методу математичної індукції. Саме при вивченні курсу «Числові системи» студенти усвідомлюють ту роль, яку відіграє аксіома індукції у побудові системи натуральних чисел.

На цьому етапі викладачі фундаментальних математичних курсів мають чітко розуміти і доводити до студентів те, «як пов'язуються питання навчальної дисципліни з курсом математики середньої школи, розкривати, навіщо вивчається те чи інше питання, як воно пов'язане з майбутньою діяльністю вчителя математики, … співставляти … шкільний і вузівський варіанти викладу того чи іншого розділу, введення того чи іншого поняття. Це дозволить студенту подивитися іншими очима на навчальну дисципліну, оскільки кожний математичний курс буде здійснювати свій внесок у справу оволодіння майбутнім учителем своєю професією якщо не на рівних з методикою навчання математики, то принаймні у співрозмірних частинах» (Ковтонюк, 2012).

На ***третьому рівні*** фундування метод математичної індукції вивчається в контексті методичного обґрунтування та застосувань у шкільному курсі математики. Із загально-методичних позицій він розглядається в курсі «Методика навчання математики», «Олімпіадна математика», різних вибіркових дисциплін з розв'язування задач шкільного курсу математики та задач підвищеної складності. При цьому акцент робиться на методичний аналіз використання даного метода, можливі помилки учнів при його застосуванні, розв'язуванні завдань із використанням методу математичної індукції в шкільному курсі математики.

Досить широкий спектр можливостей вивчення методу математичної індукції та його модифікацій дають спецкурси, пов'язані з розв'язуванням олімпіадних задач. Окрім наведених вище схем методу математичної індукції, в рамках таких спецкурсів корисно розглянути так звану зворотну індукцію, або «індукцію вниз». У такому випадку індуктивний крок полягає у доведенні істинності твердження $\mathrm{T}(n - 1)$ за припущення, що істинним є твердження $\mathrm{T}(n)$. Процедура такого доведення аналогічна застосування індуктивного переходу від $\mathrm{T}(n)$ до $\mathrm{T}(n + 1)$, а сам метод застосовується до доведення того, що твердження не має місця при жодному натуральному n. Справді, якщо припустити, що твердження $\mathrm{T}(n)$ істинне при деякому $n_0 \geq 2$, послідовно одержуємо, що воно правильне й для усіх $n \leq n_0$. Якщо при цьому виявиться, що твердження $\mathrm{T}(1)$ хибне, приходимо до протиріччя. Отже, твердження $\mathrm{T}(n)$ хибне для всіх натуральних n.

На спецкурсах по розв'язуванню задач підвищеної складності та олімпіадних задач корисно розглянути ще одну модифікацію методу математичної індукції, відому як *метод Малікова* (Кукуш, 2008). Цей метод дозволяє спростити міркування на етапі індуктивного переходу. Наведемо застосування цього методу для доведення подільності, тотожностей та нерівностей. При цьому для кожного із вказаних типів задач буде використовуватись відповідний алгоритм.

Метод Малікова для доведення подільності

Нехай $a_n \in Z, n \in N_0 = N \cup \{0\},\ m \in N$ *і виконуються умови*:

1. $a_k \vdots m$
2. $(a_{n+1} - a_n) \vdots m$ *при* $n \geq k$.

Тоді $a_n \vdots m$ *при всіх* $n \geq k$.

Справді, за першою умовою $a_k = mt, t \in Z$. З умови 2 маємо $(a_{n+1} - a_n) \vdots m$ для всіх $n \geq k$. Надаючи n значень від k до $n - 1$, дістанемо: $(a_{k+1} - a_k) \vdots m, (a_{k+2} - a_{k+1}) \vdots m ,..., (a_n - a_{n-1}) \vdots m$. Тобто, існують цілі числа $t_1, ..., t_{n-k}$, що

$$a_{k+1} - a_k = mt_1, a_{k+2} - a_{k+1} = mt_2 ,..., a_n - a_{n-1} = mt_{n-k}.$$

Додаючи отримані рівності, одержимо: $a_n - a_k = m(t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-k}) = ml$, де $l \in Z$. Отже, $a_n = a_k + ml = m(t + l)$, і $a_n \vdots m$ при всіх $n \geq k$.

Проілюструємо наведений метод на прикладах.

Приклад 1. Довести, що $(10^n - 9n - 1) \vdots 81$ для всіх $n \in N$.

Нехай $a_n = 10^n - 9n - 1$.

1. $a_1 = 10^1 - 10 = 0 \vdots 81$.
2. $a_{n+1} - a_n = 10^{n+1} - 9(n+1) - 1 - (10^n - 9n - 1) = 9 \cdot (10^n - 1) = 9 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n} \vdots 81$.

Отже, $a_n = (10^n - 9n - 1) \vdots 81$ для всіх $n \in N$.

Приклад 2. Довести, що для всіх $n \in N_0$ виконується $((k^2+1)^n - k^2 n - 1) \vdots k^4$, де $k \in N, k \geq 2$.

Покладемо $a_n = (k^2+1)^n - k^2 n - 1$.

1. $a_0 = (k^2+1)^0 - 1 = 0 \vdots k^4$.
2. $a_{n+1} - a_n = (k^2+1)^{n+1} - k^2(n+1) - 1 - ((k^2+1)^n - k^2 n - 1) = k^2((k^2+1)^n - 1) =$
$k^2((k^2+1) - 1)((k^2+1)^{n-1} + (k^2+1)^{n-2} + \ldots + 1) = k^4((k^2+1)^{n-1} + (k^2+1)^{n-2} + \ldots + 1) \vdots k^4$.

Отже, $a_n = (k^2+1)^n - k^2 n - 1 \vdots k^4$ для всіх $n \in N_0$.

Метод Малікова для доведення тотожностей буде спиратися на наступні два алгоритми.

Алгоритм 1. *Нехай* $n \in N_0$ *і виконуються умови*

1. $a_k = b_k$ для $k \geq 0$
2. $a_{n+1} - a_n = b_{n+1} - b_n$ *при* $n \geq k$.

Тоді $a_n = b_n$ *для всіх* $n \geq k$.

Алгоритм 2. *Нехай* $n \in N_0$ *і виконуються умови*

1. $a_k = b_k$ для $k \geq 0$
2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *при* $n \geq k$

Тоді $a_n = b_n$ *для всіх* $n \geq k$.

Слід зазначити, що аналогічні міркування можна застосувати й для доведення нерівностей (достатньо замінити знак рівності знаком потрібної нерівності, а в алгоритмі 2 додатково вимагати, щоб a_n та b_n набували лише додатних значень.

Метод Малікова для доведення нерівностей

Алгоритм 1. *Нехай* $n \in N_0$ *і виконуються умови*

1. $a_k > b_k$ для $k \geq 0$
2. $a_{n+1} - a_n > b_{n+1} - b_n$ *при* $n \geq k$.

Тоді $a_n > b_n$ *для всіх* $n \geq k$.

Алгоритм 2. *Нехай* $n \in N_0$ *усі члени послідовностей* a_n *та* b_n *додатні й виконуються умови*

1. $a_k > b_k$ для $k \geq 0$
2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *при* $n \geq k$

Тоді $a_n > b_n$ *для всіх* $n \geq k$.

Проілюструємо наведені вище методи на прикладі.

Приклад 3. Довести, що $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ для всіх $n \in N$.

Нехай $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n},\ b_n = \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. Застосуємо алгоритм 2 для доведення нерівностей.

1. $a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, $a_1 \leq b_1$.
2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n+1}{2n+2} : (\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}) = \frac{2n+1}{2n+2}$, $\quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{3n+4}} : \frac{1}{\sqrt{3n+1}} = \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}}$.

Перевіримо виконання умови: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Маємо

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}} \Leftrightarrow \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} \leq \frac{3n+1}{3n+4} \Leftrightarrow 1 - \frac{4n+3}{4n^2+8n+4} \leq 1 - \frac{3}{3n+4} \Leftrightarrow \frac{4n+3}{4n^2+8n+4} \geq \frac{3}{3n+4} \Leftrightarrow$$
$$(4n+3)(3n+4) \geq 3(4n^2+8n+4) \Leftrightarrow n \geq 0.$$

Тобто, нерівність виконується для всіх $n \in N$. Отже, $a_n \leq b_n$ для всіх натуральних n.

Широкі застосування відкриваються для застосування методу математичної індукції при розв'язуванні деяких задач планіметрії (особливо, якщо мова йде про правильні n-кутники та їх елементи). Найвідомішим прикладом такої задачі є задача про суму внутрішніх кутів опуклого n-кутника. З іншого боку, можна навести цілу низку геометричних задач, де метод математичної індукції потрібно «побачити» і ці задачі мають яскраво виражений пошуковий характер. Наведемо кілька прикладів таких задач (Скрипченко, 2011; Вишенський та ін., 1993).

1. Довести, що правильний трикутник можна розрізати на n правильних трикутників для будь-якого $n \geq 6$.
2. Знайти найбільшу кількість замкнених парканів, які не перетинаються в місті з n будинками (паркан може відгороджувати один чи декілька будинків, а також вже відгородженні ділянки; на території між будь-якими двома парканами повинен знаходитися хоча б один будинок).
3. Дано n довільних квадратів. Доведіть, що їх можна розрізати на частини так, що із одержаних частин можна було б скласти один великий квадрат.
4. Вивести формули для обчислення радіусів r_n і R_n вписаного і описаного кіл навколо правильного 2^n-кутника, який має заданий периметр P.

Розглянемо ***четвертий рівень* (*прикладний*)** фундування. На цьому рівні, перш за все, корисно прослідкувати розвиток методу математичної індукції, його схем та модифікацій, з історичної точки зору й розглянути відповідний матеріал в курсі «Історія математики».

Окрім історичного аспекту, відзначимо, що застосування методу математичної індукції можливе у цілому ряді соціально-гуманітарних та природничих дисциплін (наприклад, для доведення емпіричних формул, які отримані в ході експерименту та залежать від деякого натурального параметра).

Зазначимо також, що деякі модифікації методу математичної індукції, зокрема, зворотна індукція, широко використовуються у теорії інформації, теорії ігор, економічній теорії прийняття рішень, теорії шахів тощо. Зворотну індукцію або індукцію назад вперше застосував Артур Кейлі ще у 1875 році для розв'язування задачі про перебірливу наречену. Окрім того, це метод було використано Джоном фон Нейманом та Оскаром Морґенштерном для пошуку розв'язку гри з нульовою сумою і двома гравцями (Neumann & Morgenstern, 1953). У теорії динамічного програмування індукція назад є одним із ключових методів розв'язання рівняння Беллмана (Adda & Cooper, 2003). В теорії ігор зворотна індукція використовується для обчислення досконалої рівноваги підігор (Watson, 2002). В теорії автоматизованого планування та диспетчеризації цей метод називається пошуком назад або зворотним виводом (Miranda & Fackler, 2002); в теорії шахів він відомий як ретроспективний аналіз.

На цьому етапі варто відмітити ще одне узагальнення методу математичної індукції – *структурну індукцію* — конструктивний метод математичного доведення, який застосовується для довільних рекурсивно означених частково впорядкованих множин. Спочатку цей метод використовувався в математичній логіці, теорії графів, комбінаториці, загальній алгебрі, математичній лінгвістиці, але найбільшого поширення як окремий метод доведення набув у теоретичній інформатиці, де застосовується в питаннях семантики мов програмування, формальної верифікації, обчислювальної складності, функційного програмування (Steffen et al., 2018; Loś,1955).

Відповідно, спіраль фундування при вивченні методу математичної індукції в системі професійної підготовки майбутніх учителів математики може виглядати наступним чином (рис.1).

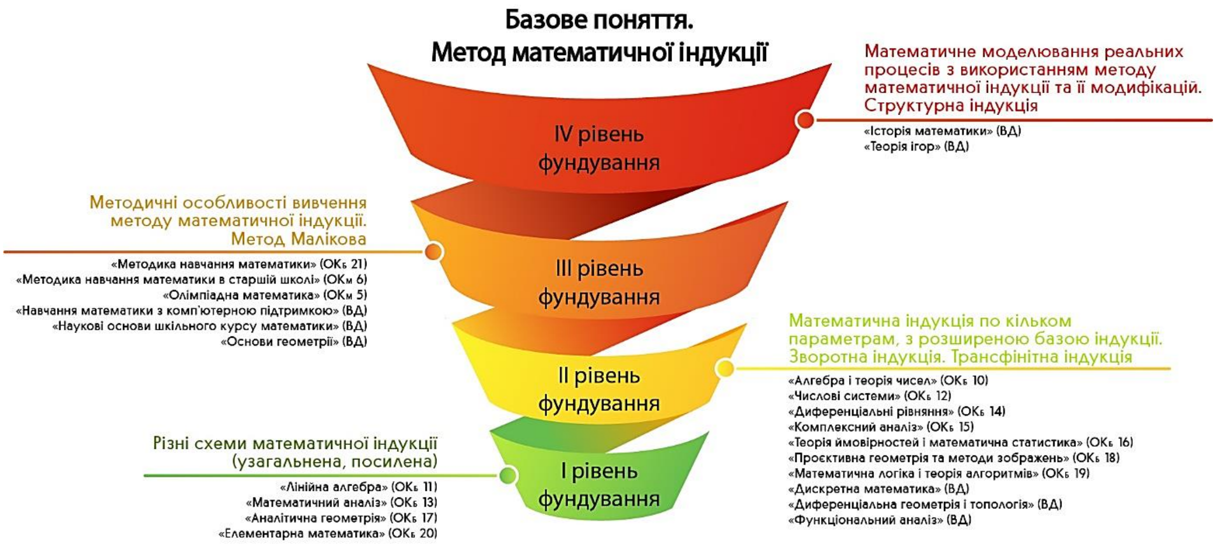

Рис. 1. Спіраль фундування методу математичної індукції у системі підготовки майбутніх учителів математики

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У багатьох випадках конкретний математичний матеріал, що вивчається майбутніми вчителями математики, не вибудовується в єдину систему знань; їх знання складаються із слабо пов'язаних між собою догматично засвоєних елементів, причому вони не в змозі самостійно їх структурувати та осмислити.

З іншого боку, випускники педагогічних ЗВО, майбутні вчителі математики, окрім роботи за фахом, мають бути підготовлені до виконання фундаментальних та прикладних досліджень, експериментальних розробок. Проєктування навчальних дисциплін з урахуванням принципу фундування основних математичних понять та методів дає можливість студенту вибирати траєкторію своєї майбутньої діяльності. Тому врахування принципу фундування є важливою умовою забезпечення належної якості фундаментальної математичної підготовки студентів педагогічних ЗВО, прогнозування досягнень випускників бакалаврату та магістратури і можливості продовжити навчання в аспірантурі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Adda, J., & Cooper, R., (2003). *Dynamic Economics: Quantitative Methods and Applications*. MIT Press.
2. Loś, J. (1955). Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 16, 98-113. https://doi.org/10.1016/S0049-237X(09)70306-4.
3. Miranda, M., & Fackler. P. (2002). *Applied Computational Economics and Finance*. MIT Press.
4. Neumann, J., & Morgenstern, O. (1953). *Theory of Games and Economic Behavior*.
5. Rust, J. (2016). *Dynamic Programming. The New Palgrave Dictionary of Economics: Palgrave Macmillan*.
6. Steffen, B., Rüthing, O., & Huth, M. (2018). *Mathematical Foundations of Advanced Informatics*. Springer.
7. Watson, J. (2002). *Strategy: an introduction to game theory*. New York: W.W. Norton & Company, 186-187.
8. Вишенський, В.А., Ганюшкін, О.Г., Карташов, М.В., Михайловський, В.І., Призва, Г.Й., & Ядренко, М.Й. (1993). *Українські математичні олімпіади: довідник.* К.: Вища школа.
9. Жерновникова, О.А. (2014). Модель дидактичної системи математичної освіти студентів педагогічних ВНЗ. *Міжнародний науковий журнал Науковий огляд*, 2 (1), 29-36.
10. Ковтонюк, М.М. (2012). Застосування принципу фундування у процесі вивчення математичних дисциплін. *Педагогічні науки,* 61, 250-256.
11. Колмогоров, А.М., Вейц, Б.Ю., Демидов, І.Т., Івашов-Мусатов, О.С., & Шварцбурд, С.І. (1979). *Алгебра і початки аналізу: навчальний посібник для учнів 9 класу середньої школи*. К.: Рядянська школа.
12. Кукуш, Р.П. (2008). *Математичні етюди*. Х.: Основа.
13. Лукашова, Т., & Друшляк М. (2022). Впровадження концепції фундування знань в професійну підготовку майбутніх учителів математики. *Освіта. Інноватика. Практика*, 10, 4, 15-19. https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol10i4-002.
14. Мерзляк, А.Г., Полонський, В.Б., & Якір, М.С. (2021). *Алгебра: підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики закладів загальної середньої освіти*. Харків: Гімназія.
15. Нікулін, О.В., & Кукуш, О.Г.(1999). *Геометрія: Поглибл. курс: 7-9 кл.: навч. посібник*. К: Ірпінь: ВТФ «Перун».
16. Скрипченко, Ю.А. (2011). Метод математической индукции в геометрии. *Дидактика в математиці: проблеми і дослідження,* 35, 131-136.
17. Смирнов, Е. (2013). Фундирование как методология и инновационный механизм профессионального становления педагога. *Международный интернет-симпозиум SWorld "Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и транспорте". Педагогика, психология и социология*, 5-17.
18. Шишенко, І., Лукашова, Т., & Страх, О. (2022). Фундування знань у процесі вивчення математичних понять засобами цифрових технологій у фаховій підготовці майбутніх учителів математики. *Фізико-математична освіта*, 32(6), 57–63. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-032-6-009.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Adda, J., & Cooper, R., (2003). *Dynamic Economics: Quantitative Methods and Applications*. MIT Press.
2. Loś, J. (1955). Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 16, 98-113. https://doi.org/10.1016/S0049-237X(09)70306-4.
3. Miranda, M., & Fackler. P. (2002). *Applied Computational Economics and Finance*. MIT Press.
4. Neumann, J., & Morgenstern, O. (1953). *Theory of Games and Economic Behavior*.
5. Rust, J. (2016). *Dynamic Programming. The New Palgrave Dictionary of Economics: Palgrave Macmillan*.
6. Steffen, B., Rüthing, O., & Huth, M. (2018). *Mathematical Foundations of Advanced Informatics*. Springer.
7. Watson, J. (2002). *Strategy: an introduction to game theory*. New York: W.W. Norton & Company, 186-187.
8. Vyshenskyi, V.A., Haniushkin, O.H., Kartashov, M.V., Mykhailovskyi, V.I., Pryzva, H.I., & Yadrenko, M.I. (1993). Ukrainski matematychni olimpiady: dovidnyk [Ukrainian mathematical Olympiads: a guide]. K.: Vyshcha shkola. (in Ukrainian).
9. Zhernovnykova, O.A. (2014). Model dydaktychnoi systemy matematychnoi osvity studentiv pedahohichnykh VNZ [Model didactic system of mathematical education of students of pedagogical universities]. *Naukovyi ohliad – Scientific Review, 2 (1), 29-36.* (in Ukrainian).
10. Kovtoniuk, M.M. (2012). Zastosuvannia pryntsypu funduvannia u protsesi vyvchennia matematychnykh dystsyplin [Application of the foundation principle in the process of studying mathematical disciplines]. *Pedahohichni nauky – Pedagogical sciences*, 61. 250-256. (in Ukrainian).
11. Kolmohorov, A.M., Veits, B.Iu., Demydov, I.T., Ivashov-Musatov, O.S., & Shvartsburd, S.I. (1979). *Alhebra i pochatky analizu: navchalnyi posibnyk dlia uchniv 9 klasu serednoi shkoly [Algebra and the beginnings of analysis: a study guide for students of the 9th grade of secondary school]*. K.: Riadianska shkola. (in Ukrainian).
12. Kukush, R.P. (2008). *Matematychni etiudy [Mathematical sketches*]. Kh.: Osnova. (in Ukrainian).
13. Lukashova, T., & Drushliak M. (2022). Vprovadzhennia kontseptsii funduvannia znan v profesiinu pidhotovku maibutnikh uchyteliv matematyky [Implementation of the concept of foundation of knowledge in the professional training of future teachers of mathematics]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice*, 10, 4, 15-19. https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol10i4-002. (in Ukrainian).
14. Merzliak, A.H., Polonskyi, V.B., & Yakir, M.S. (2021). *Alhebra: pidruchnyk dlia 9 klasu z pohlyblenym vyvchenniam matematyky zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Algebra: a textbook for the 9th grade with an in-depth study of mathematics in institutions of general secondary education].* Kharkiv: Himnaziia. (in Ukrainian).
15. Nikulin, O.V., & Kukush, O.H.(1999). *Heometriia: Pohlybl. kurs: 7-9 kl.: navch. Posibnyk [Geometry: Advanced course: 7-9 grades: education manual].* K: Irpin: VTF «Perun». (in Ukrainian).
16. Skripchenko, Ju.A. (2011). Metod matematicheskoj indukcii v geometrii [The method of mathematical induction in geometry]. *Didaktika v matematici: problemi i doslidzhennja – Didactics in mathematics: problems and research,* 35, 131-136. (in Ukrainian).
17. Smirnov, E. (2013). Fundirovanie kak metodologija i innovacionnyj mehanizm professional'nogo stanovlenija pedagoga [Funding as a methodology and an innovative mechanism for the professional development of a teacher]. *In Mezhdunarodnyj internet-simpozium SWorld "Perspektivnye innovacii v nauke, obrazovanii, proizvodstve i transporte". Pedagogika, psihologija i sociologija*, 5-17. (in Ukrainian).
18. Shyshenko, I., Lukashova, T., & Strakh, O. (2022). Funduvannia znan u protsesi vyvchennia matematychnykh poniat zasobamy tsyfrovykh tekhnolohii u fakhovii pidhotovtsi maibutnikh uchyteliv matematyky [Foundation of knowledge in the process of studying mathematical concepts by means of digital technologies in professional training of future teachers of mathematics]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and mathematical education*, 32(6), 57-63. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-032-6-009. (in Ukrainian).