

РОЗДІЛ 2. СПРЯМОВАНІСТЬ НАВЧАННЯ ДИСЦИПЛІН ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОГО ЦИКЛУ НА РОЗВИТОК ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ УМІНЬ ТА ТВОРЧИХ ЗДІБНОСТЕЙ УЧНІВ ТА СТУДЕНТІВ

УДК 510(072) (045)

DOI 10.5281/zenodo.8028492

Ю. В. Ботузова

ORCID ID 0000-0002-1313-0010

Центральноукраїнський державний університет
імені Володимира Винниченка

МОЖЛИВОСТІ РОЗВИТКУ НАВИЧОК КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Навички критичного мислення та вміння вирішувати проблеми входять до переліку необхідних навичок XXI століття та мають бути сформовані у молодого покоління в результаті здобуття загальної середньої освіти. Математика є одним із шкільних навчальних предметів, під час вивчення якого можливо формувати критичне мислення. Саме на уроках математики учні розв'язують різноманітні задачі, зокрема проблемного характеру, визначають можливі способи їх вирішення, аналізують, інтерпретують, оцінюють та обґрунтовують причини появи тих чи інших результатів.

Мета статті полягає у аналізі та ілюстрації можливостей розвитку навичок критичного мислення учнів на уроках математики в старшій профільній школі із застосуванням графічних калькуляторів GeoGebra чи Desmos.

В дослідженні використовувались теоретичні методи: аналіз навчальних програм та підручників з математики; узагальнення власного та передового педагогічного досвіду; емпіричні методи: педагогічні спостереження на уроках математики; методи наукового пізнання: систематизація та узагальнення для формулювання методичних рекомендацій та висновків.

Автором були розглянуті теоретичні основи формування критичного мислення на уроках математики. У статті наведені конкретні приклади, що ілюструють можливості створення проблемних ситуацій на уроках математики під час побудови графіків степеневих та тригонометричних функцій за допомогою графічних калькуляторів. Пошук помилки, що допускається програмою, стимулює розвиток критичного мислення здобувачів освіти, адже учні звикли довіряти комп'ютеру. Саме глибокий критичний аналіз умов та можливих результатів при розв'язуванні задач з використанням ІКТ є просто необхідним, інакше помилок та неправильних математичних уявлень в учнів не уникнути. Такий підхід може стати значною мотивацією для вивчення математики, змінити переконання учнів у всемогутності нових технологій, піднести на новий рівень цінність знань та розуму в цілому, сприяти розвитку навичок критичного мислення. В подальшому планується продовжувати педагогічний експеримент та здійснити роботу щодо вимірювання рівня сформованості критичного мислення у здобувачів освіти.

Ключові слова: критичне мислення, навчання математики, проблемна ситуація, графічний калькулятор, GeoGebra, Desmos, аналіз помилок.

Постановка проблеми. У відповідності з метою навчальної програми з математики для 10-11 класів профільного рівня [14], впродовж навчання у здобувачів освіти має відбуватися інтелектуальний розвиток особистості, зокрема розвиток логічного мислення та інтуїції, просторової уяви, пам'яті, уваги, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури. У той же час не менш важливими для сучасної молоді є навички критичного мислення [3], про що

також зазначено в Концепції Нової української школи [12], де критичне мислення віднесено до одного із наскрізних вмінь. Наскрізні вміння формуються на усіх інтегрованих курсах або предметах [10], і математика, як предмет, звісно, не є винятком.

У основоположному дослідженні про критичне мислення та освіту Е. Глейзер [2] визначає критичне мислення так: «Здатність критично мислити передбачає: схильність до вдумливого розгляду проблем і предметів, які входять у діапазон досвіду людини; знання методів логічного дослідження та міркування; наявність певних навичок застосування вказаних методів. Критичне мислення вимагає здійснення наполегливих зусиль, щоб перевірити будь-яку інформацію, віднайшовши докази, які її підтверджують. Це також вимагає вміння розпізнавати проблеми, знаходити дієві способи для вирішення цих проблем, збирати та аналізувати необхідну інформацію, оцінювати докази й аргументи, визнавати наявність або відсутність логічних зв'язків між припущеннями, робити висновки й узагальнення». Люди із навичками критичного мислення зазвичай допитливі та рефлексивні. Вони люблять досліджувати проблеми та здобувати знання.

Аналіз актуальних досліджень. Зусилля, спрямовані на розвиток навичок критичного мислення в математиці, стали головною темою в навчальних програмах з математики в усьому світі. Нещодавні дослідження К. Семерджі [6], С. Якоба [4], Е. Чіквуенума [1] показали, що розвиток навичок критичного мислення може покращити досягнення в математиці. Окрім того математика є одним із навчальних предметів, під час вивчення якого можливо формувати навички критичного мислення [3; 5], пов'язані зі знаннями математики, математичними міркуваннями та математичними доведеннями. Ці навички розвиваються, коли учні стикаються з математичними проблемами, визначають можливі способи розв'язання задачі, аналізують, інтерпретують, оцінюють та обґрунтовують причини появи певних результатів, що дозволяє їм стати впевненими критичними «мислителями».

Під сформованим критичним мисленням особистості розуміємо [9] здатність свідомо та самостійно міркувати над отриманою інформацією, шукаючи аргументи, що підтверджують або спростовують її, в результаті чого робити відповідні висновки, або здійснювати оцінку.

Мета статті полягає у аналізі та ілюстрації можливостей розвитку навичок критичного мислення учнів на уроках математики в старшій профільній школі із застосуванням графічних калькуляторів GeoGebra чи Desmos.

В дослідженні використовувались теоретичні методи: аналіз навчальних програм та підручників з математики; узагальнення власного та передового педагогічного досвіду; емпіричні методи: педагогічні спостереження на уроках математики; методи наукового пізнання: систематизація та узагальнення для формулювання методичних рекомендацій та висновків.

Виклад основного матеріалу. Одним із головних завдань вивчення математики на профільному рівні, як зазначено в навчальній програмі з математики [14], є розвиток графічної культури учнів, що зумовлена практичними потребами. Тому особливу увагу варто приділити формуванню в учнів умінь встановлювати властивості функції за її графіком, будувати ескізи графіків функцій, зокрема і за допомогою геометричних перетворень. На уроках математики в старшій школі, особливо в класах із профільним вивченням математики, учні яких мають зацікавленість, внутрішню мотивацію та значний потенціал до вивчення предмету, вчитель може розгорнути діяльність по формуванню критичного мислення.

Наприклад, під час вивчення тем «Степенева функція» та «Тригонометричні функції» (10 клас) [14], учням можна пропонувати вправи підвищеної складності на побудову графіків функцій. При цьому за рекомендаціями, наданими навчальною програмою [14] варто звертатися за допомогою до програмних засобів навчального призначення, зокрема GRAN 1, GRAN 2D, GRAN 3D, DG, AGrapher, GeoGebra. Аналіз науково-методичної літератури та досвіду колег (вчителів математики) показав, що наразі серед програмних засобів, які користуються популярністю, першість займають графічні калькулятори GeoGebra та Desmos, тому в дослідженні звертатимемось саме до них.

Складаючи систему вправ, які б сприяли розвитку необхідних навичок, слід

підбирати такі завдання, де б результати побудови графіка «вручну» та в графічному калькуляторі відрізнялися між собою. Це спонукатиме учнів до пошуку істини за допомогою критичного аналізу. Запропонуємо декілька таких завдань, відібраних із діючих підручників «Алгебри» для 10 класу.

Приклад 1. «Побудуйте графік функції $y = (x^2 - 4x + 3)^0$ [Мерзляк, с. 68]».

Розв'язання: Для розвитку навичок критичного мислення, використаємо один із графічних калькуляторів GeoGebra або Desmos та створимо на уроці проблемну ситуацію, адже згадані програмні засоби у якості графіка функції $y = (x^2 - 4x + 3)^0$ пропонують суцільну лінію $y = 1$.

Тому вчитель має:

- продемонструвати учням побудований програмою графік (або попросити учнів самостійно скористатися програмою на своїх мобільних телефонах);
- зауважити, що програма допускає помилку;
- запропонувати виправити її, спираючись на відомі властивості степеневої функції із цілим показником.

Правильна побудова графіка $y = (x^2 - 4x + 3)^0$ передбачає розуміння учнями того, що вираз 0^0 невизначений, а будь-яке інше число в нульовій степені дорівнює 1. Отже областю визначення заданої функції буде множина значень змінної, для яких $x^2 - 4x + 3 \neq 0$, тобто $D(y) = R / \{1; 3\}$. Тоді графіком функції буде горизонтальна пряма $y = 1$ з виколотими на ній точками, що мають координати (1;1) та (3;1) (рис.1 б).

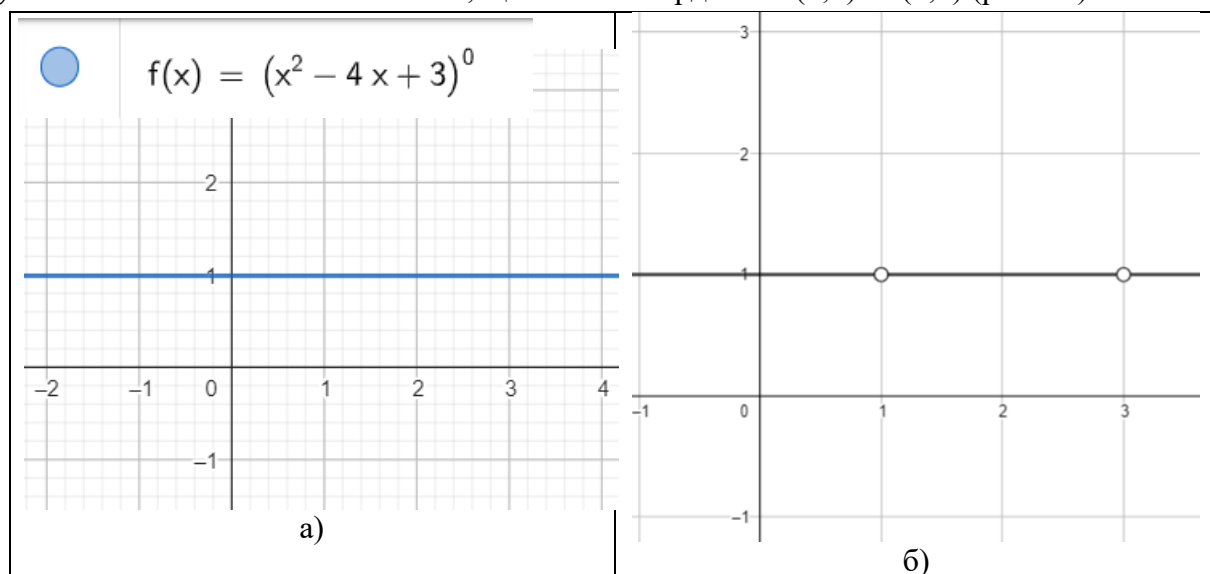


Рис.1. Графік функції $y = (x^2 - 4x + 3)^0$, отриманий в GeoGebra (а) та відкоригований «вручну» (б).

Приклад 2. «Побудуйте графік функції $y = (\sqrt[4]{x-1})^4 + (\sqrt[4]{1-x})^4 + 1$ [Мерзляк, с. 77]».

Розв'язання: Скориставшись графічним калькулятором GeoGebra для побудови графіка заданої функції, на екрані не побачимо результату.

Така ситуація спонукає учнів до роздумів, критичного аналізу та здійснення самостійного дослідження функції, в результаті якого виявляється, що областю визначення функції $y = (\sqrt[4]{x-1})^4 + (\sqrt[4]{1-x})^4 + 1$ є лише одна точка. Дійсно, в формулі

фігурують корені парної степені, підкореневі вирази яких мають бути невід'ємними:
 $\begin{cases} x-1 \geq 0; \\ 1-x \geq 0; \end{cases} \Rightarrow x=1$. Отже, графіком заданої функції буде єдина точка з координатами (1;1).

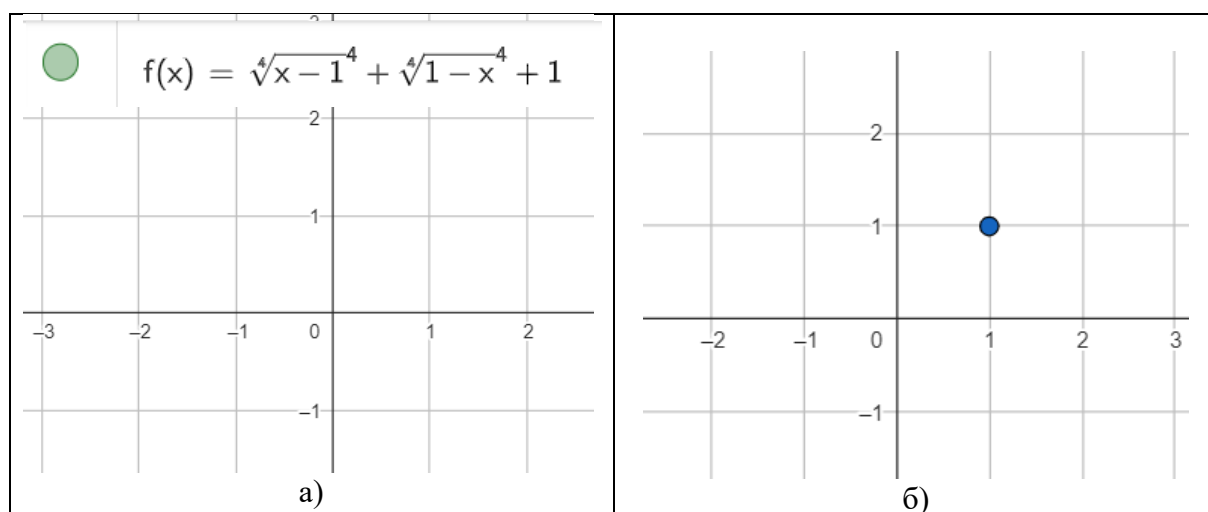


Рис.2. Запит і результат побудови графіка функції $y = \left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4 + \left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4 + 1$ в GeoGebra (а) та побудова графіка «вручну» (б).

Приклад 3. «Побудуйте графік функції $y = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$ [Мерзляк, с.92]».

Розв'язання: Знову починаємо побудову із використання графічного калькулятора, який виводить на екран суцільну пряму лінію (рис.3 а) – бісектрису першого і третього координатних кутів, що аналітично задається формулою $y = x$. Це призводить до

суперечності, адже вираз $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$ не є тотожно рівним x при будь-якому дійсному значенні

змінної. Тому слід провести критичний аналіз отриманого результату і виправити помилки, допущені програмним засобом. Така діяльність неабияк зацікавлює учнів, мотивує до вивчення математики і програмування.

Отже, для виправлення помилки необхідно врахувати властивості степенів з раціональним показником. Функція $y = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$ має область визначення $x > 0$ та переписується у вигляді $y = x$. Графіком цієї функції (рис. 3 б) є промінь: $y = x$, $x > 0$ з виколотою точкою (0;0).

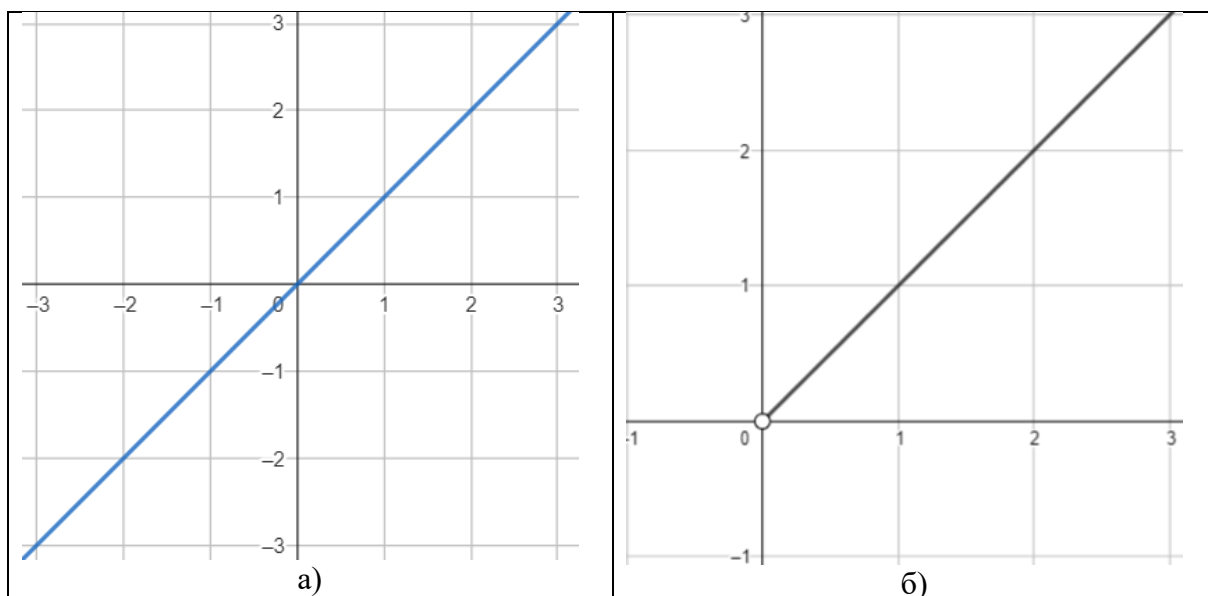


Рис.3. Графік функції $y = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$, отриманий в GeoGebra (а) та відкоригований «вручну» (б).

Приклад 4. «Побудуйте графік функції $y = x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ [11, с.201]».

Розв'язання: Скориставшись графічним калькулятором GeoGebra чи Desmos, знову отримаємо неправильну картинку – суцільну пряму $y = x$. При цьому пошук помилки для учнів може виявитися неочевидним. Справа в тому, що під час вивчення основних тригонометричних співвідношень, лише у підручнику [11] виділено тригонометричну формулу у такому вигляді: $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ (якщо $\cos \alpha \neq 0, \sin \alpha \neq 0$), що дозволяє говорити про існування області визначення заданої функції. У підручнику [8] наводиться ціла низка формул, що містять тангенси та котангенси, а всередині тексту параграфу знаходимо запис, що такі формули, зокрема і $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, правильні тільки за умови, що $\operatorname{tg} \alpha$ чи $\operatorname{ctg} \alpha$ існують. У підручнику [13] формула $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ виділена рамкою. Під рамкою зроблено запис: «Ця тотожність є правильною для всіх α , при яких $\sin \alpha \neq 0$ і $\cos \alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Зазначимо, що ці два обмеження для α можна об'єднати в одне: $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ [13, с. 157]». Отже, під час вивчення основних тригонометричних співвідношень, що містять тангенси та котангенси, необхідно акцентувати увагу учнів та неодноразово нагадувати, що такі співвідношення мають місце на своїй області допустимих значень. Такий підхід свідчитиме про строгість викладу навчального матеріалу, якого вимагає профільний рівень вивчення математики.

Вочевидь функція $y = x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ має область визначення множину точок $x \neq \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$. Спростуємо вираз, враховуючи ОДЗ: $x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = x \cdot 1 = x$ при $x \neq \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$. Будуємо графік: $y = x, x \neq \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$ – бісектриса I та III координатних кутів з виключеними на ній точками $\left(\frac{\pi m}{2}; \frac{\pi m}{2}\right), m \in \mathbb{Z}$.

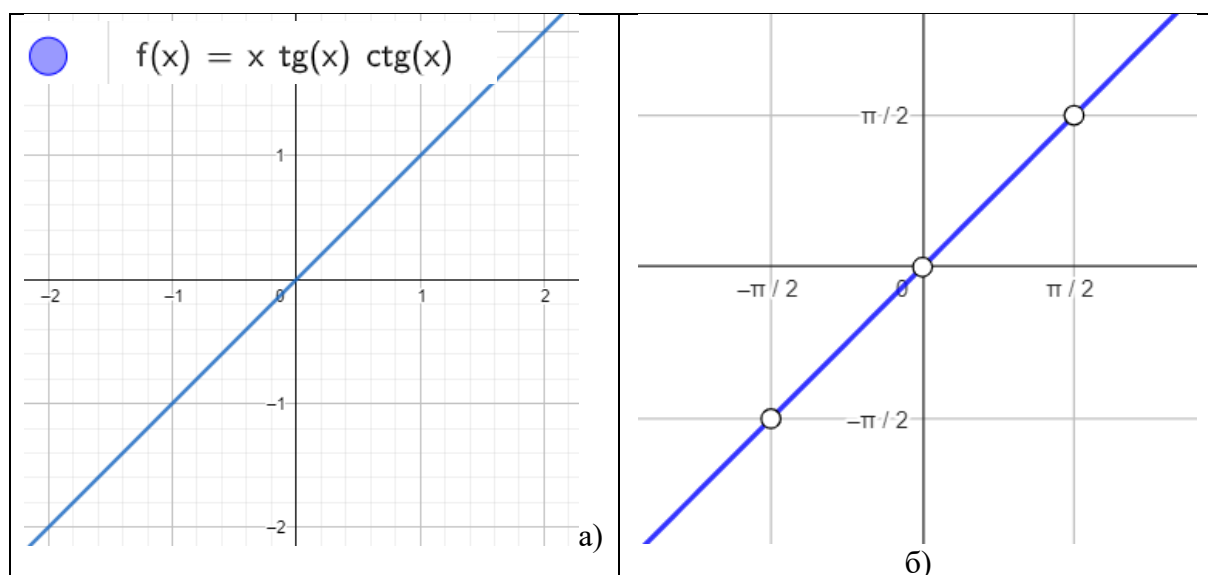


Рис.4. Графік функції $y = x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$, отриманий в GeoGebra (а) та уточнений «вручну» (б).

Приклад 5. «Побудуйте графік рівняння $\sin x + \sin y = 2$ [13, с. 150]».

Розв'язання: для побудови графіка заданого рівняння також можливо скористатися графічним калькулятором Desmos чи GeoGebra. Але в результаті на екрані не отримаємо жодного графіка (рис.5 а).

Аналізуючи ситуацію, проводимо міркування таким чином: рівність $\sin x + \sin y = 2$ можлива, коли $\sin x = \sin y = 1$ одночасно. Тобто графіком рівняння $\sin x + \sin y = 2$ буде множина точок з координатами $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, де $k, n \in \mathbb{Z}$ (рис. 5.б).

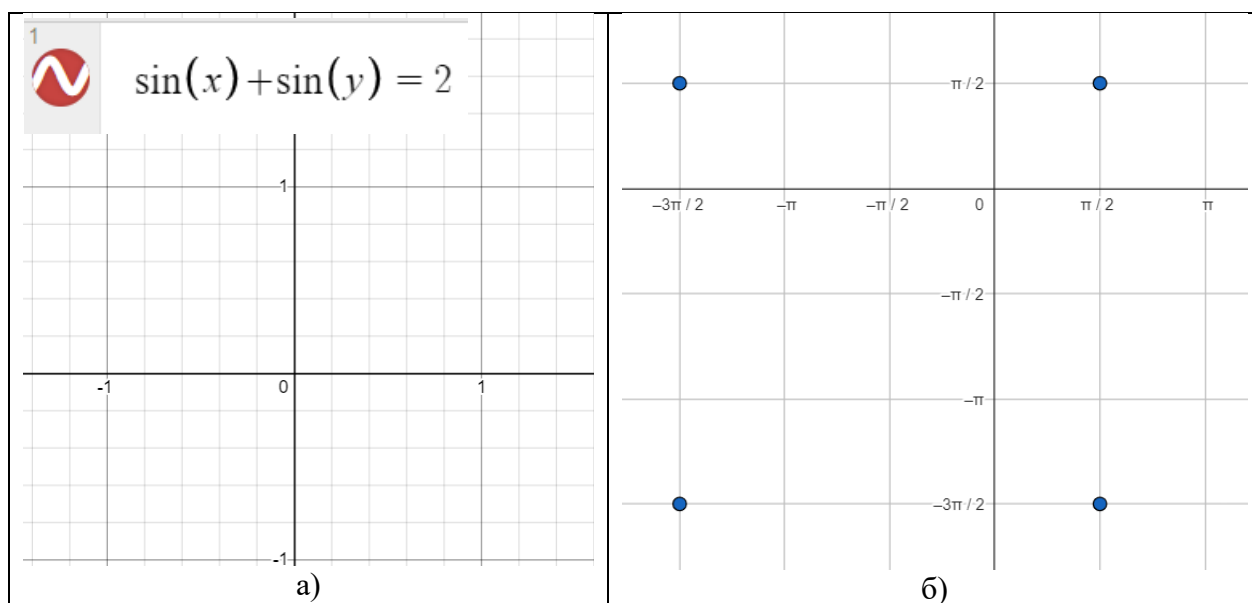


Рис.5. Графік рівняння $\sin x + \sin y = 2$, отриманий в Desmos (а) та побудований «вручну» (б).

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Здобувачі освіти зі сформованими навичками критичного мислення можуть зважувати різні факти та точки зору, виявляти логічні помилки та вирішувати проблемні завдання [7]. Роль учителя полягає в тому, щоб зосередити увагу на характеристиках активних математичних стратегій, сприяючи розвитку критичного мислення учнів та метапізнання впродовж усього життя.

Наведені в статті приклади демонструють, що графічні калькулятори та різноманітні математичні програмні засоби не завжди видають правильний результат, тому не тільки спрощують та покращують процес навчання математики, а й навпаки. Учні звикли довіряти комп'ютеру, а виявляється, що отримані результати можуть містити помилки. Саме глибокий критичний аналіз умов та можливих результатів при розв'язуванні задач з використанням ІКТ є просто необхідним, інакше помилок та неправильних математичних уявлень у здобувачів освіти не уникнути. Лише симбіоз людського розуму та комп'ютерних технологій дає найбільший ефект і це мають розуміти учні. Можливо такі приклади стануть значною мотивацією для вивчення математики, змінять переконання учнів у всемогутності нових технологій, піднесуть на новий рівень цінність знань та розуму в цілому, сприятимуть розвитку навичок критичного мислення. В подальшому планується продовжувати педагогічний експеримент та здійснити роботу щодо вимірювання рівня сформованості критичного мислення у здобувачів освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ/REFERENCES

1. Chukwuyenum, A. N. (2013). Impact of Critical thinking on Performance in Mathematics among Senior Secondary School Students in Lagos State. *Journal of Research & Method in Education*, 3(5), 18–25.
2. Glaser, E. M. (1941). *An Experiment in the Development of Critical Thinking*. Teacher's College, Columbia University.
3. Firdaus, Kailani, I., Md. Nor Bin Bakar, Bakry. (2015). Developing Critical Thinking Skills of Students in Mathematics Learning. *Journal of Education and Learning*, 9(3), 226–236.
4. Jacob, S. M. (2012). Mathematical achievement and critical thinking skills in asynchronous discussion forums. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 31, 800 – 804.
5. Monrat N., Phaksunchai M., Chonchaiya R. (2022). Developing Students' Mathematical Critical Thinking Skills Using Open-Ended Questions and Activities Based on Student Learning Preferences. *Education Research International*. Hindawi. 2022, 1–11.
6. Semerci, C. (2005). The influence of critical thinking skills on students' achievement. *Pakistan Journal of Social Sciences*, 3(4), 598–602.
7. Su, H.F., Ricci, F.A., & Mnatsakanian, M. (2016). Mathematical teaching strategies: Pathways to critical thinking and metacognition. *Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 2 (1), 190–200.
8. Бевз, Г. П., Бевз, В. Г., Владімірова, Н. Г. (2018). Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підручник для 10 класів закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта». (Bevs, G. P., Bevs, V.G., Vladimirova, N.G. (2018). *Algebra and beginnings of analysis. Profile level: textbook for 10th grade*. Kyiv: Osvita Publishing House).
9. Ботузова, Ю. В. (2021). Розвиток навичок критичного мислення учнів під час використання графічних калькуляторів. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2021»: матеріали IV Міжнародної науково-методичної конференції Суми: ФОП Цьома С. П. (Botuzova Yu. V. (2021). *Development of students' critical thinking skills when using graphic calculators. Development of intellectual skills and creative abilities of pupils and students in the process of learning the disciplines of the natural and mathematical cycle "ITM*plus – 2021": materials of the IV International Scientific and Methodological Conference*. Sumy: FOP Tsyoma S. P.).
10. Державний стандарт базової середньої освіти. (2020). Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrayinska-shkola/derzhavnij-standart-bazovoyi-serednoyi-osviti>. (State standard of basic secondary education. (2020). Retrived from: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrayinska-shkola/derzhavnij-standart-bazovoyi-serednoyi-osviti>.
11. Істер, О. С., Єрґін, О. В. (2018). Алгебра і початки аналізу: (профільний рівень) : підручник для 10-го класу закладів загальної середньої освіти. Київ : Генеза.

- (Easter, O. S., Yergin, O. V. (2018). Algebra and beginnings of analysis: (profile level): textbook for the 10th grade. Kyiv: Genesis).
12. Концептуальні засади реформування середньої школи «Нова українська школа» (2016). Режим доступу: <http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/ua-sch-2016/>. (Conceptual principles of secondary school reform "New Ukrainian School". (2016). Retrived from: <http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/ua-sch-2016/>).
 13. Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2018). Алгебра і початки аналізу: профільний рівень : підручник для 10 класів закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія (Merzlyak, A. H., Nomirovskiy, D. A., Polonsky, V. B., Anchor, M. S. (2018). Algebra and beginnings of analysis: profile level: textbook for 10th grade. Kharkiv : Himnaziia).
 14. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Профільний рівень). (2018). Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>. (Mathematics curriculum for students of grades 10–11 of general educational institutions (Professional level). (2018). Retrived from: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>).

Botuzova Yu. Possibilities of developing students' critical thinking skills in mathematics lessons.

Summary. Critical thinking skills and the ability to solve problems are among the necessary skills of the 21st century. Such skills should be formed in the younger generation as a result of general secondary education. Mathematics is one of the school subjects, during the study of which it is possible to form critical thinking. On the mathematical lessons students solve various problems, in particular of a problematic nature, determine possible ways to solve them, analyze, interpret, evaluate and substantiate the reasons for the appearance of certain results.

The purpose of the article is to analyze and illustrate the possibilities of developing students' critical thinking skills in mathematics lessons with the using graphic calculators as GeoGebra or Desmos.

Theoretical methods were used in the research: analysis of educational programs and textbooks in mathematics; generalization of own and advanced pedagogical experience; empirical methods: pedagogical observations in mathematics lessons; methods of scientific knowledge: systematization and generalization for the formulation of methodical recommendations and conclusions.

The author considered the theoretical foundations of the formation of critical thinking in mathematics lessons The article provides specific examples that illustrate the possibilities of creating problem situations in mathematics lessons when constructing graphs of power and trigonometric functions with graphing calculators. Searching for errors made by the program stimulates the development of students' critical thinking , because students are used to trusting the computer. It is a deep critical analysis of conditions and possible results when solving problems using ICT that is simply necessary, otherwise mistakes and incorrect mathematical ideas among students cannot be avoided. Such an approach can become a significant motivation for studying mathematics, change students' beliefs in the omnipotence of new technologies, raise to a new level the value of knowledge and intelligence in general, and promote the development of critical thinking skills. In the future, it is planned to continue the pedagogical experiment and carry out work on measuring the level of formation students' critical thinking.

Key words: critical thinking, teaching mathematics, problem situation, graphing calculator, GeoGebra, Desmos, error analysis.