Міністерство освіти і науки України
Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка

О.В. Мартиненко, Я.О. Чкана, В.О. Герасименко

Диференціальні рівняння та системи рівнянь

Навчальний посібник

Суми – 2022

УДК 517.9

ББК 22.16.я72

М29

Рекомендовано вченою радою фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка, протокол №8 від 18.04.2022 р.

Рецензенти:

Олександренко В.П., доктор технічних наук, професор кафедри галузевого машинобудування та агроінженерії Хмельницького національного університету;

Лисенко О.В., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри ПМ та МСС Сумського державного університету

Мартиненко О.В., Чкана Я.О., Герасименко В.О.

М 29 Диференціальні рівняння та системи рівнянь. Навчальний посібник / О.В. Мартиненко, Я.О. Чкана, В.О. Герасименко. Суми 2022. 114 с.

Посібник написано відповідно до діючих програм з курсу «Диференціальні рівняння» для студентів фізико-математичних факультетів університетів. У ньому розглянуто загальні питання теорії та методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь першого і вищих порядків, а також їх систем. Читач матиме можливість ознайомитись з обґрунтуванням розв'язків різних типів рівнянь, а також застосувати набуті знання при розв'язуванні задач, запропонованих у кожному пункті та в кінці посібника.

Навчальний посібник рекомендовано для студентів фізико-математичних, природничих та технічних спеціальностей університетів, вчителів математики загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 517.9

ЗМІСТ

ВСТУПНЕ СЛОВО

Для кількісного описання багатьох процесів у механіці, астрономії, фізиці, хімії, біології тощо використовують математичні моделі, які містять невідомі функції та їх похідні, тобто диференціальні рівняння. Спочатку диференціальні рівняння виникли із задач механіки, пізніше вони знайшли практичне застосування в усіх розділах фізики. Передумови для появи теорії диференціальних рівнянь склалися в другій половині XVII століття, коли математики впритул наблизилися до розуміння взаємно оберненого характеру операцій диференціювання та інтегрування.

Математичний термін «*диференціальне рівняння*» був вперше введений видатним німецьким філософом, математиком та фізиком Готфрідом Лейбніцем (1646 –1716 рр.), разом з цим найпростіші диференціальні рівняння зустрічаються в роботах Ісаака Ньютона (1643–1727 рр.) – творця класичної фізики та одного з засновників числення нескінченно малих.

Подальше становлення теорії диференціальних рівнянь було зумовлене розв’язуванням певного кола важливих практичних та наукових проблем і у XVIII столітті теорія диференціальних рівнянь відокремлюється в самостійну математичну науку. Так, роботи швейцарського вченого Іоганна Бернуллі (1667–1748 рр.), математика та фізика Леонарда Ейлера (1707–1783 рр.) і французького математика Жозефа Лагранжа (1736–1813 рр.), присвячені малим коливанням, приводять до появи теорії лінійних систем диференціальних рівнянь, а отже, й до виникнення нових фундаментальних понять лінійної алгебри: власних чисел і власних векторів в n-вимірному просторі.

Новий етап в теорії диференціальних рівнянь пов'язаний з дослідженнями французького математика та фізика Анрі Пуанкаре (1854-1912 рр.). Створена ним так звана «якісна теорія диференціальних рівнянь» разом з теорією функцій комплексної змінної сприяла виникненню сучасної топології.

Проте, клас інтегровних диференціальних рівнянь виявився досить вузьким, тому подальший розвиток теорії диференціальних рівнянь відбувався у напрямку їх наближеного інтегрування. Застосування наближених методів дало зручні алгоритми обчислень з ефективними оцінками точності, а можливості сучасних IT-технологій дозволили економно і швидко розв'язувати практичні задачі.

У посібнику запропоновано лекційний курс з теорії звичайних диференціальних рівнянь першого та вищих порядків, їх систем, що неодноразово читався студентам фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університету та був скоригований відповідно до сучасних потреб.

Посібник призначений для студентів фізико-математичних, природничих та технічних спеціальностей університетів, а також для тих, хто самостійно, без кваліфікованої допомоги викладача, вивчає теорію диференціальних рівнянь та бажає набути необхідні практичні навички.

Розділ 1. Диференціальні рівняння першого порядку

1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь

Математичне обґрунтування різних процесів, що відбуваються у природі, приводять до рівнянь, що пов'язують незалежну змінну, невідому (шукану) функцію однієї змінної та похідні цієї функції. Такі рівняння називаються *диференціальними рівняннями.*

Розглянемо задачі, які приводять до необхідності складання диференціальних рівнянь.

Задача 1. Швидкість розпаду радію пропорційна його кількості в даний момент часу t. Знайти закон, який виражає зміну кількості радію з плином часу t, якщо відомо, що через 1600 років радію залишиться половина від початкової кількості.

Розв'язання. Нехай $x = x(t))$ – кількість радію в момент часу t (в роках). За умовою задачі швидкість розпаду радію $\frac{dx}{dt}$ прямо пропорційна його кількості, тобто $\frac{dx}{dt} = kx(t)$, де k – деякий коефіцієнт пропорційності. Очевидно, що отримане співвідношення $\frac{dx}{dt} = kx(t)$ містить шукану функцію та її похідну, тобто воно є диференціальним рівнянням. Перепишемо його у вигляді $\frac{dx}{x(t)} = kdt$. Цей вираз можна подати через рівність двох диференціалів:

$$d(\ln x(t)) = d(kt).$$

З теорії інтегрального числення відомо, що коли диференціали двох функцій рівні, то функції відрізняються одна від одної лише сталою величиною (наприклад, $\ln c$) , тобто

$$\ln x(t) = kt + \ln c$$

або

$$x(t) = ce^{kt}.$$

Ця рівність виражає закон розпаду радію за час t. Для знаходження сталої c використаємо початкову умову: $x = x_0,\ t = 0,\ x(0) = x_0$.

$$x_0 = ce^0, \quad c = x_0,$$

$$x(t) = x_0 e^{kt}.$$

З умови задачі маємо, що при $t = 1600$ років $x = \frac{1}{2}x_0$.

Знайдемо значення коефіцієнта пропорційності k:

$$x(1600) = \frac{1}{2}x_0,$$

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{1600k},$$

$$e^{1600k} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $k = \frac{ln\frac{1}{2}}{1600} = \frac{-ln2}{1600}$, а закон розпаду радію за час t виражається формулою

$$x(t) = x_0 e^{\frac{-ln2}{1600}t}.$$

Задача 2 (про розмноження бактерій). Деяка кількість N_0 бактерій знаходиться у сприятливих для розмноження умовах. Знайти залежність збільшення числа бактерій від часу, якщо швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості.

Розв'язання. Позначимо через $N(t)$ кількість бактерій у момент часу t, тоді $\frac{dN}{dt}$ – швидкість їх розмноження. За умовою $\frac{dN}{dt} = kN$, $k > 0$. Коефіцієнт k залежить від виду бактерій та умов, у яких вони знаходяться (його визначають експериментально).

Маємо

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

$$\frac{dN}{N} = kdt,$$

$$d(lnN) = d(kt),$$

$$lnN = kt + lnC$$

або

$$N(t) = Ce^{kt}.$$

З умови задачі $N(0) = N_0$ (на початок експерименту $t = 0$) знаходимо, що $C = N_0$. Отже, залежність числа бактерій від часу виражається формулою $N(t) = N_0 e^{kt}$.

Складання диференціального рівняння при розв'язуванні конкретної задачі потребує чіткого розуміння її умов, згідно яких записується співвідношення, що пов'язує незалежну змінну, функцію та похідні від неї. Наприклад, для геометричної задачі наявність в її умові інформації про дотичну, нормаль або відрізки, пов'язані з ними, дає змогу записати співвідношення між координатами точок кривої та кутовим коефіцієнтом дотичної.

Виходячи з фізичного змісту похідної, у задачах на швидкість протікання певного процесу можна відразу записати відповідне диференціальне рівняння. В інших випадках спочатку необхідно встановити співвідношення між приростами змінних, а потім за допомогою операції граничного переходу отримати відповідне диференціальне рівняння.

Означення. *Диференціальним рівнянням n-го порядку* називають рівняння, що містить незалежну змінну, шукану функцію та її похідні (або диференціали):

$$F\left(x, y, y' \dots y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.1}$$

Порядком диференціального рівняння називають порядок старшої похідної (найвищий із порядків похідних), що входить до нього.

Наприклад, рівняння

$$y'' - 3y = 4\sin 2x, \;\; y''' + y' + x^2 - 1 = 0, \;\;\; 2y^{(4)} + 3y''' = 0$$

є рівняннями другого, третього та четвертого порядків відповідно.

Означення. Диференціальне рівняння називається *звичайним,* якщо невідома функція, що входить до нього, залежить від однієї змінної. Якщо диференціальне рівняння містить частинні похідні невідомої функції багатьох змінних, то таке рівняння називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних*.

Розв'язати диференціальне рівняння означає знайти всі функції, які задовольняють його, тобто перетворюють на тотожність. Функція, що задовольняє диференціальне рівняння при будь-якому значенні аргументів у деякій області, називається його *розв'язком* або *інтегралом*.

Наприклад, розв'язком диференціального рівняння $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ є функція $y=\ln x$ і, взагалі кажучи, всі функції виду $y=\ln Cx$, де C – довільна стала.

При розв'язуванні деяких диференціальних рівнянь можна отримати їх розв'язки у неявному або параметричному вигляді. Наприклад, неявна функція $y^2-2Cx=0$ є інтегралом диференціального рівняння $y-2xy'=0$.

Приклад. Знайти диференціальне рівняння першого порядку, розв'язками якого буде сімейство функцій $e^{x+Cy}=2x+3y$.

Продиференціюємо по x дане співвідношення, враховуючи, що $y=y(x)$:

$$e^{x+Cy}\cdot(1+Cy')=2+3y'.$$

Підставимо замість e^{x+Cy} вираз $(2x+3y)$:

$$(2x+3y)\cdot(1+Cy')=2+3y'.$$

Звідси виразимо $C=\frac{1}{y'}\left(\frac{2+3y'}{2x+3y}-1\right)$ та підставимо його у вираз $e^{x+Cy}=2x+3y$. Отримаємо шукане диференціальне рівняння у вигляді

$$e^{x+\frac{x}{y'}\left(\frac{2+3y'}{2x+3y}-1\right)}=2x+3y.$$

Знаходження розв'язку або інтеграла диференціального рівняння називається його *інтегруванням*.

Означення. *Загальним розв'язком* диференціального рівняння n-го порядку $F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0$ називається співвідношення

$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, де $C_1, C_2, ..., C_n$ – довільні сталі, що задовольняє дане диференціальне рівняння.

Зауваження. Сталі $C_1, C_2, ..., C_n$ взагалі є довільними, але вони не повинні суперечити умові задачі або коректності отриманих виразів. Наприклад, для диференціального рівняння $ydy + xdx = 0$ загальним інтегралом є функція $x^2 + y^2 = C$, де стала C може набувати тільки невід'ємних значень.

Кожна функція, яку ми отримуємо із загального розв'язку диференціального рівняння при окремих значеннях довільних сталих, називається *частинним розв'язком*.

Розглянемо у загальному інтегралі $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ змінні x та y як декартові координати точки на площині, а $C_1, C_2, ..., C_n$ - як довільні параметри. Тоді загальний інтеграл визначає n-параметричну *сім'ю плоских кривих*. При окремих значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ отримаємо окремі криві цієї сім'ї, які називаються *інтегральними кривими* диференціального рівняння.

На практиці досить часто потрібно визначити частинний розв'язок диференціального рівняння, що відповідає умовам поставленої задачі. Такі умови називають *початковими умовами*, а задачу знаходження частинного розв'язку при заданих початкових умовах називають *задачею Коші*.

Початкові умови для диференціального рівняння n-го порядку мають вигляд:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ – задані дійсні числа. Кількість початкових умов дорівнює порядку диференціального рівняння.

Сформулюємо основні означення понять для диференціальних рівнянь першого порядку.

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, яке містить незалежну змінну x, шукану функцію $y(x)$ та її похідну $y'(x)$.

У загальному вигляді його записують як

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.1.2}$$

Якщо рівняння подати у явному вигляді відносно похідної

$$y' = f(x, y), \tag{1.3}$$

де функція $f(x, y)$ визначена і неперервна в деякій області $D \subset R^2$, то така форма його запису називається *нормальною.*

За допомогою елементарних перетворень дане рівняння можна подати у так званому *симетричному вигляді*: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Розв'язком диференціального рівняння на проміжку $\langle a, b\rangle$ називається будь-яка функція $y = y(x)$, що має на $\langle a, b\rangle$ неперервну похідну та при підстановці в рівняння обертає його на тотожність.

Загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння першого порядку (1.2) визначається співвідношенням

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{1.4}$$

або у явному вигляді

$$y = \varphi(x, C). \tag{1.5}$$

Для диференціального рівняння першого порядку *задача Коші* формулюється так: *серед усіх розв'язків диференціального рівняння знайти такий розв'язок* $y = y(x)$, *що задовольняє умову* $y(x_0) = y_0$, тобто при заданому значенні незалежної змінної $x = x_0$ значення функції y(x) дорівнює заданому значенню y_0. Задана умова $y(x_0) = y_0$ є *початковою умовою*, а x_0 і y_0 – початковими даними.

З геометричної точки зору розв'язати задачу Коші означає: серед усіх інтегральних кривих диференціального рівняння першого порядку знайти таку, яка проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$ (рис. 1.1).

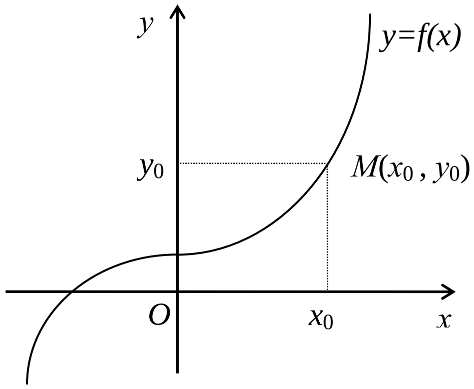


Рис. 1.1

Теорема Пеано (про існування розв'язку). Якщо функція $f(x,y)$ є неперервною в області *D*, то через кожну точку $(x_0, y_0) \in D$ проходить хоча б одна інтегральна крива.

Теорема Пікара (про єдиність розв'язку). Нехай для диференціального рівняння (1.3) виконуються такі умови:

1) функція $f(x,y)$ визначена та неперервна в обмеженій області

$$D = \{(x,y): |x - x_0| \le a; |y - y_0| \le b;\ a > 0, b > 0\},$$

а отже, є обмеженою, тобто існує таке дійсне число $M > 0$, що

$$|f(x,y)| \le M \text{ для } \forall (x,y) \in D;$$

2) функція $f(x,y)$ має обмежену частинну похідну по змінній y в області *D*, тобто

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le K,\ \forall\ (x,y) \in D,\ K > 0. \qquad (1.6)$$

Тоді задача Коші (1.3) має єдиний неперервно-диференційовний розв'язок у проміжку $|x - x_0| \le h,$ де $h = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

Ця теорема дає достатні умови існування єдиного розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку, але вони не є необхідними: може існувати єдиний розв'язок задачі Коші, але в точці $M_0(x_0, y_0)$ наведені умови не виконуються.

Зауваження. У сформульованій теоремі Пікара умову (1.6) обмеженості частинної похідної можна послабити, зокрема так, щоб функція $f(x,y)$ по змінній y задовольняла умову Ліпшіца:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|, \qquad (1.7)$$

де $L>0$ – найменша стала, що задовольняє нерівність.

Якщо функція диференційовна і задовольняє (1.6), то вона задовольняє умову Ліпшіца при L=K. Функція може задовольняти умову Ліпшіца, але не бути диференційовною, а отже, не буде задовольняти (1.6). Наприклад, функція $y=|x|$ $(L=1)$.

Перше доведення існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку належить Коші (1789 – 1857 р.р.), він отримав його у 1820 – 1830 роках.

Теорема Коші (про існування та єдиність розв'язку). Нехай для диференціального рівняння (1.3) виконуються такі умови:

1) функція $f(x,y)$ є неперервною функцією двох змінних у замкненому прямокутнику $D=\{(x,y): x_0-a\le x\le x_0+a,\ y_0-b\le y\le y_0+b\}$, де $a,b\in R$ і $a,b>0$;

2) функція $f(x,y)$ по змінній y в області D задовольняє умову Ліпшіца: $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$, де L є сталою Ліпшіца, а (x,y_1) і (x,y_2) – довільні точки з області D.

Тоді на відрізку $[\,x_0-h,\ x_0+h]$, де $h=min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$, існує єдиний розв'язок $y=y(x)$, який належить області D і задовольняє початкову умову $y(\,x_0)=y_0$.

Зауваження до умови теореми: оскільки $f(x,y)$ є неперервною функцією в замкненій області, то вона обмежена в цій області, тобто існує таке дійсне додатне $M>0,$ що для $\forall(x,y)\in D$ виконується нерівність $|f(x,y)|\le M$.

Зауваження: доведення даної теореми ґрунтується на методі послідовних наближень.

Точка $(x_0,\ y_0)$ з теорем Пікара і Коші називається *точкою єдиності розв'язку задачі Коші*, якщо через неї проходить лише одна інтегральна крива рівняння $y'=f(x,y)$.

Розв'язок диференціального рівняння (1.3), в кожній точці якого виконується умова єдиності, є *частинним* розв'язком цього рівняння.

Задачі

1. Перевірити, чи є функція $y = y(x)$ розв'язком диференціального рівняння:

1) $y = e^{-x^2}$, $y' = xe^{x^2}\left(1 + y^2\right)$,

2) $y = \dfrac{1}{Ce^{2x} + e^{x}}$, $y' + 2y = y^2 e^{x}$,

3) $x^2 + y^4 = Cy^2$, $xydx = \left(x^2 - y^4\right)dy$.

2. У заданій сім'ї кривих $y = 2 + C\cos x$ виділити ту криву, яка задовольняє початкову умову $y(0) = -1$.

3. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих:

1) парабол $y = x^2 + 2ax$,

2) гіпербол $x^2 - y^2 = 2ax$.

4. Скласти диференціальне рівняння сім'ї парабол, вершини яких проходять через точку $M(-1;3)$ і мають за вісь симетрії пряму $x = -1$.

5. Записати диференціальне рівняння $y' ctgx + y = 2$ у формі рівняння, розв'язного відносно похідної, та у симетричній формі.

6. Користуючись теоремами про єдиність розв'язку, визначити область, у якій дане рівняння матиме єдиний розв'язок:

1) $y' = x^2 + y^2$;

2) $y' = \dfrac{x}{y}$;

3) $y' = \sqrt{x - y}$.

7. Показати, що для диференціального рівняння $y' = |y|^{\frac{3}{2}}$ в кожній точці осі Ox порушується умова єдиності його розв'язку.

2. Методи ізоклін та Ейлера наближеного розв'язування диференціальних рівнянь

Метод ізоклін

Нехай маємо диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$. Кожній парі чисел x та y відповідає точка $M(x, y)$ площини, а число $y'(M)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до кривої $f(x, y)$ в цій точці і визначає певний напрямок (позначається стрілкою), що виходить з цієї точки. В цьому випадку говорять, що рівняння $y' = f(x, y)$ задає на площині *поле напрямів*.

Будь-якому розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння (1.3) відповідає інтегральна крива, для якої кут α нахилу дотичної до графіка розв'язку $y = \varphi(x)$ при певному x співпадає з кутом нахилу поля в точці площини з даною абсцисою x, тобто $\varphi'(x) = tg\alpha$.

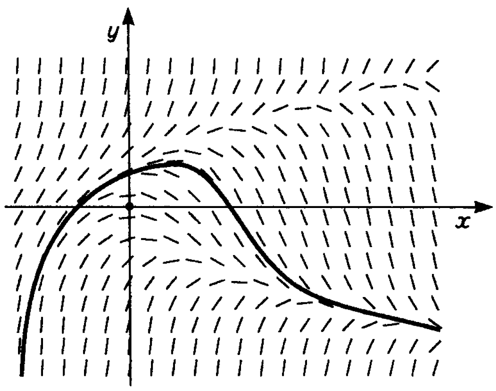


Рис. 1.1.2.

Отже, задачу знаходження загального розв'язку диференціального рівняння геометрично можна сформулювати так: *знайти такі інтегральні криві, дотичні до яких у кожній точці збігаються з напрямом поля в цій точці*.

Для побудови поля напрямів використовують *метод ізоклін*.

Означення. *Ізокліною* називається крива на площині *XOY*, в кожній точці якої поле напрямків має однаковий напрям («ізокліна» – лінія однакового напряму).

Рівняння ізокліни для (1.3) має вигляд $f(x, y) = a$, де a – довільний параметр. Напрям кожної ізокліни визначається співвідношенням $\alpha = arctg\ a$.

Приклад 1. Визначити напрями декількох ізоклін для диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$.

Очевидно, що рівняння $x^2 + y^2 = a$ є визначають кола з центрами в точці (0; 0) та радіусами $R = \sqrt{a}$:

1) $a = 0$: $x^2 + y^2 = 0 -$ напрям ізокліни співпадає з додатним напрямом осі Ox;

2) $a = 1$: $x^2 + y^2 = 1 -$ напрям ізокліни визначає кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

3) $a = \sqrt{3}$: $x^2 + y^2 = \sqrt{3}$ - напрям ізокліни визначає кут $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Приклад 2. За допомогою методу ізоклін наближено побудувати інтегральні криві рівняння $y' = 2x(1-y)$.

Рівняння ізоклін $2x(1-y) = a$. При $a = 0$ отримаємо рівняння двох прямих $x = 0,\ y = 1$. При $a \neq 0$ отримаємо рівняння сім'ї гіпербол $y = 1 - \dfrac{a}{2x}$.

Пряма $y = 1$ є інтегральною кривою, оскільки $y = 1$ є розв'язком диференціального рівняння.

У кожній точці ізокліни $x = 0$ дотичні до інтегральних кривих паралельні осі Ox. Точки ізокліни $x = 0$ є точками екстремуму розв'язків, оскільки ізокліна $f(x, y) = 0$ визначає рівняння ліній, на яких знаходяться точки максимуму та мінімуму інтегральних кривих.

Для визначення характеру екстремальних точок, обчислимо y'': $y'' = 2(1-y)(1-2x^2)$. Очевидно, що всі точки осі ординат $x = 0$ при $y > 1$ є точками максимуму, оскільки $y'' < 0$, а при $y < 1$ – мінімуму, бо $y'' > 0$. З умови $y'' = 0$ слідує, що точки перегину кривих належать прямим $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Прямі $x = 0$ і $y = 1$ (ізокліни) поділяють координатну площину на 4 частини, в кожній з яких похідна y' зберігає знак. Отже, при перетині прямої $x = 0$ інтегральні криві переходять з області зростання $y(x)$ в область спадання, якщо $y > 1$, і навпаки, за умови $y < 1$.

Зокрема, для ізоклін $y = 1 - \frac{1}{2x}$ $(a = 1)$ і $y = 1 + \frac{1}{2x}$ $(a = -1)$ дотичні, проведені до інтегральних кривих в точках перетину з ними, утворюють з віссю Ox кути 45^0 і 135^0 відповідно.

Проведене дослідження дозволяє побудувати сім'ю інтегральних кривих цього рівняння (рис.1.3.)

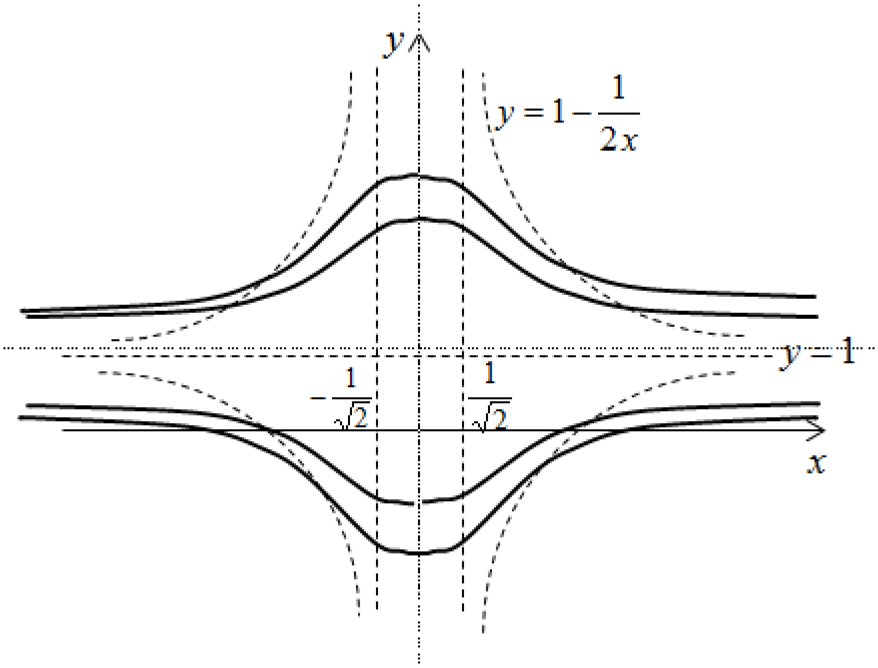


Рис. 1.3

Приклад 3. Знайти та побудувати інтегральні криві, що проходять через точки $A(-1;1)$, $B(0;-2)$, $D(2;1)$ деякого диференціального рівняння 1-го порядку за його загальним інтегралом $4x^2 + (y-1)^2 = C^2$.

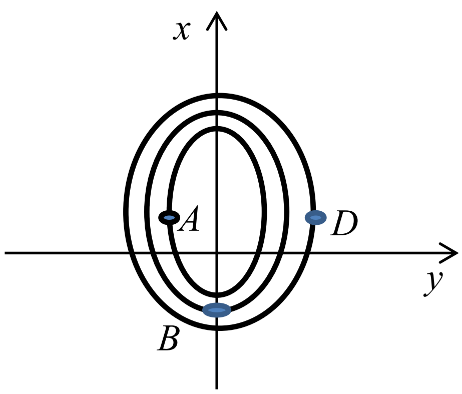


Рис. 1.4

Підставимо в загальний інтеграл координати точок *A, B, D* і знайдемо значення відповідних сталих *C*, при яких отримаємо рівняння інтегральних кривих, що проходить через ці точки.

Для точки $A(-1;1)$:

$4 = C^2$; $4x^2 + (y-1)^2 = 4$.

Для точки $B(0;-2)$:

$9 = C^2$; $4x^2 + (y-1)^2 = 9$.

Для точки $D(2;1)$:

16= C^2; $4x^2 + (y-1)^2 = 16$.

Бачимо, що це є концентричні еліпси, центри яких знаходяться в точці (0; 1) (рис. 1.4).

Отже, описаний метод ізоклін дозволяє наближено побудувати інтегральні криві диференціального рівняння, що відповідають його розв'язку.

Метод Ейлера

Іншим методом наближеного розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння $y' = f(x,y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ є *метод Ейлера*. При цьому ми припускаємо, що права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші, що гарантує існування та єдиність розв'язку на деякому відрізку $[x_0; b]$.

Розіб'ємо відрізок $[x_0; b]$ точками $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ на n рівних частин. Позначимо $x_i - x_{i-1} = \Delta x, i = 1,2,\ldots,n$, а через y_i наближені значення розв'язку в точках x_i. Потім послідовно виконаємо такі операції: підставимо значення x_0 і y_0 у праву частину даного рівняння та обчислимо кутовий коефіцієнт $y' = f(x_0, y_0)$ дотичної до інтегральної кривої в точці (x_0, y_0). Для знаходження наближеного значення y_1 шуканого розв'язку на проміжку $[x_0; x_1]$ замінимо інтегральну криву відрізком дотичної до неї в точці $(x_0; y_0)$, рівняння якої $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x$.

Підставимо значення x_1 і y_1 в праву частину рівняння $y' = f(x,y)$ та обчислимо коефіцієнт y' дотичної до інтегральної кривої в точці (x_1, y_1). На проміжку $[x_1; x_2]$ знову замінимо інтегральну криву відрізком дотичної і знайдемо наближене значення y_2 розв'язку: $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x$. Далі виконаємо аналогічні операції на кожному з проміжків розбиття відрізка та отримаємо ламану лінію, що наближено замінює шукану інтегральну криву. Таку ламану називають *ламаною Ейлера*, а описаний метод її побудови - *методом Ейлера*.

Зауважимо, що точність знаходження наближених значень y_i в точках x_i за формулою $y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta x$ визначається різницею Δx.

Задачі

1. Методом ізоклін побудувати інтегральні криві наступних диференціальних рівнянь:

1) $y' = x + 1$;

2) $y' = x^2 - y^2$;

3) $y' = (y-1)^2$.

2. Для диференціального рівняння $y' = x - y$ за методом Ейлера побудувати наближений розвязок задачі Коші, якщо $x_0 = y_0 = 0$ та $\Delta x = 0{,}1$, $x \in [0;1]$.

3. Особливі розв'язки диференціального рівняння

Існують диференціальні рівняння першого порядку, для яких задача Коші є розв'язною, але іі розв'язок не єдиний. Такий розв'язок називають *особливим*, йому відповідає інтегральна крива, через кожну точку якої проходить принаймні ще одна.

Отже, функція $y = \psi(x)$ називається *особливим розв'язком диференціального рівняння першого порядку*, якщо:

1) вона є розв'язком цього рівняння;

2) через кожну точку кривої $y = \psi(x)$ проходить принаймні дві різних інтегральних кривих цього рівняння.

Знаходження особливого розв'язку ґрунтується на такій теоремі.

Теорема. Якщо $\Phi(x, y, C) = 0$ є загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ і сім'я кривих

$\Phi(x, y, C) = 0$ має обвідну $y = \psi(x)$, то ця обвідна буде його особливим розв'язком.

Під *обвідною сім'ї кривих* $\Phi(x, y, C) = 0$ будемо розуміти криву $y = \psi(x)$, яка задовольняє умови:

1) для довільної її точки існує крива з сім'ї $\Phi(x, y, C) = 0$, що дотикається до $y = \psi(x)$ в цій точці;

2) $y = \psi(x)$ складається лише з таких точок.

Для знаходження рівняння обвідної розглянемо деяку її точку (x, y), що також належить і деякій кривій сім'ї $\Phi(x, y, C) = 0$. Ця крива визначається певним значенням параметра $C = C(x, y)$ і тому для всіх точок шуканої обвідної виконується рівність $\Phi\big(x, y, C(x, y)\big) = 0$.

Якщо продиференціювати $\Phi(x, y, C)$ по змінній x (при цьому вважаємо $y = y(x)$), то знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до обвідної в точці $(x; y)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}\right) y' = 0. \qquad (1.8)$$

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої з сім'ї $\Phi(x, y, C) = 0$ знайдемо з рівності:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0. \qquad (1.9)$$

Оскільки знайдені кутові коефіцієнти рівні, то з умов (1.8) та (1.9) отримаємо, що

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right) = 0, \text{ де } C(x, y) = const.$$

Звідси, $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$.

Отже, для відшукання обвідної потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial C} = 0. \end{cases}$$

Приклад 1. Знайти обвідну сім’ї парабол $y=(x+C)^2$.

Складемо систему $\begin{cases} y=(x+C)^2, \\ \dfrac{\partial y}{\partial C}=2(x+C)=0. \end{cases}$ Звідки $x+C=0$, отже, шукана обвідна сім’ї визначається рівнянням $y=0$.

Зазначимо, що особливі розв’язки диференціального рівняння першого порядку треба шукати там, де порушуються умови теореми Пікара або теореми Коші (зокрема, не виконується умова Ліпшіца чи обмеженість похідної $\dfrac{\partial f}{\partial y}$).

Зауваження. Точки, в яких $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ необмежена, можуть і не визначати особливих розв’язків. Зокрема, для диференціального рівняння $y'=y^{\frac{2}{3}}+1$ частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$ є необмеженою на прямій $y=0$. Проте вона не є особливим розв’язком, оскільки ця функція навіть не є розв’язком диференціального рівняння.

Приклад 2. Знайти особливий розв’язок рівняння $y=xy'+y'-y'^2$.

Неважко переконатися, що загальний розв’язок заданого рівняння має вигляд $y=Cx+C-C^2$ і визначає сім’ю прямих (пропонуємо побудувати декілька). Для знаходження обвідної цієї сім’ї складемо і розв’яжемо систему:

$$\begin{cases} y=Cx+C-C^2 \\ x+1-2C=0 \end{cases}.$$

Отримаємо, що $C=\dfrac{x+1}{2}$, а $y=\dfrac{(x+1)^2}{2}-\dfrac{(x+1)^2}{4}=\dfrac{(x+1)^2}{4}$ задає рівняння параболи. Можна перевірити, що ця функція є розв’язком даного диференціального рівняння.

Задачі

1. Знайти особливі розв’язки диференціальних рівнянь, якщо :

1) $x(y')^2 - 2yy' + 4x = 0,\ \ x > 0$ і відомий його загальний інтеграл $x^2 = C(y - C)$;

2) $xy' + (y')^2 - y = 0$ і відомий його загальний інтеграл $xy = Cx + C^2$.

4. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

1. Нехай задано диференціальне рівняння

$$P(x)M(y)dx + Q(x)N(y)dy = 0, \qquad (1.10)$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – функції, що залежать тільки від змінної x, а $M(y), N(y)$ – від змінної y, причому вони є неперервними по відповідним змінним у деякій області.

Диференціальне рівняння такого вигляду називається *диференціальним рівнянням, що допускає відокремлення змінних,* або диференціальним рівнянням з *відокремлюваними змінними*.

Припускаємо, що добуток $M(y)Q(x) \neq 0$. Для відокремлення змінних у рівнянні (1.10) поділимо почленно його обидві частини на $M(y)Q(x)$. Отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{P(x)}{Q(x)}dx + \frac{N(y)}{M(y)}dy = 0, \qquad (1.11)$$

в якому $\frac{P(x)}{Q(x)}$ функція, що залежить лише від змінної x, а $\frac{N(y)}{M(y)}$ – від змінної y. Це рівняння є диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.

Проінтегрувавши почленно (1.11), отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння (1.10).

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx + \int \frac{N(y)}{M(y)}dy = C. \qquad (1.12)$$

Зауваження. Розв’язки рівнянь $Q(x) = 0$ та $M(y) = 0$ водночас є розв’язками диференціального рівняння (1.10), їх характер потрібно досліджувати окремо.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^2(1+2x^3)dx + x(3y-4)dy = 0.$$

Для відокремлення змінних поділимо почленно обидві частини рівняння на xy^2. Отримаємо:

$$\frac{1+2x^3}{x}dx + \frac{3y-4}{y^2}dy = 0,$$

$$\int \frac{1+2x^3}{x}dx + \int \frac{3y-4}{y^2}dy = C.$$

Обчислимо отримані інтеграли і знайдемо загальний інтеграл (розв'язок) даного диференціального рівняння:

$$\ln|x| + \frac{2x^3}{3} + 3\ln|y| - \frac{4}{y} = C.$$

2. Нехай маємо диференціальне рівняння

$$y' = f(x), \qquad (1.13)$$

яке не містить явно функцію y. Тоді $dy = f(x)dx$. Це рівняння є рівнянням з відокремленими змінними, а його загальний розв'язок має вигляд

$$y = \int f(x)dx + C.$$

Задамо початкову умову $y_0 = y(x_0)$, де $x_0 \in [a;b]$. Якщо $f(x)$ – функція, неперервна на відрізку $[a;b]$, то для (1.13) виконуються умови теореми Коші. Отже, через кожну точку області $D = \{(x,y): a \le x \le b, y \in R\}$ проходить одна і тільки одна інтегральна крива, тобто задача Коші має єдиний розв'язок

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

3. Розглянемо диференціальне рівняння, яке не містить у явному вигляді незалежної змінної x, тобто

$$y' = f(y). \qquad (1.14)$$

Нехай функція $f(y)$ неперервна на $[c;d]$ і $f(y) \neq 0$ для $\forall\, y \in [c;d]$. Рівняння (1.14) подамо у вигляді $\frac{dy}{f(y)} = dx$. Тоді його загальний розв'язок визначається як $x = \int \frac{dy}{f(y)} + C$, де $C - const$, а розв'язок задачі Коші з початковими умовами $-\infty < x_0 < \infty$, $c \le y_0 \le d$ має вигляд

$$x = x_0 + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)}.$$

Випадок, коли неперервна функція $f(y) = 0$ при деякому $y \equiv y_0$, розглянемо окремо. Для цього підставимо $y = y_0$ в (1.14). Очевидно, що ця функція є розв'язком диференціального рівняння, вона з геометричної точки зору визначає пряму, паралельну осі Ox.

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \sqrt[3]{y}$.

Нехай $y \neq 0$, тоді $\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}}$, або $\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} = dx$. Загальний розв'язок цього рівняння $x = \frac{2}{3}\sqrt[3]{y^2} + C$, або $y = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x-c)\right)^3} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}(x-c)^3}$ визначає сімейство парабол.

Очевидно, що $y = 0$ також є розв'язком даного диференціального рівняння.

Задачі

1. З'ясувати, чи належить рівняння до класу диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними:

1) $xydx + (x+1)dy = 0$;

2) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;

3) $(x+2)e^y dx + y\sqrt{x+1}dy = 0$;

4) $y'ctgx + y = 2$;

5) $(x^2y + xy^2)dx + 2xydy = 0$.

2. Розв'язати рівняння:

1) $xydx + (x+1)dy = 0$,

2 $\left(xy^2+x\right)dx+\left(y-x^2y\right)dy=0$,

3) $(x+2)e^y dx+y\sqrt{x+1}dy=0$,

4) $y'ctgx+y=2,\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.

5. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння, що зводяться до однорідних

Введемо спочатку означення однорідної функції та поняття порядку (степеня) однорідності.

Означення. Функція $f(x,y)$ називається *однорідною функцією* n*-го порядку*, якщо для будь-якого дійсного числа λ справджується рівність

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y), \qquad (1.15)$$

а число n називається *порядком* або *степенем однорідності.*

Зокрема, функція $f(x,y)$ називається *однорідною функцією нульового порядку*, якщо для будь-якого $\lambda\neq 0$ виконується рівність

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y). \qquad (1.16)$$

Наприклад, для функції $P(x,y)=3xy^2+7y^3+4x^2y$, що є многочленом третього порядку, маємо

$$P(\lambda x,\lambda y)=3\lambda x\lambda^2y^2+7\lambda^3y^3+4\lambda^2x^2\lambda y=\lambda^3(3xy^2+7y^3+4x^2y)=$$
$$=\lambda^3(3xy^2+7y^3+4x^2y)=\lambda^3P(x,y).$$

Маємо, що $P(x,y)$ є однорідною функцією третього порядку однорідності.

Отже, многочлен виду $P(x,y)=\sum_{i,j}a_{ij}x^iy^j$ є *однорідною функцією порядку* n, оскільки всі його доданки мають однаковий степінь n, де $n=i+j$.

Приклад 1. Функції

а) $\frac{x^5+y^5}{7x^3y^2+9xy^4}$; б) $\arccos\frac{x^2+y^2}{3xy}$

є однорідними нульового степеня, оскільки при заміні x та y на λx та λy, де

$\lambda \neq 0$, отримаємо відповідно:

а) $\frac{(\lambda x)^5+(\lambda y)^5}{7(\lambda x)^3(\lambda y)^2+9(\lambda x)(\lambda y)^4} = \frac{\lambda^5(x^5+y^5)}{7\lambda^5 x^3y^2+9\lambda^5 xy^4} = \frac{\lambda^5(x^5+y^5)}{\lambda^5(7x^3y^2+9xy^4)} = \frac{x^5+y^5}{7x^3y^2+9xy^4}$;

б) $\arccos\frac{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}{3(\lambda x)(\lambda y)} = \arccos\frac{\lambda^2(x^2+y^2)}{\lambda^2 3xy} = \arccos\frac{x^2+y^2}{3xy}$.

Лема. Якщо $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового степеня, то $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, де $\varphi(t) = f(1,t)$.

Доведення. Покладемо в рівності (1.16) $\lambda = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ (це завжди можна зробити в силу довільного вибору λ), отримаємо:

$$f(x,y) = f\left(\frac{x}{x},\frac{y}{x}\right) = f\left(1,\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Лему доведено.

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку в симетричній формі

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1.17)$$

називається *однорідним*, якщо $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ є однорідними функціями одного й того ж степеня однорідності.

Однорідне диференціальне рівняння також може бути подано в *нормальній* формі як $y' = f(x,y)$, де права частина є однорідною функцією нульового степеня. За наведеною лемою цю функцію можна записати у вигляді $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, а саме рівняння як

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

За допомогою підстановки $\frac{y}{x} = t$, де t – нова невідома змінна, дане однорідне диференціальне рівняння зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Виконаємо заміну $t = \frac{y}{x}$, тоді $y = tx$, а $dy = tdx + xdt$. Подамо рівняння $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ у вигляді $dy = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx$ і підставимо в нього ці вирази:

$$tdx + xdt = \varphi(t)dx;$$

$$t\frac{dx}{dt}+x=\varphi(t)\frac{dx}{dt};$$

$$x=(\varphi(t)-t)\frac{dx}{dt};$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{\varphi(t)-t};$$

$$\ln|x|=\ln C+\int\frac{dt}{\varphi(t)-t}.$$

Покладемо $\int\frac{dt}{\varphi(t)-t}=\omega(t)$ і матимемо, що $\frac{x}{C}=e^{\omega(t)}$ або $x=Ce^{\omega(t)}$.

Враховуючи заміну $t=\frac{y}{x}$, загальний розв’язок даного однорідного диференціального рівняння запишемо як $x=Ce^{\omega\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Зауваження. Якщо функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ в (1.17) мають спільний множник x^k, то $x=0$ є також розв’язком цього рівняння.

Зауваження. Інтегральні криві однорідного диференціального рівняння першого порядку мають такі властивості:

– всі вони є подібними між собою;

– центр подібності знаходиться в точці (0;0).

Приклад 2. Розв’язати диференціальне рівняння

$$(xy+y^2)dx-(2x^2+xy)dy=0.$$

Маємо однорідне диференціальне рівняння. Припустимо, що $x\neq 0$, і розділимо це рівняння на x^2 почленно:

$$\left(\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx-\left(2+\frac{y}{x}\right)dy=0.$$

За допомогою підстановки $\frac{y}{x}=t$ і $dy=tdx+xdt$ це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(t+t^2-2t-t^2)dx-(2+t)xdt=0;$$

$$tdx+(2+t)xdt=0;$$

$$\frac{dx}{x}=-\frac{2+t}{t}dt;$$

$$\frac{dx}{x}=-\left(1+\frac{2}{t}\right)dt;$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\left(1+\frac{2}{t}\right)dt+\ln\mathrm{C};$$

$$\ln|x| + 2\ln|t| - \ln C = -t;$$

$$\frac{xt^2}{C} = e^{-t};$$

$$\frac{y^2}{x} = Ce^{-\frac{y}{x}}.$$

Отже, $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$ – шуканий розв’язок диференціального рівняння у неявному вигляді.

Підставивши в рівняння $x = 0$, бачимо, що це також розв’язок даного диференціального рівняння.

Задачі

1. З’ясувати, чи є функція однорідною і, якщо так, визначити порядок її однорідності:

а) $f(x, y) = x^2 - 5xy$;

б) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{2x^2}$;

в) $f(x, y) = x^2 - \sin xy$.

2. Чи є дане рівняння однорідним диференціальним рівнянням:

а) $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$,

б) $xdy = (x + 2y)dx$,

в) $y' = \dfrac{y}{x + y}$,

г) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$,

д) $y' = \sin\dfrac{y}{x + y} + x$.

3. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння:

1) $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$,

2) $xdy = (ax + by)dx$,

3) $y' = \dfrac{y}{x+y}$,

4) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$,

5) $xydy - y^2dx = (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx,\ \ y(1) = 0$,

6) $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y,\ y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних

Розглянемо диференціальні рівняння першого порядку, що зводяться до однорідних, виду

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{1.18}$$

де $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in R$ і $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$, а функція f є неперервною в деякій області.

Введемо нові змінні ξ, τ так, що $x = \xi + h$ та $y = \tau + k$, де h, k – деякі невідомі числа.

Підставимо ці вирази в (1.18). Враховуючи, що $\frac{dy}{dx} = \frac{d\tau}{d\xi}$, отримаємо:

$$\frac{d\tau}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi+b\tau+ah+bk+c}{a_1\xi+b_1\tau+a_1h+b_1k+c_1}\right). \tag{1.19}$$

Для знаходження чисел h і k покладемо, що

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0. \end{cases}$$

За умови $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ ця система лінійних рівнянь має єдиний розв’язок.

Тоді диференціальне рівняння (1.1.19) має вигляд

$$\frac{d\tau}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\tau}{a_1\xi + b_1\tau}\right)$$

і є однорідним диференціальним рівнянням відносно нових змінних ξ та τ, а його загальний розв’язок $\Phi(\xi, \tau, c) = 0$. Підставимо вирази $\xi = x - h$ та

$\tau = y - k$ у загальний розв'язок, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння (1.18).

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$.

Маємо, що $a = -7,\ a_1 = 3;\ \ b = 3,\ b_1 = -7;\ \ c = 7, c_1 = -3$, а отже, умова $\frac{-7}{3} \neq \frac{-3}{7}$ виконується. Складемо та розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -7h + 3k + 7 = 0, \\ 3h - 7k - 3 = 0; \end{cases}$$

$h = 1,\ k = 0.$

З отриманого маємо:

$$x = \xi + 1,\ y = \tau + 0,$$

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \frac{3\tau - 7\xi}{-7\tau + 3\xi}.$$

Дане рівняння є однорідним. Нехай $\frac{\tau}{\xi} = t; \tau = t\xi;$

$$d\tau = td\xi + \xi dt,$$

$$\xi \frac{dt}{d\xi} + t = \frac{3t - 7}{-7t + 3},$$

$$\frac{\xi dt}{d\xi} = \frac{7t^2 - 7}{-7t + 3};$$

$$\frac{-7t + 3}{7t^2 - 7} dt = \frac{d\xi}{\xi},$$

$$c(\tau^2 - \xi^2) = \left(\frac{\tau - \xi}{\tau + \xi}\right)^{3/7}.$$

Виразивши x та y із співвідношень $x = \xi + 1,\ y = \tau + 0,$ отримаємо загальний інтеграл даного рівняння

$$\left(\frac{y-x+1}{y+x-1}\right)^{3/7} = c(y^2 - (x-1)^2).$$

Задачі

1. Розв'язати рівняння:

1) $x + y - 2 + (1 - x)y' = 0$;

2) $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$.

6. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* називається рівняння

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x) = 0, \qquad (1.20)$$

де $a(x), b(x), c(x)$ – задані неперервні функції. Дане рівняння є лінійним відносно функції $y(x)$ та її похідної $y'(x)$.

При $a(x) \neq 0$ для всіх допустимих значень x отримаємо рівняння

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = -\frac{c(x)}{a(x)}.$$

Покладемо $\frac{b(x)}{a(x)} = p(x), -\frac{c(x)}{a(x)} = f(x)$ та прийдемо до рівняння

$$y' + p(x)y = f(x), \qquad (1.21)$$

де функції $p(x)$ та $f(x)$ є неперервними на деякому проміжку.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то диференціальне рівняння (1.21) називається *лінійним однорідним*, при $f(x) \neq 0$ – *лінійним неоднорідним*.

Розглянемо методи розв’язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку: метод Бернуллі та метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Метод Бернуллі

Загальний розв’язок рівняння (1.21) шукаємо у вигляді

$$y = u(x)v(x), \qquad (1.22)$$

де вибір однієї з функцій є довільним, а вигляд іншої буде залежати від першої.

Знайдемо похідну від функції з (1.22)

$$y' = u'v + uv', \qquad (1.23)$$

та підставимо вирази (1.22) і (1.23) в рівняння (1.21):

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x).$$

Згрупуємо доданки в лівій частині, наприклад, так:

$$v(u' + p(x)u) + uv' = f(x). \qquad (1.24)$$

У цьому випадку функцію $u(x)$ виберемо так, щоб

$$u' + p(x)u = 0. \tag{1.25}$$

Отримаємо деякий ненульовий розв'язок $u(x)$ цього лінійного однорідного диференціального рівняння.

Виконання умови (1.25) приводить рівняння (1.24) до вигляду

$$uv' = f(x),$$

де $v(x)$ – деяка невідома функція, що взагалі кажучи, залежить від $u(x)$.

Отже, функції $u(x)$ та $v(x)$ отримаємо як розв'язки системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} u' + p(x)u = 0; \\ uv' = f(x). \end{cases}$

Очевидно, що перше рівняння системи одночасно є і лінійним однорідним, і диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. При цьому достатньо знайти лише один розв'язок цього рівняння, такий, що $u(x) \neq 0$:

$$\frac{du}{dx} = -p(x)u,$$

$$\frac{du}{u} = -p(x)dx,$$

$$\ln|u| = -\int p(x)dx,$$

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}. \tag{1.26}$$

Підставимо вираз функції $u(x)$ в друге рівняння системи і знайдемо множину функцій $v(x)$, що відрізняються на сталу *C*:

$$e^{-\int p(x)dx}\frac{dv}{dx} = f(x),$$

$$dv = f(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

$$v(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\,. \tag{1.27}$$

Отже, з (1.26) та (1.27) загальний розв'язок рівняння (1.21) має вигляд:

$$y = u(x)v(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right). \tag{1.28}$$

Зауваження 1. Розв'язок диференціального рівняння (1.21) у вигляді $y = u(x)v(x)$ можна шукати також з системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0; \\ u'v = f(x), \end{cases}$$

де $v(x)$ – деякий ненульовий розв'язок першого рівняння, а $u(x)$ – множина функцій, що є розв'язками другого.

Зауваження 2. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку не має особливих розв'язків, що слідує з доведення формули (1.28).

Приклад 1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$**,** що задовольняє початкову умову $y(0) = 0$.

Маємо ОДЗ рівняння: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \epsilon Z.$

$$y = uv, y' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' - uv\ \mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x},$$

$$v(u' - u\,\mathrm{tg}\,x) + uv' = \frac{1}{\cos x}.$$

Знайдемо функцію $u(x)$ з умови $u' - u\,\mathrm{tg}\,x = 0$:

$$\frac{du}{u} = \mathrm{tg}\,x\,dx,$$

$$\ln|u| = -\ln|\cos x|,$$

$$u = \frac{1}{\cos x}.$$

Знайдемо множину функцій $v(x)$:

$$\frac{1}{\cos x}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{dv}{dx} = 1,$$

$$dv = dx,$$

$$v = x + C.$$

Запишемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння:

$$y(x) = \frac{1}{\cos x}(x + C).$$

Підставимо початкову умову $y(0) = 0$ і отримаємо, що $C = 0$. Отже, шуканий частинний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд $\tilde{y}(x) = \frac{x}{\cos x}$.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (1.21) і покладемо $f(x) = 0$. Отримаємо так зване *відповідне однорідне лінійне диференціальне рівняння* $y' + p(x)y = 0$, загальний розв'язок якого має вигляд $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ (його знаходимо за алгоритмом отримання загального розв'язку (1.26)).

Згідно ідеї Лагранжа (методу варіації довільної сталої) загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.21) будемо шукати у вигляді $y = Ce^{-\int p(x)dx}$, але в припущенні, що C є не сталою величиною, а деякою функцією $C = C(x)$ від змінної x, тобто,

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{1.29}$$

Підставимо (1.29) в (1.21):

$$\frac{d\left(C(x)e^{-\int p(x)dx}\right)}{dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Функцію $C(x)$ знайдемо інтегруванням диференціального рівняння

$$dC(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\,. \tag{1.30}$$

Підставимо (1.30) у вираз (1.29), отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння (1.21):

$$y = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int p(x)dx} =$$

$$= e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1e^{-\int p(x)dx}. \tag{1.31}$$

Зауважимо, що в отриманому загальному розв'язку (1.31) другий доданок є загальним розв'язком відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння $y' + p(x)y = 0$, а перший – частинним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння (1.21) (він утворюється з (1.31) за умови, що $C_1 = 0$).

Отже, *загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння є сумою загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння та деякого частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння.*

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y' - y = 2x - x^2$.

Спочатку розв'яжемо відповідне лінійне однорідне диференціальне рівняння $y' - y = 0$:

$$\frac{dy}{y} = dx,$$

$$\ln|y| = x + lnC,$$

$$\frac{y}{C} = e^x,$$

$$y = Ce^x.$$

За методом Лагранжа вважаємо, що $C = C(x)$, а $y = C(x)e^x$. Підставимо його в задане рівняння і виконаємо перетворення:

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = 2x - x^2,$$

$$C'(x)e^x = 2x - x^2,$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = (2x - x^2)e^{-x},$$

$$C(x) = 2\int xe^{-x}dx - \int x^2e^{-x}dx + C_1 \text{ або}$$

$$C(x) = -2xe^{-x} + 2e^{-x} + x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C_1 + C_2 = x^2e^{-x} + C,$$

де $C = C_1 + C_2$.

Отже, $y = C(x)e^x = (x^2e^{-x} + C)e^x = x^2 + Ce^x$ є загальним розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Рівняння Бернуллі

Рівняння виду

$$y' + p(x)y = f(x)y^\alpha,$$

де $\alpha \in R, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, називається *рівнянням Бернуллі*.

Це рівняння зводиться до лінійного рівняння першого порядку за допомогою підстановки

$$z = y^{1-\alpha}\ .$$

Зауважимо, що перейти від функції $y(x)$ до $z(x)$ можна при діленні рівняння на y^{α} .

Приклад 3. Розв'язати рівняння Бернуллі $y' + y = (1 + x)y^2$.

Для зведення даного рівняння Бернуллі $(\alpha = 2)$ до лінійного спочатку розділимо обидві його частини на $y^{\ 2}$:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = 1 + x.$$

Введемо нову функцію z: $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$, тоді $z' = \frac{-y'}{y^2}$.

Підставимо вирази для z та z' у дане рівняння, отримаємо лінійне рівняння першого порядку $-z' + z = 1 + x$ або $z' - z = -1 - x$. Його розв'язок знайдемо методом Бернуллі.

Нехай $z = uv,\ z' = u'v + uv'$, тоді маємо:

$$u'v + uv' - uv = -1 - x,$$

$$v(u' - u) + uv' = -1 - x,$$

$$u' - u = 0,$$

$$\frac{du}{dx} = u,\ \frac{du}{u} = dx,$$

$$\ln|u| = x\ ,\ \underline{u = e^x},$$

$$uv' = -1 - x,$$

$$e^x \frac{dv}{dx} = -1 - x,$$

$$dv = \frac{-1-x}{e^x} dx,$$

$$v = -\int \left(\frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x}\right) dx = \left\{\begin{matrix} x = u \\ dx = du \\ \frac{1}{e^x} dx = dv \\ v = -\frac{1}{e^x} \end{matrix}\right\} = -\left(-\frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \int \frac{1}{e^x} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} + C,$$

$$z = uv = e^x\left(\frac{2}{e^x} + \frac{x}{e^x} + C\right) = x + 2 + Ce^x.$$

Отже, загальним розв'язком рівняння Бернуллі є $y = \frac{1}{z}$ або $y = \frac{1}{x+2+Ce^x}$.

Задачі

1. Розв'язати лінійні ДР-1 або рівняння Бернуллі:

1) $y' + ytgx = \sec x$,

2) $(2x+1)y' = 4x + 2y$,

3) $x^2 y' + xy + 1 = 0$,

4) $y = x(y' - x\cos x)$,

5) $y'\cos x - y\sin x = 1,\ y(0) = 1$,

6) $(x^2 + x)y' = y + x^2 + x,\ y(0) = 1$,

7) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$,

8) $y' = y^4 \cos x + ytgx$,

9) $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$,

10) $y' = \frac{y}{3x^2 - x}$.

7. Диференціальні рівняння в повних диференціалах

Відомо, що повний диференціал функції двох змінних $F(x,y)$ має вигляд

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy.$$

Означення. Диференціальне рівняння виду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (1.32)$$

в якому ліва частина є повним диференціалом $dF(x,y)$ деякої функції двох змінних $F(x,y)$, називається диференціальним *рівнянням у повних диференціалах.* Функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ є неперервними по кожній змінній в деякій однозв'язній області D.

З даного означення рівняння (1.32) можна записати як $dF(x,y)=0$, а його загальний розв’язок подати у вигляді $F(x,y)=C$, де $C=const.$

Для того, щоб з’ясувати, чи є рівняння (1.32) диференціальним рівнянням у повних диференціалах, потрібно переконатися в тому, що вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції двох змінних. З курсу математичного аналізу відомо, що для цього необхідно і достатньо виконання так званої умови повноти

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \qquad (1.33)$$

Теорема (критерій рівняння у повних диференціалах). *Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ - неперервно-диференційовні в деякій однозв’язній області D. Для того щоб рівняння $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ було диференціальним рівнянням у повних диференціалах необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність* $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай рівняння $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ є диференціальним рівнянням у повних диференціалах, тобто $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dF(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy$. Очевидно, що $\dfrac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$. Знайдемо $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$ та $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$. Функції P і Q – неперервно-диференційовні за умовою теореми, тому $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ є неперервними функціями і $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$. Це означає, що $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Достатність. Нехай виконується умова $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Покажемо, що існує функція $F(x,y)$, яка задовольняє рівняння $Pdx+Qdy=0$, де $\dfrac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$. Розглянемо рівняння $\dfrac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)$. Проінтегруємо його по змінній x, вважаючи змінну y при цьому сталою величиною. Запишемо шукану функцію у вигляді суми цього інтегралу та деякої функції $\varphi(y)$, що залежить тільки від змінної y:

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y).$$

Функцію $\varphi(y)$ підберемо так, щоб виконувалась інша умова $\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx+\varphi(y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)+\varphi'(y)=Q(x,y).$$

Звідси $\varphi'(y)=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)$.

Покажемо, що функція $\varphi(y)$ не залежить від змінної x. Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right)=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\int P(x,y)dx\right)\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0.$$

Теорема доведена.

Доведення достатньої умови теореми дає алгоритм знаходження аналітичного виразу функції $F(x,y)$, а отже, й загального розв'язку диференціального рівняння в повних диференціалах.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0.$$

Перевіримо виконання умови повноти (1.33):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x+6y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x+6y.$$

Очевидно, що це рівняння є диференціальним рівнянням у повних диференціалах. Знайдемо функцію $F(x,y)$

$$F(x,y)=\int(2xy+3y^2)dx+\varphi(y),$$

$$F(x,y)=x^2y+3y^2x+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2+6xy+\varphi'(y).$$

Оскільки $Q(x,y)=x^2+6xy-3y^2$, то

$$x^2+6xy-3y^2=x^2+6xy+\varphi'(y),$$

$$-3y^2 = \varphi'(y),$$

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = -3y^2,$$

$$d\varphi(y) = -3y^2 dy,$$

$$\varphi(y) = -y^3 + C.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд $F(x,y) = x^2y + 3y^2x - y^3 + C.$

При знаходженні загального розв'язку $F(x,y)$ можна спочатку використати рівняння $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$ і проінтегрувати його по змінній y, вважаючи змінну x при цьому сталою величиною. Тоді шукана функція буде подана у вигляді суми цього інтегралу та деякої функції $\varphi(x)$, що залежить тільки від змінної x:

$$F(x,y) = \int (x^2 + 6xy - 3y^2)dy + \varphi(x),$$

$$F(x,y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + \varphi(x),$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2xy + 3y^2 + \varphi'(x),$$

$$P(x,y) = 2xy + 3y^2 + \varphi'(x),$$

$$2xy + 3y^2 = 2xy + 3y^2 + \varphi'(x),$$

$$\varphi'(x) = 0 \text{ або } \frac{d\varphi}{dx} = 0, \varphi(x) = C.$$

Отже,

$$F(x,y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + C.$$

Очевидно, що заміна порядку інтегрування не впливає на розв'язок даного рівняння.

Розглянемо диференціальне рівняння, для якого не виконується умова повноти:

$$2ydx + xdy = 0.$$

Однак, якщо це рівняння помножити почленно на x, то воно стає диференціальним рівнянням у повних диференціалах

$$2xydx + x^2dy = 0.$$

Означення. Функція $\mu = \mu(x, y)$, після множення на яку рівняння перетворюється на рівняння в повних диференціалах, називаються *інтегрувальним множником* рівняння.

Диференціальне рівняння може мати не один інтегрувальний множник. Наприклад, для $ydx - xdy = 0$ $\left(\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = -1\right)$ інтегрувальними множниками є функції $\mu_1 = \frac{1}{xy}$, $\mu_2 = \frac{1}{y^2}$, $\mu_3 = \frac{1}{x^2}$.

Помножимо рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ на інтегрувальний множник: $\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$. Тоді за умовою повноти

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \tag{1.34}$$

з якої

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x}. \tag{1.35}$$

Співвідношення (1.34) є рівнянням у частинних похідних першого порядку відносно функції $\mu(x, y)$, його розв'язок у загальному випадку знайти досить важко. Але задача значно спрощується, якщо інтегрувальний множник $\mu(x, y)$ є функцією від однієї змінної x або y.

Нехай інтегрувальний множник даного диференціального рівняння залежить тільки від змінної x: $\mu = \mu(x)$. Тоді рівняння (1.35) матиме вигляд:

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{d\mu}{\partial x},$$

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q\frac{d\mu}{\partial x},$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx. \tag{1.36}$$

Останнє рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, його розв'язок визначає шуканий інтегрувальний множник.

Аналогічно розглядається випадок, коли $\mu = \mu(y)$:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy.$$

Зауважимо, що питаннями існування інтегрувального множника і знаходження його для різних типів рівнянь займався математик, механік, фізик і астроном Леонард Ейлер (15.04.1707 р.–18.09.1783 р.). Його наукові інтереси відносяться до всіх основних областей природознавства, де можна застосувати математичні методи.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $\left(1+x^2y\right)dx+x^2\left(x+y\right)dy=0$.

Спочатку перевіримо виконання умови повноти:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+2xy.$$

$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$, отже, дане рівняння не є диференціальним рівнянням у повних диференціалах.

Обчислимо $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}=\frac{3x^2+2xy-x^2}{x^2\left(x+y\right)}=\frac{2x\left(x+y\right)}{x^2\left(x+y\right)}=\frac{2}{x}$, тому для даного рівняння існує інтегрувальний множник, залежний тільки від змінної x. Знайдемо його з (1.36):

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2dx}{x},\quad \ln|\mu|=-2\ln|x|,\ \mu=\frac{1}{x^2}.$$

Помножимо задане рівняння на функцію $\frac{1}{x^2}$ та розв’яжемо рівняння у повних диференціалах:

$$\frac{1}{x^2}\left(1+x^2y\right)dx+x^2\left(x+y\right)\frac{1}{x^2}dy=0,$$

$$\left(\frac{1}{x^2}+y\right)dx+\left(x+y\right)dy=0,$$

$$F\left(x,y\right)=\int\left(x+y\right)dy+\varphi\left(x\right)=xy+\frac{y^2}{2}+\varphi\left(x\right),$$

$$\frac{\partial F(x;y)}{\partial x} = y + \varphi'(x),$$

$$P(x;y) = \frac{1}{x^2} + y, \text{ отже, } \quad \frac{1}{x^2} + y = y + \varphi'(x),$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x^2} \text{ або } \varphi(x) = -\frac{1}{x}.$$

Отже, $F(x,y) = xy + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x}$, а загальний розв'язок має вигляд $xy + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} = C$.

Задачі

1. Розв'язати рівняння в повних диференціалах:

1) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$;

2) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$,

3) $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$,

4) $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$,

5) $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$.

2. Знайти інтегрувальний множник рівняння та розв'язати його:

1) $(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0$,

2) $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos dy = 0$,

3) $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$.

8. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язні відносно похідної

Рівняння першого порядку n-го степеня відносно y'

Нехай маємо диференціальне рівняння виду

$$(y')^n + p_1(x,y)(y')^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x,y)y' + p_n(x,y) = 0.$$

Очевидно, що це алгебраїчне рівняння n-го степеня відносно похідної y'. Нехай $y' = f_1(x,y)$, $y' = f_2(x,y)$, …, $y' = f_k(x,y)$, $k \le n$ – його дійсні корені, тоді загальний інтеграл диференціального рівняння буде виражатися сукупністю інтегралів: $\Phi_1(x,y,C_1)=0$, $\Phi_2(x,y,C_2)=0$, …, $\Phi_k(x,y,C_k)=0$, де $\Phi_i(x,y,C_i)=0$ є інтегралом рівняння $y' = f_i(x,y)$ $(i=1,\ldots,k)$.

З геометричної точки зору це означає, що через кожну точку області, в якій y' набуває дійсних значень, проходить k інтегральних кривих.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y(y')^2 + (x-y)y' - x = 0$.

Розв'яжемо квадратне рівняння відносно y': $y' = \dfrac{y - x \pm \sqrt{(x-y)^2 + 4xy}}{2y}$, отже, $y' = 1$ або $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Тоді загальним розв'язком заданого диференціального рівняння є сукупність загальних інтегралів: $y = x + C_1$, $y^2 + x^2 = C_2^2$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Рівняння вигляду $f(y,y')=0$ і $f(x,y')=0$

Розглянемо випадок, коли ці рівняння розв'язні відносно змінних x або y.

Нехай рівняння $f(y,y')=0$ розв'язне відносно змінної y, тобто $y = \varphi(y')$. Покладемо $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$, де p будемо вважати параметром, тоді функція y виражається в параметричному вигляді рівнянням $y = \varphi(p)$. Продиференціюємо його та замінимо $dy = pdx$:

$$dy = \varphi'(p)dp,$$

$$pdx = \varphi'(p)dp.$$

Параметричне рівняння відносно змінної x знайдемо з останнього співвідношення

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{p}dp,$$

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}dp + C.$$

Отже, загальний розв'язок у параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}dp + C, \\ y = \varphi(p). \end{cases}$$

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y = a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$, де a, b – деякі сталі.

Покладемо $\frac{dy}{dx} = p$, тоді

$$y = ap^2 + bp^3,$$

$$dy = pdx = 2apdp + 3bp^2dp,$$

$$dx = 2adp + 3bpdp,$$

$$x = 2ap + \frac{3}{2}bp^2 + C.$$

Загальний розв'язок буде таким: $\begin{cases} x = 2ap + \frac{3}{2}bp^2 + C, \\ y = ap^2 + bp^3. \end{cases}$

Нехай рівняння вигляду $f(x, y') = 0$ розв'язне відносно змінної x, тобто $x = \varphi(y')$. Міркуючи аналогічно, покладемо $y' = p$ та після диференціювання отримаємо вираз $dx = \varphi'(p)dp$. Але $dx = \frac{dy}{p}$, тому $\frac{dy}{p} = \varphi'(p)dp$. Звідси маємо, що $dy = p\varphi'(p)dp$ і $y = \int p\varphi'(p)dp + C$.

Отже, маємо загальний розв'язок даного диференціального рівняння в параметричній формі: $\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = \int p\varphi'(p)dp + C. \end{cases}$

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння $a\dfrac{dy}{dx} + b\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = x$, де a, b – деякі сталі.

Нехай $\dfrac{dy}{dx} = p$, тоді

$$x = ap + bp^2,$$
$$dx = adp + 2bpdp,$$

$$dy = pdx = apdp + 2bp^2dp,$$

$$y = \frac{a}{2}p^2 + \frac{2}{3}bp^3 + C.$$

Загальний розв'язок маємо в параметричній формі

$$\begin{cases} x = ap + bp^2, \\ y = \dfrac{a}{2}p^2 + \dfrac{2}{3}bp^3 + C. \end{cases}$$

Рівняння Лагранжа та Клеро

Означення. Диференціальне рівняння вигляду $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ називається *рівнянням Лагранжа*.

Введемо параметр $p = y'$ та отримаємо вираз $y = x\varphi(p) + \psi(p)$. Продиференціюємо обидві його частини по змінній x та замінимо dy на pdx :

$$pdx = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp.$$

Отримане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням відносно x як функції від p:

$$(p - \varphi(p))dx = (x\varphi'(p) + \psi'(p))dp,$$

$$\frac{dx}{dp} - x \cdot \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Знайдемо інтеграл цього рівняння $x = f(p, C)$ і запишемо загальний розв'язок у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = f(p, C), \\ y = f(p, C)\varphi(p) + \psi(p). \end{cases}$$

Зауваження. Рівняння Лагранжа може мати особливі розв'язки виду $y = \varphi(p_0)x + \psi(p_0)$, де p_0 – корінь рівняння $p = \varphi(p)$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння Лагранжа $y = 2xy' + \ln y'$.

Нехай $y' = p$, тоді $y = 2xp + \ln p$. Продиференціюємо обидві частини рівності:

$$pdx = 2pdx + 2xdp + \frac{dp}{p},$$

$$p\frac{dx}{dp} = -2x - \frac{1}{p},$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2}.$$

Розв'язком цього рівняння є $x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$. Підставимо знайдений вираз для x у співвідношення $y = 2xp + \ln p$ і отримаємо загальний розв'язок

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{1}{p}, \\ y = \ln p + \dfrac{2C}{p} - 2. \end{cases}$$

Означення. Рівняння виду $y = xy' + \psi'(y)$ називається *рівнянням Клеро*.

Метод розв'язування рівнянь такого типу є аналогічним методу розв'язування рівняння Лагранжа. Маємо:

$$y' = p, \; y = xp + \psi(p),$$

$$pdx = pdx + xdp + \psi'(p)dp,$$

$$(x + \psi'(p))dp = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння Клеро отримаємо при $dp = 0$ або $p = C$ у вигляді

$$y = xC + \psi(C).$$

При $x + \psi'(p) = 0$ рівняння Клеро може мати особливий розв'язок, який можна отримати з системи рівнянь

$$\begin{cases} x + \psi'(p) = 0, \\ y = xp + \psi(p). \end{cases}$$

Якщо вдається з цієї системи виключити параметр p, то особливий розв'язок запишеться в явному вигляді.

Приклад 5. Розв'язати рівняння Клеро $y = xy' + \dfrac{a}{2y'}$.

Нехай $y' = p$, тоді

$$y = xp + \frac{a}{2p},$$

$$pdx = pdx + xdp - \frac{a}{2p^2}dp,$$

$$dp\left(x - \frac{a}{2p^2}\right) = 0.$$

При $dp = 0,\ p = C$ і $y = Cx + \dfrac{a}{2C}$ – загальний розв'язок рівняння Клеро, який визначає однопараметричну сім'ю прямих.

Якщо $x - \dfrac{a}{2p^2} = 0$, то $x = \dfrac{a}{2p^2}$.

Виключимо параметр p з системи $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2p^2}, \\ y = xp + \dfrac{a}{2p} \end{cases}$:

$$\frac{a}{2p} = px, \quad y = 2px, \quad y^2 = 4p^2x^2 = 2\frac{a}{x}x^2 = 2ax.$$

Отже, $y^2 = 2ax$ є особливим розв'язком, що з геометричної точки зору визначає обвідну сім'ї прямих $y = Cx + \dfrac{a}{2C}$.

Задачі

1. Проінтегрувати дані рівняння:

1) $4(y')^2 - 9x = 0$,

2) $(y')^2 - 2yy' = y^2(e^{2x} - 1)$,

3) $(y')^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$,

4) $y = (y')^2 e^{y'}$,

5) $x = \ln y' + \sin y'$,

6) $(y')^2 x = e^{\frac{1}{y'}}$,

7) $y = 2xy' + \ln y'$,

8) $y = x(1 + y') + (y')^2$,

9) $y = xy' + (y')^2$,

10) $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{(y')^2}$.

9. Практичні застосування диференціальних рівнянь першого порядку

Математичний апарат теорії диференціальних рівнянь дозволяє розв'язувати досить широкий клас задач з різних галузей. Математична модель на основі диференціального рівняння дає можливість досліджувати певний процес у цілому, передбачати його розвиток і робити кількісні оцінки відповідних змін.

У задачах такого типу потрібно спочатку знайти функціональну залежність між змінними факторами (величинами), що описують певний процес. У залежності від встановленого співвідношення між самими величинами та їх похідними або диференціалами, враховуючи геометричний, фізичний чи механічний зміст похідної, а також відомі закони фізики, хімії, механіки та інших наук, за умовою задачі складають відповідне диференціальне рівняння. При цьому, за потреби, можна робити різні припущення щодо поведінки змінних величин, що спрощує розв’язування та не впливає на достовірність отриманих результатів. Наприклад, невелику ділянку кривої можна вважати прямолінійною, частину поверхні – плоскою, прискорений рух протягом невеликого проміжку часу доречно розглядати як рівномірний; будь-який фізичний, хімічний, технічний процеси тощо вважати такими, що протікають з незмінною швидкістю.

Приклад 1. Демографічна задача. Нехай чисельність населення країни в момент часу t визначається функцією $y = y(t)$. Природно припустити, що зростання населення за інтервал часу Δt пропорційне наявній чисельності населення $y(t)$. Складемо рівняння $y(t + \Delta t) = y(t) + ky(t)\Delta t$, де k – коефіцієнт пропорційності. Перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$ та отримаємо диференціальне рівняння

$$y'(t) = ky(t),$$

загальним розв’язком якого є функція

$$y(t) = y_0 e^{kt},$$

де y_0 – чисельність населення в початковий момент спостереження t_0. Такий закон називається *експоненціальним*. У реальному житті цей процес не може бути довготривалим, оскільки включаються різні протидійні механізми, зокрема, зниження життєвого рівня, державні заходи щодо регулювання народжуваності тощо.

Використовуючи описану модель демографічного процесу, знайдемо кількість населення деякої держави в 2020 році, якщо в 2010 році в ній проживало 48 млн. громадян.

Нехай $y = y(t)$ – кількість громадян держави в момент часу t. Приріст населення Δy за час Δt дорівнює різниці між кількістю народжених $k_1 y \Delta t$ та кількістю померлих $k_2 y \Delta t$ за цей час, тобто

$$\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t \text{ або } \frac{\Delta y}{\Delta t} = ky, \quad \text{де } k = k_1 - k_2 .$$

Якщо перейти до границі при $\Delta t \to 0$, дістанемо рівняння

$$y' = ky.$$

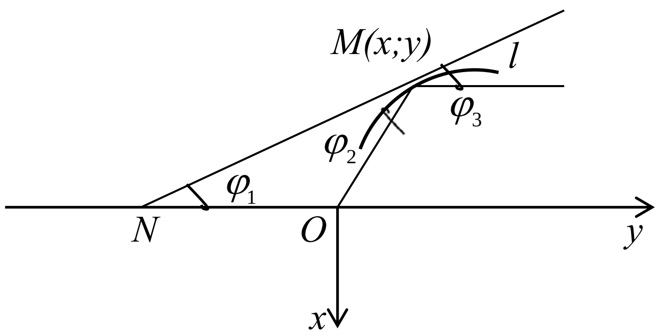
Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dt} = ky, \ \frac{dy}{y} = kdt, \ \ln|y| = kt + C, \ y = Ce^{kt}.$$

З початкових умов шуканий закон отримаємо у вигляді $y(t) = 48 \cdot 10^6 \cdot e^{10t}$. Тоді в 2020 році кількість населення деякої держави складатиме $y(10) = 48 \cdot 10^6 \cdot e^{100}$ громадян.

Приклад 2. Визначити форму дзеркала, яке відбиває всі промені, що виходять з даної точки, паралельно заданому напрямку.

Перетнемо поверхню дзеркала площиною, що проходить через задану точку паралельно заданому напрямку. Виберемо дану точку за початок прямокутної системи координат, розташованої в цій площині, а напрямок осі Oy таким, що співпадає з напрямком відбитих променів. Знайдемо рівняння кривої l, отриманої при перетині шуканої поверхні вказаною площиною.



Оскільки кут падіння дорівнює куту відбивання, то $\angle\varphi_3 = \angle\varphi_2$. Але $\angle\varphi_3 = \angle\varphi_1$, тому трикутник MON - рівнобедрений і $OM = ON$.

Складемо рівняння дотичної MN:

$$Y - y = y'(X - x).$$

Покладемо в ньому $X = 0$ і знайдемо $Y = -ON = y - xy' < 0$. Довжина відрізка $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Прирівнюючи знайдені вирази ON та OM, одержимо диференціальне рівняння кривої l:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ або } y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Це однорідне диференціальне рівняння першого порядку, його загальний інтеграл має вигляд

$$y = \frac{x^2 - C^2}{2C}.$$

Інтегральними кривими цього рівняння є сім'я парабол, симетричних відносно осі Oy зі спільним фокусом у заданій точці O.

Очевидно, що крива l є однією з парабол цієї сім'ї, вона розташована в довільній площині, що проходить через вісь Oy, а отже, шукана поверхня дзеркала є параболоїдом $y = \dfrac{x^2 + z^2 - C^2}{2C}$, утвореним обертанням кривої l навколо її осі симетрії.

Такі параболічні дзеркала перетворюють розбіжний пучок променів у паралельний, вони використовуються для прожекторів.

Приклад 3. Крива $y = y(x)$ проходить через початок координат. Середина відрізка її нормалі, який міститься між будь-якою точкою кривої та віссю абсцис, лежить на параболі $y^2 = ax$. Скласти рівняння цієї кривої.

Нехай $M(x, y)$ довільна точка шуканої кривої. Побудуємо нормаль до кривої $y = y(x)$ в точці M (перпендикуляр до дотичної в цій точці). Позначимо точку перетину цієї нормалі з віссю абсцис через A, а середину відрізка нормалі AM через B.

Рівняння нормалі AM має вигляд $Y-y=-\frac{1}{y'(x)}(X-x)$. Для знаходження абсциси точки A покладемо $Y=0$, отримаємо $y=\frac{1}{y'(x)}(X-x)$, $X=x+yy'(x)$. Отже, точка A має координати $A(x+yy';\ 0)$.

Точка B є серединою відрізка нормалі AM, тому вона має координати $B\left(x+\frac{1}{2}yy';\ \frac{y}{2}\right)$. З іншого боку, точка B лежить на параболі $y^2=ax$, і її координати задовольняють рівняння параболи:

$$\frac{y^2}{4}=a\left(x+\frac{1}{2}yy'\right) \text{ або } y'-\frac{y}{2a}=-\frac{2x}{y}.$$

Це рівняння Бернуллі, його загальний розв'язок можна подати як

$$y^2=4\left(a^2+ax+Ce^{\frac{x}{a}}\right).$$

За умовою задачі шукана крива проходить через початок координат, тобто маємо задачу Коші для диференціального рівняння з початковою умовою $y(0)=0$. Тоді $4\left(a^2+C\right)=0$ або $C=-a^2$, а шукане рівняння кривої має вигляд $y^2=4ax+4a^2\left(1-e^{\frac{x}{a}}\right)$.

Задачі

1. Знайти криві, для яких тангенс кута нахилу дотичної до додатного напряму осі Ox є обернено пропорційним абсцисі точки дотику.

2. Знайти криві, у яких піддотична в усіх точках має постійну довжину, що дорівнює a.

3. Матеріальна точка рухається прямолінійно з постійним прискоренням a. Знайти закон руху точки, якщо її початкова швидкість дорівнює v_0, а шлях, який вона пройшла до початку руху, дорівнює S_0.

4. Швидкість зростання популяції комах у момент часу t (час виражається в днях) задається формулою $\frac{9000}{(1+t)^2}$. Скласти диференціальне рівняння цього процесу. Знайти чисельність популяції комах у момент часу t, якщо початкова популяція налічує 1000 комах.

5. У посудину, в якій міститься 20 літрів води, неперервно зі швидкістю 5 л/хв вливається розчин солі концентрацією 0,2 кг/л. У посудині розчин перемішується з водою і утворена суміш витікає з тією ж самою швидкістю. Визначити кількість солі в посудині через 8 хвилин.

Розділ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків та їх системи

1. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

Диференціальні рівняння, що є моделями різноманітних реальних процесів, можуть містити похідні або диференціали функцій порядку вище, ніж перший. Такі рівняння називаються *диференціальними рівняннями вищих порядків*.

Розглянемо відому задачу:

Матеріальна точка масою m вільно падає під дією гравітаційної сили. Потрібно визначити закон руху точки за умови, що опором повітря можна знехтувати.

Нехай матеріальна точка падає вздовж вертикальної осі. Зафіксуємо на осі точку відліку O і будемо вважати додатним напрям від точки O вниз. Положення точки будемо визначати функцією $y(t)$, що характеризує її відстань в момент часу t від фіксованої точки O.

На матеріальну точку при падінні діє гравітаційна сила $F_{ã} = mg$. За другим законом Ньютона маємо, що $ma = F$, а отже, $ma = mg$. Оскільки прискорення визначається як $a = \frac{d^2 y}{dt^2}$, то отримаємо диференціальне рівняння $m\frac{d^2 y}{dt^2} = mg$ або $\frac{d^2 y}{dt^2} = g$, розв'язок якого має вигляд $y(t) = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Будемо вважати, що на початку руху положення матеріальної точки відносно початку відліку O задається координатою y_0, тобто $y(0) = y_0$, а її початкова швидкість $v(0) = v_0$. За цих умов отримаємо відому формулу шляху, пройденого матеріальною точкою за рівномірно прискореного руху:

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0 .$$

Оскільки процеси та явища, що відбуваються в реальному світі, є досить різноманітними, то математичні моделі, які їх описують, характеризуються різними типами диференціальних рівнянь вищих порядків. Розглянемо основні типи рівнянь, інтегровних у квадратурах.

Означення. Рівняння

$$F\left(x, y, y', y'', y^{(n)}\right) = 0, \qquad (2.1)$$

де x – незалежна змінна, y – шукана функція, $y^{(k)}, k = \overline{1,n}$ – похідні k-го порядку, а функція F – визначена та неперервна в деякій області $D \subset R^{n+2}$ $(n \geq 1)$, називається *звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку.*

У випадку, коли диференціальне рівняння (2.1) розв'язне відносно похідної $y^{(n)}$, його записують як

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \qquad (2.2)$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку (2.2) називається множина всіх його розв'язків $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, що містить n довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, які визначаються заданими початковими умовами $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Рівняння виду $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, яке визначає неявно загальний розв'язок диференціального рівняння (2) неявно, називається його *загальним інтегралом*.

Довільний розв'язок, який можна отримати із загального при конкретних значеннях довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння (2.2).

Задача знаходження частинного розв'язку, який задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, де y_0, $y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – деякі наперед задані числа, називається *задачею Коші* для рівняння (2.2).

Теорема (існування та єдиності розв'язку задачі Коші). *Якщо в рівнянні (2) функція* $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$

а) неперервна по всім своїм аргументам $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *в деякій області* D*;*

б) має в цій області обмежені частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$*, то знайдеться інтервал* $x_0 - h < x < x_0 + h$*, на якому існує єдиний розв'язок* $y = \varphi(x)$ *рівняння* (2.2)*, що задовольняє початкові умови* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$*, де значення* $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ *належать області* D.

Зокрема, для диференціального рівняння $y'' = f(x, y, y')$ (у випадку $n = 2$) початкові умови мають вигляд $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, де x_0, y_0, y_0' – деякі наперед задані числа, а теорему Коші сформулюємо так:

Теорема Коші. *Нехай маємо диференціальне рівняння другого порядку* $y'' = f(x, y, y')$ *та початкові умови* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$*. Якщо права частина рівняння задовольняє умови:*

1) функція $f(x, y, y')$ *є неперервною в околі точки* $M_0(x_0, y_0, y_0')$*;*

2) $f(x, y, y')$ *має обмежені частинні похідні* f_x' *та* f_y' *в околі точки* M_0*, то в околі точки* x_0 *існує єдиний розв'язок y(x) даного диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.

У цьому випадку при виконанні умов теореми існування та єдиності розв'язку з геометричної точки зору маємо, що через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ площини xOy з даним тангенсом кута нахилу дотичної y_0 проходить єдина інтегральна крива.

Приклад. Перевірити виконання умов теореми задачі Коші для диференціального рівняння $y'' = \sin y' + e^{-x^2 y}$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_0) = y_0'$.

Розв'язання. Функція $f(x, y, y') = \sin y' + e^{-x^2 y}$ визначена і неперервна для всіх значень x, y, y'. Легко переконатися, що частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2 y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$$

неперервні й обмежені функції по аргументам y, y' відповідно. Тому для заданих початкових умов $y(x_0) = y_0, y(x_0) = y'_0$ існує єдиний розв'язок даного рівняння, що їм задовольняє.

Задачі:

1. Показати, що дані функції є розв'язками вказаних диференціальних рівнянь:

1) $y = x(\sin x - \cos x), \quad y'' + y = 2(\cos x + \sin x);$

2) $\begin{cases} x = C_1 + \dfrac{t^4}{4}, \\ y = C_2 + \dfrac{t^5}{5}, \end{cases} \quad y''(y')^3 = 1;$

3) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \quad y'' + y = 0;$

4) $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1, \quad y'' = \left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}.$

1.1. Рівняння, що містять лише незалежну змінну x та похідну n-го порядку шуканої функції y:

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (2.3)$$

Розглянемо диференціальне рівняння (3), коли воно є розв'язним відносно похідної, тобто $y^{(n)} = f(x)$. У цьому випадку загальний розв'язок отримаємо послідовним n-кратним інтегруванням:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2$$

$$y^{(n-3)} = \int\left(\int\left(\int f(x)dx\right)dx\right)dx + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

…..

$$y=\underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} f\left(x\right)\underbrace{dx\ldots dx}_{n}+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n\,,$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

Розв’язок диференціального рівняння (2.2) у формі Коші на (a,b) має вигляд

$$y=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx\ldots dx+\frac{{y_0}^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{{y_0}^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+$$
$$+\cdots+y'(x-x_0)+y_0,\quad x_0\in(a,b),$$

де ${y_0}^{(n-1)}, {y_0}^{(n-2)}, \ldots, {y_0}', y_0$ – деякі числа.

1.2. Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить шуканої функції y:

$$F(x,y',y'')=0. \qquad (2.4)$$

Порядок рівняння понижуємо підстановкою, поклавши

$$y'(x)=z(x).$$

Отримаємо диференціальне рівняння:

$$F\big(x,z(x),z'(x)\big)=0.$$

Проінтегруємо його та знайдемо функцію $z(x)$, а далі умови $y'(x)=\ z(x)$ знайдемо $y(x)$.

Приклад. Розв’язати диференціальне рівняння

$$(1-x^2)y''-xy'=2.$$

Розв’язання. Дане диференціальне рівняння не містить явно функції y. Порядок рівняння понижуємо підстановкою, поклавши

$$y'=z(x),\quad y''=z'(x).$$

Отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$(1-x^2)z'(x)-xz=2.$$

Розв’язок шукаємо методом Бернуллі у вигляді:

$$z=uv,$$

$$z' = u'v + uv',$$

$$(1 - x^2)(u'v + uv') - xuv = 2,$$

$$v[(1 - x^2)u' - xu] + (1 - x^2)uv' = 2.$$

Функцію $u(x)$ знайдемо з умови , що

$$(1 - x^2)u' - xu = 0,$$

$$(1 - x^2)\frac{du}{dx} - xu = 0,$$

$$\frac{du}{u} = \frac{x}{1-x^2}dx,$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|1 - x^2|,$$

$u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. за умови, що $1 - x^2 > 0$.

Функцію $v(x)$ знайдемо з рівняння $(1 - x^2)uv' = 2$, підставивши замість u його значення:

$$\frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\frac{dv}{dx} = 2, \qquad dv = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}dx,$$

$$v = 2\arcsin x + C,$$

$$z = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}\arcsin x + \frac{C}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Повернемося до підстановки $y' = z(x)$ і знайдемо шукану функцію $y(x)$:

$$y' = \frac{2\arcsin x + C}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$dy = 2\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$y = \arcsin^2 x + C\arcsin x + C_1.$$

1.3. Диференціальні рівняння другого порядку, що не містять явно змінної x:

$$\boldsymbol{F(y, y', y'') = 0}. \qquad (2.5)$$

Дане рівняння допускає пониження порядку шляхом введення нової складної функції $z(y)$, аргументом якої є функція $y(x)$:

$$y'(x) = z(y), \qquad (2.6)$$

звідси $y''(x) = z'(y)z(y)$. Зауважимо, що вираз у правій частині останньої рівності отримали за правилом диференціювання складної функції. Вихідне рівняння при цьому набуває вигляду $F(y, z, z') = 0$.

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння $y'' - 3e^{6y} = 0$ з початковими умовами $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням, що не містить явно змінної x. Порядок рівняння понижуємо підстановкою $y'(x) = z(y)$, звідки $y''(x) = = z'(y)z(y)$:

$$zz' - 3e^{6y} = 0,$$

$$z\frac{dz}{dy} = 3e^{6y},$$

$$zdz = 3e^{6y}dy,$$

$$\frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}e^{6y} + C,$$

$$z^2 = e^{6y} + C,$$

$$(y'(x))^2 = e^{6y} + C.$$

Значення сталої C знайдемо з початкової умови:

$$1 = e^0 + C, \;\; C = 0.$$

Знайдемо тепер функцію $y(x)$:

$$(y'(x))^2 = e^{6y},$$

$$y'(x) = \pm\sqrt{e^{6y}} \text{ або } y'(x) = \pm e^{3y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm e^{3y},$$

$$dy = \pm e^{3y}dx,$$

$$dx = \pm e^{-3y}dy,$$

$$x = \mp\frac{1}{3}e^{-3y} + C_1.$$

Значення сталої C_1 знайдемо з умови $y(0) = 0$: $C_1 = \pm\frac{1}{3}$, і $x = -\frac{1}{3}e^{-3y} + \frac{1}{3}$ або $x = \frac{1}{3}e^{-3y} - \frac{1}{3}$. Виразимо y через x:

$$e^{-3y} = -3x + 1 \text{ або } e^{-3y} = 3x + 1.$$

Отже,

$$y = -\frac{1}{3}\ln|1 \mp 3x|.$$

Задачі:

1. Розв'язати диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку:

1) $y'' = x + \sin x$,

2) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$,

3) $x^2 y'' = y'^2$,

4) $(y'')^2 = 1 + y'^2$.

2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Лінійна залежність та незалежність розв'язків. Визначник Вронського

Розв'язування теоретичних і практичних задач математики, механіки, фізики, біології та інших наук досить часто приводить до необхідності складання лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Наприклад, розв'язки так званого рівняння Бесселя

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)u = 0$$

дозволяють знайти амплітуду малих вільних коливань мембрани. Також це рівняння досліджував Лагранж у зв'язку з проблемами небесної механіки.

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = Q(x), \qquad (2.7)$$

де $a_i(x)$ $(i = 0,1,2)$ і $Q(x)$ – деякі неперервні на $[a, b]$ функції. Рівняння (2.7) називається *лінійним диференціальним рівнянням другого порядку*, а $a_i(x)$ $(i = 0,1,2)$ – його коефіцієнтами.

Припустимо, що для будь-якого $x \in [a, b]$ $a_0(x) \neq 0$, і розділимо почленно (7) на $a_0(x)$:

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}y = \frac{Q(x)}{a_0(x)}.$$

Позначимо

$$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = p_1(x), \quad \frac{a_2(x)}{a_0(x)} = p_2(x), \quad \frac{Q(x)}{a_0(x)} = f(x).$$

Тоді рівняння (2.7) набуває вигляду

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x). \qquad (2.8)$$

Розглянемо частинний випадок, коли $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Означення. Диференціальне рівняння

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (2.9)$$

називається *однорідним диференціальним рівнянням другого порядку.*

Позначимо через $L(y)$ вираз у лівій частині рівняння (2.9):

$$L(y) = y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y. \qquad (2.10)$$

Цей вираз називається *лінійним диференціальним оператором другого порядку*.

Зауваження. Під *оператором* розуміють відображення, яке ставить у відповідність функції іншу функцію. Прикладами операторів є оператори диференціювання та знаходження невизначеного інтеграла (за умови, що C=0).

Для оператора $L(y)$ справджується рівність:

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2). \qquad (2.11)$$

Дійсно,

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = (C_1y_1 + C_2y_2)'' +$$
$$+p_1(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + p_2(x)(C_1y_1 + C_2y_2) =$$
$$= C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1p_1(x)y_1' + C_2p_1(x)y_2' + C_1p_2(x)y_1 + C_2p_2(x)y_2 =$$
$$= C_1(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1) + C_2(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2).$$

Теорема 1. *Якщо функції* $y_1(x)$ *та* $y_2(x)$ *на проміжку* $\langle a_1, b_1\rangle$ *є розв'язками диференціального рівняння* $L(y) = 0$, *то розв'язком даного рівняння буде також функція* $y = C_1y_1 + C_2y_2$, *де* C_1 *та* C_2 *– довільні сталі.*

Доведення. За умовою теореми $L(y_1) = 0$ та $L(y_2) = 0$, звідси за властивістю оператора (2.11) маємо, що

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = 0.$$

Це означає, що функція $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ також є розв'язком рівняння $L(y) = 0$.

Означення. Функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ на проміжку $\langle \alpha, \beta \rangle$ називаються *лінійно незалежними*, якщо тотожність

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0, \tag{2.12}$$

де $\alpha_{1,} \alpha_2 \in R$, виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; в іншому випадку функції є *лінійно залежними.*

Теорема 2. *Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ диференційовні та лінійно залежні на проміжку $\langle \alpha, \beta \rangle$, то для будь-якого $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ визначник*

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Цей визначник називається *визначником Вронського* або *вронскіаном* (поляк Юзеф Вронський – математик та фізик, 1776 – 1853 р.р.).

Доведення. Нехай у (2.12) $\alpha_2 \neq 0$, тоді $f_2(x) = -\frac{\alpha_1 f_1(x)}{\alpha_2}$. Звідси маємо, що

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & -\frac{\alpha_1 f_1(x)}{\alpha_2} \\ f_1'(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} f_1'(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Ця теорема дає необхідну умову лінійної залежності двох функцій.

Теорема 3. *Для того, щоб розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ диференціального рівняння* (2.9) *були лінійно незалежними на заданому проміжку необхідно та достатньо, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю хоча б в одній точці цього проміжку.*

Доведення. Достатня умова: якщо $W(x) \neq 0$, то розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно незалежними. Її справедливість слідує з теореми 2.

Необхідна умова: якщо розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно незалежними, то $W(x) \neq 0$. Для доведення застосуємо метод від супротивного.

Припустимо супротивне. Нехай визначник Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

хоча б в одній точці $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Розглянемо відповідну систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, \\ C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_1'(x)$, $y_2'(x)$ є коефіцієнтами (значеннями в точці x_0), а C_1 і C_2 – невідомими, які потрібно знайти. Оскільки $W(x_0) = 0$, то система має ненульовий розв'язок $(\alpha_1; \alpha_2)$, причому хоча б одне з цих чисел є відмінним від 0.

Розглянемо функцію

$$\tilde{y}(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x),$$

де $\tilde{y}(x)$ є розв'язком рівняння (2.9), причому виходячи з умов (2.13) даний розв'язок задовольняє нульові початкові умови

$$\tilde{y}(x_0) = 0,\ \tilde{y}'(x_0) = 0. \tag{2.14}$$

Проте функцією, що задовольняє (2.9) і умови (2.14) є також і $y \equiv 0$. Оскільки для (2.9) справедливі умови теореми Коші, то $\tilde{y}(x)$ та $y \equiv 0$ співпадають, а отже, $\tilde{y}(x) = 0$ або $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$. Тобто, розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно залежними на $\langle \alpha, \beta \rangle$, а це суперечить умові.

Доведемо той факт, що розв'язок $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ є загальним розв'язком диференціального рівняння (2.9). Оскільки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно незалежними і визначник системи не дорівнює нулю, то лінійна система

$$\begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \end{cases}$$

розв'язна відносно C_1 і C_2.

Задамо довільні початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'.$$

Розглянемо алгебраїчну систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

За умовою теореми ця система має єдиний розв'язок, який знаходимо за формулами Крамера:

$$C_1 = \frac{y_0 y_2'(x_0) - y_0' y_2(x_0)}{W(x_0)},$$

$$C_2 = \frac{y_0' y_1(x_0) - y_0 y_1'(x_0)}{W(x_0)}.$$

Функція $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де C_1 та C_2 визначаються останніми формулами, і є тим розв’язком диференціального рівняння (2.9), який задовольняє задані початкові умови. Отже, розв’язок $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ є загальним розв’язком диференціального рівняння (2.9) і справедлива

Теорема 4. *Якщо розв’язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ диференціального рівняння* (2.9) *є лінійно незалежними на певному проміжку, то $y(x) = C_1 y_1(x) + {}$ $+ C_2\, y_2(x)$, де $C_1,\ C_2 = const$, є загальним розв’язком цього диференціального рівняння.*

Означення. Диференціальне рівняння (8), в якому $f(x) \neq 0$ називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку* (ЛНДР).

Теорема 5 (структура загального розв’язку ЛНДР). *Якщо функція $v = v(x)$ є деяким частинним розв’язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння* (2.8)*, а $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – лінійно незалежні розв’язки відповідного однорідного диференціального рівняння* (2.9)*, то загальним розв’язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку* (2.8) *є функція*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + v(x), \qquad (2.15)$$

де $C_1, C_2 - const.$

Іншими словами, загальний розв’язок ЛНДР другого порядку складається із загального розв’язку відповідного ЛОДР другого порядку та деякого частинного розв’язку НЛДР другого порядку.

Доведення. Позначимо загальний розв’язок відповідного однорідного диференціального рівняння через $u(x)$, тобто

$$u(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Доведемо спочатку, що $y = u(x) + v(x)$ є розв’язком (2.8), тобто

$$L(y) = L(u) + L(v).$$

З умови теореми маємо, що для будь-якого $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$: $L(u) = 0, L(v) = f(x)$, тому

$$L(y) = L(u) + L(v) = 0 + f(x) = f(x).$$

Отже, (2.15) дійсно є розв'язком (2.8).

Доведемо тепер, що (2.15) є загальним розв'язком (2.8). Покажемо, що з (2.15) можна отримати розв'язок (2.8), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0. \tag{2.16}$$

Покладемо $x = x_0$, тоді з (2.15) будемо мати:

$$y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + v(x_0),$$

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - v(x_0),$$

$$C_1 {y_1}'(x_0) + C_2 {y_2}'(x_0) = y_0' - v'(x_0).$$

Отримали неоднорідну алгебраїчну систему рівнянь відносно C_1 та C_2. За умовою теореми $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно незалежними, тому

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отже, дана алгебраїчна система рівнянь має єдиний розв'язок. Знайшовши C_1 та C_2, та підставивши їх значення у (2.15), отримаємо розв'язок диференціального рівняння (2.8), що задовольняє початкові умови (2.16). Це і доводить, що загальний розв'язок диференціального рівняння (2.8) визначається виразом (2.15).

Задачі:

1. Показати, що система функцій $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$, $e^{k_3 x}$, де k_1, k_2, k_3 попарно різні, лінійно незалежна на множині всіх дійсних чисел.

2. Довести, що функції $\sin x,\ \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right), \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ лінійно залежні на множині R.

3. Знайти визначники Вронського для систем функції прикладів 1 та 2.

3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Якщо в диференціальному рівнянні (2.9) $p_1(x) = const$ та $p_2(x) = const$, то воно називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами*.

Рівняння (2.9) зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (2.17)$$

Розв'язок такого диференціального рівняння шукаємо у вигляді

$$y = e^{\lambda x},$$

де λ – деяке невизначене число.

Знайдемо $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ і підставимо вирази y'', y' та y в рівняння (2.17):

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$ (для будь-яких x і λ), то

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \qquad (2.18)$$

Отже, $y = e^{\lambda x}$ є розв'язком (2.17) тоді й тільки тоді, коли виконується умова (2.18).

Рівняння (2.18) називається *характеристичним рівнянням* диференціального рівняння (2.17), а його корені λ_1, λ_2 називаються *характеристичними числами.* Воно є квадратним відносно λ, тому для його коренів λ_1 та λ_2 можливі три випадки:

1. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \epsilon R$ і $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Це можливо тоді й тільки тоді, коли дискримінант $D = p^2 - 4q > 0$. У цьому випадку диференціальне рівняння (2.17) має два різні розв'язки $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ або $y_2 = e^{\lambda_2 x}$.

Покажемо, що вони є лінійно незалежними для будь-якого дійсного x:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

З властивості експоненти маємо, що $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0$ і $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ (за умовою), тому $W(x) \neq 0$ і $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – лінійно незалежні для будь-якого $x \in R$.

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (2.17) шукаємо у вигляді

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

де C_1 та C_2– довільні сталі.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Розв'язання. Складемо і розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = -1. \end{array}\right.$$

Отже, загальний розв'язок $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$.

2. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ і $\lambda_1 = \lambda_2$. Це має місце тоді і тільки тоді, коли дискримінант $D = p^2 - 4q = 0$ або $q = \frac{p^2}{4}$, тоді

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2}.$$

Отже, диференціальне рівняння (2.17) має розв'язок $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$.

Покажемо, що розв'язком диференціального рівняння (2.17) буде також функція

$$y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

Дійсно, $y_2{}' = e^{-\frac{p}{2}x} + x\left(-\frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}x} = e^{-\frac{p}{2}x} - x\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} = e^{-\frac{p}{2}x}\left(1 - \frac{p}{2}x\right)$,

$$y_2{}'' = e^{-\frac{p}{2}x}\left(-p + x\frac{p^2}{4}\right)$$

Підставивши отримані вирази в ліву частину (2.17), матимемо:

$$e^{-\frac{p}{2}x}\left(-p + \frac{p^2}{4}x\right) - \frac{p^2}{2}e^{-\frac{p}{2}x} + pe^{-\frac{p}{2}x} + qxe^{-\frac{p}{2}x} =$$

$$= e^{-\frac{p}{2}x}\left(-p + \frac{p^2}{4}x - \frac{p^2}{2}x + p + \frac{p^2}{4}x\right) = 0.$$

Переконаємось, що розв'язки y_1 та y_2 є лінійно незалежними для всіх $x \in R$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-\frac{p}{2}x} & xe^{-\frac{p}{2}x} \\ -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} & e^{-\frac{p}{2}x}\left(1-\frac{p}{2}x\right) \end{vmatrix} = e^{-px}\left(1-\frac{p}{2}x+\frac{p}{2}x\right) = e^{-px} \neq 0.$$

Визначник Вронського не дорівнює нулю для $\forall x \in R$, отже, y_1 та y_2 є лінійно незалежними.

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (2.17) у цьому випадку має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

або

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{p}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{p}{2}x}, \tag{2.19}$$

де $C_1, C_2 = const.$

3. Розглянемо випадок, коли λ_1, λ_2 – комплексні корені (спряжені),

$$D = p^2 - 4q < 0.$$

При цьому

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + i\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

$$\lambda_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

Позначимо дійсну та уявну частини відповідно

$$-\frac{p}{2} = \alpha, \sqrt{q-\frac{p^2}{4}} = \beta, \ \ \beta \neq 0. \tag{2.20}$$

Тоді $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, а $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ і

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \ \ y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

За формулами Ейлера y_1 запишемо у вигляді

$$y_1 = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + i\,e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Покажемо, що $e^{\alpha x}\cos\beta x$ та $e^{\alpha x}\sin\beta x$ є розв'язками диференціального рівняння (2.17).

Для функції $y = e^{\alpha x}\cos\beta x$ знайдемо першу та другу похідні:

$$(e^{\alpha x}\cos\beta x)' = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - e^{\alpha x}\beta\sin\beta x = e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x).$$

$$(e^{\alpha x}\cos\beta x)'' =$$
$$= \alpha e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) - e^{\alpha x}(\alpha\beta\sin\beta x + \beta^2\cos\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}(\alpha^2\cos\beta x - \alpha\beta\sin\beta x - \alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}((\alpha^2 - \beta^2)\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x).$$

Підставимо значення виразів для y, y', y'' в рівняння (2.17). Маємо:

$$e^{\alpha x}\left((\alpha^2 - \beta^2)\cos\beta x - 2\beta\alpha\sin\beta x + p\alpha\cos\beta x - p\beta\sin\beta x + q cos\,\beta x\right) =$$
$$= e^{\alpha x}(\cos\beta x(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q) - \sin\beta x(2\beta\alpha + p\beta)). \qquad (2,21)$$

З формул (2.20) маємо, що

$$\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q = \frac{p^2}{4} - q + \frac{p^2}{4} + \left(-\frac{p}{2}\right)p + q = 0,$$

$$2\beta\alpha + p\beta = \beta(2\alpha + p) = \beta\left(2\cdot\left(-\frac{p}{2}\right) + p\right) = 0,$$

тому вираз (2.21) також дорівнює нулю.

Ми переконалися, що $y = e^{\alpha x}\cos\beta x$ є розв'язком диференціального рівняння (2.17).

Аналогічно доводиться, що функція $y = e^{\alpha x}\sin\beta x$ також є розв'язком рівняння (2.17):

$$y' = (e^{\alpha x}\sin\beta x)' = \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y'' = (e^{\alpha x}\cos\beta x)'' =$$
$$= \alpha^2 e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x + \beta\alpha e^{\alpha x} cos\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\sin\beta x =$$
$$= e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2)\sin\beta x + (\alpha\beta + \alpha\beta)\cos\beta x)].$$

Підставимо значення для y, y' та y'' в (2.17):

$$e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2)\sin\beta x + 2\beta\alpha\cos\beta x] + pe^{\alpha x}[\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x] +$$
$$+ qe^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}((\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q)\sin\beta x + (2\beta\alpha + p\beta)\cos\beta x) = 0.$$

Очевидно, що $y = e^{\alpha x}\sin\beta x$ є також розв'язком диференціального рівняння (2.17).

З цього слідує, що корінь характеристичного рівняння $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ породжує два дійсних розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (2.17):

$$y = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Ці розв'язки є лінійно незалежними, оскільки

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x}[\alpha \cos \beta x sin\, \beta x + \beta cos^2\, \beta x - \alpha \cos \beta x sin\, \beta x + \beta sin^2 \beta x] = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

Зауваження. Ми показали, що $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ дає два різні дійсні розв'язки диференціального рівняння (2.17):

$$y = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Очевидно, що число $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (спряжене до λ_1) нових розв'язків не породжує.

Отже, загальний розв'язок (2.17) має вигляд:

$$y = e^{\alpha x}(C_1\, cos\, \beta x + C_2\, sin\, \beta x). \tag{2.22}$$

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + 2y' + 9y = 0.$$

Розв'язання. Складемо відповідне характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 9 = 0,$$

$$D = 4 - 36 = -32, \;\; \sqrt{D} = 4\sqrt{2}i,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2}i,$$

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 2\sqrt{2}.$$

Загальний розв'язок даного лінійного однорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos\left(2\sqrt{2}x\right) + C_2 \sin(2\sqrt{2}x)\right).$$

Задачі:

1. За допомогою характеристичного рівняння розв'язати ЛОДР-n:

1) $y'' + 2y' - 3y = 0$,

2) $y'' - 4y = 0$,

3) $y'' - 8y' = 0$,

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$,

5) $y'' + 6y' + 13y = 0$,

6) $y'' + 3y = 0$,

7) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$,

8) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$,

9) $y''' = y$,

10) $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0$,

11) $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$,

12) $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1,\ y''(0) = -2$.

2. За даними коренями характеристичного рівняння скласти диференціальне рівняння та розв'язати його:

1) $k_1 = 1,\ k_2 = 3$,

2) $k_1 = k_2 = -2$,

3) $k_{1,2} = 2 \pm 3i$,

4) $k_1 = 0,\ k_2 = 3, k_3 = k_4 = 5$,

5) $k_1 = k_2 = 1,\ k_{3,4} = \pm 2i$.

4. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (2.23)$$

де $p, q \in R,$ а функція $f(x)$ є неперервною на деякому проміжку $\langle a, b\rangle$. За теоремою 5 маємо, що загальний розв'язок рівняння (2.23) визначається формулою (2.15)

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + v(x),$$

де $v(x)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння.

Отже, щоб отримати загальний розв'язок рівняння (2.23) потрібно:

1) знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' + py' + qy = 0;$$

2) до цього розв'язку додати деякий розв'язок $v(x)$ *неоднорідного рівняння* (2.23)*, що відповідає правій частині, тобто частинний розв'язок.*

Будемо використовувати такі позначення у записі загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$y(x) = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}},$$

де $y_{\text{з.о.}}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння, а $y_{\text{ч.н.}} = v(x)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Метод невизначених коефіцієнтів

Для знаходження $y_{\text{ч.н.}}$ застосовують метод невизначених коефіцієнтів.

1. Розглянемо випадок, коли права частина рівняння (2.23) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}, \qquad (2.24)$$

де $P_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n,\ \ b_i \in R,\ \ i = 0,1,2,\dots,n;\ \ \alpha \in R.$

1.1. Нехай α є розв'язком кратності k, де $k = 1{,}2$, відповідного характеристичного рівняння. В цьому випадку частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$v(x) = x^k M_n(x) e^{\alpha x}, \qquad (2.25)$$

де $M_n(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n$ – многочлен n-го степеня, а коефіцієнти $C_0, C_1, \dots, C_n$ – деякі поки що невідомі (невизначені) числа; число k показує кількість збігів числа α з коренями характеристичного рівняння.

Для знаходження коефіцієнтів C_i, $i = \overline{0, n}$, підставимо в (2.23) значення $v(x)$, $v'(x)$, $v''(x)$ і в утвореній тотожності прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x. Матимемо систему з $(n+1)$ рівнянь, з якої однозначно визначимо шукані коефіцієнти.

1.2. Нехай число α не є розв'язком характеристичного рівняння. В цьому випадку частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$v(x) = M_n(x) e^{\alpha x}, \qquad (2.26)$$

де $M_n(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n$. Коефіцієнти C_i, $i = \overline{0, n}$, знаходимо методом невизначених коефіцієнтів за попереднім алгоритмом.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}.$$

Розв'язання. Для відповідного однорідного диференціального рівняння $y'' + 2y' + 2y = 0$ складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

$$D = 4 - 8 = -4, \sqrt{D} = 2i,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння за формулою (2.22) буде мати вигляд:

$$y_{\text{з.о.}} = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Права частина заданого неоднорідного диференціального рівняння має вигляд $f(x) = xe^{-x}$, звідки визначаємо, що $n = 1$, $\alpha = -1$. Очевидно, що $\alpha = -1$ не співпадає з коренями характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.

За формулою (2.26) частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння шукаємо у вигляді $v(x) = (Ax + B)e^{-x}$, де $(Ax + B)$ – загальний вигляд многочлена першого степеня, A та B невідомі коефіцієнти.

Знайдемо

$$v'(x) = Ae^{-x} - e^{-x}(Ax + B),$$

$$v''(x) = -Ae^{-x} + e^{-x}(Ax + B) - Ae^{-x} = -2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x}$$

та підставимо отримані вирази і $v(x)$ в ліву частину вихідного рівняння:

$$e^{-x}(-2A + Ax + B + 2A - 2Ax - 2B + 2Ax + 2B) = xe^{-x}.$$

Для знаходження значень A та B прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях змінної x у лівій та правій частинах рівності.

$$Ax + B = x$$

$$x^1: \quad 1 = A, \qquad A = 1,$$

$$x^0: \quad 0 = B, \qquad B = 0.$$

Отже, $v(x) = xe^{-x}$, а загальний розв'язок заданого лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + xe^{-x}.$$

2. Нехай права частина рівняння (2.23) задана у вигляді $f(x) = P_n(x)$, тобто у формулі (2.24) $\alpha = 0$. Розглянемо два випадки:

2.1. Число 0 не є розв'язком характеристичного рівняння. В цьому випадку $v(x)$ шукаємо у вигляді:

$$v(x) = M_n(x),$$

де $M_n(x)$ – многочлен n-го степеня.

2.2. Число 0 є розв'язком характеристичного рівняння ($k = 1$), отже,

$$v(x) = xM_n(x).$$

Для знаходження значень невизначених коефіцієнтів многочлена $M_n(x)$ застосовуємо розглянутий вище метод.

3. Нехай права частина диференціального рівняння (2.23) має вигляд $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\, cos\, \beta x + Q_m(x)\, sin\, \beta x)$.

3.1. Розглянемо випадок, коли $\alpha \neq 0$, тобто

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\, cos\, \beta x + Q_m(x)\, sin\, \beta x).$$

Складемо число $\gamma = \alpha \pm i\beta$ і визначимо число $s = \max\{n, m\}$.

а) Нехай $\gamma = \alpha \pm i\beta$ не є розв'язком характеристичного рівняння, тоді частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$v(x) = e^{\alpha x}(M_s(x) \cos \beta x + N_s(x) \sin \beta x),$$

де $M_s(x)$, $N_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами, для знаходження яких у цьому випадку і далі застосовуємо описаний раніше метод.

б) Нехай $\gamma = \alpha \pm i\beta$ є розв'язком характеристичного рівняння кратності k $(k = 1)$, тоді

$$v(x) = xe^{\alpha x}(M_s(x) \cos \beta x + N_s(x) \sin \beta x).$$

3.2. Розглянемо випадок, коли $\alpha = 0$, тобто права частина рівняння (2.23) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)\, cos\, \beta x + Q_m(x)\, sin\, \beta x.$$

Складемо число $\gamma = 0 + i\beta = \pm\beta i$ і порівняємо його з коренями характеристичного рівняння.

а) Якщо $\gamma = \pm\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $v(x)$ має вигляд

$$v(x) = M_s(x)\, cos\, \beta x + N_s(x)\, sin\, \beta x.$$

б) Число $\gamma = \pm\beta i$ є коренем характеристичного рівняння кратності k=1 (спряжене комплексне число не дає нового розв'язку), тоді

$$v(x) = x(M_s(x)\, cos\, \beta x + N_s(x)\, sin\, \beta x).$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y'' + y = x \sin x.$$

Розв'язання. Розглянемо відповідне лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$y'' + y = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені:

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda = \pm i, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 1.$$

Загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Функцію в правій частині рівняння подамо у вигляді

$$f(x) = x \sin x + 0 \cos x,$$

з якого $s = 1, \quad \gamma = \pm i, \quad k = 1.$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння шукаємо у вигляді:

$$v(x) = x\big((Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x\big)$$

або

$$v(x) = (Ax^2 + Bx) \sin x + (Cx^2 + Dx) \cos x.$$

Значення коефіцієнтів A, B, C, D знайдемо методом невизначених коефіцієнтів:

$$v'(x) = (2Ax + B) \sin x +$$
$$+(Ax^2 + Bx) \cos x + (2Cx + D) \cos x - (Cx^2 + Dx) \sin x =$$
$$= (2Ax + B - Cx^2 - Dx) \sin x + (Ax^2 + Bx + 2Cx + D) \cos x,$$
$$v''(x) = (2A - 2Cx - D) \sin x + (2Ax + B - Cx^2 - Dx) \cos x +$$
$$+(2Ax + B + 2C) \cos x - (Ax^2 + Bx + 2Cx + D) \sin x.$$

Підставимо в ліву частину вихідного рівняння значення функцій $v(x), v'(x), v''(x)$:

$$(2A - 2Cx - D) \sin x + (2Ax + B - Cx^2 - Dx) \cos x +$$
$$+(2Ax + B + 2C) \cos x - (Ax^2 + Bx + 2Cx + D) \sin x + (Ax^2 + Bx) \sin x +$$

$$+(Cx^2 + Dx)\cos x = x\sin x,$$

$$(2A - 4Cx - 2D)\sin x + (4Ax + 2B + 2C)\cos x = x\sin x.$$

Прирівняємо коефіцієнти (многочлени) при відповідних тригонометричних функціях в лівій та правій частинах рівності. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} 2A - 4Cx - 2D = x; \\ 4Ax + 2B + 2C = 0, \end{cases}$$

Прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях змінної x в лівій та правій частинах рівностей системи:

$$\begin{cases} -4C = 1; \\ 2A - 2D = 0; \\ 4A = 0; \\ B + C = 0. \end{cases}$$

$$C = -\frac{1}{4}, \qquad A = 0, \qquad D = 0, \qquad B = \frac{1}{4}.$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$v(x) = x\left(\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}x\cos x\right) = \frac{1}{4}(x\sin x - x^2\cos x),$$

а його загальний розв'язок –

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}(x\sin x - x^2\cos x\ ).$$

Зауваження 1. *Якщо до функції $f(x)$ входить тільки $P_n(x)\,cos\,\beta x$ або $Q_m(x)\,sin\,\beta x$, то при відшуканні розв'язку $v(x)$, ми вважатимемо, що $s = max\{n, 0\}$ або $s = max\{0, m\}$ відповідно і $v(x)$ шукаємо у вигляді:*

$$v(x) = x^k(M_s(x)\,cos\,\beta x + N_s(x)\,sin\,\beta x), \;\; k = 0,1.$$

Іноді права частина рівняння (2.23) є сумою декількох доданків, які відповідають різним типам правих частин рівняння. Справедлива

Теорема. *Сума частинних розв'язків двох рівнянь*

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f_1(x), \tag{2.27}$$

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f_2(x), \tag{2.28}$$

дає частинний розв'язок рівняння

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f_1(x) + f_2(x). \qquad (2.29)$$

Доведення. Дійсно, нехай $v_1(x)$ – частинний розв'язок рівняння (2.27), а $v_2(x)$ – частинний розв'язок рівняння (2.28). Підставимо $v_1(x) + v_2(x)$ в рівняння (2.29):

$$\underline{v_1''(x)} + \underline{\underline{v_2''(x)}} + \underline{pv_1'(x)} + \underline{\underline{pv_2'(x)}} + \underline{qv_1(x)} + \underline{\underline{qv_2(x) =}}$$

$$= [v_1''(x) + pv_1'(x) + qv_1(x)] + [v_2''(x) + pv_2'(x) + qv_2(x)] =$$

$$= f_1(x) + f_2(x).$$

З рівностей (2.27) і (2.28) відповідно маємо:

$$v_1''(x) + pv_1'(x) + qv_1(x) = f_1(x),$$

$$v_2''(x) + pv_2'(x) + qv_2(x) = f_2(x),$$

отже, сума розв'язків $(v_1(x) + v_2(x))$ задовольняє диференціальне рівняння (2.29).

Приклад. Знайти вигляд загального розв'язку диференціальне рівняння $y'' - 3y' = x^2 + 3 + xe^{3x}$, не обчислюючи значень коефіцієнтів многочленів.

Розв'язання. Праву частину рівняння можна вважати сумою двох функцій

$$f_1(x) = x^2 + 3, \quad f_2(x) = xe^{3x}.$$

Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння $y'' - 3y' = 0$:

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0, \quad \lambda(\lambda - 3) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 3, \end{array}\right.$$

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 + C_2 e^{3x}.$$

Для правої частини $f_1(x) = x^2 + 3$ маємо, що $\alpha = 0,\ k = 1,\ n = 2$, тому відповідний частинний розв'язок будемо шукати у вигляді

$$v_1(x) = (Ax^2 + Bx + C)x.$$

Аналогічно, для $f_2(x) = xe^{3x}$ маємо $\alpha = 3, k = 1, n = 1$, тому

$$v_2(x) = (Mx + N)xe^{3x}.$$

Отже, отримали такий вигляд загального розв'язку:

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} + x(Ax^2 + Bx + C) + (Mx + N)xe^{3x}.$$

Метод варіацій довільних сталих (метод Лагранжа)

Нехай маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (2.23)

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2.30}$$

запишемо у вигляді

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \tag{2.31}$$

де $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – два лінійно незалежні розв'язки рівняння (2.30).

Для знаходження загального розв'язку рівняння (2.23) за методом Лагранжа (варіації довільних сталих) у співвідношенні (2.31) будемо вважати C_1 і C_2 не сталими величинами, а деякими функціями змінної x, тобто

$$C_1 = C_1(x), \quad C_2 = C_2(x).$$

Тоді

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x). \tag{2.32}$$

Знайдемо похідну $y'(x)$ функції (2.32):

$$y'(x) = C'_1(x) y_1(x) + C_1(x) y'_1(x) + C'_2(x) y_2(x) + C_2(x) y'_2(x). \tag{2.33}$$

Будемо вимагати, щоб $C_1(x)$ та $C_2(x)$ задовольняли умову

$$y' = C_1(x) y'_1(x) + C_2 y'_2(x), \tag{2.34}$$

тоді з виразу (2.33) маємо, що

$$C'_1(x) y_1(x) + C'_2(x) y_2(x) = 0. \tag{2.35}$$

Похідну $y''(x)$ знайдемо з умови (2.34):

$$y''(x) = C'_1(x) y'_1(x) + C_1(x) y''_1(x) + C'_2(x) y'_2(x) + C_2(x) y''_2(x). \tag{2.36}$$

Підставимо вирази (2.32), (2.34), (2.36) для y, y', y'' в рівняння (2.23):

$$C'_1(x) y'_1(x) + \underline{C_1(x) y''_1(x)} + C'_2(x) y'_2(x) + \underline{\underline{C_2(x) y''_2(x)}} +$$

$$+p\left(\underline{C_1(x)y'_1(x)}+\underline{\underline{C_2(x)y'_2(x)}}\right)+q\left(\underline{C_1(x)y_1(x)}+\underline{\underline{C_2(x)y_2(x)}}\right)=$$

$$=C_1(x)\left[y''_1(x)+py'_1(x)+qy_1(x)\right]+C_2(x)\left[y''_2(x)+py'_2(x)+qy_2(x)\right]+$$

$$+C'_1(x)y'_1(x)+C'_2(x)y'_2(x)=f(x).$$

Оскільки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками диференціального рівняння (2.30), то

$$y''_1(x)+py'_1(x)+qy_1(x)=0,$$

$$y''_2(x)+py'_2(x)+qy_2(x)=0,$$

і

$$C'_1(x)y'_1(x)+C'_2(x)y'_2(x)=f(x). \qquad (2.37)$$

Отже, для того, щоб функція (2.32) була розв'язком диференціального рівняння (2.23) потрібне одночасне виконання умов (2.35) і (2.37), тобто

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1(x)+C'_2(x)y_2(x)=0, \\ C'_1(x)y'_1(x)+C'_2(x)y'_2(x)=f(x). \end{cases} \qquad (2.38)$$

Систему (2.38) розв'яжемо відносно $C'_1(x)$ та $C'_2(x)$. Для знаходження $C_1(x)$ та $C_2(x)$ проінтегруємо знайдені функції. Для запису загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння підставимо у (2.32) отримані вирази для $C_1(x)$ та $C_2(x)$.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''-y=6\mathrm{e}^{2x}.$$

Розв'язання. Розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння і розв'яжемо його характеристичне рівняння:

$$\lambda^2-1=0,$$

$$\lambda_{1,2}=\pm 1,$$

$$y_{\text{з.о.}}=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

Будемо вважати, що $C_1=C_1(x)$, $C_2=C_2(x)$, вони визначаються з системи рівнянь (2.38):

$$\begin{cases} C'_1(x)e^x+C'_2(x)e^{-x}=0, \\ C'_1(x)e^x-C'_2(x)e^{-x}=6e^{2x}. \end{cases}$$

$$2C'_1(x)e^x = 6e^{2x},$$

$$\underline{C'_1(x) = 3e^x,}$$

$$C'_2(x) = -C'_1(x)e^x e^x = -3e^x e^x e^x = -3e^{3x},$$

$$\underline{C'_2(x) = -3e^{3x},}$$

$$C_1(x) = 3e^x + C_{1,}$$

$$C_2(x) = -e^{3x} + C_2,$$

$$y = (3e^x + C_1)e^x + (-e^{3x} + C_2)e^{-x} = 3e^{2x} + C_1e^x - e^{2x} + C_2e^{-x} =$$

$$= 2e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + 2e^{2x}.$$

Задачі:

1. Розв'язати ЛНДР методом варіації довільних сталих:

1) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$,

2) $y'' - y' = \dfrac{1}{1+e^x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$,

3) $y'' - 2y' = 4x^2e^x$,

4) $y'' + y = tg^2 x$.

2. Вказати вигляд частинного розв'язку ЛНДР зі сталими коефіцієнтами:

1) $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$,

2) $y'' + 2y' = x^2 - 1$,

3) $y'' - 4y = xe^x \cos x$,

4) $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + x^2e^x$,

5) $y''' + 4y'' + 4y' = (x-1)e^{-2x}$.

3. Знайти загальний розв'язок ЛНДР, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів:

1) $y'' - 2y' = xe^{-x}$,

2) $y'' - y' = 5x + 2$,

3) $y'' + y = x\cos x$,

4) $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$,

5) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$,

6) $y''' - 3y' = 6 - 3x^2$, $y(0) = y'(0) = y'''(0) = 1$.

5. Найпростіші системи диференціальних рівнянь. Деякі методи їх розв'язування

У застосуваннях математики в різних галузях науки диференціальні рівняння та їх системи займають особливе місце. Більшість реальних процесів підпорядковуються сукупності певних залежностей, що просто і повно описується саме за допомогою систем диференціальних рівнянь, які можна розглядати як математичні моделі таких процесів. Зокрема, до систем диференціальних рівнянь приводить відома задача: *у ставку живуть риби двох видів: карасі та щуки. Карасі харчуються зеленими рослинами ставка, а щуки – карасями. Визначити, як зміниться чисельність карасів і щук у ставку з плином часу.*

Означення. Система звичайних диференціальних рівнянь $F_k\left(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(k_1)}, x_2, x_2', \ldots, x_2^{(k_2)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(k_n)}\right) = 0$, $k = 1,2,\ldots,n$, розв'язна відносно старших похідних $x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \ldots, x_n^{(k_n)}$, називається *канонічною системою*. Вона має вигляд

$$\begin{cases} x_1^{k_1} = f_1\left(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(k-1)_1}, x_2, x_2', \ldots, x_2^{(k_2-1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right), \\ x_2^{k_2} = f_2\left(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(k-1)_1}, x_2, x_2', \ldots, x_2^{(k_2-1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{k_n} = f_n\left(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(k-1)_1}, x_2, x_2', \ldots, x_2^{(k_2-1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right), \end{cases} \tag{2.39}$$

Порядком системи називається число $p = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Означення. Система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку вигляду

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \; k = 1,2,\ldots,n, \qquad (2.40)$$

де t - незалежна змінна, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - невідомі функції від t, називається *нормальною*, а число n називається *порядком* нормальної системи. Кожне рівняння нормальної системи розв'язне відносно відповідної похідної.

Крім вищеназваних форм подання систем диференціальних рівнянь n -*го порядку*, існує ще так звана симетрична форма:

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dt}{1}. \quad (2.41)$$

Канонічна форма система диференціальних рівнянь (2.39) зводиться до нормального вигляду (2.40), якщо замінити кожну з похідних правої частини рівнянь системи (2.39) новою змінною.

Приклад. Звести систему диференціальних рівнянь до нормального вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - y = 0, \\ t^3 \dfrac{dy}{dt} - 2x = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Покладемо $x = x_1, \; \frac{dx}{dt} = x_2, \; y = x_3$, тоді $\frac{dx_1}{dt} = x_2$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dx_3}{dt}$. Дана система зведеться до нормальної системи третього порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_{3,} \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{2x_1}{t^3}. \end{cases}$$

Означення. *Розв'язком* системи диференціальних рівнянь називається сукупність n функцій $x_1 = \varphi_1(t), \; x_2 = \varphi_2(t), \ldots, \; x_n = \varphi_n(t)$, визначених і неперервно диференційовних в деякому проміжку $\langle a; b \rangle$, якщо вони обертають всі рівняння системи на тотожності, які виконуються для кожного $x \in \langle a;b \rangle$.

Якщо дві системи диференціальних рівнянь мають одні й ті самі розв'язки, то вони є *еквівалентними*.

Означення. *Задачею Коші* для системи диференціальних рівнянь називається задача знаходження розв'язку $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), \ldots,\ x_n = x_n(t)$ цієї системи, що задовольняє початковим умовам $x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0,\ \ldots,\ x_n(t_0) = x_n^0$, де $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ – деякі задані дійсні числа.

Для нормальної системи диференціальних рівнянь справедлива

Теорема (існування та єдності розв'язку задачі Коші). *Нехай маємо нормальну систему диференціальних рівнянь і нехай функції* $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\ i = \overline{1,n}$, *визначені в деякій* $(n+1)-$*вимірній області* D *змінних* $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Якщо існує окіл точки* $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, *в якому функції* f_i *неперервні і мають обмежені частинні похідні по змінним* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *то знайдеться інтервал, в якому існує єдиний розв'язок нормальної системи, що задовольняє задані початкові умови.*

Означення. Система n диференційовних функцій $x_i = x_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $i = \overline{1,n}$, називається *загальним розв'язком* нормальної системи диференціальних рівнянь, якщо:

1) при всіх допустимих значеннях $C_1, C_2, \ldots, C_n$ система функцій $x_i = x_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ обертає всі рівняння системи на тотожності;

2) в області, де виконуються умови теорем Коші, функції x_i є розв'язками будь-якої задачі Коші.

Означення. Розв'язки системи диференціальних рівнянь, отримані із загального розв'язку при деяких визначених значеннях сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, називаються *частинними*.

Розглянемо нормальну систему другого порядку $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) \end{cases}$, де t, x_1, x_2 вважаємо прямокутними декартовими координатами точки тривимірного простору Otx_1x_2. Розв'язок $\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t) \end{cases}$, що при $t = t_0$ набуває значень x_1^0, x_2^0, зображує в цьому просторі деяку лінію, яка називається *інтегральною кривою* нормальної системи і проходить через точку $M_0(t_{0,} x_1^0, x_2^0)$.

Отже, з геометричної точки зору задачу Коші можна сформулювати так: у просторі Otx_1x_2 знайти таку інтегральну криву, що проходить через точку $M_0(t_{0,} x_1^0, x_2^0)$.

Задачі

1. Показати, що система функцій $x_1 = -\dfrac{1}{t^2}$, $x_2 = -t\ln t$ $(t > 0)$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2tx_1^2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_2}{t} - 1 \end{cases}$

2. Привести диференціальне рівняння $\dfrac{d^2x}{dt^2} + p(t)\dfrac{dx}{dt} + q(t)x = 0$ до нормальної системи.

Розглянемо один з методів розв'язування нормальних систем диференціальних рівнянь – *метод виключення*. Цей метод полягає у зведенні системи n-го порядку до одного диференціального рівняння n-го порядку, для цього диференціюємо одне з рівнянь системи та виконуємо відповідні перетворення.

<u>Загальна схема методу виключення</u>

Нехай маємо нормальну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1,2, \dots, n.$$

Продиференціюємо n разів, наприклад, перше з рівнянь системи

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

отримаємо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Знайдемо вирази для $x_2, x_3, \dots, x_n$ з перших $(n-1)$ рівнянь даної системи і підставимо в останню рівність, отримаємо диференціальне рівняння n-го порядку, а саме:

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = F_n\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \frac{d^2x_1}{dt^2} \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right).$$

Розв’язок отриманого диференціального рівняння є розв’язком даної системи.

Приклад. Розв’язати систему диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$$

Розв’язання. Диференціюємо перше рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}.$$

Підставимо в нього вираз для $\frac{dy}{dt}$ з другого рівняння системи, отримаємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x + e^t + e^{-t},$$

$$x''(t) - x = e^t + e^{-t}.$$

Отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Для відповідного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку

$$x''(t) - x = 0$$

складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 1,\\ \lambda_2 = -1,\end{array}\right.$$

$$x_{\text{з.о.}} = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$x''(t) - x = e^t,$$

$$\alpha = 1, \qquad k = 1, \qquad n = 0,$$

$$v_1(t) = Ate^t,$$

$$v_1'(t) = Ae^t + Ate^t,$$

$$v_1''(t) = Ae^t + Ae^t + Ate^t = \\ = 2Ae^t + Ate^t,$$

$$2Ae^t + Ate^t - Ate^t = e^t,$$

$$2A = 1, \; A = \frac{1}{2},$$

$$v_1(t) = \frac{1}{2}te^t.$$

$$x''(t) - x = e^{-t},$$

$$\alpha = -1, \qquad k = 1, \qquad n = 0,$$

$$v_2(t) = Ate^{-t},$$

$$v_2'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t},$$

$$v_2''(t) = -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} = \\ = -2Ae^{-t} + Ate^{-t},$$

$$-2Ae^{-t} + Ate^{-t} - Ate^{-t} = e^{-t},$$

$$-2A = 1, \qquad A = -\frac{1}{2},$$

$$v_2(t) = -\frac{1}{2}te^{-t}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}te^{-t}.$$

Ця функція є однією з функцій розв'язку системи диференціальних рівнянь. Функцію $y(t)$ знайдемо з першого рівняння системи:

$$y(t) = \frac{dx}{dt} = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} = \\ = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2}t(e^t + e^{-t}).$$

Загальний розв’язок даної системи диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}te^{-t}, \\ y(t) = C_1e^t - C_2e^{-t} + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2}t(e^t + e^{-t}). \end{cases}$$

Розглянемо інший метод розв’язування систем диференціальних рівнянь – *метод інтегровних комбінацій.* Він полягає в тому, що за допомогою арифметичних операцій і тотожних перетворень із рівнянь системи (2.39) утворюють (якщо це можливо) так звані *інтегровні комбінації*, тобто рівняння, які легко інтегруються.

Приклад. Розв’язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y' = y^2z, \\ z' = \frac{z}{x} - yz^2. \end{cases}$$

Розв’язання. Помножимо обидві частини першого рівняння на z, другого – на y, і додамо їх почленно.

$$\begin{cases} z\frac{dy}{dx} = y^2z^2, \\ y\frac{dz}{dx} = \frac{zy}{x} - y^2z^2, \end{cases}$$

Отримаємо першу інтегровну комбінацію:

$$z\frac{dy}{dx} + y\frac{dz}{dx} = \frac{zy}{x},$$

$$\frac{d}{dx}(zy) = \frac{zy}{x},$$

$$\frac{d(zy)}{yz} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|yz| = \ln|x| + \ln C_1,$$

$$\underline{yz = C_1x\,.} \tag{2.42}$$

Вираз (2.42) для yz підставимо у перше рівняння системи і отримаємо другу інтегровну комбінацію:

$$y' = C_1xy,$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 yx,$$

$$\frac{dy}{y} = C_1 x dx,$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2} C_1 x^2 + \ln C_2,$$

$$\ln|y| - \ln C_2 = \frac{1}{2} C_1 x^2,$$

$$\ln\left|\frac{y}{C_2}\right| = \frac{1}{2} C_1 x^2,$$

$$\frac{y}{C_2} = e^{\frac{1}{2} C_1 x^2},$$

$$\underline{y(x) = C_2 e^{\frac{1}{2} C_1 x^2}.}$$

Функцію $z(x)$ знайдемо з рівняння (2.42):

$$z(x) = \frac{C_1 x}{y} = \frac{C_1 x}{C_2 e^{\frac{1}{2} C_1 x^2}} = \frac{C_1}{C_2} x e^{-\frac{1}{2} C_1 x^2}.$$

Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь запишемо у вигляді $\begin{cases} y(x) = C_2 e^{\frac{1}{2} C_1 x^2} \\ z(x) = \frac{C_1}{C_2} x e^{-\frac{1}{2} C_1 x^2} \end{cases}.$

6. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь

Означення. *Лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами* називається система вигляду $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, де коефіцієнти a_{ik} - деякі сталі, $x_k(t)$ - шукані функції.

У матричній формі дану систему можна записати так:

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X, \tag{2.43}$$

де $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $\frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \dots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$.

Матриця-стовбець $Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ називається *частинним розв'язком матричного рівняння*, якщо виконується тотожність $\frac{dY}{dt}=A\cdot Y(t)$ для $\forall t\in(a;b)$.

Система частинних розв'язків

$$X_1(t)=\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_1^{(2)}(t) \\ \dots \\ x_1^{(n)}(t) \end{pmatrix},\quad X_2(t)=\begin{pmatrix} x_2^{(1)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \\ \dots \\ x_2^{(n)}(t) \end{pmatrix},\quad \dots.,\quad X_n(t)=\begin{pmatrix} x_n^{(1)}(t) \\ x_n^{(2)}(t) \\ \dots \\ x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

називається *фундаментальною* на інтервалі $(a;b)$, якщо її визначник Вронського

$$W(t)=W(X_1,X_2,\dots,X_n)=\begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_2^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(1)}(t) \\ x_1^{(2)}(t) & x_2^{(2)}(t) & \dots & x_n^{(2)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}\neq 0$$

для всіх $\forall t\in(a;b)$.

Зауваження. В запису елементу x_i^k нижній індекс вказує номер розв'язку, а верхній – номер функції у розв'язку.

Теорема. *Якщо система частинних розв'язків матричного однорідного рівняння* (2.43) *є фундаментальною, то його загальний розв'язок матиме вигляд*

$$X(t)=C_1X_1(t)+C_2X_2(t)+\dots+C_nX_n(t),$$

де $C_1,C_2,\dots,C_n$ *- довільні сталі.*

Для інтегрування однорідних лінійних систем зі сталими коефіцієнтами застосовується метод Ейлера. Розглянемо цей метод на прикладі системи трьох лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ \dfrac{dz}{dt} = a_3 x + b_3 y + c_3 z. \end{cases} \qquad (2.44)$$

Розв'язок цієї системи шукатимемо у вигляді

$$x = \lambda e^{rt}, \quad y = \mu e^{rt}, \; z = \nu e^{rt}, \qquad (2.45)$$

де $\lambda, \mu, \nu, \; r$ - деякі сталі.

Підставимо (2.45) в (2.44) і розділимо на e^{rt} $(e^{rt} \neq 0)$. Отримаємо однорідну систему лінійних рівнянь відносно невідомих λ, μ, ν:

$$\begin{cases} (a_1 - r)\lambda + b_1 \mu + c_1 = 0, \\ a_2 \lambda + (b_2 - r)\mu + c_2 \nu = 0, \\ a_3 \lambda + b_3 \mu + (c_3 - r)\nu = 0. \end{cases} \qquad (2.46)$$

Система (2.46) має ненульовий розв'язок, коли її визначник Δ дорівнює нулю, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - r & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - r & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - r \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.47)$$

Рівняння (2.47) називається *характеристичним рівнянням* системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо розв'язки системи (2.43) в залежності від його коренів.

а) Нехай корені r_1, r_2, r_3 характеристичного рівняння дійсні та різні. Підставимо в (2.46) замість r число r_1 і знайдемо ненульові розв'язки λ_1, μ_1, ν_1 цієї системи. Аналогічно, покладемо в (2.46) $r = r_2$, отримаємо числа λ_2, μ_2, ν_2, потім покладемо $r = r_3$ і знайдемо λ_3, μ_3, ν_3. Відповідно до отриманих наборів чисел запишемо частинні розв'язки

$$x_1=\lambda_1 e^{r_1 t},\quad y_1=\mu_1 e^{r_1 t},\quad z_1=\nu_1 e^{r_1 t},$$

$$x_2=\lambda_2 e^{r_2 t},\quad y_2=\mu_2 e^{r_2 t},\quad z_2=\nu_2 e^{r_2 t},$$

$$x_3=\lambda_3 e^{r_3 t},\quad y_3=\mu_3 e^{r_3 t},\quad z_3=\nu_3 e^{r_3 t}.$$

Загальний розв'язок системи (2.43) має вигляд

$$\begin{aligned} x(t)&=C_1\lambda_1 e^{r_1 t}+C_2\lambda_2 e^{r_2 t}+C_3\lambda_3 e^{r_3 t},\\ y(t)&=C_1\mu_1 e^{r_1 t}+C_2\mu_2 e^{r_2 t}+C_3\mu_3 e^{r_3 t},\\ z(t)&=C_1\nu_1 e^{r_1 t}+C_2\nu_2 e^{r_2 t}+C_3\nu_3 e^{r_3 t}.\end{aligned}$$

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+5y-z,\\ \dfrac{dz}{dt}=x-y+3z.\end{cases}$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix}3-r & -1 & 1\\ -1 & 5-r & -1\\ 1 & -1 & 3-r\end{vmatrix}=0$$

або $r^3-11r^2+36r-36=0$, коренями якого є числа $r_1=2, r_2=3, r_3=6$. Підставимо кожне з цих чисел в систему (2.46), знайдемо її ненульові розв'язки

$$\lambda_1=1,\ \mu_1=0,\ \nu_1=-1,$$

$$\lambda_2=1,\ \mu_2=1,\ \nu_2=1,$$

$$\lambda_3=1,\ \mu_3=-2,\ \nu_2=1.$$

Випишемо частинні розв'язки

$$x_1=e^{2t},\quad y_1=0,\quad z_1=-e^{2t},$$

$$x_2=e^{3t},\quad y_2=e^{3t},\quad z_2=e^{3t},$$

$$x_3=e^{6t},\quad y_3=-2e^{6t},\quad z_3=e^{6t}.$$

Загальний розв'язок системи

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t},$$
$$y = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t},$$
$$z = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}.$$

б) Розглянемо на конкретному прикладі випадок, коли корені характеристичного рівняння є комплексними числами.

Приклад. Розв’язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases} \tag{2.48}$$

Розв’язання. Запишемо систему для знаходження λ та μ:

$$\begin{cases} (1-r)\lambda - 5\mu = 0, \\ 2\lambda - (1+r)\mu = 0. \end{cases} \tag{2.49}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-r & -5 \\ 2 & -1-r \end{vmatrix} = 0$$

має комплексні корені $r_1 = 3i,\ r_2 = -3i$. Для знаходження λ_1 та μ_1 підставимо $r_1 = 3i$ в (2.49) і отримаємо два рівняння

$$(1-3i)\lambda_1 - 5\mu_1 = 0,\ \ 2\lambda_1 - (1+3i)\mu_1 = 0,$$

одне з яких є наслідком іншого, оскільки визначник системи (2.49) дорівнює нулю. Візьмемо $\lambda_1 = 5,\ \mu_1 = 1-3i$, тоді перший частинний розв’язок запишемо у вигляді:

$$x_1 = 5e^{3it},\ \ y_1 = (1-3i)e^{3it}. \tag{2.50}$$

Аналогічно, якщо підставити в систему (2.49) корінь $r_2 = -3i$, знайдемо другий частинний розв’язок:

$$x_1 = 5e^{-3it},\ \ y_1 = (1+3i)e^{-3it}. \tag{2.51}$$

Перейдемо до нової фундаментальної системи розв’язків:

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \ \tilde{x}_2 = \frac{x_1 - x_2}{2i},$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \;\; \tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i}. \tag{2.52}$$

За формулою Ейлера з (2.50), (2.51) та (2.52) отримаємо

$$\tilde{x}_1 = 5\cos 3t, \; \tilde{y}_1 = \cos 3t + 3\sin 3t,$$

$$\tilde{x}_2 = 5\sin 3t, \; \tilde{y}_2 = \sin 3t - 3\cos 3t.$$

Загальний розв'язок системи (2.48) має вигляд:

$$\begin{cases} x(t) = C_1\tilde{x}_1 + C_2\tilde{x}_2 = 5C_1\cos 3t + 5C_2\sin 3t, \\ y(t) = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t). \end{cases}$$

Зауваження. Знайшовши перший частинний розв'язок (2.50), можна було б відразу записати загальний розв'язок системи (48), користуючись формулами

$$x = C_1 \operatorname{Re} x_1 + C_2 \operatorname{Im} x, \;\; y = C_1 \operatorname{Re} y_1 + C_2 \operatorname{Im} y_1,$$

де $\operatorname{Re} z$ та $\operatorname{Im} z$ є відповідно дійсною та уявною частинами комплексного числа z.

в) Також на конкретному прикладі розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння має кратні дійсні корені.

Приклад. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases} \tag{2.53}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & 4-r \end{vmatrix} = 0, \text{ або } r^2 - 6r + 9 = 0,$$

має кратний корінь $r_1 = r_2 = 3$.

Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$x = (\lambda_1 + \mu_1 t)e^{3t}, \;\; y = (\lambda_2 + \mu_2 t)e^{3t}. \tag{2.54}$$

Підставимо (2.54) в перше рівняння системи (2.53):

$$3(\lambda_1 + \mu_1 t) + \mu_1 = 2(\lambda_1 + \mu_1 t) + (\lambda_2 + \mu_2 t). \tag{2.55}$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t у лівій та правій частинах рівності (2.55), отримаємо:

$$3\lambda_1 + \mu_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2,$$
$$3\mu_1 = 2\mu_1 + \mu_2,$$

звідки

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \mu_1, \ \ \mu_2 = \mu_1. \tag{2.56}$$

Величини λ_1 та μ_1 є довільними, тому позначимо їх через C_1 та C_2 відповідно. Запишемо загальний розв’язок системи (2.53):

$$\begin{cases} x(t) = \left(C_1 + C_2 t\right)e^{3t}, \\ y(t) = \left(C_1 + C_2 + C_2 t\right)e^{3t}. \end{cases}$$

Зауваження. Можна переконатись, що підстановка (2.54) в друге рівняння системи (2.53) дає той самий результат.

7. Метод варіації довільних сталих розв’язування неоднорідних лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Нехай маємо неоднорідну лінійну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k(t) + f_i(t), \ i = 1,2,\ldots,n, \tag{2.57}$$

яку також можна подати у матричному вигляді

$$\frac{dX}{dt} = AX + F, \tag{2.58}$$

де F – матриця-стовбчик з елементами $f_i(t)$.

Теорема. *Загальний розв’язок* $X(t)$ *неоднорідної лінійної системи диференціальних рівнянь дорівнює сумі загального розв’язку* $X_{з.о}(t)$ *відповідної однорідної системи* $\frac{dX}{dt} = AX$ *та довільного частинного розв’язку* $X_{ч.н}(t)$ *даної неоднорідної системи.*

Проілюструємо метод варіації довільних сталих на прикладі системи трьох неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Нехай задана система зі сталими коефіцієнтами $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, e_1, e_2, e_3$:

$$x' + a_1 x + b_1 y + e_1 z = f_1(t), \tag{2.59}$$

$$y' + a_2 x + b_2 y + e_2 z = f_2(t), \tag{2.60}$$

$$z' + a_3 x + b_3 y + e_3 z = f_3(t). \tag{2.61}$$

Припустимо, що загальний розв'язок відповідної однорідної системи вже знайдено:

$$\begin{aligned} x &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3, \\ y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3, \\ z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Розв'язок неоднорідної системи (2.57) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} x &= C_1(t) x_1 + C_2(t) x_2 + C_3(t) x_3, \\ y &= C_1(t) y_1 + C_2(t) y_2 + C_3(t) y_3, \\ z &= C_1(t) z_1 + C_2(t) z_2 + C_3(t) z_3, \end{aligned} \tag{2.63}$$

де $C_1(t), C_2(t), C_3(t)$ – поки що невідомі функції.

Підставимо (2.63) в систему (2.57), тоді її перше рівняння (2.59) матиме вигляд

$$\begin{aligned} &C_1' x_1 + C_2' x_2 + C_3' x_3 + C_1(x_1' + a_1 x_1 + b_1 y_1 + e_1 z_1) + C_2(x_2' + a_2 x_2 + b_2 y_2 + e_2 z_2) + \\ &+ C_3(x_3' + a_3 x_3 + b_3 y_3 + e_3 z_3) = f_1(t). \end{aligned} \tag{2.64}$$

Всі вирази в дужках дорівнюють нулю, оскільки (2.62) є розв'язком відповідної однорідної системи. Тоді отримаємо, що

$$C_1' x_1 + C_2' x_2 + C_3' x_3 = f_1(t). \tag{2.65}$$

Аналогічно, після підстановки в рівняння (2.60) та (2.61) розв'язків (2.63), отримаємо

$$\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 &= f_2(t), \\ C_1' z_1 + C_2' z_2 + C_3' z_3 &= f_3(t). \end{aligned} \tag{2.66}$$

Система, складена з рівнянь (2.65) та (2.66), лінійних відносно C_1', C_2', C_3', має розв’язок, оскільки її визначник $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Це слідує з лінійної незалежності частинних розв’язків відповідної однорідної системи.

Розв’яжемо цю систему відносно похідних $C_1'(t), C_2'(t), C_3'(t)$, проінтегруємо їх та знайдемо функції $C_1(t), C_2(t), C_3(t)$, а тим самим і розв’язок (2.63) заданої неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Приклад. Методом варіації довільних сталих розв’язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 4y + 1 + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + \dfrac{3}{2}t^2. \end{cases} \tag{2.67}$$

Розв’язання. Спочатку розв’яжемо відповідну однорідну систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases} \tag{2.68}$$

Виразимо $x(t)$ з другого рівняння системи та знайдемо похідну $x'(t)$:

$$x = y - y',\ x' = y' - y''.$$

Підставимо ці вирази в перше рівняння системи (2.68):

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Отримаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, загальний розв’язок якого $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}$.

З рівності $x = y - y'$ отримаємо, що $x = -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t}$.

Отже, загальним розв’язком однорідної системи (68) є

$$x = -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t},\quad y = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}. \tag{2.69}$$

Розв’язок неоднорідної системи (2.67) шукаємо у вигляді

$$x = -C_1(t)e^{2t} + 4C_2(t)e^{-3t},\quad y = C_1(t)e^{2t} + C_2(t)e^{-3t}. \tag{2.70}$$

Підставимо (2.70) у вихідну систему (2.67). Врахуємо те, що (2.69) є розв'язками відповідної однорідної системи диференціальних рівнянь, отримаємо систему відносно похідних $C_1'(t), C_2'(t)$:

$$\begin{cases} -C_1'(t)e^{2t} + 4C_2'(t)e^{-3t} = 1 + 4t, \\ C_1'(t)e^{2t} + C_2'(t)e^{-3t} = \dfrac{3}{2}t^2, \end{cases}$$

звідки

$$C_1'(t) = \frac{(6t^2 - 4t - 1)e^{-2t}}{5},\ C_2'(t) = \frac{(3t^2 + 8t + 2)e^{3t}}{10}.$$

Для знаходження $C_1(t), C_2(t)$ проінтегруємо ці функції:

$$C_1(t) = -\frac{1}{5}(t + 3t^2)e^{-2t} + C_1,\ C_2(t) = \frac{1}{10}(2t + t^2)e^{3t} + C_2,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Підставимо вирази для $C_1(t), C_2(t)$ в (2.70), отримаємо загальний розв'язок системи (2.67)

$$x = -C_1(t)e^{2t} + 4C_2(t)e^{-3t} + t + t^2,$$

$$y = C_1(t)e^{2t} + C_2(t)e^{-3t} - \frac{1}{2} + t^2.$$

Задачі:

1. Розв'язати систему ДР:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{t}, \end{cases}$ (методом інтегровних комбінацій)

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - by, \\ \dfrac{dy}{dt} = bx + ay, \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y, \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{2x}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - 1 - \dfrac{2x}{t}, \end{cases}$ $x(1) = \dfrac{1}{3},\ y(1) = -\dfrac{1}{3},$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0,$

6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2t. \end{cases}$

8. Застосування перетворення Лапласа до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь та їх систем

Означення. *Функцією-оригіналом* називають функцію $f(t)$, яка задовольняє умови:

1) $f(t) = 0$, якщо $t < 0$;

2) $f(t)$ інтегровна на довільному скінченному інтервалі осі Ot;

3) $|f(t)|$ зростає не швидше деякої показникової функції, тобто існують числа $M > 0$ і $s_0 \geq 0$ такі, що для $\forall t$ маємо $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$.

До таких функцій, зокрема, відносяться всі обмежені та всі неперервні функції.

Означення. Функція $F(p)$, визначена рівністю $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$, називається *зображенням* функції-оригінала *за Лапласом.*

Перетворення $F(p)$, що ставить у відповідність оригіналу $f(t)$ його зображення $F(p)$, називається *перетворенням Лапласа*: $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Приклад. Знайти зображення функції Хевісайда $\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$.

Розв'язання.

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}dt=\lim_{A\to\infty}\int\limits_0^{A} e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\lim_{A\to\infty} e^{-pt}\Big|_0^A =-\frac{1}{p}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-pA}-1\right)=\frac{1}{p}.$$

Властивості перетворення Лапласа

Нехай $f(t)\risingdotseq F(p), g(t)\risingdotseq G(p)$.

1. *Властивість лінійності*:

для $\forall \alpha,\beta\in R \Rightarrow \alpha f(t)+\beta g(t)\risingdotseq \alpha F(p)+\beta G(p)$.

2. *Теорема подібності*: для $\forall\alpha>0 \Rightarrow f(\alpha t)\risingdotseq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

3. *Теорема запізнення*: для довільного $\tau>0 \Rightarrow f(t-\tau)\risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$.

4. *Теорема зміщення (множення оригіналу на показникову функцію)*: для довільного $\lambda \Rightarrow e^{\lambda t} f(t)\risingdotseq F(p-\lambda)$.

5. *Диференціювання оригіналу*:

якщо $f'(t)$ оригінал, то $f'(t)\risingdotseq pF(p)-f(0)$.

6. Якщо функція $f(t)$ n разів неперервно-диференційовна на $(0;+\infty)$ і $f^{(n)}(t)$ є оригіналом, то

$$f^{(n)}(t)\risingdotseq p^n F(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

7. *Інтегрування оригіналу* зводиться до ділення зображення на p, тобто $\int\limits_0^t f(t)dt \fallingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$.

8. *Інтегрування зображення* рівносильне діленню на t оригіналу:

$$\int\limits_0^\infty F(p)dp \fallingdotseq \frac{f(t)}{t} \text{ (за умови збіжності інтегралу } \int\limits_0^\infty F(p)dp\text{).}$$

9. *Теорема множення.* Добуток двох зображень $F(p)$ і $G(p)$ також є зображенням, причому $F(p)G(p) \fallingdotseq \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Інтеграл справа називається *згорткою функцій* f і g: $(f*g) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Приклади. Знайти зображення для деяких функцій-оригіналів:

1) за теоремою зміщення $\dfrac{1}{p-2} \fallingdotseq e^{2t}$, $\dfrac{1}{p+1} \fallingdotseq e^{-t}$;

2) за формулами Ейлера $\sin t \fallingdotseq \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$, $\cos t \fallingdotseq \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$. Оскільки за теоремою зміщення $e^{it} \fallingdotseq \dfrac{1}{p-i}$, $e^{-it} \fallingdotseq \dfrac{1}{p+i}$, то

$$\sin t \fallingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{p^2+1},\ \cos t \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i}+\frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1};$$

3) за теоремою подібності

$$\sin \omega t \fallingdotseq \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},\ \cos \omega t \fallingdotseq \frac{1}{\omega}\cdot\frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1} = \frac{p}{p^2+\omega^2};$$

4) за теоремою зміщення

$$e^{\alpha t}\sin \omega \fallingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2},\ e^{\alpha t}\cos \omega t \fallingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}.$$

5) за теоремою про диференціювання зображення:

$\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}$, $-\frac{1}{p^2} \doteqdot -t \Rightarrow t \doteqdot \frac{1}{p^2}$, $-\frac{2}{p^3} \doteqdot -t^2 \Rightarrow t^2 \doteqdot \frac{2!}{p^3}$, $-\frac{2 \cdot 3}{p^4} \doteqdot -t^3 \Rightarrow t^3 \doteqdot \frac{3!}{p^4}$, …,

$t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}$;

6) за теоремою зміщення $t^n e^{\alpha t} \doteqdot \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$.

Для знаходження оригіналу $f(t)$ за відомим зображенням $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ застосовується наступне правило: *даний дріб подають у вигляді суми елементарних дробів і знаходять для кожного з них оригінал*.

Приклад. Знайти оригінал $f(t)$, якщо відоме його зображення $F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

Розв'язання.

$$\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)} = -\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{p+4}{p^2+4}.$$

Маємо $\frac{1}{p+1} \doteqdot e^{-t}$, $\frac{1}{p-2} \doteqdot e^{2t}$, $\frac{p}{p^2+4} \doteqdot \cos 2t$, $\frac{2}{p^2+4} \doteqdot \sin 2t$. Тому

$$F(p) \doteqdot -\frac{1}{15} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t.$$

Розв'язування задачі Коші для лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

Нехай треба знайти розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t)$, що задовольняє початкові умови $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Будемо вважати, що функція $f(t)$ та розв'язок $x(t)$ разом з їх похідними до другого порядку включно є функціями-оригіналами, тобто

$$x(t) \risingdotseq X(p),\ f(t) \risingdotseq F(p).$$

За правилом диференціювання оригіналів з урахуванням початкових умов маємо:

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x_0,\ x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px_0 - x_1.$$

Застосуємо до обох частин диференціального рівняння перетворення Лапласа та скористаємось властивістю лінійності перетворення, отримаємо операторне рівняння:

$$p^2X(p) - px_0 - x_1 + a_1(pX(p) - x_0) + a_2X(p) = F(p),$$

$$X(p) = \frac{F(p) + x_0(p + a_1) + x_1}{p^2 + a_1p + a_2}.$$

Знайшовши оригінал для $X(p)$, отримаємо частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови.

Приклад. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $x'' + 4x' + 4x = 8e^{-2t},\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1.$

Розв'язання.

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 1,$$

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$$

$$p^2X(p) - p - 1 + 4(pX(p) - 1) + 4X(p) = \frac{8}{p+2},$$

$$X(p)(p^2 + 4p + 4) = \frac{p^2 + 7p + 18}{p+2}$$

$$X(p) = \frac{p^2 + 7p + 18}{(p+2)^3}$$

Розкладемо праву частину в суму елементарних дробів методом невизначених коефіцієнтів, отримаємо

$$X(p) = \frac{8}{(p+2)^3} + \frac{3}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}$$

Знайдемо функцію-оригінал для отриманого зображення, використовуючи формули диференціювання зображень

$$\frac{1}{p+2} \risingdotseq e^{-2t}, \quad -\frac{1}{(p+2)^2} \risingdotseq -te^{-2t}, \ \frac{2}{(p+2)^3} \risingdotseq t^2 e^{-2t}.$$

Отримаємо $X(p) \risingdotseq 4t^2 e^{-2t} + 3te^{-2t} + e^{-2t} = e^{-2t}\left(4t^2 + 3t + 1\right)$.

Отже, розв'язок задачі Коші для заданого диференціального рівняння має вигляд $x(t) = e^{-2t}\left(4t^2 + 3t + 1\right)$.

Задачі

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $x' + x = 1, \ x(0) = 1$
2. $x'' - 5x' + 4x = 4, \ x(0) = 0, \ x'(0) = 2$

Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Нехай маємо систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + f_2(t), \end{cases}$$

що задовольняє початкові умови $x(0) = x_0, \ y(0) = y_0$.

Припустимо, що функції $f_1(t), \ f_2(t), x(t), y(t), \ x'(t), \ y'(t)$ є функціями-оригіналами, тобто

$$x(t) \risingdotseq X(p), \ y(t) \risingdotseq Y(p), \ f_1(t) \risingdotseq F_1(p), \ f_2(t) \risingdotseq F_2(p),$$

а їх похідні, враховуючи початкові умови, мають зображення:

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x_0, \ y'(t) \risingdotseq pY(p) - y_0.$$

Застосуємо перетворення Лапласа і отримаємо алгебраїчну систему відносно невідомих зображень $X(p)$ і $Y(p)$:

$$\begin{cases} pX(p) = a_1X(p) + b_1Y(p) + F_1(p) + x_0, \\ pY(p) = a_1X(p) + b_1Y(p) + F_2(p) + y_0. \end{cases}$$

Розв'яжемо її і повернемось до функцій-оригіналів $x(t)$ та $y(t)$.

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y + 5, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y - 37t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$.

Нехай $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$, а їх похідні, враховуючи початкові умови, мають зображення $x'(t) \risingdotseq pX(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)$. Маємо також зображення для функцій $5 \risingdotseq \dfrac{5}{p}$, $37t \risingdotseq \dfrac{37}{p^2}$. Таким чином, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих зображень $X(p), Y(p)$:

$$\begin{cases} pX(p) = -7X(p) + Y(p) + \dfrac{5}{p}, \\ pY(p) = -2X(p) - 5Y(p) - \dfrac{37}{p^2}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (p+7)X(p) - Y(p) = \dfrac{5}{p}, \\ 2X(p) + (p+5)Y(p) = -\dfrac{37}{p^2}. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+7 & -1 \\ 2 & p+5 \end{vmatrix} = p^2 + 12p + 37$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{5}{p} & -1 \\ -\dfrac{37}{p^2} & p+5 \end{vmatrix} = \frac{5p^2 + 25p - 37}{p^2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+7 & \dfrac{5}{p} \\ 2 & -\dfrac{37}{p^2} \end{vmatrix} = \frac{-47p-259}{p^2}$$

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5p^2+25p-37}{p^2\left(p^2+12p+37\right)},\quad Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-47p-259}{p^2\left(p^2+12p+37\right)}.$$

Для знаходження функцій-оригіналів для отриманих зображень розкладемо їх у суму елементарних дробів методом невизначених коефіцієнтів і отримаємо:

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{p+6}{p^2+12p+37} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{p+6}{(p+6)^2+1},$$

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{7}{p^2} - \frac{p+5}{p^2+12p+37} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{p+6}{(p+6)^2+1} + \frac{1}{(p+6)^2+1}$$

Таким чином, $X(p) \risingdotseq 1 - t - e^{-6t}\cos t,\ Y(p) \risingdotseq 1 - 7t - e^{-6t}\cos t + e^{-6t}\sin t$.

Задачі:

Розв’язати систему диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} x' - 5x + 9y = 4, \\ y' - x + 5y = e^{5t}, \end{cases}$ при початкових умовах $x(0) = y(0) = 0$;

2) $\begin{cases} x' + x - 2y = 0, \\ y' + x + 4y = 0, \end{cases}$ при початкових умовах $x(0) = 1,\ y(0) = 1$;

3) $\begin{cases} x' + 2y = 3t, \\ y' - 2x = 4, \end{cases}$ при початкових умовах $x(0) = 2,\ y(0) = 3$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

№1.1

1. $e^{x+3y}dy = xdx$
2. $y'\sin x = y\ln y$
3. $y' = (2x-1)ctgy$
4. $\sec^2 x\,tg\,y\,dx + \sec^2 x\,tg\,x\,dy = 0$
5. $(1+e^x)ydy - e^y dx = 0$
6. $(y^2+3)dx - \dfrac{y}{x}e^x dy = 0$
7. $\sin y\cos x\,dy = \cos y\sin x\,dx$
8. $y' = (2y+1)tgx$
9. $(\sin(x+y)+\sin(x-y))dx + \dfrac{dy}{\cos y} = 0$
10. $(1+e^x)yy' = e^x$
11. $\sin x\,tgy\,dx - \dfrac{dy}{\sin x} = 0$
12. $3e^x\sin y\,dx + (1-e^x)\cos y\,dy = 0$
13. $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}$
14. $3^{x^2+y}dy + xdx = 0$
15. $(\cos(x-2y)+\cos(x+2y))y' = \sec x$
16. $y' = e^{x^2}x(1+y^2)$
17. $ctgx\cos^2 y\,dx + \sin^2 x\,tgy\,dy = 0$
18. $y'\sin x = y\cos x + 2\cos x$
19. $1+(1+y')e^y = 0$
20. $y'ctgx + y = 2$

№1.2

1. $(xy+x^3y)y' = 1+y^2$
2. $\dfrac{y'}{7^{y-x}} = 3$
3. $y - xy' = 2(1+x^2y')$
4. $y - xy' = 1+x^2y'$
5. $(x+4)dx = xydx$
6. $y'+y+y^2 = 0$
7. $y^2\ln xdx - (y-1)xdy = 0$
8. $(x+xy^2)dy + ydx - y^2dx = 0$
11. $(xy^3+x)dx + (x^2y^2-y^2)dy = 0$
12. $(1+y^2)dx - (y+yx^2)dy = 0$
13. $y' = 2xy + x$
14. $y - xy' = 3(1+x^2y')$
15. $2xyy' = 1-x^2$
16. $(x^2-1)y' - xy = 0$
17. $(y^2x+y^2)dy + xdx = 0$
18. $(1+x^3)y^3dx - (y^2-1)x^3dy = 0$

9. $y' + 2y - y^2 = 0$

10. $(x^2 + x)ydx + (y^2 + 1)dy = 0$

19. $xy' - y = y^2$

20. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$

№1.3

1. $y - xy' = x\sec\dfrac{y}{x}$

2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$

3. $(x + 2y)dx - xdy = 0$

4. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$

5. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$

6. $y^2 + x^2 y' = xyy'$

7. $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}$

8. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

9. $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}$

10. $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}$

11. $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$

12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

13. $y = x\left(y' - \sqrt[x]{e^y}\right)$

14. $y' = \dfrac{y}{x - 1}$

15. $y'x + x + y = 0$

16. $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$

17. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$

18. $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$

19. $(x - y)ydx - x^2 dy = 0$

20. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$

Завдання 2. Знайти частинний розв’язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння.

1. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3,\ y(0) = 0$

2. $y' + ytgx = \sec x,\ y(0) = 0$

3. $(1 - x)(y' + y) = e^{-x},\ y(0) = 0$

4. $xy' + 2y = 2x^4,\ y(1) = 0$

5. $y' = 2x(x^2 + y),\ y(0) = 0$

11. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln ydy,\ y(0) = 1$

12. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2},\ y(0) = 1$

13. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1),\ y(0) = 1$

14. $x(y' - y) = e^x,\ y(1) = 0$

6. $y' - y = e^x,\ y(0) = 1$

7. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0,\ y(1) = \dfrac{1}{2e}$

8. $\cos y dx = (x + 2\cos y)\sin y dy,\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}$

9. $x^2 y' + xy + 1 = 0,\ y(1) = 0$

10. $yx' + x = 4y^3 + 3y^2,\ y(2) = 1$

15. $y = x(y' - x\cos x),\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

16. $(xy' - 1)\ln x = 2y,\ y(e) = 0$

17. $(2e^y - x)y' = 1,\ y(0) = 0$

18. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x},\ y(1) = 0$

19. $(y^2 + x)dy = ydx,\ y(0) = 1$

20. $(\sin^2 y + xctgy)y' = 1,\ y(0) = \dfrac{\pi}{2}$

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y' + y = x\sqrt{y}$

2. $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x}\sec^2 ydy$

3. $y' + 2y = 3y^2 e^x$

4. $y' = y^4 \cos x + ytgx$

5. $xydy = (y^2 + x)dx$

6. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$

7. $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$

8. $y'(2x^2 y \ln y - x) = y$

9. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$

10. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

11. $xy^2 y' = x^2 + y^3$

12. $(x+1)(y' + y^2) = -y$

13. $y'x + y = -xy^2$

14. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$

15. $xy' - 2\sqrt{x^3 y} = y$

16. $y' + xy = x^3 y^3$

17. $y' = \dfrac{xe^{2x}}{y} + y$

18. $y'x + y = -xy^2$

19. $x(x-1)y' + y^3 = xy$

20. $x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 1 = 0$

Рекомендована література

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч.2. Київ, Вища школа, 1991. 365 с. (або 1978 р.)

2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 1974. 546 с.

3. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. М., Просвещение, 1988. 256 с.

4. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения (примеры и задачи). М., Высшая школа, 1989. 381с.

5. Перестюк М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. Київ, „Либідь”. 147 с.

6. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г., Кривошеева Г. М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Частина 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Харків, ХНУРЕ, 2002. 596 с.

7. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. Изд. 4-е, испр. М., Едиториал УРСС, 2002. 256 с.

8. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Наука, 1953.

9. Школьник А. Г. Дифференциальные уравнения. М., Учпедгиз, 1963. 199 с.

10. Головач Г. П., Калайда О. Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. – Київ, „Техніка”, 1997. 285 с.