*use of Ceva and Menelaus theorems. The survey was designed for two groups of teachers: separately for those teachers who do not teach these named theorems (the first group) and separately for those teachers who teach students this material (the second group).*

*An analysis of the answers of the surveyed teachers from the first group revealed that the main reasons why teachers do not offer students to consider the Ceva and Menelaus theorems are: difficulty of understanding the material by students – 60%; lack of time during lessons – 53.3%; complexity of theoretical material – 46.7%. For the second group, the distribution of answers to a similar question was as follows: the most difficult for 86% of respondents was creating a methodologically sound system of tasks for consolidation (due to the lack of necessary tasks in the textbook from the teacher's point of view); next for 57% of respondents was the theoretical material'scomplexity; and the third for 43% was the difficulty of understanding the material by students. That is, for teachers, after creating a system of tasks and applying it, students' misunderstanding of the material (from the teacher's point of view) becomes somewhat weaker.*

*The survey asked questions about the appropriateness of using these theorems in classes, finding out why students don't understand the material, using auxiliary sources to create a system of tasks, etc.*

*The respondents of the first group were also asked to express their wishes regarding the creation of opportunities to teach students the Ceva and Menelaus theorems. They noted that it would be good to have: the ability to use a ready-made system of tasks for consolidation, including solutions – 80%; the availability of ready-made tasks for controlling knowledge (including theoretical knowledge) – 60%; assistance in working out theoretical material – 27%.*

*So, summarizing the results of the survey, we can say that the main problem in teaching students the Ceva and Menelaus theorems' material is that teachers have little time to create a methodologically sound system of tasks, including for knowledge control. That is, despite the presence of this material in textbooks, the system of tasks available there does not meet the needs of teachers in this regard. In addition, the underdeveloped spatial imagination of modern students and their prejudiced attitude toward geometry become serious obstacles to mastering the material and applying it in the future.*

***Key words:*** *teaching geometry, classes with an advanced level of mathematics, Ceva theorem, Menelaus theorem.*

**УДК 372.851**
**DOI 10.5281/zenodo.12190824**

**М. В. Працьовитий**
ORCID ID 0000-0001-6130-9413
**Н. С. Правіцка**
ORCID ID 0009-0004-7651-9105
Український державний університет
імені Михайла Драгоманова

## МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ – ОДИН З ОСНОВНИХ МЕТОДІВ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

*Не завжди у навчальній літературі автори дотримуються загальноприйнятих у науці термінів, означень та позначень, що іноді приводить до непорозумінь, спотворення наукової істини або суперечностей. Це стосується і елементів теорії геометричних перетворень площини та простору (рухів і перетворень подібності) у шкільному курсі математики. Аналіз змісту шкільних підручників (діючих та бувших) змушує переусвідомлювати мету, завдання, ресурс засобів і уявний кінцевий результат курсу навчання та констатувати, що виклад теоретичного матеріалу має бути суттєво вдосконаленим, а добірка задач істотно збалансованою. У роботі обговорюється це коло питань на основі аналізу змісту шкільних підручників. Ґрунтуючись на виявлених логічних,* *методологічних та методичні прогалинах шкільного курсу геометрії стосовно вивчення геометричних перетворень, ми пропонуємо шляхи вдосконалення викладу теоретичного матеріалу, його супроводу прикладами та задачами. У роботі розглядаються задачі, які ефектно розв'язуються методом геометричних перетворень (метричні, афінні, позиційні задачі; задачі на доведення, побудову та дослідження, включаючи оптимізаційні). Вони якісно виконують дидактичні та мотиваційні функції навчання. Вважаємо, що задачний матеріал має бути більш акцентовано спрямованим на застосування.*

*Метод геометричних перетворень є потужним інструментом розв'язування задач і дослідження геометричних об'єктів. На жаль, рафінованого формулювання його суті у шкільних підручниках немає (це можна робити на уроках узагальнення та систематизації). Вдосконалення навчального матеріалу з геометричних перетворень слід реалізовувати у різних напрямах, зокрема варто привести його у відповідність з загальнонауковими положеннями, виклад здійснити більш системним, статус методу треба істотно підвищити, яскраво ілюструючи його альтернативність і ефективність.*

***Ключові слова:*** *геометричне перетворення, рух, гомотетія, перетворення подібності, подібність фігур, композиція перетворень, метод геометричних перетворень, шкільний курс геометрії, форма геометричної фігури.*

**Постановка проблеми.** Геометрія – галузь математики, що вивчає просторові форми (фігури) та відношення, їх узагальнення та аналоги, використовуючи при цьому різноманітні прийоми, методи, засоби. Постійно збагачуючись новими об'єктами, фактами, ідеями геометрія різнопланово розвивається. Підтвердженням цьому є бурхливий розвиток фрактальної геометрії. Не є завершеною і елементарна геометрія. Шкода, але не збагачується шкільний курс геометрії, в якому учні вивчають елементи та фрагменти різних геометричних теорій, зокрема теорії геометричних перетворень площини та простору. Геометричні перетворення здобувачі освіти вивчають на різних рівнях, включаючи профільний, за різними програмами та підручниками. Вчитель математики має бути здатним і готовим навчати учнів за будь-яким підручником, має володіти ґрунтовними знаннями з предметної області і навиками та вміннями розв'язувати задачі, а також у доступній формі пояснювати навчальний матеріал на належному науковому рівні та вчити учнів розв'язувати задачі, зокрема з використанням геометричних перетворень площини та простору. Кругозір вчителя, його висока наукова культура і професійна майстерність та якісні шкільні підручники – головні передумови ефективності навчального процесу. Термінологічна грамотність – одна зі складових математичної культури вчителя і учня (більш детально описано у [17] Чашечниковою О.С. (2009).

**Аналіз актуальних досліджень.** Навіть поверхневий аналіз змісту шкільних підручників засвідчує недосконалість викладу теоретичного матеріалу (як понятійного, так і фактичного) з теорії геометричних перетворень, який зводиться лише до часткового вивчення рухів та перетворень подібності.

Майбутні вчителі математики, здобуваючи вищу освіту за відповідною спеціальністю у ЗВО, вивчають геометричні перетворення у курсі аналітичної геометрії – університетській навчальній дисципліні, найближчій до шкільного курсу геометрії, та у конструктивній геометрії, де широко використовується метод геометричних перетворень. У аналітичній геометрії на аналітичній (координатно-формульній) основі систематично вивчаються рухи, перетворення подібності, афінні перетворення, інверсія і розглядаються їх застосування до різних типів суто геометричних та прикладних задач.

Педагогічна проблема (проблема теорії та методики навчання математики), пов'язана з вивченням геометричних перетворень школярами, полягає в тому, що зміст окремих шкільних підручників не в повній мірі відповідає загальноприйнятій у науці термінології (і навіть суперечить загальноприйнятим означенням), містить значну кількість логічних, методологічних та методичних прогалин, підручники практично не дають рафінованого формулювання суті методу геометричних перетворень та конструктивної схеми його використання, а також яскравої демонстрації його альтернативності та ефективності.

Наведені нижче міркування ми адресуємо вчителям математики і авторам шкільних підручників та посібників для школярів, а також майбутнім вчителям математики і всім небайдужим до математичної освіти. Вважаємо доречним обговорення тих недоречностей, які мають місце у навчальній математичній літературі, саме зараз, коли готуються нові шкільні підручники. Акцентуючи увагу на прогалинах та невідповідностях, ми наводимо строгі означення і вказуємо на альтернативні (еквівалентні) означення понять і розглядаємо задачі, які ілюструють ефективність методу геометричних перетворень.

Мета статті – запропонувати підхід до використання методу геометричних перетворень при навчанні математики.

**Виклад основного матеріалу.** *Шкільна геометрія і теорія геометричних перетворень.* Геометричним перетворенням простору (площини, прямої, відрізка) називається бієктивне відображення простору на себе. Відносно автономними є теорії перетворень прямої, площини, тривимірного простору. Елементи цих теорій завжди вивчались у закладах загальної освіти. Але їх вивчення завжди було фрагментарним, конструктивно-синтетичним. До програм шкільного курсу геометрії традиційно входили рухи (переміщення): центральна і осьова симетрії, паралельне перенесення, поворот (епізодично); перетворення подібності, зокрема гомотетія. В останній час спостерігається тенденція до зменшення уваги на вивчення цих питань. Рівність і подібність трикутників залишились центральними питаннями блоку, ознаки рівності (конгруентності) і подібності трикутників – центральними фактами. Разом з цим метод геометричних перетворень є загальним достатньо продуктивним методом розв’язування задач елементарної математики, зокрема задач на максимум та мінімум, задач оптимізаційного характеру. У чинних програмах геометричні перетворення залишаються однією з основних змістових ліній курсу геометрії. Як засвідчує вчорашня реальність [7], всю шкільну геометрію можна вибудувати на основі геометричних перетворень, але чи доцільно це робити? Знайдений компроміс [14] між доступністю, традиційністю і альтернативністю уже працює десятиліттями і навряд чи варто його руйнувати. Слід зазначити, що в останні десятиліття в підручниках для класів з поглибленим вивченням математики з'явились елементи аналітичного вивчення окремих геометричних перетворень і значна кількість гарних задач, включаючи прикладні [6,10]. З’являються роботи щодо важливості врахування стилів мислення школярів для ефективного навчання їх геометричним перетворенням [18].

Геометричні перетворення – важливий розділ ШКГ, який вивчають у чотири етапи «рівність трикутників», «подібність трикутників», «перетворення фігур на площині», «геометричні перетворення простору» 7- 9, 11 класи.

У шкільному курсі геометрії, в якому вивчаються елементи декількох геометричних теорій, використовуються різні прийоми та методи задання і дослідження об’єктів, а також розв’язування задач. Це синтетичний метод, алгебраїчний метод, метод координат, векторний метод, координатно-векторний, а також метод геометричних перетворень.

1. Перетворення і відображення – не є тотожними (рівнозначними) поняттями! Ототожнювати перетворення і відображення – груба методологічна помилка. А шкільний курс математики не має спотворювати наукові істини.

Прямим (синонім декартовим) добутком множин A і B називається множина всіх впорядкованих пар виду $(a, b)$, де $a \in A, b \in B$, яка позначається $A \times B$.

Кожна непорожня підмножина $L$ прямого (декартового) добутку множин A і B, тобто

$$L \subset A \times B = \{(a, b)\colon a \in A, b \in B\},$$

називається *відповідністю* між цими множинами (синонім: *бінарне відношення*).

Якщо $(a, b) \in L$, то кажуть, що елементу $a \in A$ відповідає елемент $b \in B$.

Зауважимо, що природа множин A і B тут не відіграє ніякої ролі. Якщо A і B – геометричні фігури, то маємо відповідність між фігурами A та B.

*Відображенням* множини (фігури) A у множину (фігуру) B називається відповідність між цими множинами, встановлена за певним правилом (законом) $f$, при якій кожному елементу $a$ множини A відповідає єдиний елемент $b$ множини B, що записують $f(a) = b$. При цьому елемент $b \in B$ називають образом елемента $a \in A$, а $a$ – прообразом елемента $b$.

Якщо кожен елемент множини В є образом принаймні одного елемента множини А, то кажуть, що маємо відображення *множини А **на** множину В* (таку властивість відображення називають сюр'єктивною, а саме відображення – сюр'єкцією). Якщо при відображенні $f$ різним елементам множини $A$ відповідають різні елементи множини $B$, то відображення $f$ називають ін'єктивним або ін'єкцією. Прямокутна декартова система координат на площині є засобом встановлення бієктивного відображення площини на множину $R \times R$.

Термін відображення є загальноматематичним. Якщо ж множина В – числова, то відображення називають функцією, а відповідність – функціональною. Наприклад, площа є функцією квадровної геометричної фігури, а ймовірність є функцією випадкової події. Рівність $y = f(x) = a^x$ задає дійсну функцію дійсної змінної.

*Перетворенням множини* $F$ (прямої, площини, простору) називають взаємно однозначне, тобто бієктивне (одночасно ін'єктивне і сюр'єктивне), відображення цієї множини на себе. Далі $F$ – площина. Існує еквівалентне означення перетворення: «Геометричним перетворенням площини називається оборотне відображення площини самої на себе» [3, С. 79]. На наш погляд, воно є одним з альтернативних варіантів означення для шкільного курсу геометрії поряд з наявним у підручнику [2], оскільки є строго науковим і вповні доступним для розуміння!

Відомо, що множина всіх перетворень заданої множини (простору) відносно операції композиція (послідовне виконання перетворень) утворює групу, нейтральним елементом якої є тотожне перетворення, а симетричним елементом – обернене перетворення.

З групової точки зору, яку в 1872 р. у своїй Ерлангенській програмі запропонував Фелікс Клейн, *Евклідова геометрія* є теорією інваріантів групи перетворень подібності простору (площини, прямої), яка включає групу рухів. Основними інваріантами цієї групи є відношення довжин відрізків, збереження величин кутів, перпендикулярності прямих, форм геометричних фігур. Взагалі кажучи, *Елементарна геометрія* є складовою Евклідової геометрії, а шкільна геометрія є складовою елементарної геометрії.

*Афінна геометрія* вивчає властивості фігур і відношень простору, які є незмінними при будь-якому афінному перетворенні, тобто є теорією інваріантів групи афінних перетворень, яка включає групу перетворень подібності. Нагадаємо, що перетворення простору називається афінним, якщо воно кожні три точки однієї прямої переводить в три точки однієї прямої. Просте відношення трьох точок однієї прямої – основний інваріант групи афінних перетворень. Нагадаємо, що коли точки $\mathrm{M}_1$, $M_2$, $M$ – колінеарні, тобто належать одній прямій, причому $M \neq M_2$, то існує єдине число $\lambda$ таке, що $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Це символічно записується $\lambda = (M_1M_2, M)$ і називається простим відношенням точок $\mathrm{M}_1$, $M_2$, $M$. При цьому кажуть, що точка М здійснює поділ напрямленого відрізка $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$ у відношенні $\lambda$. Важливим інваріантом групи афінних перетворень є збереження відношень площ многокутників. Зауважимо, що це метричний інваріант цієї групи.

Не зважаючи на те, що афінна геометрія є більш загальною теорією по відношенню до евклідової геометрії, значна частина задач елементарної геометрії мають не метричний характер, а афінний. Прийнято вважати, що афінними є ті поняття і властивості плоских фігур, які залишаються незмінними при паралельному проєктуванні на площину. До них відносять колінеарність точок і векторів, а отже, і паралельність прямих, відношення площ квадровних фігур та ін. Прикладом афінного поняття є поняття медіани трикутника, а поняття висоти трикутника не є афінним. Але властивість висот трикутника перетинатись в одній точці є афінною. Аналогічна властивість бісектрис трикутника теж є афінною.

У стереометрії до афінних властивостей відносять паралельність прямих і площин, відношення довжин колінеарних відрізків, відношення об'ємів многогранників тощо.

2. Про означення перетворення подібності. Означення – це не твердження. Підкреслимо: означення не буває істинним чи хибним. Означення – це домовленість, означення – це скорочення. Означення бувають коректними та некоректними, загальноприйнятими (широковживаними) і місцевого (епізодичного) використання. В математиці лише ті речення, які в компактній лаконічній формі визначають об'єкт за

найбільш істотними ознаками і використовуються в теорії на змістовному рівні (при доведенні тверджень) є строгими, а не описовими визначеннями. Теорія геометричних перетворень, зокрема перетворень подібності, розвивається впродовж тисячоліть і ключові поняття уже викристалізовані, термінологія врегульована. Вигадувати тут нові терміни потреби немає.

*Без означення відповідності між множинами немає у ШКМ строго наукових означень ні функції, ні перетворення.*

У контексті сказаного констатуємо, що у підручнику [10] відсутнє означення перетворення подібності площини з коефіцієнтом $k$. Його не можна замінити нечіткими описами і розпливчатими поясненнями. Тому виклад теоретичного матеріалу не є строгим.

Зауважимо, що існують критерії (твердження, що виражають необхідні і достатні умови), які забезпечують основи для альтернативних (еквівалентних) означень. Наприклад,

для того щоб перетворення площини було перетворенням подібності, необхідно і достатньо, щоб воно зберігало інцидентність чотирьох точок кола, тобто кожні чотири точки, що лежать на одному колі, переводило у чотири точки, що належать одному колу [11].

3. У шкільних підручниках відсутнє означення форми фігури, хоча це слово використовується без пояснення змісту. Наприклад, «Які властивості перетворення фігури гарантують збереження її розміру та форми?» [10]. Але що таке розмір фігури чи форма? М'яко кажучи, дивні запитання, оскільки ні розмір фігури, ні форма фігури раніше і не пояснювались, і не означувались. І цей недолік властивий майже всім підручникам.

Стосовно форми хотілось би зазначити, що термін форма фігурує у логіці науки і її методології в двох номінаціях, а саме у словосполученнях геометрична форма і форма геометричної фігури. У тривимірному просторі існує чотири чистих типи геометричних форм: незв'язні множини, лінії, поверхні, тіла (решта є їх «сумішами» або «комбінаціями»).

*Форма геометричної фігури* – це спільна властивість всіх подібних між собою геометричних фігур (тих, що переводяться одна в іншу під дією перетворення подібності), тобто це клас еквівалентності фактор-множини всіх фігур простору за бінарним відношенням еквівалентності «бути подібними». Таким чином, форма фігури – це один з інваріантів групи перетворень подібності. Отже, у підручниках маємо «зачароване коло».

4. Лінії і перетворення подібності. Лініям у ШКГ приділена мізерна увага, якої удостоїлись лише пряма, коло і ламані, зокрема замкнені ламані. Дійсні алгебраїчні лінії 2-го порядку. Тобто такі, що відмінні від вироджених і уявних, а саме парабола, гіпербола та еліпс не фігурують у шкільній геометрії як об'єкти вивчення. Вони реалізуються у ШКМ як графіки функцій: квадратичної, оберненої пропорційності та функції $y = b\sqrt{a^2 - x^2}$. Всі гіперболи як графіки функцій виду $y = \frac{k}{x}$ (оберненої пропорційності) є рівнобічними (мають рівні між собою дійсну і уявну осі), а отже, мають ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$ і тому є подібними. Зазначимо, що вповні коректне і еквівалентне загальноприйнятому в силу теореми про структуру перетворення подібності [17] означення подібних фігур, наведене у підручнику [10]: «Дві фігури називають подібними, якщо одну з них можна отримати з другої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії та руху», дозволяє конструктивно використовувати його при розв'язуванні значної кількості задач. На жаль відсутність аналітичної складової у теорії дещо обмежує ефективність використання поняття. Розглянемо кілька задач у контексті "алгебраїчні лінії 2-го порядку і перетворення подібності".

**Задача 1**. *Вивести формулу для обчислення площі плоскої фігури, обмеженої еліпсом:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Розв'язання. Розглянемо круг, заданий у прямокутній декартовій системі координат нерівністю $x^2 + y^2 \leq a^2$ (рівносильно рівнянням $x^2 + y^2 - a^2 + |x^2 + y^2 - a^2| = 0$) і перетворення площини, яке задається формулами: $\varphi$: $x' = x$, $y' = \frac{b}{a}y$.

Легко бачити, що фігура $F$, площу якої вимагається виразити, є образом круга, оскільки коло $x^2 + y^2 = a^2$ перетворення $\varphi$ переводить у заданий еліпс. Тому $S_F = \frac{b}{a} S_{\text{кр}} = \pi ab$.

Зауваження. Чи може це розв'язання бути цілком зрозумілим учню?

Для впевненості варто спочатку довести, що площі трикутника $ABC$ і його образу $A'B'C'$ при перетворенні: $x' = kx,\ y' = my$, де $km > 0$, перебувають у співвідношенні: $S_{\Delta A'B'C'} = mkS_{\Delta ABC}$. Це просто (легко) зробити координатним методом у доступній школяру формі.

**Задача 2**. *Відрізок AB – хорда заданого еліпса, C – довільна точка цього еліпса. Якою фігурою є геометричне місце центрів мас системи точок A, B, C?*

Центром мас системи точок A,B,C називається точка O така, що $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Якщо A, B, C – вершини трикутника, то центром мас цієї системи точок є точка перетину медіан трикутника ABC.

*Зауваження*. Дана задача є модифікацією задачі 24.62 з підручника [10]. Відрізок $AB -$ хорда даного кола, точка $C -$ довільна точка цього кола. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан трикутників $ABC$ (підручник [4]).

Шуканим геометричним місцем точок є коло з двома вилученими точками, оскільки шукана фігура гомотетична заданому колу при гомотетії, центром якої є середина $AB$, а коефіцієнтом є $\frac{1}{3}$ (без образів точок $A$ і $B$, оскільки при C=A і C=B трикутник вироджується).

Аналогічно міркуючи і використовуючи ту ж гомотетію, отримуємо, що для задачі 2 шуканим місцем точок є еліпс, гомотетичний заданому еліпсу, оскільки при C=A центрам мас точок A,B,C буде точка, яка ділить напрямлений відрізок AB у відношенні 0,5, а у випадку C=B центром мас буде точка, яка ділить направлений відрізок AB у відношенні 2.

**Задача 3**. За яких умов параболи $\gamma_1 : y = k_1 x^2$ і $\gamma_2 : x = k_2 y^2$ подібні?

Р о з в' я з а н н я. Параболи $\gamma_2$ і $\gamma_2' : y = k_2 x^2$ очевидно є конгруентними (рівними). Залишилось з'ясувати, за яких умов подібними є параболи $\gamma_1$ і $\gamma_2'$. Розглянемо образ параболи $\gamma_1$ під дією гомотетії h: $x' = mx,\ y' = my$, а саме $h(\gamma_1) = \gamma_1' : \frac{y'}{m} = k_1 \frac{x'^2}{m^2} \Leftrightarrow y' = \frac{k_1}{m} x'^2$. Параболи $\gamma_1{}'$ і $\gamma_2'$ конгруентні тоді і тільки тоді, коли $\frac{k_1}{m} = k_2$, тобто $\frac{k_1}{k_2} = m$. Отже, $\gamma_1{}'$ і $\gamma_2' -$ гомотетичні, а отже, параболи $\gamma_1$ і $\gamma_2$ подібні при будь-яких $k_1$ і $k_2$ .

**Задача 4**. За яких умов параболи $\gamma_1 : y = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$ і $\gamma_2 : y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$ конгруентні (рівні)? Вказати перетворення подібності площини, яке відображає параболу $\gamma_1 : y = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$ на параболу $\gamma_2 : y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$.

5. Прикладні задачі і рухи та перетворення подібності. Суть методу геометричних перетворень полягає в тому, що розглянувши певне перетворення простору або композицію кількох перетворень, вдається встановити зв'язки шуканого з відомим (зв'язок між фігурами або зв'язок між відношеннями), на основі чого формується ідея способу (шляху) розв'язування задачі. Цей метод ефектно працює в задачах на побудову, доведення та дослідження, зокрема оптимізаційних [3,5,8,9,10,12].

**Задача 5**. По одну сторону від прямолінійної залізниці розташовані населені пункти A і B. В якому місці варто розмістити станцію, щоб витрати на будівництво прямолінійних доріг до населених пунктів $A$ і $B$ були найменшими?

**Задача 6**. По одну сторону від прямолінійної залізниці розташовані населені пункти A, B і C. В якому місці варто розмістити станцію, щоб витрати на будівництво прямолінійних доріг до цих трьох населених пунктів були найменшими?

З а у в а ж е н н я. Якщо попередня задача часто зустрічається в навчальній літературі [3] і багатьом знайома (її розв'язок навіть проілюстрований на обкладенці підручника [10]), то остання такою не є, а є значно складнішою. Вона, її модифікації та аналоги заслуговують бути об'єктом інтересу окремого проєкту школяра.

**Задача 7**. «Села A і B розташовані на різних берегах річки. Де треба побудувати міст перпендикулярно до берегів річки, щоб шлях між селами був найкоротший.» [2].

Зауважимо, що ця, відома задача, має гарний дидактичний і мотиваційний потенціал, є яскравим прикладом ефективності застосування геометричних перетворень і їх значущості.

Пропонуємо розв'язати наступні аналоги вказаних задач і оцінити їх потенціал.

**Задача 8**. Точки А і В належать кругу (лежать поза кругом) з межею $\gamma$. Знайти на колі $\gamma$ точку, сума відстаней якої до точок А і В буде найменшою.

Симетрії фігури. Принцип симетрії ефективно використовується в різних галузях науки. Іноді симетрію на площині зводять до центральної або осьової (відносно точки або прямої). Тоді як в геометрії симетрією називають кожен рух, який переводить фігуру в себе. Згідно з цим означенням тотожне перетворення є тривіальним прикладом симетрії. Його включають до множини симетрій лише для того, щоб множина симетрій фігури відносно операції композиція утворювала групу, яку називають групою симетрій або групою самосуміщень фігури. Так група симетрій правильного трикутника крім тотожнього перетворення і трьох осьових симетрій включає повороти на 120 і 240 градусів. В цьому місці теорія рухів простору має вихід на інші науки (згадаймо федорівські групи).

Рекомендуємо читачу фундаментальні джерела з даної тематики [1, 3, 4].

**Висновки та перспективи подальших наукових розвідок.** Ліквідація виявлених логічних прогалин та недоліків має сприяти вдосконаленню змісту шкільних підручників, зокрема посиленню їх науковості без втрати доступності. Акцентуючи увагу школярів на різних способах задання геометричного перетворення, варто з'ясувати чи сприятиме посиленню мотиваційних основ і ефективності навчального процесу введення елементів аналітики у цю змістову лінію. Цьому будуть присвячені наші наступні дослідження.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES


1. Бевз, Г. П. (1977). Методика викладання математики. Київ: Вища школа. (Bevs, G. P. (1977). Methods of teaching mathematics. Kyiv: Vyshcha shkola.
2. Бевз, Г. П., Бевз, В. Г., Владімирова, Н. Г., Владіміров, В. М. (2011). Геометрія: 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень, профільний рівень. Київ: Генеза. (Bevz, G. P., Bevz, V. G., Vladimirova, N. G., Vladimirov, V. M. (2011). Geometry: 11th grade: textbook for general educational institutions: academic level, professional level. Kyiv: Geneza).
3. Бевз, Г. П., Конфорович, А. Г., Резніченко, З. О., Ченакал, Є. О. (1982). Математика: Посібник для факультативних занять у 7 класі. Київ: Радянська школа. (Bevz, G. P., Konforovych, A. G., Reznichenko, Z. O., Chenakal, E. O. (1982). Mathematics: Guide for optional classes in the 7th grade. Kyiv: Radianska shkola).
4. Боровик, В. Н., Зайченко, І. В., Мурач, М. М., Яковець, В. П. (2003). Геометричні перетворення площини: навчальний посібник. Суми: Університетська книга. (Borovyk V. N., Zaichenko, I. V., Murach, M. M., Yakovets, V. P. (2003). Geometric transformations of the plane: a tutorial. Sumy: Universytetska knyha).
5. Gotman E.G., Skopets Z.A. The problem is the same – the solutions are different. (1988). K.: Rad. school, 1988. 173 p.
6. Істер, О. С. (2017). Геометрія: підручник для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза. (Ister, O. S. (2017). Geometry: a tutorial. for 9th grade general education education closing. Kyiv: Geneza).
7. Колмогоров, А. М., Семенович, О. Ф., Нагібін, Ф. Ф., Черкасов, Р. С. (1972). Геометрія 6 клас. Київ: Радянська школа. (Kolmogorov, A. M., Semenovich, O. F., Nagibin, F. F., Cherkasov, R. S. (1972). Geometry 6th grade. Kyiv: Radianska shkola).
8. Кушнір, І. А. (1994). Методи розв’язування задач з геометрії. Київ: Абрис. (Kushnir, I. A. (1994). Methods of solving geometry problems. Kyiv: Abris).
9. Ленчук, І. Г. (2016). Метод перетворень: паралельне перенесення. Математика у рідній школі, 3(174), 37–42. (Lenchuk, I. G. (2016). Method of transformations: parallel transfer. Mathematics in native school, 3(174), 37–42.

10. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2017). Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія. (Merzlyak, A. G., Polonskyi, V. B., Yakir, M. S. (2017). Geometry for secondary schools with advanced mathematics: a textbook. for 9th grade general education education institutions. Kharkiv : Himnaziia).
11. Мороз, М. П. (2016). Перетворення площини, що зберігають належність точок колу. Математика у рідній школі, 3(174), 43–47. (Moroz, M. P. (2016). Transformations of the plane that preserve the membership of the points of the circle. Mathematics in the native school, 3(174), 43–47).
12. Nikulin A.V., Kukush A.G., Tatarenko Yu.S. (1996) Geometry on a plane (Planimetry): Uch. village. Mn.: Popurry LLC, 1996. 592 p.
13. Погорєлов, О. В. (1993). Геометрія: Підручник для 7–11 класів середньої школи. Київ : Освіта. (Pogorelov, O. V. (1993). Geometry: Tutorial for 7–11 classes of secondary school. Kyiv: Osvita).
14. Працьовитий, М. В. (2007). Геометричні перетворення. Теоретико-груповий погляд на геометрію. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. (Pratsiovytyi, M. V. (2007). Geometric transformations. A theoretical group view of geometry. K Kyiv : NPU named after M. P. Dragomanova).
15. Працьовитий, М. В. (2007). Геометричні перетворення. Рухи площини. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. (Pratsiovytyi, M. V. (2007). Geometric transformations. Plane movements. Kyiv : NPU named after M.P. Drahomanova).
16. Працьовитий, М. В. (2013). Перетворення подібності площини з елементами теорії фракталів. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова. (Pratsiovytyi, M. V. (2007). Transformation of plane similarity with elements of fractal theory. Kyiv : NPU named after M. P. Drahomanova).
17. Чашечникова, О. С., Москаленко, І. М., Калюсенко, Л. О. (2009). Математична грамотність як одна зі складових інтелектуальної компетентності учнів. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології : науковий журнал, 2, 209–216. (Chashechnikova, O. S., Moskalenko, I. M., Kalyusenko, L. O. (2009). Mathematical literacy as one of the components of students' intellectual competence. Pedagogical sciences: theory, history, innovative technologies: scientific journal, 2, 209–216).
18. Чашечникова, О. С. (2023). Методичні особливості навчання геометричних перетворень учнів з різними стилями мислення. Актуальні питання природничо-математичної освіти. Суми : Сумський державний. педагогічний університет імені А. С. Макаренка, 1(21), 98–111. (Chashechnikova, O. S. (2023). Methodological features of teaching geometric transformations of students with different thinking styles Current issues of natural and mathematical education. Sumy: Sumy state Pedagogical University named after A. S. Makarenko, 1(21), 98–111.

**Pratsiovytyi M. V., Pravitska N. S. The method of geometric transformations as one of the main methods of elementary geometry.**

*In the educational literature, authors do not always follow the terms, definitions and notations generally accepted in science, that sometimes leads to misunderstandings, distortions of scientific facts or contradictions. It also concerns to the elements of the theory of geometric transformations of the plane and space (motions and similarity transformations) in the school course of mathematics. The analysis of the school textbooks content (current and former) force us to rethink the purposes, tasks, resource of means and the imaginary final result of the educational course and state that the presentation of theoretical material should be significantly improved, and the selection of problems should be significantly balanced. In this paper we discuss this area of issues based on the analysis of the school textbooks content. Based on the identified logical and methodological gaps in the school course of geometry on geometric transformations, we propose ways to improve the presentation of theoretical material, its* *support with examples and problems. The paper deals with problems that can be effectively solved by the method of geometric transformations (metric, affine, positional problems; problems for proving, drawing and investigation, including optimization problems). They qualitatively accomplish the didactic and motivational functions of teaching. We believe that the content of problems should be more focused on applications.*

*The method of geometric transformations is a powerful tool for solving problems and studying geometric objects. Unfortunately, there is no refined formulation of its essence in school textbooks (this can be done in lessons dedicated to generalization and systematization). The improvement of the educational material on geometric transformations should be implemented in different directions, in particular, it should be coordinated with general scientific provisions, the presentation should be more systematic, the status of the method should be significantly increased, clearly illustrating its alternativeness and effectiveness.*

**Key words:** *geometric transformation, motion, homothety, similarity transformation, similarity of figures, composition of transformations, method of geometric transformations, school course of geometry, shape of geometric figure.*

**УДК 378.14**
**DOI 10.5281/zenodo.12191006**

**Л. Я. Соловей**
ORCID ID 0009-0001-2832-1741
**Ю. Г. Лотюк**
ORCID ID 0000-0001-6696-5583
Приватний вищий навчальний заклад
«Міжнародний економіко-гуманітарний університет
імені академіка Степана Дем’янчука»

# РОЛЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ У ПРОФЕСІЙНОМУ ФОРМУВАННІ МАЙБУТНЬОГО ПРОГРАМІСТА

*У статті досліджується значення математичних знань та навичок у процесі підготовки фахівців з програмування. Проаналізовано, які математичні дисципліни є найбільш важливими для майбутніх програмістів, та як їх вивчення впливає на розвиток аналітичного мислення, логічних здібностей та здатності до вирішення складних технічних завдань. Особлива увага приділяється взаємозв'язку між математичною освітою та успішністю в програмуванні, а також практичним аспектам застосування математичних методів у програмній інженерії.*

*Розглядаються сучасні тенденції у викладанні математики та їх вплив на професійну підготовку програмістів. Виявлено, що інтеграція інноваційних педагогічних методик та технологій у навчальний процес сприяє кращому засвоєнню математичних знань і підвищує мотивацію студентів. На прикладі розв’язування практичних математичних задач продемонстровано, як ефективно поєднувати теоретичні і практичні аспекти математичної освіти.*

*Визначено основні математичні дисципліни, які є фундаментальними для розвитку аналітичного мислення та вирішення складних алгоритмічних задач. Особлива увага приділяється ролі математики у розумінні принципів програмування, розробці ефективних алгоритмів та структур даних. Також обговорюються методи покращення математичної підготовки студентів та інтеграції математичних знань у навчальні програми з програмування.*

*Пропонується включення у курс підготовки програмістів прикладної математики, статистики, теорії ймовірностей та інших дисциплін, оскільки математика вчить абстрактно мислити, розуміти задачі, ставити завдання, розуміти різні дії та операції, аналізувати можливі рішення.*