

ІНТЕГРОВАНЕ ЗАНЯТТЯ З МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ З ВИКОРИСТАННЯМ МОДЕЛІ ЛАНЧЕСТЕРА ТА ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ В МАТЛАВ

Галина БОБРИЦЬКА ✉

Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба, Україна
bogalina31@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0003-2793-5108>

Наталія ЧЕРНОВОЛ

Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба, Україна
n.n.chernovol@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-7988-7016>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Формування навичок застосування класичних математичних інструментів при розв'язанні реальних проблем є однією із задач викладання математичних дисциплін у ЗВО та ВВНЗ. Це вимагає постійного поповнення бази сучасних прикладних задач. Значна частина їх не має "красивих" розв'язків та вимагає застосування програмного забезпечення. Виникає проблема об'єднання теоретичної математичної бази, прикладного застосування та використання інформаційних технологій. Для цього доцільно проводити інтегровані заняття з математики, спеціальності та комп'ютерних наук.

Матеріали і методи. Для виконання дослідження використано стохастичний підхід до математичного моделювання бою, який полягає в побудові графу станів марковського процесу із вказанням інтенсивностей переходу від стану до стану та відповідної системи диференціальних рівнянь Колмогорова. Для побудови програми у системі MATLAB використано вбудовані функції для розв'язання диференціальних рівнянь з початковими умовами та для знаходження границь функцій.

Результати. В роботі надано розробку інтегрованого заняття професійного спрямування з математичного моделювання "високоорганізованого" бою Ланчестера. Детально описано розв'язання задачі стохастичним підходом для початкових значень у найпростішому випадку. Представлено рекомендації для самостійної побудови курсантами (студентами) алгоритму розв'язання в MATLAB для більш складних випадків.

Висновки. Проведення інтегрованого заняття підвищує зацікавленість курсантів у вивченні математики та застосуванні її інструментів у професійній діяльності. Детальний опис розв'язання розглянутої в роботі моделі Ланчестера можна використовувати для побудови та розв'язання подібних стохастичних моделей у військовій справі, економіці, інженерії та ін. Запропоноване інтегроване заняття може бути впроваджене при вивченні таких математичних дисциплін, як "Теорія ймовірностей", "Теорія випадкових процесів" та "Системи масового обслуговування".

КЛЮЧОВІ СЛОВА: модель Ланчестера; стохастичне моделювання; граф станів; рівняння Колмогорова; MATLAB; викладання.

Для цитування:	Бобрицька Г., Черновол Н. Інтегроване заняття з математичного моделювання Марковського процесу з використанням моделі Ланчестера та її розв'язання в MatLab. <i>Фізико-математична освіта</i> , 2024. Том 39. № 5. С. 7-13. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i5-01 Бобрицька, Г., & Черновол, Н. (2024). Інтегроване заняття з математичного моделювання Марковського процесу з використанням моделі Ланчестера та її розв'язання в MatLab. <i>Фізико-математична освіта</i> , 39(5), 7-13. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i5-01
For citation:	Bobrytska, H., & Chernovol, N. (2024). An integrated class on mathematical modeling of a Markov process using the Lanchester model and its solution in MatLab. <i>Physical and Mathematical Education</i> , 39(5), 7-13. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i5-01 Bobrytska, H., & Chernovol, N. (2024). Intehrovane zaniattia z matematychnoho modeliuvannia Markovskoho protsesu z vykorystanniam modeli Lanchestera ta yii rozv'iazannia v MatLab [An integrated class on mathematical modeling of a Markov process using the Lanchester model and its solution in MatLab]. <i>Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education</i> , 39(5), 7-13. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i5-01

AN INTEGRATED CLASS ON MATHEMATICAL MODELING OF A MARKOV PROCESS USING THE LANCHESTER MODEL AND ITS SOLUTION IN MATLAB

Halyna BOBRYTSKA ✉

Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Ukraine
bogalina31@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0003-2793-5108>

Nataliia CHERNOVOL

Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Ukraine
n.n.chernovol@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-7988-7016>

ABSTRACT

Formulation of the problem. The development of skills in applying classical mathematical tools to solve real problems is one of the tasks of mathematical disciplines in higher education. It requires a constant replenishment of the base of modern applied problems. A significant portion of these problems do not have “elegant” solutions and require the use of software. This creates the challenge of integrating the theoretical mathematical foundation, practical application, and the use of information technology. To address this, it is advisable to conduct integrated classes that include mathematics, the speciality, and computer science.

Materials and methods. To conduct the research, a stochastic approach to mathematical modelling of combat was used (a state-transition rate diagrams of a Markov process with specified transition intensities, a system of Kolmogorov differential equations). Programs were created in the MATLAB system using built-in functions for solving differential equations with initial conditions and for finding function limits.

Results. The paper presents the integrated class on mathematical modelling of the “highly organized” Lanchester battle with professional course. The solution of the problem by a stochastic approach for initial values in the simplest case is described in detail. Recommendations are presented for cadets (students) to independently build a solution algorithm in MATLAB for more complex cases.

Conclusions. Conducting an integrated lesson increases the interest of cadets in studying mathematics and applying its tools in professional activities. A detailed description of the solution of the Lanchester model considered in the work can be used to build and solve similar stochastic models in military affairs, economics, engineering, etc. The paper presents a description of an integrated class on combat modelling, which can be implemented in the study of “Probability Theory”, “Theory of Random Processes”, and “Queueing Systems”.

KEYWORDS: Lanchester model; stochastic modelling; state-transition diagram; Kolmogorov equations; MATLAB; teaching.

ВСТУП

Постановка проблеми. При підготовці майбутніх фахівців ВВНЗ курсанти, з одного боку, мають отримати класичні знання з математики, з іншого, навчитися їх застосовувати до розв’язання задач професійного спрямування, використовуючи сучасні інформаційні технології (IT). Застосування до розв’язання задачі методів з різних дисциплін сприяє кращому засвоєнню матеріалу, у тому числі більш глибокому розумінню постановки задачі і аналізу результатів розв’язання. Інтегровані заняття висвітлені в літературі здебільшого для шкільної освіти. Для вищої освіти, особливо для викладання у ВВНЗ з точки зору професійноспрямованих задач, літератури недостатньо. Тому автори своєю роботою заповнюють прогалину в базі існуючих розробок інтегрованих занять, що поєднують професійні знання та знання з дисциплін “Теорія ймовірностей”, “Диференціальні рівняння”, “Комп’ютерна математика”.

Аналіз актуальних досліджень. Комп’ютеризація суспільства приводить до проникнення IT в усі аспекти навчального процесу (Співаковський, 2003). Сьогодні педагог може користуватися широким спектром методів і форм навчання із підтримкою відповідних засобів IT. Для візуалізації, складних обчислень, моделювання та симуляції при викладанні математичних дисциплін використовують такі програмні засоби, як Maple (Михалевич, 2004), Geogebra (Віра & Самусенко, 2024), MathCAD (Халанчук, 2021), MATLAB (Ванг, 2024) та ін. Ці програмні засоби майбутні фахівці зможуть використовувати і для розв’язання професійних завдань.

До професійних завдань офіцерів входить прогнозування та планування бойових дій на тактичному і стратегічному рівнях. Для цього використовують різні моделі бойових дій, серед них і моделі Ланчестера (Шафер, 1968). До моделювання бойових дій застосовують детермінований та стохастичний підходи (Веса, 2015). Найбільш реалістичними вважаються стохастичні моделі, бо вони враховують випадковість процесу (Томас, 2000). Проте складність їх побудови та подальше обчислення змушує на практиці використовувати детерміновані моделі (Армстронг, 2011). У роботі (Фурсенко та ін., 2024) представлена модель Ланчестера для “поганоорганізованого” бою. Як видно з цієї роботи, розв’язання стохастичної моделі бойових дій є доволі громіздким, тому доцільно навчити майбутніх офіцерів виконувати його за допомогою програмного забезпечення.

Отже, враховуючи важливість розв’язання професійних задач із застосуванням комп’ютерних технологій для підготовки майбутніх офіцерів та маючи достатній науковий наробок з побудови стохастичних моделей бойових дій і відсутність програмних реалізацій цих моделей, була поставлена наступна мета.

Мета: запропонувати методику проведення інтегрованого заняття з моделювання “високоорганізованого” бою Ланчестера за допомогою математичного пакету MATLAB.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для виконання дослідження використано стохастичний підхід до математичного моделювання бою, який полягає в побудові графу станів марковського процесу із вказанням інтенсивностей переходу від стану до стану та відповідної системи диференціальних рівнянь Колмогорова. Для побудови програми у системі MATLAB використано вбудовані функції для розв'язання диференціальних рівнянь з початковими умовами та для знаходження границь функцій.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В даній роботі пропонується наступний план проведення заняття (без організаційної та заключної частин):

1. Ознайомлення курсантів (студентів) з моделлю Ланчестера "високоорганізованого" бою.
2. Створення разом із курсантами стохастичної моделі.
3. Підготовка до самостійної роботи курсантів (студентів), під час якої вони отримують рекомендації щодо особливостей побудови алгоритму розв'язання поставленої задачі.
4. Реалізація курсантами (студентами) задачі в MATLAB.

Постановка задачі. Відбувається бій між стороною 1 і стороною 2. Сторона 1 має N_1 однорідних бойових одиниць з ефективними скорострільностями α_1 кожна, сторона 2 має N_2 однорідних бойових одиниць з ефективними скорострільностями α_2 кожна. Одним пострілом можна знешкодити не більше, ніж одну одиницю противника. Інформація про знищення бойової одиниці поступає миттєво, тому такий бій називається "високоорганізованим". Потрібно визначити, яка сторона переможе у такому бої, з якою ймовірністю та скільки бойових одиниць залишиться неушкодженими.

Для викладання майбутнім фахівцям розглянемо випадок $N_1 = N_2 = 2$ докладно. Використаємо стохастичний підхід. Побудуємо модель процесу. Нехай S_{ij} – стан системи, при якому у сторони 1 – i неушкоджених одиниць, у сторони 2 – j неушкоджених одиниць. Вважається, що в системі $S = \{S_{ij}\}$ протікає марковський процес з дискретною множиною станів і неперервним часом. P_{ij} – ймовірність того, що в момент часу t система S знаходиться в стані S_{ij} . Розглянемо граф станів системи на рис. 1 (з вказанням інтенсивностей при переході від одного стану системи до іншого).

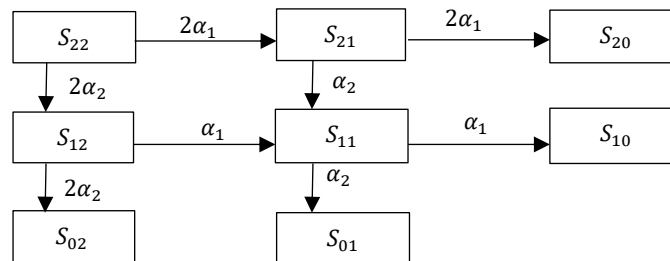


Рис.1. Граф станів системи з вказанням інтенсивностей

Джерело: авторська розробка.

Головна мета на цьому етапі – навчити курсантів за графом виписувати систему диференціальних рівнянь Колмогорова, більш того закріпити методи розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку. Виходячи з вказаного графа (рис.1) система диференціальних рівнянь Колмогорова має вигляд:

$$\begin{cases} P'_{22}(t) = -(2\alpha_1 + 2\alpha_2)P_{22}(t), \\ P'_{12}(t) = -(\alpha_1 + 2\alpha_2)P_{12}(t) + 2\alpha_2P_{22}(t), \\ P'_{21}(t) = -(2\alpha_1 + \alpha_2)P_{21}(t) + 2\alpha_1P_{22}(t), \\ P'_{11}(t) = -(\alpha_1 + \alpha_2)P_{11}(t) + \alpha_1P_{12}(t) + \alpha_2P_{21}(t), \\ P'_{02}(t) = 2\alpha_2P_{12}(t), \\ P'_{01}(t) = \alpha_2P_{11}(t), \\ P'_{20}(t) = 2\alpha_1P_{21}(t), \\ P'_{10}(t) = \alpha_1P_{11}(t). \end{cases} \quad (1)$$

Початкові умови: $P_{22}(0) = 1, P_{ij}(0) = 0$ при $i + j < 4$.

Розв'яжемо кожне рівняння системи диференціальних рівнянь (1) з урахуванням початкових умов.

1. Перше рівняння є рівнянням з відокремленими змінними відносно невідомої $P_{22}(t)$. Розв'язок задачі Коші:

$$P_{22}(t) = e^{-(2\alpha_1 + 2\alpha_2)t}. \quad (2)$$

2. Підставимо знайдений розв'язок (2) у друге рівняння системи (1) та отримаємо лінійне неоднорідне рівняння першого порядку відносно невідомої $P_{12}(t)$. Розв'язавши рівняння методом Лагранжа, отримаємо:

$$P_{12}(t) = \frac{2\alpha_2}{\alpha_1} e^{-(\alpha_1 + 2\alpha_2)t} - \frac{2\alpha_2}{\alpha_1} e^{-(2\alpha_1 + 2\alpha_2)t}. \quad (3)$$

3. Аналогічно другому пункту розв'яжемо задачу Коші для знаходження $P_{21}(t)$:

$$P_{21}(t) = \frac{2\alpha_1}{\alpha_2} e^{-(2\alpha_1 + \alpha_2)t} - \frac{2\alpha_1}{\alpha_2} e^{-(2\alpha_1 + 2\alpha_2)t}. \quad (4)$$

4. Знайдемо $P_{11}(t)$ методом Лагранжа, підставивши виведені раніше $P_{12}(t)$ та $P_{21}(t)$ у четверте рівняння системи (1):

$$P_{11}(t) = 2e^{-(2\alpha_1+2\alpha_2)t} - 2e^{-(\alpha_1+2\alpha_2)t} - 2e^{-(2\alpha_1+\alpha_2)t} + 2e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}. \quad (5)$$

5. Розв'язки з відповідними початковими умовами останніх чотирьох рівнянь системи (1) є ймовірностями крайніх станів системи в момент часу t . Підставляючи в ці диференціальні рівняння розв'язки (2)-(5), отримаємо рівняння, інтегруючи які знайдемо:

$$P_{02}(t) = -\frac{2\alpha_2^2}{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)}e^{-(2\alpha_1+2\alpha_2)t} + \frac{4\alpha_2^2}{\alpha_1(\alpha_1 + 2\alpha_2)}e^{-(\alpha_1+2\alpha_2)t} + \frac{2\alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)}, \quad (6)$$

$$P_{01}(t) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}e^{-(2\alpha_1+2\alpha_2)t} + \frac{2\alpha_2}{\alpha_1 + 2\alpha_2}e^{-(\alpha_1+2\alpha_2)t} + \frac{2\alpha_2}{2\alpha_1 + \alpha_2}e^{-(2\alpha_1+\alpha_2)t} - \frac{2\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t} + \frac{3\alpha_1\alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (7)$$

$$P_{20}(t) = -\frac{4\alpha_1^2}{\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}e^{-(2\alpha_1+2\alpha_2)t} + \frac{4\alpha_1^2}{\alpha_2(2\alpha_1 + \alpha_2)}e^{-(2\alpha_1+\alpha_2)t} + \frac{2\alpha_1^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (8)$$

$$P_{10}(t) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}e^{-(2\alpha_1+2\alpha_2)t} + \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + 2\alpha_2}e^{-(\alpha_1+2\alpha_2)t} + \frac{2\alpha_1}{2\alpha_1 + \alpha_2}e^{-(2\alpha_1+\alpha_2)t} - \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t} + \frac{3\alpha_1^2\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (9)$$

Система (1) є розв'язаною. Розглянемо границі ймовірностей станів (6)-(9) при $t \rightarrow +\infty$ та отримаємо ймовірності кінцевих станів системи наприкінці бою:

$$P_{02}(\infty) = \frac{2\alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)}, \quad (10)$$

$$P_{01}(\infty) = \frac{3\alpha_1\alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (11)$$

$$P_{20}(\infty) = \frac{2\alpha_1^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (12)$$

$$P_{10}(\infty) = \frac{3\alpha_1^2\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (13)$$

Вважається, що в системі відбувається випадковий процес. Це означає, що число бойових одиниць, які залишаться неушкодженими, є випадковою величиною. Отже, важливими характеристиками бою є середні значення кількості неушкоджених бойових одиниць кожної сторони:

$$M_1 = P_{10}(\infty) + 2P_{20}(\infty), \quad M_2 = P_{01}(\infty) + 2P_{02}(\infty)$$

та ймовірностей перемоги сторони 1 і 2 відповідно:

$$P_1 = P_{10}(\infty) + P_{20}(\infty), \quad P_2 = P_{01}(\infty) + P_{02}(\infty).$$

Наприклад, розглянемо результати бою для $\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = 0,8$ ($\frac{\text{постр}}{\text{хв}}$). Підставивши ці значення у формули (10) – (13) отримаємо $P_{20}(\infty) \approx 0,837$, $P_{10}(\infty) \approx 0,125$, $P_{02}(\infty) \approx 0,022$, $P_{01}(\infty) \approx 0,016$. Відповідно

$$M_1 \approx 1,8, M_2 \approx 0,06, P_1 \approx 0,96, P_2 \approx 0,04.$$

Отже, сторона 1 переможе з імовірністю 0,96, залишиться неушкодженою приблизно одна бойова одиниця.

Зауважимо, що у курсантів виникають труднощі, яким способом розв'язати дану систему диференціальних рівнянь. Тому потрібно їх навести на думку, що система розв'язується поступово: спочатку перше рівняння з відповідною початковою умовою, потім результат розв'язання треба підставити в друге рівняння і його розв'язати і так далі. Крім того, курсанти не одразу бачать тип рівняння, оскільки вони звикли в курсі "Диференціальні рівняння" невідому функцію позначати $y(t)$. Тому при з'ясуванні типу рівнянь можна тимчасово невідому ймовірність позначити $y(t)$, а потім після розв'язання рівняння повернутися до позначення невідомої ймовірності стану системи. Для спрощення розв'язання системи (1) доцільно одразу запропонувати розв'язати її для конкретних значень скорострільностей обох сторін. В роботі наведено загальні формули для обчислення ймовірностей станів системи і ймовірностей кінцевих станів системи, щоб можна було робити перевірку результатів для різних значень скорострільностей. Крім того, для курсантів неочевидні формули підрахунку кількості неушкоджених бойових одиниць кожної сторони в кінці бою і формули підрахунку ймовірностей перемоги обох сторін. Для цього доцільно нагадати їм матеріал про розподіл двовимірної випадкової величини.

Розв'язання задачі на папері показало, що для отримання остаточного результату потрібно знайти ймовірності всіх станів, тобто розв'язати $(N_1 + 1) \times (N_2 + 1) - 1$ диференціальних рівнянь першого порядку. Разом з курсантами робимо висновок, що на папері таке розв'язання занадто громіздке, тому значно простіше його знайти, використовуючи ІТ, а саме у MATLAB. Через те, що спеціально розробленої програми для стохастичної моделі Ланчестера немає, курсантам

пропонується створити її самостійно. Завдання можна запропонувати для великої кількості варіантів, змінюючи відповідно значення вхідних параметрів N_1 , N_2 , α_1 та α_2 . В залежності від рівня підготовки курсантів на різних етапах розв'язання цієї задачі можна запропонувати відповідну допомогу.

При виникненні труднощів на початковому етапі пропонується розглянути задачу у загальному вигляді.

Для цього зазначимо наступні моменти, на які слід звернути увагу:

1. Всі ймовірності можна записати у матрицю $(N_1 + 1) \times (N_2 + 1)$, де початково $P_{00} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & P_{01}(t) & \dots & P_{0N_2}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & \dots & P_{1N_2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{N_10}(t) & P_{N_11}(t) & \dots & P_{N_1N_2}(t) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Доцільно обговорити з курсантами, що, дописавши ліворуч та згори число бойових одиниць сторін 1 і 2, буде отримано матрицю розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини.

2. Для знаходження ймовірностей використовуються диференціальні рівняння Колмогорова з урахуванням початкових умов $P_{N_1N_2}(0) = 1$ та $P_{ij}(0) = 0$ ($i = \overline{0, N_1 - 1}, j = \overline{0, N_2 - 1}, i + j \neq N_1 + N_2$).

3. Спочатку потрібно знайти $P_{N_1N_2}$:

$$P'_{N_1N_2}(t) = -(N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2)P_{N_1N_2}(t). \quad (15)$$

4. Знаходимо ймовірності останнього стовпця (знизу вгору) та рядка (справа наліво) матриці (14), крім перших елементів рядка та стовпця:

$$\begin{aligned} P'_{iN_2}(t) &= -(i\alpha_1 + N_2\alpha_2)P_{iN_2}(t) + N_2\alpha_2P_{i+1N_2}(t), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \\ P'_{N_1j}(t) &= -(N_1\alpha_1 + j\alpha_2)P_{N_1j}(t) + N_1\alpha_1P_{N_1j+1}(t), \quad j = \overline{1, N_2 - 1}. \end{aligned} \quad (16)$$

5. Обчислюємо всі інші ймовірності, крім перших рядка та стовпця, починаючи з нижнього правого кута матриці (14):

$$P'_{ij}(t) = -(i\alpha_1 + j\alpha_2)P_{ij}(t) + i\alpha_1P_{ij+1}(t) + j\alpha_2P_{i+1j}(t), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}. \quad (17)$$

6. Обчислюємо ймовірності перших рядка (справа наліво) та стовпця (знизу вгору):

$$\begin{aligned} P'_{i0}(t) &= -i\alpha_1P_{i1}(t), \quad i = \overline{1, N_1}, \\ P'_{0j}(t) &= -j\alpha_2P_{1j}(t), \quad j = \overline{1, N_2}. \end{aligned} \quad (18)$$

7. Знаходимо границі ймовірностей перших рядка і стовпця матриці (14) при $t \rightarrow +\infty$.

8. Розраховуємо ймовірності вигравів та середні значення числа неушкоджених бойових одиниць обох сторін по завершенню бою та робимо відповідний висновок.

На цьому етапі можна запропонувати курсантам (студентам) самостійно створити код для розв'язання поставленої задачі. Якщо для певних курсантів ця задача виявиться складною, то можна надати їм блоки розв'язаної задачі в залежності від того, на якому етапі ця проблема виникла. Дані блоки представлені у таблиці 1.

Таблиця 1. Етапи розв'язання задачі за допомогою MATLAB

№ п/п	Код в MATLAB	Пояснення до блоку
1.	<code>N1=5; N2=2; a1=0.5; a2=0.8; syms t y(t);</code>	Введення початкових даних, позначення функції та змінної.
2.	<code>a= N1*a1+N2*a2; P(N1+1,N2+1)=exp(-a*t);</code>	Знаходження $P_{N_1N_2}(t)$ за формулою (15)
3.	<code>for j=1:(N2-1) p(t)= P(N1+1,N2-j+2)*N1*a1; Dy=diff(y) a=N1*a1+(N2-j)*a2; z=Dy== -a*y+p(t) P(N1+1,N2-j+1)=dsolve(z, 'y(0)=0'); end;</code>	Блок, в якому розв'язуються диференціальні рівняння, що дозволяють знайти ймовірності останнього рядку матриці $P_{N_1j}(t), j = \overline{1, N_2 - 1}$ за формулами (16).
4.	<code>for i=1:(N1-1) g(t)=P(N1-i+2,N2+1)*N2*a2; Dy=diff(y) a=(N1-i)*a1+N2*a2; z=Dy== -a*y+g(t) P(N1-i+1,N2+1)=dsolve(z, 'y(0)=0'); end;</code>	Блок, в якому розв'язуються диференціальні рівняння, що дозволяють знайти ймовірності останнього стовпця матриці $P_{iN_2}(t), i = \overline{1, N_1 - 1}$ за формулами (16).
5.	<code>for i=1:(N1-1) for j=1:(N2-1) p(t)=(N1-i)*a1*P(N1-i+1,N2-j+2) g(t)=(N2-j)*a2*P(N1-i+2,N2-j+1) Dy=diff(y); a=(N1-i)*a1+(N2-j)*a2 z=Dy== -a*y+p(t)+g(t) P(N1-i+1,N2-j+1)=dsolve(z, 'y(0)=0'); end; end;</code>	Знаходження всіх інших ймовірностей матриці $P_{ij}(t), i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}$, крім перших рядка і стовпця за формулою (17).
6.	<code>for i=0:N1 Dy=diff(y) z=Dy==(N1-i)*a1*P(N1-i+1,2)</code>	Блок для першого стовпця матриці за формулами (18).

№ п/п	Код в MATLAB	Пояснення до блоку
	$P(N1-i+1,1)=dsolve(z, 'y(0)=0');$ end;	Блок для першого рядка матриці робиться аналогічно, тому надавати його готовим курсантам не потрібно.
7.	for i=1:(N1+1) P(i, 1)=limit(P(i, 1),t,inf); end; for j=1:(N2+1) P(1,j)=limit(P(1,j),t,inf) end;	Для отримання кінцевого результату границі треба знаходити тільки для ймовірностей $P_{i0}(t)$ та $P_{0j}(t)$.
8.	M1=0; P1=0; for i=1:(N1+1) M1=M1+(i-1)*P(i,1); P1=P1+P(i,1); end;	Обчислення середніх значень числа неушкоджених бойових одиниць по завершенню бою та ймовірностей виграшу сторони 1. Аналогічно виконується для сторони 2.

Джерело: авторська розробка.

По завершенню роботи курсанти (студенти) мають надати звіт, що включає постановку задачі, її реалізацію в MATLAB та висновки стосовно результатів бою.

Розв'язання задачі в загальному випадку за допомогою MATLAB сприяє більш глибокому аналізу кроків розв'язання задачі і її результатів. Потрібно зауважити, що ті курсанти, які не дуже налаштовані на довге розв'язання диференціальних рівнянь, з радістю працюють з комп'ютером і тим самим поринають у суть задачі і її результатів.

При створенні завдань за варіантами для курсантів потрібно звернути увагу на те, що для початкових кількостей бойових одиниць більше 10 програма може виконувати обчислення більше 15 хвилин, що ускладнює перевірку правильності написання коду. Приклад, який був розв'язаний на початку заняття також можна використовувати для перевірки коректності програми.

Це заняття доцільно планувати для обов'язкових дисциплін в ВВНЗ, оскільки воно має професійну спрямованість.

ОБГОВОРЕННЯ

Авторами вперше запропоновано інтегроване заняття для ВВНЗ зі стохастичного моделювання із застосуванням ІТ технологій. Такі заняття підвищують мотивацію курсантів до вивчення математичних дисциплін і застосування математики у своїй професійній діяльності. Базу таких занять потрібно в подальшому поповнювати.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведення інтегрованого заняття підвищує зацікавленість курсантів у вивченні математики та застосуванні її інструментів у професійній діяльності. Детальний опис розв'язання розглянутої в роботі моделі Ланчестера можна використовувати для побудови та розв'язання подібних стохастичних моделей у військовій справі, економіці, інженерії та ін. Запропоноване інтегроване заняття може бути впроваджене при вивченні таких математичних дисциплін, як "Теорія ймовірностей", "Теорія випадкових процесів" та "Системи масового обслуговування".

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Віра, М., & Самусенко, П. (2024). Розв'язання задач лінійного програмування із застосуванням програмного засобу Geogebra. *Фізико-математична освіта*, 39(1), 14–20.
2. Михалевич, В.М. (2004). *Maple. Комп'ютерна підтримка курсу вищої математики в технічному вузі*. ВНТУ.
3. Співаковський, О. В. (2003). *Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей*. Айлант.
4. Фурсенко, О., Черновол, Н., & Бобрицька, Г. (2024). Математичні моделі бойових дій як засіб вдосконалення професійної орієнтованості викладання математичних дисциплін у ВВНЗ. *Фізико-математична освіта*, 39(1), 64–69. <https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-09>.
5. Халанчук, Л. В. (2021). Застосування пакету MathCAD на лабораторних заняттях з вищої математики. *Матеріали II Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2021» Форум молодих дослідників», 12 листопада 2021 року*. (с. 149-150). Суми.
6. Armstrong, M.J. (2011). A verification study of the stochastic salvo combat model. *Annals of Operations Research*, 186, 23-38.
7. Schaffer, M.B. (1968). Lanchester models of guerrilla engagements. *Operations Research*, 16(3), 457-488.
8. Thomas, W.L. (2000). The Stochastic Versus Deterministic Argument for Combat Simulations: Tales of When the Average Won't Do. *Military Operations Research*, 5(3), 9-28.
9. Vesa, K. (2015) A Combat Equation Derived from Stochastic Modeling of Attrition Data. *Military Operations Research*, 20(3), 49-69.
10. Wang, J. (2024) The Application of MATLAB in the Mathematics Teaching of Computer Majors. *Scalable Computing: Practice and Experience*, 25(4). <https://doi.org/10.12694/scpe.v25i4.2889>

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Vira, M., & Samusenko, P. (2024). Rozv'yazannya zadach liniynoho prohramuvannya iz zastosuvannyam prohramnoho zasobu Geogebra. [Solving linear programming problems using the Geogebra software tool]. *Physical and mathematical education*, 39(1), 14–20. (in Ukrainian).
2. Mykhalevych, V.M. (2004). *Maple. Komp'yuterna pidtrymka kursu vyshchoyi matematyky v tekhnichnomu vuzi*. [Maple. Computer support for the course of higher mathematics in a technical university]. VNTU. (in Ukrainian).

3. Spivakov's'kyi, O. V. (2003). *Teoriya i praktyka vykorystannya informatsiynykh tekhnolohiy u protsesi pidhotovky studentiv matematychnykh spetsial'nostey*. [Theory and practice of using information technologies in the process of training students of mathematical specialties]. Aylant. (in Ukrainian).
4. Fursenko, O., Chernovol, N., & Bobryts'ka, H. (2024). Matematychni modeli boyovykh diy yak zasib vdoskonalennya profesiynoyi oriyentovanosti vykladannya matematychnykh dysyplin u VVNZ. [Mathematical models of combat operations as a means of improving the professional orientation of teaching mathematical disciplines in military universities]. *Physical and mathematical education*, 39(1), 64–69. <https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-09>. (in Ukrainian).
5. Khalanchuk, L. V. (2021). Zastosuvannya paketu MathCAD na laboratornykh zanyattakh z vyshchoyi matematyky. [Application of the MathCAD package in laboratory classes in higher mathematics]. *Materials of the 2nd All-Ukrainian scientific and methodical internet conference of students, postgraduates and young scientists "Development of intellectual skills and creative abilities of pupils and students in the process of learning the disciplines of the science and mathematics cycle "ITM*plus-2021" Forum of young researchers"*, November 12, 2021. (pp. 149-150). Sumy. (in Ukrainian).
6. Armstrong, M.J. (2011). A verification study of the stochastic salvo combat model. *Annals of Operations Research*, 186, 23-38.
7. Schaffer, M.B. (1968). Lanchester models of guerrilla engagements. *Operations Research*, 16(3), 457-488.
8. Thomas, W.L. (2000). The Stochastic Versus Deterministic Argument for Combat Simulations: Tales of When the Average Won't Do. *Military Operations Research*, 5(3), 9-28.
9. Vesa, K. (2015) A Combat Equation Derived from Stochastic Modeling of Attrition Data. *Military Operations Research*, 20(3), 49-69.
10. Wang, J. (2024) The Application of MATLAB in the Mathematics Teaching of Computer Majors. *Scalable Computing: Practice and Experience*, 25(4). <https://doi.org/10.12694/scpe.v25i4.2889>

Матеріал надійшов до редакції 02.10.2024р.



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.