УДК 372.851.2 +371.321.2 +37.04+37.026
DOI 10.5281/zenodo.3568395

О. С. Чашечникова
ORCID ID 0000-0003-1101-5534
Сумський державний педагогічний
університет імені А.С. Макаренка
О. Г. Бардакова
КУ Сумська гімназія №1 м. Суми Сумської області
З. Б. Чухрай
ORCID ID 0000-0002-0963-0522
Березнівський лісотехнічний коледж
Національного університету водного
господарства та природокористування

НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАВДАННЯ З ПАРАМЕТРАМИ ЯК ЗАСІБ РОЗВИТКУ ПРОГНОСТИЧНОГО МИСЛЕННЯ. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ

У статті розглянуто проблему розвитку прогностичного мислення. На основі досліджень, в яких ідеалізоване проектування розглядається як найкращий підхід для подолання кризи шляхом здійснення радикальних змін, зроблено висновок про необхідність розвитку прогностичного мислення в процесі навчання всіх учнів / студентів. Розглядається сутність ідеалізованого проектування в контексті навчання математики. Як шлях розвитку прогностичного мислення розглядається навчання учнів / студентів розв'язувати завдання з параметрами. Пропонується для учнів та студентів коледжів доповнювати розв'язування завдань з параметрами завданнями на розвиток прогностичного мислення. Майбутнім вчителям математики також пропонується створити до конкретних завдань з параметрами завдання на розвиток прогностичного мислення. Пропонуються результати проведеного експерименту. В експерименті брали участь учні старших класів, студенти коледжів, студенти педагогічного університету. Динаміку розвитку прогностичного мислення оцінювали за спостереженнями за процесом виконання завдань; за оперативністю виконання письмових робіт відповідного характеру та обраними шляхами розв'язування; використовуючи діагностику Л. А. Регуш. Проведений експеримент свідчить про позитивну динаміку у розвитку прогностичного мислення як учнів, так і студентів. Зовнішньо найкраще проявилося підвищення рівня розвитку прогностичного мислення в учнів та майбутніх вчителів математики. У ході виконання відповідних контрольних завдань найбільше зростання – у майбутніх вчителів математики, а за методикою Л. А. Регуш, де рівень саме знань та вмінь з теми не так істотно впливає на результати, – у студентів коледжу. З'ясовано: специфіка розв'язування тригонометричних рівнянь визначає більш помітні позитивні зміни у рівні розвитку прогностичного мислення учнів / студентів порівняно з експериментальним навчанням, пов'язаним, наприклад, з розв'язуванням показникових рівнянь. Вказано: подальшого дослідження потребує питання створення більш точних маркерів для визначення рівня розвитку прогностичного мислення учнів / студентів саме у процесі навчання математики.

Ключові слова: *навчання математики, прогностичне мислення, тригонометричні рівняння, завдання з параметрами.*

Постановка проблеми. Аналіз різноманітних реформ останніх років свідчить, що одержані результати часто не відповідають вкладеним зусиллям та фінансовим витратам, а наслідки деяких реформ носять деструктивний характер. Щоб запобігти цьому, необхідно формувати у фахівців (майбутніх фахівців) різних галузей спроможність прогнозувати можливі наслідки дій, передбачати ризики, обирати більш ефективні шляхи вирішення проблем. Зокрема, у процесі навчання математики доцільно розвивати прогностичне мислення учнів / студентів. Розв'язування завдань з параметрами – потужний спосіб реалізації цієї мети.

Мета статті – розглянути результативність розвитку прогностичного мислення учнів / студентів через навчання розв'язувати завдання з параметрами.

Аналіз актуальних досліджень. У дослідженні Г. В. Дорофєєва [2] визначено, що серед характеристик змісту навчання є його діагностико-прогностична ємність. Прогностичність мислення часто розуміють як здатність змоделювати можливі ситуації. Навчання моделюванню реальних явищ, процесів (математичному моделюванню, його елементам) передбачає навчання проектуванню. Проектування, у свою чергу, розглядають (зокрема О. М. Кочнева [3]) як конкретну форму прояву прогностичних функцій людини. Саме ідеалізоване проектування вважають найкращим підходом для подолання кризи шляхом здійснення радікальних змін (Р. Акофф, Дж. Мегідсон, Г. Едіссон [9]).

Проектувати доцільно й організацію навчального процесу, зокрема, А. А. Кубарська [10] (2017) через призму ідеалізованого проектування розглядає вирішення проблеми створення ідеального навчального процесу в організації вищої освіти. Отже, прогностичне мислення є необхідною рисою сучасного вчителя. Е. Н. Гусінським [1] сформульовано принцип невизначеності гуманітарних систем, тому було зроблено висновок про невизначеність багатьох параметрів, що їх описують.

Отже, необхідно навчити учнів / студентів це враховуватив ході аналізу ситуацій та прийняття рішень. Деякою мірою це можна пов'язати із навчанням розв'язувати завдання з параметрами, перш за все, – з етапом дослідження вимог, яким вони мають задовольняти.

Виклад основного матеріалу. Сутність ідеалізованого проектування в тому, що спочатку розглядається можливе ідеальне вирішення проблеми (або кілька сценаріїв), а потім повертаються до реальної ситуації, враховуючи наявні ресурси для досягнення бажаних результатів.

Планування цілей при цьому схоже з плануванням цілей в ході розв'язування математичних завдань. Сформулюємо так: що відомо за умовою і що мало було б бути відомим для одержання розв'язку? В чому причина «розриву» між наданими даними та необхідними?

Планування ресурсів у навчанні математики більш специфічне. Наприклад, формулювання «визначити нестачу або надлишок ресурсів» можна переформулювати так: «визначити, чи відбулася поява сторонніх коренів або втрата коренів», або «в результаті перетворення виразу одержали наслідок або тотожно рівні вирази».

У попередньому дослідженні [6; 7] нами було введено систему компонентів творчого мислення, які можна діагностувати та розвивати в процесі навчання математики. Зокрема, евристичність мислення. Нами було визначено, що евристичне мислення виражається у таких підкомпонентах: інтуїтивність; особистісний стиль мислення і діяльності; незаалгоритмізованість мислення; здатність мислити згорнутими структурами; *прогностичність мислення* (характеристика відповідає прогностичному мисленню).

Формування та розвиток прогностичного мислення відбувається в ході виконання різноманітних математичних завдань, серед яких виділимо завдання з параметрами. Оберемо завдання з підручника [4].

<u>Завдання 1.</u> Визначте кількість коренів рівняння $cos(x) = a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}\right]$.

Розв'язання

Запропонуємо учням скористатися графіком функції.

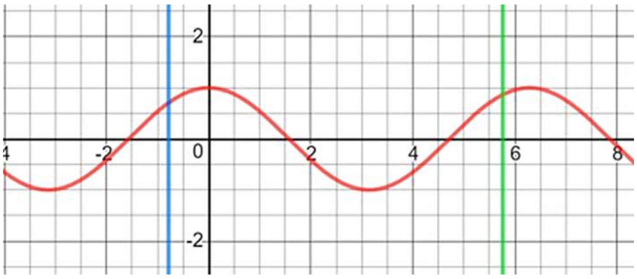

Рис. 1

Перевіримо кількість коренів коли $a > 1, a < (-1)$ (рис. 2).
Коренів не має.

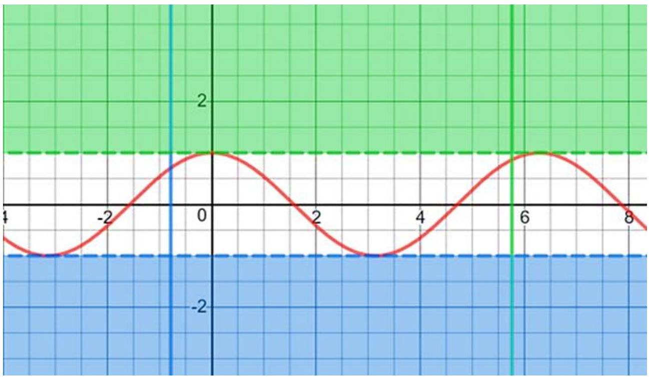

Рис. 2

Перевіримо кількість коренів на проміжку, якщо $a = 1$ або $a = -1$.
Система має лише 1 корінь.

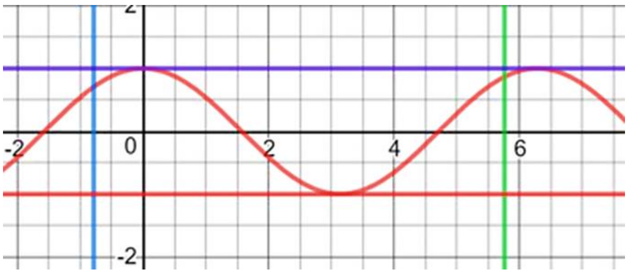

Рис. 3

При a є $[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$ система на проміжку має 2 корені (рис. 4).

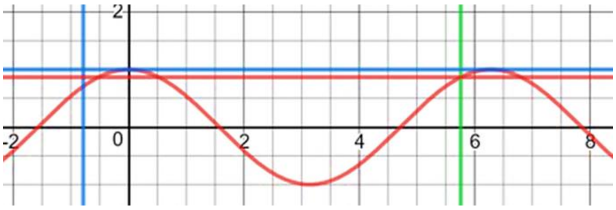

Рис. 4

При a є $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$ система має 3 корені.

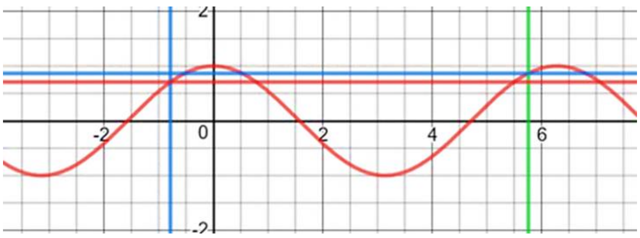

Рис. 5

При $a \in (-1; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ система має 2 корені.

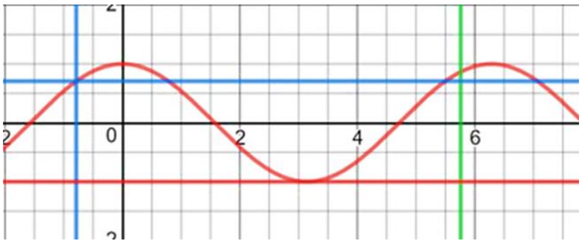

Рис. 6

Узагальнимо етапи на одному рисунку (рис. 7).

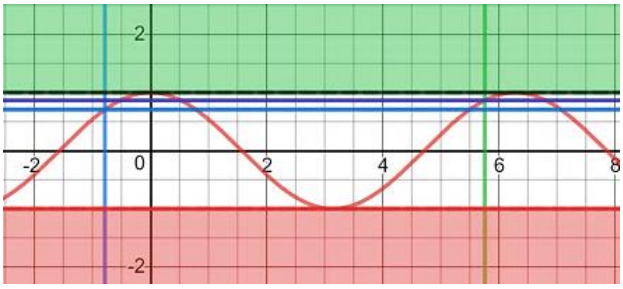

Рис. 7

Відповідь: 1) $a \in (-\infty; -1\ ) \ \cup (1; +\infty)$ – коренів не має;
2) $a = 1$ або $a = -1$ – один корінь;
3) $a \in (-1; \frac{\sqrt{2}}{2}] \ \cup [\frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$ – два кореня;
4) $a \in (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$ – три кореня.

Завдання на розвиток прогностичного мислення.

1. Як зміниться відповідь, якщо змінити проміжок (запропонувати варіанти, для яких кількість коренів зменшиться, і такі, для яких вона збільшиться).
2. Запропонувати проміжок, для якого при будь-якому значенні параметра *a* рівняння буде мати лише один корінь.
3. Чи можна запропонувати такий проміжок, для якого при будь-якому значенні параметра *a* рівняння не буде мати коренів?

Завдання 2. При яких значеннях параметра а рівняння $(\text{x} - \text{a})(tg\ x + 1) = 0$ на проміжку $\left[-\ \frac{\pi}{2}; 0\right)$ має єдиний корінь ?

Методичний коментар

Обговорюємо з учнями, що добуток дорівнює нулю, якщо один із множників дорівнює нулю, тому $x = a$ або $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n\epsilon Z$.(*) Для яких n рівняння буде мати один корінь.

Завдання на розвиток прогностичного мислення.

1. *x* належить проміжку$\left[-\ \frac{\pi}{2}; 0\right)$. Чи необхідно окремо визначати ОДЗ?
2. *x* належить проміжку$\left[-\ \frac{\pi}{2}; 0\right)$. Чи необхідно враховувати, що *n* у (*) є цілим?

Завдань на розвиток прогностичного мислення у явному вигляді практично немає у підручниках математики.

Тому важливо запропонувати студентам-майбутнім вчителям математики на заняттях з методики навчання математики підготувати до завдань з діючих підручників математики завдання-запитання, спрямовані на розвиток прогностичного мислення.

Завдання 3. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння

$$(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2})(sin\ x-a)=0.$$

Завдання на розвиток прогностичного мислення.

1. Не розв'язуючи рівняння, зробіть прогноз, чи існує таке значення *a,* що рівняння не має коренів?
2. Чи можна подати відповідь до завдання у такому вигляді:

$$\text{якщо } a\ =\ -1 \text{ або } a\ =-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ або } a=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ або } a\ =\ 1,$$

$$\text{то рівняння має 3 корені; якщо } a\ <\ -1,$$

$$\text{або } a\ >1 \text{ то 2 корені; якщо } a \text{ є } (-1;1), \text{то 4 корені}.$$

Завдання 4. При яких значеннях параметра a рівняння $(a^2\ -\ 1)\,sin\,x\ =\ a\ +\ 1$ має розв'язки***?***

Завдання на розвиток прогностичного мислення.

1. Чи накладаються обмеження на значення *a*?
2. Чи існують такі значення *a*, при яких розв'язком рівняння є будь-яке дійсне число?
3. Що зміниться, якщо замість *sinx* записати *cosx*? *tgx*? *ctgx?*

Завдання 5. При яких значеннях *a* рівняння $(x\ +\ a)(cosx\ -\ \frac{\sqrt{2}}{2})=0$ має 1 корінь на проміжку $[-\ \frac{\pi}{2};0]$?

Завдання на розвиток прогностичного мислення.

1. Чи існують такі значення *a*, при яких розв'язком рівняння є будь-яке дійсне число?
2. Що зміниться, якщо замість *cosx* записати *sinx*? *tgx*? *ctgx?*
3. Як зміниться рисунок до задачі (рис. 8), якщо замість *cosx* записати *sinx*? *tgx*? *ctgx?*

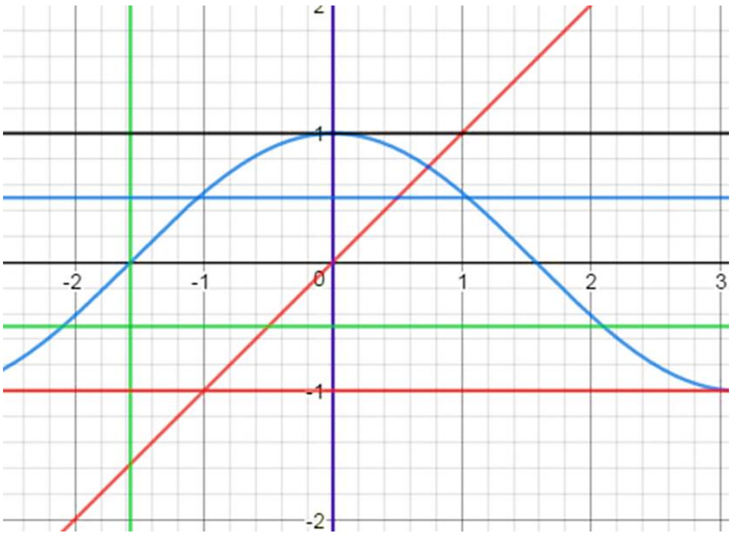

Рис. 8

Завдання 6. При яких значеннях параметра *a* рівняння $\frac{\sin x-a}{\sqrt{\sin x-0{,}5}}=0$ має розв'язки?

Завдання на розвиток прогностичного мислення.

1. Чи існують такі значення *a*, при яких розв'язком рівняння є будь-яке дійсне число?
2. Що зміниться, якщо замість якщо замість *sinx* записати *cosx*? *tgx*? *ctgx?*

Нами було проведено експеримент із залученням старшокласників (довготривалий – О. Г. Бардакова, гімназія №1, м. Суми; 2015/2016 навчальний рік (курси для учнів 10-11 класів при СумДУ, школа №6 м. Суми – О. С. Чашечникова), студентів лісотехнічного коледжу (2014 / 2015-2018 / 2019 навчальні роки) та студентів-майбутніх вчителів математики (2013 / 2014-2017 / 2018 навчальні роки). Учні та студенти розв'язували завдання з параметрами, для яких пропонувалися також додаткові завдання на розвиток прогностичного мислення. Студенти – майбутні вчителі математики також отримували завдання на створення завдань-запитань до конкретних задач (курси «Елементарна математика», «Методика навчання математики», «Вибрані питання методики навчання математики»).

Динаміку розвитку прогностичного мислення оцінювали:

1) за спостереженнями за процесом виконання завдань (рис. 9 – школярі, рис. 10а – студенти коледжу, рис. 10б – студенти Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка, майбутні вчителі математики);
2) за оперативністю виконання письмових робіт відповідного характеру та обраними шляхами розв'язування (рис. 11 – школярі, рис. 12а – студенти коледжу, рис. 12б – майбутні вчителі математики);
3) використовуючи діагностику Л. А. Регуш [5] (рис. 13 – школярі, рис. 14а – студенти коледжу, рис. 14б – студенти, майбутні вчителі математики).

Результати проілюструємо таблицями (приріст кількості учнів з певним рівнем розвитку прогностичного мислення у відсотках, табл. 1-4) та діаграмами (рис. 9-14).

Динаміка розвитку за результатами спостережень (школярі)

Таблиця 1.

Динаміка розвитку прогностичного мислення за результатами спостережень

	Низький рівень	Середній рівень	Високий рівень
Старшокласники	**- 4**	**+ 4**	**+ 12**
Студенти коледжу	**- 6**	**- 3**	**+ 9**
Майбутні вчителі математики	**- 12**	**+6**	**+6**

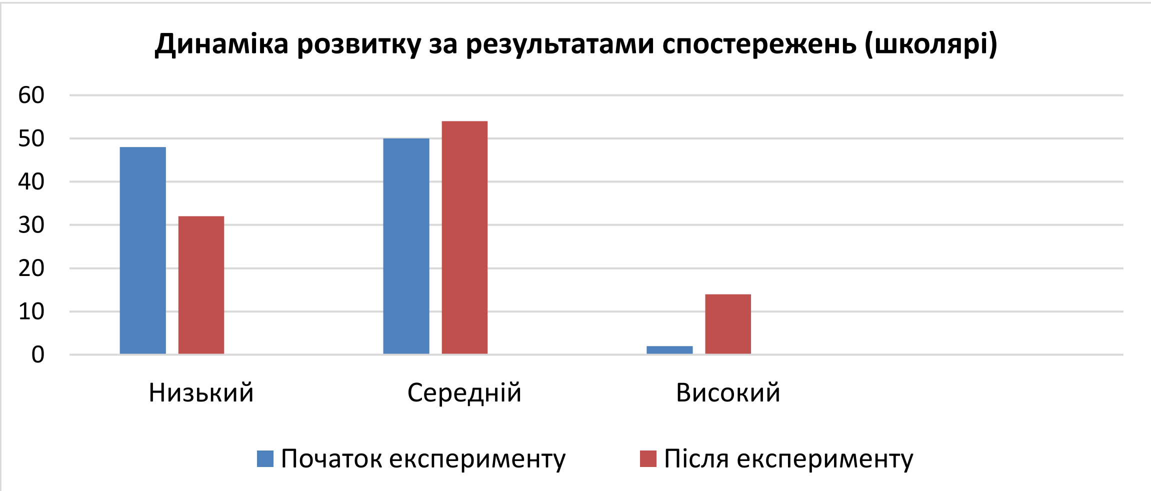

Рис. 9

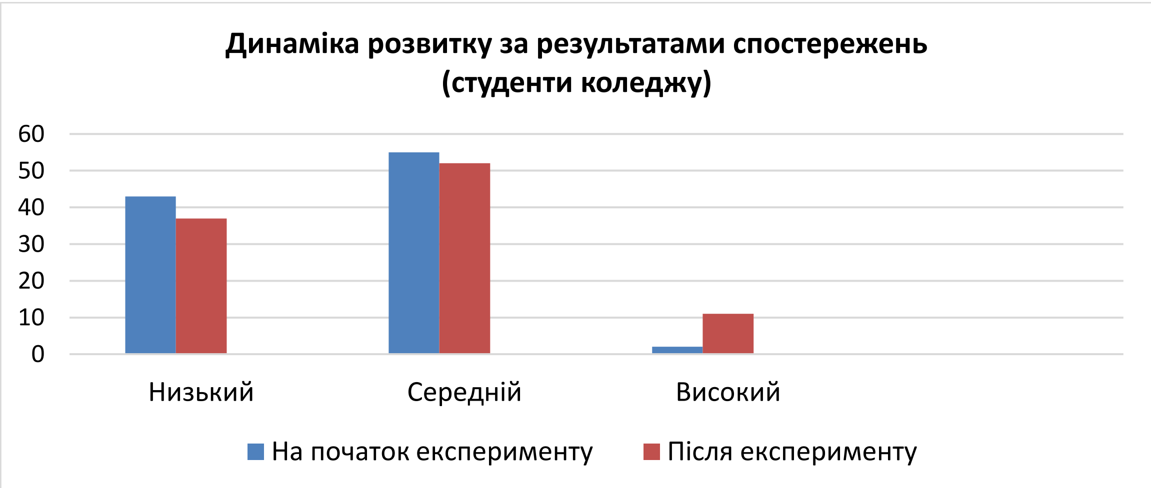

Рис. 10а

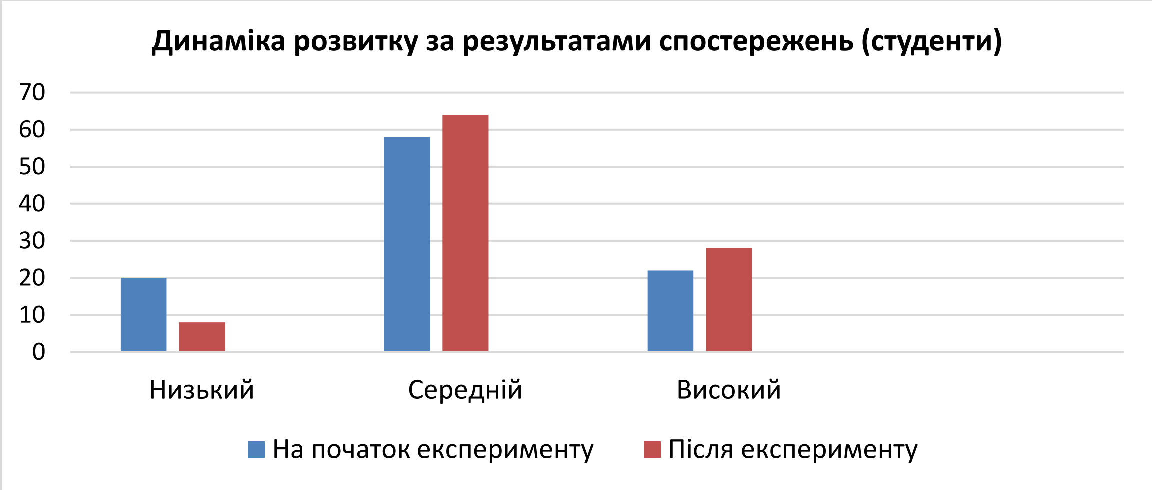

Рис. 10 б

Таблиця 2.

Динаміка розвитку прогностичного мислення за результатами контрольних зрізів

	Низький рівень	Середній рівень	Високий рівень
Старшокласники	**- 4**	**+ 4**	**+ 12**
Студенти коледжу	**- 6**	**- 3**	**+ 9**
Майбутні вчителі математики	**- 12**	**+6**	**+6**

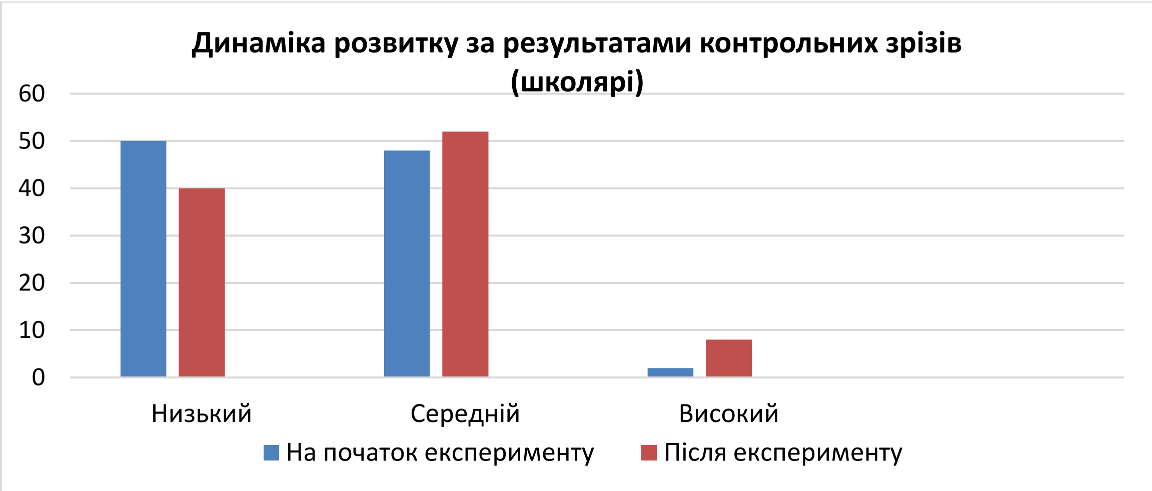

Рис. 11

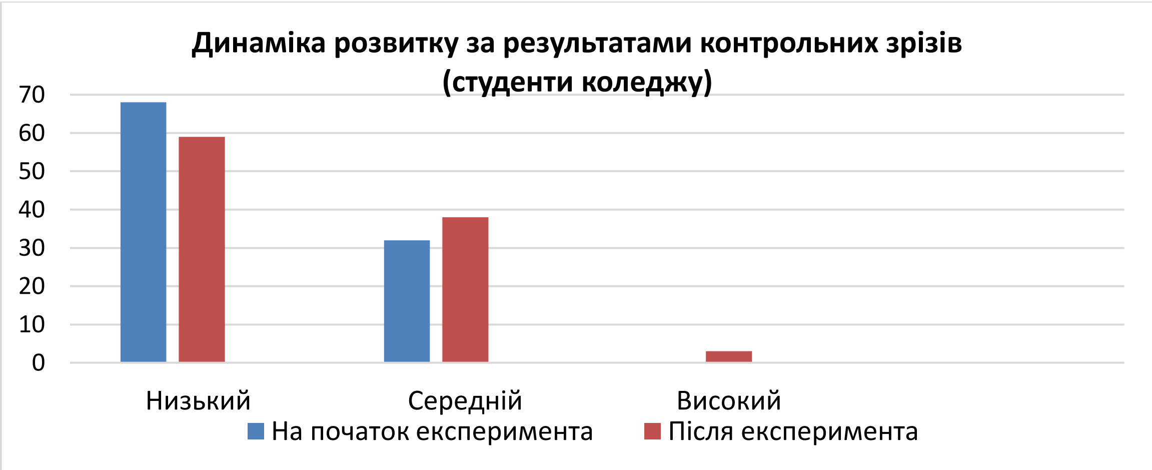

Рис. 12а

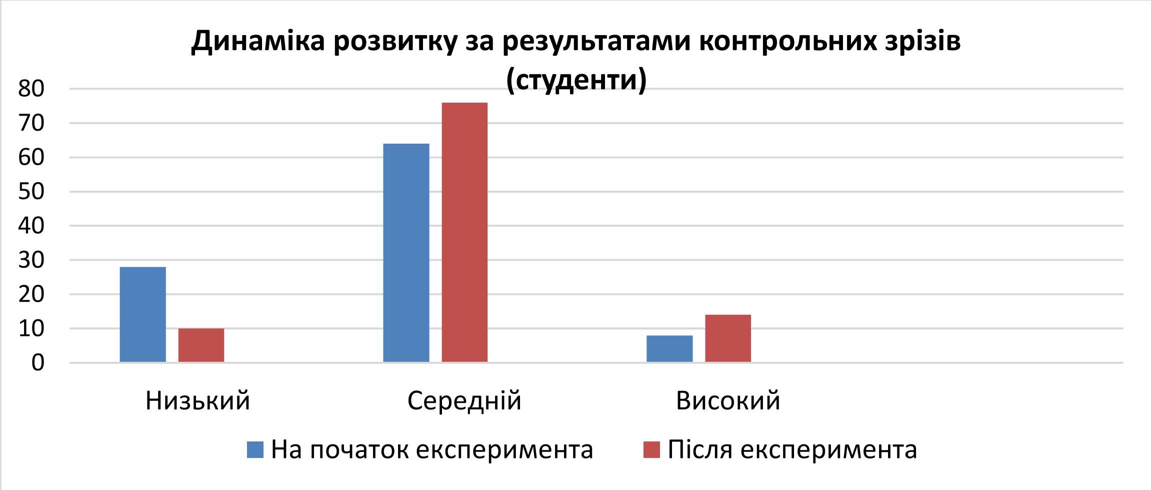

Рис. 12б

Таблиця 3.

Динаміка розвитку прогностичного мислення за результатами контрольних зрізів

	Низький рівень	Середній рівень	Високий рівень
Старшокласники	**- 10**	**+ 4**	**+ 6**
Студенти коледжу	**- 9**	**+ 6**	**+ 3**
Майбутні вчителі математики	**- 18**	**+12**	**+6**

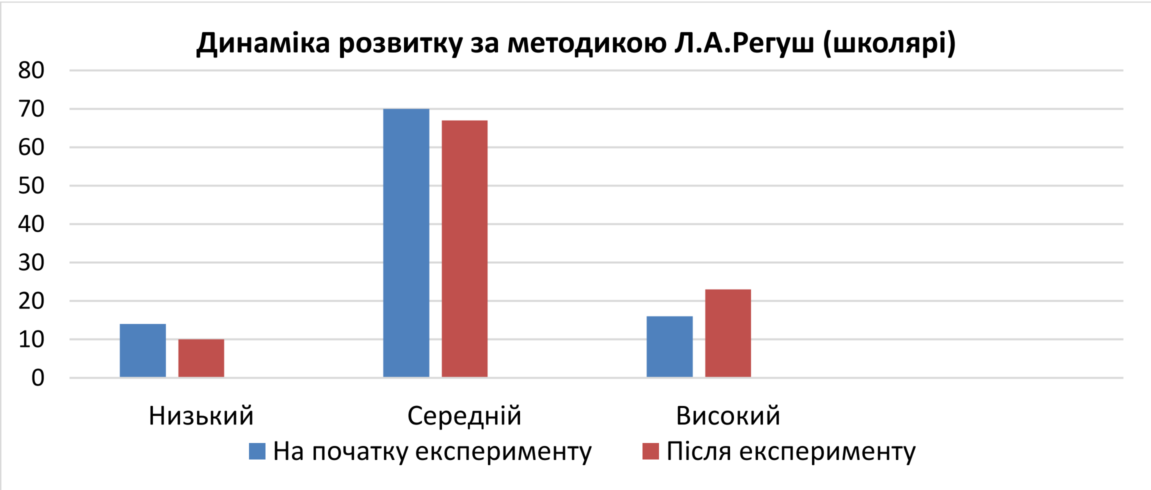

Рис. 13

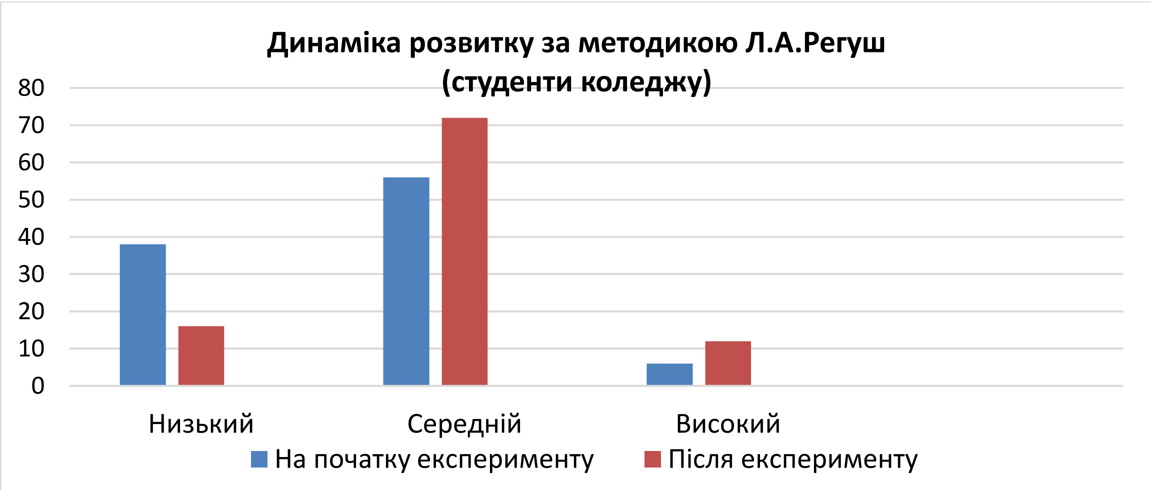

Рис. 14а

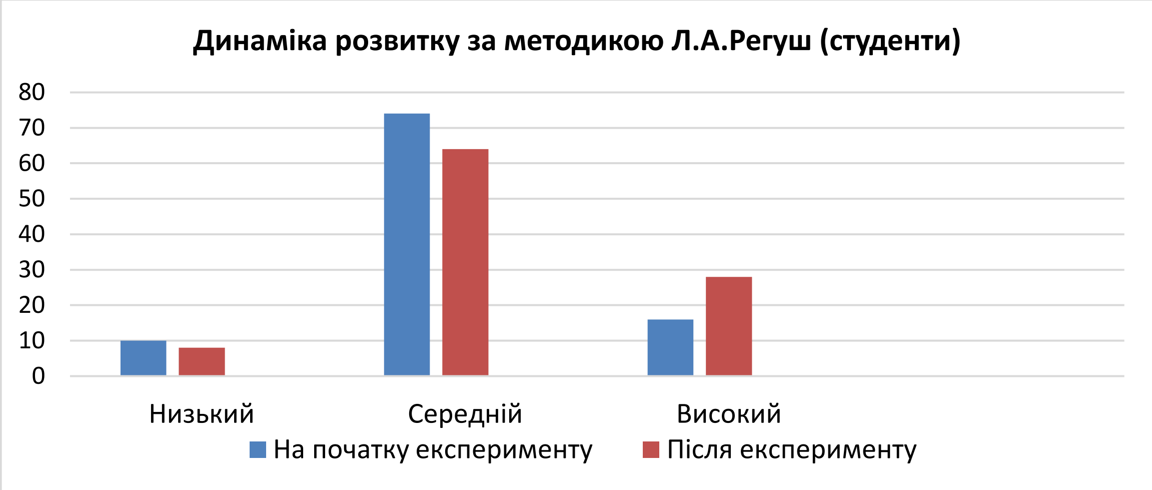

Рис. 14б

Таблиця 4.

Динаміка розвитку прогностичного мислення за методикою Л. А. Регуш

	Низький рівень	Середній рівень	Високий рівень
Старшокласники	**- 4**	**- 3**	**+ 7**
Студенти коледжу	**- 22**	**+16**	**+ 6**
Майбутні вчителі математики	**- 2**	**- 106**	**+ 12**

Проведений експеримент свідчить про позитивну динаміку у розвитку прогностичного мислення як учнів, так і школярів. Причому, зовнішньо найкраще проявилося підвищення рівня розвитку прогностичного мислення в учнів (+16% збільшення учнів з середнім та високим рівнем наприкінці експериментального навчання) та майбутніх вчителів математики (+12%). В ході виконання відповідних контрольних завдань найбільше зростання – у майбутніх вчителів математики (+18%), а за методикою Л. А. Регуш, де рівень саме знань та вмінь з теми не так істотно впливає на результати, – у студентів коледжу (+22%).

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Результати проведеного експериментального навчання свідчать, що виконання завдань з параметрами сприяє позитивній динаміці у процесі розвитку прогностичного мислення учнів / студентів (майбутніх вчителів математики). Специфіка розв’язування тригонометричних рівнянь (багатоплановість аналізу, різноманітність шляхів виконання та форм представлення розв’язків) визначає більш помітні позитивні зміни у рівні розвитку прогностичного мислення учнів / студентів порівняно з експериментальним навчанням, пов’язаним, наприклад, з розв’язуванням показникових рівнянь (більш детально описано нами у [8]). Подальшого дослідження потребує питання створення більш точних маркерів для визначення рівня розвитку прогностичного мислення учнів / студентів саме у процесі навчання математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ/ REFERENCES

1. Гусинский, Э. Н. (1994). Построение теории образования на основе междисциплинарного системного подхода. М. Школа. (Gusinsky, E. N. (1994). Building a theory of education based on an interdisciplinary systems approach. M. School.)
2. Дорофеев, Г. В. (1990). О принципах отбора содержания школьного математического образования. Математика в школе, 6, 2-5. (Dorofeev, G. V. (1990). On the principles of selecting the content of school mathematical education. Mathematics at school, 6, 2-5)
3. Кочнева, Е. М. (2016). Сопоставление понятий проект, проектирование и проектировочная деятельность: исторический, этимологический и гносеологический аспекты. Онтология проектирования, 6, 1(19), 81-94. (Kochneva, E. M. (2016). Comparison of the concepts of design, engineering and design activities: historical,

etymological and epistemological aspects. Design Ontology, .6, 1 (19), 81-94.)
4. Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2010). Алгебра і початки аналізу, Харків: «Гімназія» (Merzlyak, A. G., Nomirovsky, D. A., Polonsky, V. B., Yakir, M. S. (2010). Algebra i cobs analysis, Kharkiv: "Gymnasium".)
5. Регуш, Л. А. (2003). Психология прогнозирования: успехи в познании будущего. СПб.: Речь. (Regush, L. A. (2003). Forecasting Psychology: Advances in Knowing the Future. SP .: Rech.)
6. Чашечникова, О. С. (2004). Система компонентів творчого мислення, що можуть діагностуватися в процесі навчання математики. Дидактика математики : проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. 22, 81–87. (Chashechnikova, O. S. (2004). The system of components in creative creativity that can be diagnosed in the process of starting up mathematics. Didactics of mathematics: problems and achievements: the international science robot roster. 22, 81–87.)
7. Чашечникова, О. С. (2011). Теоретико-методичні основи формування і розвитку творчого мислення учнів в умовах диференційованого навчання математики (дис. … доктора пед. наук : 13.00.02). Суми. (Chashechnikova, O. S. (2011). Theoretical and methodological bases for formation and development of the creative thinking in differentiated teaching of mathematics. (DSc thesis). Cherkasy.).
8. Чашечникова, О. С., Чухрай, З. Б., Глазько, Л. Ю. (2018). Шляхи організації навчально-пізнавальної діяльності учнів, спрямованої на розвиток їх дослідницьких здібностей, через навчання розв’язувати завдання з параметрами. Актуальні питання природничо-математичної освіти, 1 (11), 124–132. (Chashechnikova, O. S., Chukhrai, Z. B., Glazko, L. Yu. (2018). The ways of organizing the start-up of the familiarity of the studies, which are straightened out to the development of their previous health care, through the beginning of the development of the parameters. Actual nutrition of natural-mathematical education, 1 (11), 124–132.)
9. Russell, L. Ackoff, Jason, Magidson, Herbert, J. Addison. Idealized Design: How то Dissolve Tomorrow’s Crisis… Today Creating an Organization’s Future. – Wharton School Publishing, 2006. URL: https://gtmarket.u/library/ basis/7079
10. http://www.tpinauka.u/2017/07/Kubarskaya.pdf

Чашечникова О. С., Бардакова Е. Г., Чухрай З. Б. Обучение учащихся решению задач с параметрами как средство развития прогностического мышления. Тригонометрические уравнения с параметрами.

В статье рассмотрена проблема развития прогностического мышления. На основе исследований, в которых идеализированное проектирование рассматривается как лучший подход для преодоления кризиса путем осуществления радикальных изменений, сделан вывод о необходимости развития прогностического мышления в процессе обучения всех учащихся / студентов. Рассматривается сущность идеализированного проектирования в контексте обучения математике. Как путь развития прогностического мышления рассматривается обучения учащихся / студентов решать задачи с параметрами. Предлагается для учащихся и студентов колледжей дополнять задачи с параметрами заданиями на развитие прогностического мышления. Будущим учителям математики также предлагается для конкретных задач с параметрами создавать задания на развитие прогностического мышления. Предлагаются результаты проведенного эксперимента. В эксперименте принимали участие ученики старших классов, студенты колледжей, студенты педагогического университета. Динамику развития прогностического мышления оценивали по наблюдениям за процессом выполнения заданий; по оперативности выполнения письменных работ соответствующего характера и избранными путями решения; используя диагностику Л. А. Регуш. Проведенный эксперимент свидетельствует о положительной динамике в развитии прогностического мышления как учеников, так и студентов. Внешне лучше проявилось повышение уровня развития прогностического мышления у учащихся и будущих учителей математики; в ходе выполнения соответствующих контрольных заданий

- у будущих учителей математики; по методике Л. А. Регуш, где уровень знаний и умений по теме не так существенно влияет на результаты, - у студентов колледжа. Выяснено: специфика решения тригонометрических уравнений определяет более заметны положительные изменения в уровне развития прогностического мышления учащихся / студентов по сравнению с экспериментальным обучением, связанным, например, с решением показательных уравнений. Указано: дальнейшего исследования требует вопрос создания более точных маркеров для определения уровня развития прогностического мышления учащихся / студентов именно в процессе обучения математике.

Ключевые слова: *обучение математике, исследовательские способности, задания с параметрами.*

Chashechnikova O., Bardakova O., Chukhrai Z. Teaching students to solve problems with parameters as a means of developing prognostic thinking. Trigonometric equations with parameters.

The article deals with the problem of prognostic thinking development. Based on studies in which idealized design is seen as the best approach to overcome the crisis through radical change, it is concluded that the development of prognostic thinking in the learning process of all pupils / students is necessary. The essence of idealized design in the context of mathematics teaching is considered. Teaching pupils / students to solve problems with parameters is considered as a path for the development of prognostic thinking. It is suggested for pupils and college students to supplement problem tasks with parameters with tasks for the development of prognostic thinking. Future mathematics teachers are also proposed to create prognostic thinking development tasks for specific tasks with parameters. The results of the experiment are offered. High school students, college students, students of the Pedagogical University were involved in the experiment. The dynamics of prognostic thinking development was assessed by observing the process of completing tasks; the prompt execution of the appropriate written works and the chosen ways of solving; using the diagnostics of L. A. Regush. The experiment testifies to the positive dynamics in the development of prognostic thinking of both high school students and students. Externally, the better level of development of prognostic thinking was manifested among high school students and future teachers of Mathematics; while completing the relevant control tasks - among future teachers of Mathematics; according to the L. A. Regush method, where the level of knowledge and skills on the subject does not so significantly affect the results, - among college students. It is found out that the specificity of the trigonometric equation solution determines more noticeable positive changes in the level of development of prognostic thinking of pupils / students compared to experimental learning related to, for example, the solving exponential equations. It is stated that further research requires the creation of more accurate markers for determining the level of prognostic thinking of pupils / students precisely in the process of teaching mathematics.

Key words*: teaching mathematics, prognostic thinking, trigonometric equations, task with parameters.*