Юлія Бамбенкова
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Науковий керівник – Ф.М. Лиман

ЗАСТОСУВАННЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

1. Використання ланцюгових дробів до розв’язування діофантових рівнянь

Історія введення й застосування ланцюгових дробів починається зі способу добування арифметичних квадратних коренів, що застосовувався в стародавньому Вавилоні. Розв’язуванням невизначених рівнянь першого степеня в цілих числах займалися Діофант, індійські вчені, а також учені народів Середньої Азії. Деякі такі рівняння з двома і трьома невідомими з’явилися у зв’язку з проблемами, що виникли в астрономії, наприклад у зв’язку з проблемою визначення періодичності повторення небесних явищ. Після Баше де Мезіріака в VII і VIII ст. різні правила для розв’язання невизначеного рівняння першого степеня з двома невідомими в цілих числах давали відомі математики Роль, Ейлер та інші.

Означення. *Діофантовим рівнянням називають алгебраїчне рівняння з цілими коефіцієнтами, розв’язки якого треба знайти у цілих числах.*

Загального способу розв’язання діофантових рівнянь не існує. Це було встановлено у 1972 році Матіясевичем, який дав негативну відповідь на відому 10-у проблему Гільберта. Однак існує велике число конкретних способів розв’язання тих або інших діофантових рівнянь. Розглянемо деякі з них.

Нехай
$$ax + by = c. \tag{1}$$

Якщо $a \neq 0, b \neq 0$, то рівняння (1) неозначене і має безліч розв’язків. Загальний розв’язок цього рівняння:
$$x = \frac{c - by}{a} \quad \text{або} \quad y = \frac{c - ax}{b}.$$

Припустимо, що у рівнянні (1) $a, b, c \in Z$. Необхідно знайти цілі розв’язки рівняння (1), тобто розв’язки, які складаються з цілих чисел.

Нехай d – найбільший спільний дільник чисел a, b : $d = (a, b)$. Якщо вільний член рівняння (1) c не ділиться на $d = (a, b)$, то рівняння не має цілих розв’язків.

Якщо $c \vdots d = (a, b)$, то поділивши обидві частини рівняння (1) на $d = (a, b)$, отримаємо рівняння, рівносильне даному, коефіцієнти якого є взаємно прості числа.

Теорема 1. [1] *Якщо* $(x_1; y_1)$ *– пара цілих чисел, що задовольняє рівняння (1), де* $(a, b) = 1$, *то загальний розв’язок цього рівняння в цілих числах можна подати у вигляді*
$$\begin{cases} x = x_1 + bt, \\ y = y_1 - at. \end{cases} \quad t \in Z.$$

Доведення. За умовою теореми маємо $ax_1 + by_1 = c$. Почленно віднімемо рівність $ax_1 + by_1 = c$ від рівності (1.15). Отримаємо:
$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

Звідси
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{a}{b}.$$

Оскільки, за умовою $(a,b)=1$, то $\begin{cases} y-y_1=-at, \\ x-x_1=bt. \end{cases}$ $t\in Z$

Маємо

$$\begin{cases} x=x_1+bt, \\ y=y_1-at. \end{cases}$$

■

Отже, розв'язки рівняння (1) в цілих числах зводяться до знаходження окремого розв'язку цього рівняння.

Теорема 2. [3] *Загальний розв'язок у цілих числах рівняння (1), де $a,b,c\in Z$ і $(a,b)=1$, можна подати у вигляді:*

$$\begin{cases} x=(-1)^{n-1}\cdot c\cdot q_{n-1}+bt, \\ y=(-1)^{n}\cdot c\cdot p_{n-1}-at, \end{cases}$$

де $t\in Z, p_{n-1}, q_{n-1}$ – чисельник і знаменник ланцюгового дробу $\frac{a}{b}$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння у цілих числах

$$-117x+343y=119$$

Розв'язання. $117(-x)+343y=119$

$$\frac{a}{b}=\frac{117}{343},$$

$$\left[\frac{117}{343}\right]=0.$$

Використаємо алгоритм Евкліда:

$$343:117=2\ (\text{ост.}109);$$
$$117:109=1\ (\text{ост.}8);$$
$$109:8=13\ (\text{ост.}5);$$
$$8:5=1\ (\text{ост.}3);$$
$$5:3=1\ (\text{ост.}2);$$
$$3:2=1\ (\text{ост.}1);$$
$$2:1=2\ (\text{ост.}0).$$

$$\frac{117}{343}=[0;2,1,13,1,1,1,2].$$

У даному випадку $n=7$, отримаємо $p_{n-1}=p_6=44, q_{n-1}=q_6=129$

$$\frac{p_6}{q_6}=\frac{117}{343}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}}=\frac{44}{129}.$$

Отримані значення підставимо у систему (1.17), отримаємо:

$$\begin{cases} -x_0=(-1)^6\cdot 119\cdot 129+343t, \\ y_0=(-1)^7\cdot 119\cdot 44-117t. \end{cases} \quad t\in Z$$

$$\begin{cases} -x_0=15351+343t, \\ y_0=-5236-117t. \end{cases} \quad t\in Z$$

$$\begin{cases} x_0=-15351-343t, \\ y_0=-5236-117t. \end{cases} \quad t\in Z$$

Ми дістали великі за абсолютною величиною частинні значення x_0, y_0, але з загального розв'язку легко дістати окремі значення для *x і y,* які будуть найменші за абсолютною величиною. Покладемо $t = -45$.

$$\begin{cases} x_1 = -15251 - 343 \cdot (-45) = -15351 + 15435 = 84, \\ y_1 = -5236 - 117 \cdot (-45) = -5236 + 5265 = 29. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 84, \\ y_1 = 29. \end{cases}$$

Загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$\begin{cases} x = 84 + 343t, \\ y = 29 - 117t. \end{cases} \quad t \in Z.$$

Зауважимо, що у даному прикладі можна було б одразу визначити x і y, розклавши дріб $-\frac{117}{343}$ у ланцюговий.

$$\left[-\frac{117}{343}\right] = -1.$$

Використаємо алгоритм Евкліда:

$$343 : 226 = 1\ (\text{ост.} 117);$$
$$226 : 117 = 1\ (\text{ост.} 109);$$
$$117 : 109 = 1\ (\text{ост.} 8);$$
$$109 : 8 = 13\ (\text{ост.} 5);$$
$$8 : 5 = 1\ (\text{ост.} 3);$$
$$5 : 3 = 1\ (\text{ост.} 2);$$
$$3 : 2 = 1\ (\text{ост.} 1);$$
$$2 : 1 = 2\ (\text{ост.} 0).$$

$$-\frac{117}{343} = [-1; 1,1,1,13,1,1,1,2].$$

У даному випадку $n = 8$, отримаємо $p_{n-1} = p_7 = -44, q_{n-1} = q_7 = 129$

$$\frac{p_7}{q_7} = -\frac{117}{343} = -1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{13 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}}}} = -\frac{44}{129}.$$

Отримані значення підставимо у систему, отримаємо:

$$\begin{cases} x_0 = (-1)^7 \cdot 119 \cdot 129 + 343t, \\ y_0 = (-1)^8 \cdot 119 \cdot (-44) + 117t. \end{cases} \quad t \in Z$$

$$\begin{cases} x_0 = -15351 + 343t, \\ y_0 = -5236 + 117t. \end{cases} \quad t \in Z$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 84 + 343t, \\ y = 29 + 117t. \end{cases} \quad t \in Z$

2. Доведення трансцендентності чисел π та e

Сучасна математика в багатьох задачах оперує множиною дійсних чисел, що складається з підмножин раціональних і ірраціональних чисел, тобто з чисел які можна представити у вигляді скінченного алгебраїчного дробу й чисел, які не можна представити у даному вигляді. Особливою підмножиною ірраціональних чисел є трансцендентні числа, тобто такі числа, які не є коренями ніякого многочлена з цілими коефіцієнтами.

Існування і явні побудови дійсних трансцендентних чисел обґрунтував французький учений Ж. Ліувілль на основі поміченого ним факту, що ірраціональні алгебраїчні числа не допускають «дуже сильних» наближень раціональними числами. Французький учений Е.Борель встановив, що «майже всі» ірраціональні числа трансцендентні.

Теорема 3. [2] *Число π трансцендентне.*

Доведення. Припустимо протилежне, що π – алгебраїчне число степеня $v, v \geq 1$. Покладемо $m = v + 1$ і з даним значенням m розглянемо розклад функції $\sin \pi z$ в інтерполяційний ряд Ньютона:

$$\sin \pi z = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_1) \dots (z - z_n).$$

Для коефіцієнтів A_n даного розкладу виконується оцінка зверху, тобто

$$|A_n| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi n \frac{e^{\pi n}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}} = \frac{e^{\pi n + (n+1)\ln 2}}{n^n} < e^{5n} n^{-n}. \qquad (2)$$

З іншого боку, має місце наступна рівність

$$r!\, M^{n-1} A_n = P_n(\pi),$$

де $P_n(x)$ – многочлен з цілими раціональними коефіцієнтами степеня k і висоти H, де

$$k \leq r, H \leq r!\,(2M)^n. \qquad (3)$$

Нехай c, c_1, c_2 додатні константи, які залежать лише від числа v.

За теоремою про існування постійної константи $c > 0$, в силу припущення, що π – алгебраїчне число степеня v, виконується або рівність $P_n(\pi) = 0$, або нерівність

$$|P_n(\pi)| \geq \frac{c^k}{H^{v-1}} = e^{k \ln c - (v-1) \ln H}. \qquad (4)$$

Якщо $P_n(\pi) \neq 0$, то з нерівностей (2) та (3) отримаємо оцінку

$$|P_n(\pi)| \geq y^{-|\ln c| \kappa - (v-1)(r \ln r + n \ln(2M))}. \qquad (5)$$

Але з умови $r_1 - 1 \leq r_m \leq r_{m-1} \leq \dots . \leq r_1 \leq \frac{n}{m}$ маємо, що

$$r = \max_{1 \leq k \leq m} r_k \leq \frac{n}{m},$$

а $m = v + 1$. Тому з нерівності (4) слідує оцінка

$$|P_n(\pi)| > e^{-\frac{m-2}{m} n \ln n - c_1 n}. \qquad (5)$$

З рівності $r!\, M^{n-1} A_n = P_n(\pi)$ і нерівності (2) отримаємо, що

$$|P_n(\pi)| < e^{5n - n \ln n + (n-1) \ln M + r \ln r} < e^{-\frac{m-1}{m} n \ln n + c_2 n}. \qquad (6)$$

Нерівності (5) та (6) при достатньо великому *n* суперечливі. Значить, існує число n_0 таке, що $A_n = 0$ при всіх $n \geq n_0$, а функція $\sin \pi z$ повинна бути многочленом. Але вона не є многочленом, тому що має нескінченне число нулів. Отже, отримали протиріччя, тобто π – трансцендентне число.

■

Теорема 4. [2] *Число e трансцендентне.*

Доведення. Припустимо протилежне, що e – алгебраїчне число степеня *m*. Тоді виконується рівність

$$a_m e^m + \dots + a_1 e + a_0 = 0, a_0 \neq 0, \tag{7}$$

де $a_0, a_1, \dots, a_m$ – цілі раціональні числа.

Розглянемо тотожність Ерміта

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}((x-1)\dots(x-m))^n, \tag{*}$$

де *n* – достатньо велике натуральне число. Складемо рівність

$$F(0)e^k - F(k) = e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt$$

для значень $k = 0,1, \dots, m$, помноживши їх відповідно на a_k. Так як виконується рівність (7), то в результаті отримаємо, що

$$-\sum_{k=0}^{m} a_k F(k) = \sum_{k=0}^{m} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt. \tag{8}$$

Покажемо, що при деякому достатньо великому *n* ліва частина рівності (8) буде відмінна від нуля цілим числом, а його права частина за абсолютною величиною менше 1. Тоді ця рівність буде суперечливою, і теорема буде доведена.

Так як многочлен $f(x)$ має число 0 коренем кратності (*n-1*), а числа $1, \dots, m$ – коренями кратності *n,* то

$$f^{(l)}(0) = 0, l = 0,1, \dots, n-2, \tag{9}$$

$$f^{(n-1)}(0) = (-1)^{mn}(m!)^n \tag{10}$$

$$f^{(l)}(k) = 0, \quad l = 0,1, \dots n-1, \quad k = 1, \dots, m. \tag{11}$$

За лемою коефіцієнти похідної порядку *l* многочлена $x^{n-1}((x - -1)\dots(x-m))^n$ є цілі числа, які діляться на $l!$. Отже, всі похідні $f^{(l)}(k)$ при $l \geq n$мають цілі коефіцієнти, що діляться на число *n*.

Тому з рівностей (9) та (10) отримаємо, що

$$F(0) = \sum_{l=n-1}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(0) = (-1)^{mn}(m!)^n + nA, A \in Z, \tag{12}$$

а з рівності (11) маємо, що

$$F(k) = \sum_{l=n}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(k) = nB_k, B_k \in Z, k = 1, \dots, m. \tag{13}$$

Нехай число *n* задовольняє умовам

$$(n, m!) = 1, n > |a_0|. \tag{14}$$

Тоді з рівностей (12) та (13) маємо, що всі доданки в лівій частині рівності (8) є цілими числами, при чому $a_0 F(0)$ не ділиться на *n,* а всі інші доданки $a_k F(k)$ діляться на *n.* Звідси слідує, що ліва частина рівності (8) відмінне від 0 ціле число і, значить,

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_k F(k) \right| \geq 1. \tag{15}$$

Оцінимо праву частину рівності (8). На відрізку $0 \leq x \leq m$ кожний співмножник $(x-k), 0 \leq k \leq m$, що входить в добуток (*), не перевищує по модулю числа *m.* Тобто, справедлива наступна оцінка

$$|f(x)| < \frac{m^{(m+1)n-1}}{(n-1)!}, \qquad 0 \le x \le m,$$

а тоді

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt\right| < \frac{m^{(m+1)n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{m}|a_k|e^k\int_0^k e^{-t}dt < \frac{m^{(m+1)n}}{(n-1)!}e^m\sum_{k=0}^{m}|a_k|$$

$$= c_0\frac{c^n}{(n-1)!}, \tag{16}$$

де константи c_0 і c не залежать від числа n.

З рівності (8), умов (14-16) отримаємо, що

$$1 \le \left|\sum_{k=0}^{m} a_k F(k)\right| < c_0\frac{c^n}{(n-1)!}. \tag{17}$$

Права частина нерівності (17) прямує до 0 при $n \to \infty$. Виберемо число n так, щоб виконувалась умова (14) і нерівність

$$c_0\frac{c^n}{(n-1)!} < 1.$$

Тоді нерівність (17) суперечлива, і теорема доведена. ■

Список використаних джерел

1. Бородін О. І. Теорія чисел. / О. І. Бородін. – К.: Вища школа, 1970. — 275 с.
2. Галочкин А. И. Введение в теорию чисел. / А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А.Б.Шидловский. – М.: Издательство Московского университета, 1984. – 152 с.
3. Окунев Л. Я. Краткий курс теории чисел. / Л. Я. Окунев. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1956. — 239 с.

Анотація. Бамбенкова Ю. Застосування ланцюгових дробів.

У статті розглянуто означення діофантових рівнянь та використання ланцюгових дробів до їх розв'язання. Також розглянули теореми на доведення трансцендентності деяких чисел.

Ключові слова: *діофантові рівняння, загальний розв'язок, ланцюгові дроби, алгебраїчні та трансцендентні числа.*

Summary. Bambenkova J. The use of continued fractions.

The article considers the definition of Diophantine equations and using continued fractions to solve them. Also considered in theorem proving transcendence of of certain numbers.

Keywords: *Diophantine equations, general solution, continued fractions, algebraic and transcendental numbers.*