Сумський державний університет імені А.С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Сіра Інна Сергіївна

РІЗНІ ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Освітня галузь: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота

на здобуття освітнього ступеня магістр

Науковий керівник:

__________________ Мартиненко О.В.

кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики, фізики та
методик їх навчання

«______»_________________2021 року

Виконавець:

___________________І.С. Сіра

«______»_________________2021 року

Суми 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Теорія границь числових послідовностей є однією з фундаментальних теорій математики, а операція граничного переходу - одним з основних її інструментів. Формування цієї науки, як і самого поняття границі числової послідовності, починається ще в VII ст. до н.е., проте, чіткого визначення воно набуває лише в XIX ст. У цей час теорія границь числових послідовностей стає окремим розділом математичного аналізу, у її розбудову неоціненний внесок роблять О.Л. Коші, Ж.Л. Даламбер, Б. Больцано, К. Вейєрштасс та інші видатні вчені.

Відомо, що основні поняття математичного аналізу, зокрема, похідна, інтеграл, сума числового ряду, площа, об'єм означаються за допомогою операції граничного переходу. Розуміння різних поглядів і підходів до введення самого поняття границі числової послідовності, її властивостей дозволяє окреслити для дослідження певні класи задач з різних наукових напрямів і є важливим чинником при їх розв'язуванні. Тому тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

Метою дослідження є аналіз різних підходів до означення поняття границі числової послідовності та виявлення специфіки теорії при кожному з них.

Відповідно до мети були поставлені такі **завдання дослідження:**

1. Вивчити наукову літературу з теми дослідження.
2. Дослідити різні підходи до введення поняття границі числової послідовності та описати її властивості при кожному з них.
3. Показати еквівалентність різних означень границі числової послідовності.
4. Показати застосування методу границь числових послідовностей при розв'язуванні різних класів задач.

Об'єкт дослідження – теорія границь.

Предмет дослідження –теорія границь числових послідовностей.

Методи дослідження. Для виконання поставлених завдань використано теоретичні методи: аналіз, синтез, систематизація, які дозволяють опрацьовувати наукову літературу, виявити та систематизувати необхідні наукові теорії та погляди, а також емпіричні методи.

Наукова новизна одержаних результатів. Систематизація та узагальнення наукових положень різних підходів до побудови теорії границь, окреслення класів задач на застосування методу границь числових послідовностей.

Практичне значення одержаних результатів. Результати роботи можуть бути використані під час вивчення теоретичного курсу математичного аналізу.

Апробація результатів. Основні положення та результати дослідження були представлені для обговорення на засіданнях кафедри математики; на ІІ Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ*плюс-2021 Форум молодих дослідників»; IV Міжнародній науково-методичній конференції «Розвиток інтелектуальних вмінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ*плюс-2021»; студентській звітній конференції 2021.

Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел. У першому розділі роботи досліджено теоретичні основи побудови теорії границь числових послідовностей, а саме: історичні передумови розвитку, основні положення теорії границь; розглянуто границю числової послідовності метричному просторі. У другому розділі роботи розглянуто практичні аспекти застосування теорії границь числових послідовностей, а саме: застосування операції граничного переходу при формулюванні фундаментальних математичних понять; застосування методу границь числових послідовностей при розв’язуванні задач.

У роботі прийнята подвійна нумерація формул та подвійна нумерація теорем і лем, де перша цифра відповідає номеру розділу, а друге число – номеру формул, теорем або лем в даному розділі. Числа в квадратних дужках є посиланням на літературу, список якої наведено наприкінці роботи.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОБУДОВИ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

1.1. Історичні передумови виникнення поняття границі числової послідовності

Математика є однією зі стародавніх наук світу, зародження якої почалося ще до нашої ери. Здавалося б, вона повністю відкрита і знайома світу, але кожне століття вносить зміни. Розвиток математичної науки супроводжувався під дією двох понять «дискретного» і «неперервного». Ці поняття є досить різними й частково суперечать одне одному. Саме під їх впливом здійснювався розвиток теорії границь числових послідовностей.

Дискретне прагне описати природу і математику, розділивши її на частини, за допомогою різних елементів (термінів). Неперервне прагне показати, що математика, як і природа, весь час змінюється. Поняття неперервності, яке було розвинуте Ньютоном і Лейбніцом, приводить нас до диференціального й інтегрального числення, і спрямовує до окремої вітки математики - математичного аналізу. На відмінну від попереднього поняття, дискретне, базується на послідовності $1, 2, 3, \dots$ й охоплюється алгеброю, теорією чисел і символічною логікою. Єдина наука, яка містить у собі неперервне і дискретне - геометрія. [2, с.23]

Розглядаючи формування поняття границі числової послідовності, ми можемо виділити декілька важливих етапів, які сприяли виникненню теорії границі числової послідовності як окремого розділу математичного аналізу.

Перший етап становлення відносять ще до VII ст. до н.е. У цей час самого поняття «границі» не існує, в основі досліджень лежить числення нескінченно малих величин. Воно розпочинається від інтуїтивного уявлення греків про неперервність, математичну нескінченність і границю, а також із труднощів, з якими зіткнулися вчені при спробах визначити ці поняття. [6, с.234]

Часи Піфагора стають продовженням першого етапу становлення поняття границі. У цей час учені основну увагу приділяють дослідженням у сфері раціональних чисел, саме піфагорійці відкривають їх у вигляді несумірних відрізків прямої лінії. Припускають, що це відкриття було зроблене у зв’язку з дослідженням середнього геометричного $(a : b = b : c)$, величиною, яка цікавила піфагорійців і була символом аристократії. Поставало питання: «Чому дорівнює середнє геометричне одиниці й двійки?». Саме пошук відповіді на нього приводить до вивчення задачі про відношення сторони й діагоналі квадрата. Вчені виявляють, що таке відношення існує, проте воно виражається деякою іншою величиною, тобто раціональним числом, яке на той час ще не було відкрите. [25, с.58]

Для ранніх піфагорійців було відомим і доведеним твердження, що будь-які два відрізки порівняні між собою, а це означає, що завжди знайдеться третій відрізок, який вимірює обидва ці відрізки. Це підтверджувала: практика вимірювання і вчення Демокріта, згідно з яким всі дійсні відрізки являють собою прямі ланцюжки з кінцевого числа атомів і, отже, завжди є сумірними.

Проте самі піфагорійці в рамках створеної ними арифметики дослідили явище, яке суперечить їх уявленню про існування спільної міри двох довільних відрізків. А саме, вони з’ясували, що для будь-якого відрізка і діагоналі, побудованої на цьому відрізку квадрата, існування спільної міри суперечить створеній ними теорії подільності. [17, с.30]

Кожне число для піфагорійців було дискретним набором одиниць, але спроба ототожнити цілі числа з неперервними величинами, інтерпретувати неперервне в термінах дискретного, ні до чого не привела і швидко зазнала краху. Розв’язанню цієї проблеми, сприяло відкриття ірраціональних чисел. Розглядаючи задачу про відношення сторони й діагоналі квадрата, вчені не знаходять спільної одиниці їх виміру, і називають ці відрізки - несумірними. Взаємна відповідність між величиною і числом, виявляється порушеною. Поставало питання: «Якщо кожному числу відповідає деяка довжина, то які числа потрібно співставити несумірним величинам?». [6, с.235]

Наслідки, що випливають з цієї задачі, стосуються понять нескінченного, границі й неперервності – понять, які складають стрижень сучасного математичного аналізу. [2, с.31]

У своїх роздумах греки намагалися обійти поняття нескінченного, що підтверджують парадокси Зенона Елейського. [6, с.235]

Белл Е.Т. у своїй книзі «Творці математики. Попередники сучасної математики» говорить, що Зенон суперечив «нескінченному поділу двовимірного відрізка». Підтвердженням цьому є парадокси «Дихотомія» й «Ахіллес і черепаха». Вони показують, що Зенон суперечив і проти зворотного припущення, а саме, що відрізок не є «нескінченно подільним», але складається з дискретної множини точок, які можна занумерувати числами $1, 2, 3, \ldots$. Додаючи ще два парадокси «Стріла» і «Стадіон», ми отримуємо досить «незламну стіну» із-за якої знайти щось нове, неможливо. [2, с.33]

Всі наведені парадокси пов’язані з поняттям границі, яке стало основним поняттям числення нескінченно малих величин. У своїх перших двох парадоксах, спрямованих проти руху, Зенон припускає, що простір і час нескінченно подільні, а у двох інших – що вони є неподільними. При обох припущеннях вчений показує суперечність прийнятого на той час уявлення про рух. У своїх доказах Зенон демонструє, що обидва припущення невірні. [6, с.238]

Отже, на цьому етапі нематематичною мовою були вперше сформульовані труднощі, які приводять до понять неперервності й нескінченності. [2, с.34]

З відкриттям несумірних величин, розпочинається другий етап становлення поняття границі числової послідовності. Розвивається теорія пропорцій Евдокса, яка є спробою ввести до розгляду несумірні величини. Вона лежить в основі методу вичерпування, який дозволив розв’язувати задачі, що в надалі стануть предметом числення нескінченно малих величин.

Значну роль в методі вичерпування відіграє аксіома Архімеда: якщо задані дві нерівні величини та від більшої віднімається частина (більша половина), а із залишку – знову частина (більша половина), і це повторюється постійно, то коли-небудь залишиться величина, яка буде меншою, ніж менша із заданих величин.

Метод вичерпування розвивали декілька вчених, але кожен з них мав свій підхід. Головною ідеєю методу є порівняння площ фігур: наприклад, параболічного сегмента з відомою площею будь-якої фігури (квадрата або трикутника).[6, с.240] Так, для обчислення площі вписаного в параболічний сегмент многокутника, Архімед сумував площі вписаних трикутників, тобто обчислював суму n перших членів геометричної прогресії, уникаючи обчислення суми нескінченної прогресії.[6, с.241] При конкретному застосуванні методу, Архімед не звертався до поняття многокутник з нескінченною кількістю сторін. Вчений збільшував кількість сторін многокутника до тих пір, поки величина залишку не ставала як завгодно малою, але залишок завжди залишався. Таким чином, обчислені наближені площі не вичерпували шукану площу. Проте цим і відрізнялися методи XVII ст., навіяні античними. [6, с.242]

Наступним, третім етапом становлення поняття границі числової послідовності, слугує розвиток методу Архімеда, який вважається історично першим методом границь. Застосовуючи свій метод вичерпування, вчений знаходить площі й об'єми, будує дотичні, які являють строгі граничні переходи. Також цей метод включає доведення існування і єдиності шуканих величин. В основу методу інтегральних сум Архімед поклав наступне твердження: якщо два числа S і c увесь час знаходяться між двома послідовностями $\overline{S_n}$ і $\underline{S_n}$ (тобто для будь-якого натурального n виконується $\underline{S_n} \leq S \leq \overline{S_n}$ і $\underline{S_n} \leq c \leq \overline{S_n}$), одна з яких зростає, а інша - спадає, при чому так, що різниця між ними «вичерпується» (тобто $\overline{S_{n+1}} - \underline{S_{n+1}} \leq \frac{1}{2}\left(\overline{S_n} - \underline{S_n}\right)$) або навіть необмежено спадає (прямує до нуля при $n \to \infty$), то $S = c$ і їх спільне значення є границею як $\underline{S_n}$, так і $\overline{S_n}$ при $n \to \infty$. [17, с.172]

Метод Архімеда вільно застосовували С. Стевін і Л. Валеріо. Фламандський інженер С. Стевін розглядав нескінченні ряди й вважав, що ряд можливо продовжувати до тих пір, поки різниця між криволінійною фігурою, і її прямолінійним наближенням не стане як завгодно малою. При такому підході метод вичерпування ставав більш зручним.[6, с.248] Удосконаленням цього методу, займався римський професор Лука Валеріо, який раз і назавжди встановлює, що різниця між площами фігури, вписаної в сегмент опуклої плоскої кривої, й описаних навколо неї східчастих фігур, які складаються з рівно високих паралелограмів, може бути менше будь-якої даної площі, якщо взяти досить малу їх висоту. Інше загальне твердження, яке ввів учений, у сучасній термінології можна сформулювати так: якщо члени двох монотонних збіжних послідовностей знаходяться в постійному відношенні, то в цьому ж відношенні знаходяться і їх границі. Проте, ні явного визначення поняття границі, ні особливого терміну для нього на той час не існувало. Підбиваючи підсумки третього періоду розвитку теорії границь, можемо стверджувати, що він обмежується лише деякими відомостями про монотонні послідовності, а також апроксимацією геометричних фігур. Така ситуація тривала до кінця XVIII ст. [31, с.13]

Подальший розвиток теорії границь можемо побачити у працях Й. Кеплера, Б. Кавальєрі, Є. Торрічеллі, Ж.П. Роберваля, роботи яких ми відносимо до четвертого етапу розвитку теорії границь. Йоган Кеплер у своїх дослідженнях повністю відкинув класичні методи, які розвивали Стевін і Валеріо. Він розбивав площі й об’єми фігур на нескінченну множину нескінченно малих елементів однієї розмірності та інколи користувався мовою неподільних. Кеплер у своїх дослідженнях ототожнював поняття нескінченно малої площі та лінії; кола і правильного многокутника з нескінченною кількістю сторін. Він не використовував жодних доведень, проте зробив досить вагомий внесок у розбудову математичної науки. [6, с.248]

Подальші дослідження в цьому напрямку проводив Бонавентура Кавальєрі. Його метод неподільних висвітлений у праці під назвою: «Геометрія, викладена новим способом за допомогою неподільних і неперервного». Одним з цікавих елементів, який можна помітити в роботі вченого, є означення неподільних: «Неподільні – це нескінченно малі елементи, які складають площі й об’єми». При такому підході плоска фігура розглядається як множина ліній; просторове тіло – як тіло, що складається з деякої кількості паралельних площин.

Визначаючи відношення площ фігур, Кавальєрі розглядав їх як неподільні, що знаходяться в постійному відношенні. [6, с.249]

Еванджеліста Торічеллі вдосконалив метод неподільних. Він розглядав циліндричні неподільні, в той час як Кавальєрі працював тільки з плоскими.

Незалежно від Кавальєрі метод неподільних розробив Жиль Персон де Роберваль, але на відмінну від свого попередника, він не використовував геометричний підхід. В основу досліджень Роберваля було покладено роздуми Стевіна і Валеріо, які розглядали нескінченні ряди. Роберваль, на противагу Кавальєрі, який стверджував, що площа складається з «ліній», виходив із припущення, що вона складається із площ.

Ж.П. Роберваль використовував неподільні для визначення площі, яка містилася в середині дуги циклоїди. На той час (XVII ст.) це буда наймодніша крива, яка дозволила геометрам виробити нову методику, що стала основою числення нескінченно малих. [6, с.251]

Аналогічні ідеї у своїй праці «Геометричний труд», яка вийшла до друку у 1647 р., розвивав фламандець Григорій із Сен Версана. Регулярно застосовуючи метод вичерпування, він надав йому загальної структури для подальшого використання. Структуру методу вчений показав на прикладі вписування в два тіла множини дуже тонких паралелепіпедів, підкресливши, що їх кількість може збільшуватися так, щоб вони вичерпували обидва тіла. Така структура дістала назву «метод вичерпування». [31, с.13]

Ймовірно, що саме Григорій із Сен Версана вперше висловив думку, що нескінченний ряд визначає деяку величину, «термінус», яку цей ряд не досягне, навіть якщо його продовжити нескінченно, проте наблизиться до неї так близько, що різниця буде меншою за будь-який наперед заданий інтервал. [6, с.253]

Підсумовуючи цей етап, скажемо, що не випадково на початку XVII ст. з’явилося так багато досліджень, присвячених нескінченно малим величинам, адже методи з використанням нескінченно малих створювалися для розв’язування нагальних задач цієї епохи. Грецький метод вичерпування перевершував інтегральне числення і дозволяв знаходити квадратури, об’єми тіл і центри тяжіння. У цей період в методі квадратур широко використовувалися античні методи, які були звільнені від подвійного доведення методом від супротивного. У той час давні греки наближали криволінійні фігури довільними многокутниками, деякі геометри почали систематично користуватися вписаними многокутниками. [6, с.254]

Розвиток науки потребував нових досліджень у напрямі нескінченно малих величин, тому саме вони формують п'ятий період розвитку теорії границь. Цей період припадає на роботи відомих світу французьких математиків П'єра Ферма і Блеза Паскаля, які зробили досить вагомий внесок у розбудову теорії границь.

Ближче до середини XVII ст. математики досягали все більшої майстерності в поводженні з поняттями, що лежали в основі числення нескінченно малих, а нові прийоми, які вони створювали й вдосконалювали, ставали все більш дієвими. Так, при обчисленні криволінійних площ поступово складався метод квадратур, який містив всі елементи, необхідні для визначення інтеграла як границі сум. Вивчення руху, при якому потрібно було визначити миттєву швидкість при відомій залежності пройденого шляху від часу, і пошук дотичних до кривих містили в зародку обчислення приростів і похідних. Виокремлення цих понять також дозволило розв'язувати задачі на максимум і мінімумі, підійти до задачі спрямлювання кривих. [6, с.263]

У цей період стрімко розвивається метод дотичних Г. Галілея - Ж. Роберваля, метод нормалей і дотичних Р. Декарта, метод екстремумів і дотичних П. Ферма. Зв'язок між наведеними методами й задачами довгий час був не помітним.

Окремим, шостим періодом розвитку теорії границь варто виділити час Джона Валліса, який займався дослідженням нескінченних рядів. Важливою працею англійського вченого Джона Валліса є книга «Арифметика нескінченних», яка стояла поруч з найбільш відомою книгою цього періоду «Геометрією неподільних» Кавальєрі. Робота Валліса відступала від геометрії древніх і була спрямована в «нову арифметику». Вчений став першим математиком, у якого алгебра дійсно перейшла в аналіз. Методи, які застосовував Дж. Валліс до нескінченних процесів, досить часто виявлялися примітивними, проте він отримував нові цікаві результати. Дж. Валліс володів знаннями про нескінченні ряди та нескінченне множення, він досить сміливо користувався уявними виразами та виразами з від'ємними й дробовими показниками. [25, с.138]

Сьомий період розвитку теорії границь супроводжується чітким розумінням зв'язку між задачею про квадратури і задачею про дотичні. Цей зв'язок першим помічає англієць Джеймс Грегорі, який, так само як і Дж. Валліс, у своїх дослідженнях застосовує суто алгебраїчні методи. За час своїх досліджень Дж. Грегорі описує зв'язок цих задач у своїй книзі «Геометрія».

Першим, хто усвідомив, що задача про дотичну є зворотною до задачі про квадратури й навпаки, був Ісаак Барроу. Ферма і Барроу зовсім близько підійшли до відкриття загальних методів, завдяки яким числення нескінченно малих стало самостійною віткою математики. Ферма володів аналітичними методами, в той час, як Барроу використовував геометричні методи. Численні передвісники границі, які виникли в XVII ст. дозволили накопичити значну кількість результатів для становлення теорії диференціального й інтегрального числення. [6, с.264]

Восьмий період розвитку теорії границь, який стає початком систематизації накопичених знань, відкривають Ісаак Ньютон і Готфрід Вільгельм Лейбніц. Ці вчені, винайшли (окремо один від одного) зручні алгоритми та виявили зв'язок між задачами диференціального й інтегрального числення. Завдяки їхнім працям аналіз нескінченно малих перетворився на самостійний розділ математики, незалежний від геометрії. [6, с.265]

Ньютон написав усього три праці про числення нескінченно малих. Його дослідження про швидкості, прискорення, дотичні та кривизну, наведені в роботі «Математичні начала натуральної філософії», слугували потужним поштовхом до досліджень в області числення нескінченно малих.

У працях Ньютона можна знайти три різних концепції числення нескінченно малих: інфінітезимальна концепція, метод флюксій, метод перших і останніх відношень. Перша концепція, склалася під впливом Барроу і Валліса. У ній Ньютон оперував нескінченно малими величинами, які він називав моментами, і які були нескінченно малими приростами у Ферма. Отже, використовуючи моменти площі, він побудував свій метод квадратур. [6, с.266]

Згодом Ньютон відмовився від нескінченно малих величин і в роботі «Метод флюксій і нескінченні ряди» ввів свій найбільш відомий метод: беручи за приклад теоретичну механіку, він розглядає час як універсальну змінну для всіх функціональних відповідностей. Сам час його не цікавив, він розглядав його тільки як рівномірний рух. Ньютон сформулював основні задачі числення нескінченно малих величин: «За даним відношенням між флюентами визначити відношення між флюксіями. І навпаки». [6, с.268]

У праці «Роздуми про квадратури кривих» Ньютон намагався «усунути слід» нескінченно малих, спочатку розглянувши, лише їх відношення, а потім розробив свій третій метод - «метод перших і останніх відношень». [6, с.269]

У ньютонівській ідеї граничного відношення відобразився вплив Барроу, проте, його новаторство полягає в тому, що застосування нескінченних рядів стало як загальним методом, так і технічним прийомом інтегрування. Він розкладав функції в нескінченні ряди й інтегрував їх почленно, поширивши законність почленного інтегрування на нескінченні суми, хоча доводив її тільки для кінцевих сум. [6, с.271]

Лейбніц в основу свого числення поклав поняття диференціала, фундаментальною операцією якого було обчислення різниць. Він уявляв собі площі й об'єми як суму нескінченно малих елементів, але обчислював значення цих сум через операцію диференціювання. На противагу Ньютону, який розглядав невизначений інтеграл, обчислював площі й об'єми, виходячи зі швидкості їх зміни, Лейбніц ввів визначений інтеграл. [6, с.274]

Вчений висловив думку про те, що нескінченно малі величини є меншими будь-якої заданої величини та, що в силу якогось незрозумілого принципу неперервності вони зберігають характер відношення між кінцевими величинами, з яких походять. Як і Ньютон, Лейбніц намагався не розглядати нескінченно малі елементи, а тільки брати їх відношення. Вузька концепція числа, яка не допускала ототожнення деяких відношень з числами, була причиною того, що ні в ньютонівській, ні в лейбніцовій теоріях не з’явилося поняття границі. Визначення диференціалів через границі нескінченних послідовностей чисел з’явилося лише після того, як були побудовані дійсні числа.

Підсумовуючи восьмий період бачимо, що диференціальне й інтегральне числення все ще не має міцного фундаменту. Такі фундаментальні поняття як границя, похідна й інтеграл, залишаються невизначеними. Означити ці поняття намагалися всі математики XVIII ст, але ці спроби були марними. [6, с.275]

Представником дев’ятого періоду розвитку теорії границь є Жан Лерон Даламбер, який остаточно відмовився від атомістичних ідей існування статичних нескінченно малих величин. У своїх дослідження предмет диференціального числення він визначав, «як спосіб диференціювання величини, тобто знаходження нескінченно малої різниці кінцевої змінної величини». Даламбер намагався обґрунтувати диференціальне числення за допомогою методу границь. Так він називав ньютонівський метод - методом першого й останнього відношень. У статті «Границя» Даламбер стверджує, що «теорія границь складає основу справжньої метафізики й диференціального числення», і намагався дати задовільне уявлення поняття границі: одна величина є границею іншої, якщо друга величина може наближатися до першої як завгодно близько. Проте йому не вдалося побудувати логічного і зв’язного вчення про границі. Отже, ми бачимо, що на той час конкретного вчення про границі поки що немає, проте вчені все ближче підходять до явного визначення поняття границі. [6, с.279]

Глибока перебудова основ математичного аналізу розпочалася в першому десятилітті XIX ст. з праць Б. Больцано, О. Коші та деяких інших математиків (К. Гаусса, Н.Х. Абеля) і отримала відносне завершення в роботах К. Вейєрштрасса у 60 – 70-их рр. XIX ст. [17, с.168] Саме цей час ми виділимо, як останній десятий період становлення поняття границі. У цей період найбільший внесок у розвиток поняття границя числової послідовності зробив О. Коші. Він поклав в основу математичного аналізу поняття границі змінної величини. У працях Коші спостерігається відмова від спроб надати граничному переходу – основній операції математичного аналізу – конструктивне означення на користь знаходження умов, необхідних або достатніх для того, щоб дана стала величина була границею даної змінної величини. При такому підході природнім стає питання про існування і єдиність границі. Необхідні й достатні умови існування границі встановлені самим Коші в 1821 р., але ще раніше (у 1817 р.) Б. Больцано. Саме в роботах Бернарда Больцано з'являється перша зрозуміла концепція основних понять числення нескінченно малих величин.

Поняття нескінченно малої величини, неперервності, суми ряду, похідної, диференціала й інтеграла ґрунтуються у Коші на основі поняття границі. Нескінченно мала величина визначається як змінна величина, що має своєю границею нуль. Збіжність ряду за Коші означає існування границі його частинних сум. Якщо ж частинні суми не прямують до жодної границі, то такий ряд Коші називає розбіжним або таким, що не має суми. [17, с.173]

Коші відмовився від геометричного підходу й означив границю як суто арифметичне поняття: «Якщо значення, які послідовно приписуються одній і тій же самій змінній, необмежено наближаються до фіксованого значення, так що врешті решт відрізняються від нього як завгодно мало, то останнє називається границею всіх останніх». [6, с.283] Слідом за Коші більшість математиків прийняли границю за основу числення нескінченно малих. [6, с.286]

Подальші дослідження, слідом за Больцано і Коші, зробив німецький математик Карл Вейєрштрасс. Досліджуючи питання про те, який сенс вкладається у вираз «змінна необмежено наближається до деякого фіксованого значення», де неявно присутні час і рух, він намагався перекласти їх в арифметичні нерівності. Так для опису нескінченних змін змінної та функції була створена «мова ε і δ»: «Якщо можливо визначити таку границю δ, що для будь-якого значення h, меншого δ за абсолютною величиною, $f(x+h)-f(x)$ буде менше деякої величини ε, як завгодно малої, то будемо говорити, що нескінченно малій зміні змінної відповідає нескінченно мала зміна функції».

Вейєрштрасс зумів надати означенню границі числової послідовності форму, дуже близьку до сучасної. [6, с.287]

Отже, можемо зробити висновок, що поняття границі розвивалося протягом десяти періодів. І тільки в останньому вчені змогли прийти до чіткого означення границі числової та повністю відокремити теорію границь від математики.

1.2. Основні положення теорії границь числових послідовностей

Далі хочемо проаналізувати основні положення теорії границь числових послідовностей. Оскільки ми чітко вказуємо, що будемо працювати з границями числових послідовностей, тому спочатку розглянемо поняття послідовності, а потім перейдемо до поняття границі числової послідовності.

Розглянемо натуральний ряд $1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$, в якому числа розміщені в порядку зростання, так що більше число $n+1$ слідує за меншим числом n (або менше число n передує більшому числу $n+1$). Якщо в цьому ряді замінити, по якому-небудь закону, кожне натуральне число n деяким дійсним числом x_n, то отримаємо числову послідовність

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \ldots \tag{1.1}$$

члени або елементи якої x_n пронумеровані всіма натуральними числами і розміщенні в порядку зростання номерів. [29, с.43-44]

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$, які утворюють послідовність, називаються членами послідовності. Член x_n, що стоїть в послідовності на якому-небудь конкретному, наприклад, n-му місці називається n-им членом, а при будь-якому натуральному n – ще й загальним членом послідовності. [27, с.95]

Числова послідовність (1.1) вважається заданою, якщо вказано правило або закон, за допомогою якого за номером місця в послідовності завжди можна назвати число, яке стоїть на цьому місці. Таким чином, числове значення послідовності $\{x_n\}$ залежить від n, тобто є функцією від n. Сама числова послідовність може розглядатися як функція, задана на множині всіх натуральних чисел. З іншого боку, якщо задана функція натурального аргументу $f(n)$, то її значення $x_n = f(n)$ утворюють числову послідовність. [3, с.72]

Розглянемо приклад утворення числової послідовності, якщо задано загальний член, наприклад,

$$x_n = \frac{(n+1)\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2+1}.$$

Надамо n послідовно значень $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ отримаємо:

$$x_1 = 1; x_2 = 0; x_3 = -\frac{2}{5}; x_4 = 0; x_5 = \frac{6}{26}; x_6 = 0; x_7 = -\frac{8}{25}, \dots .$$

Отже, маємо послідовність

$$1, 0, -\tfrac{2}{5}, 0, \tfrac{6}{26}, 0, -\tfrac{8}{25}, \dots .$$ [27, с.96]

Введемо поняття границі числової послідовності.

Число a називається границею числової послідовності (1.1), якщо для будь-якого як завгодно малого наперед заданого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх членів послідовності з номерами $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (1.2)$$ [16, с.56]

Інакше, число a буде називатися границею числової послідовності (1.1), в тому випадку, якщо яке б мале число $\varepsilon > 0$ ми не взяли, абсолютна величина різниці $(x_n - a)$ починаючи з деякого $n_0(\varepsilon)$, буде менше цього ε.

Зупинимося докладніше на з'ясуванні поняття границі, спираючись на його означення. Перш за все зауважимо, що величина $n_0(\varepsilon)$, залежить від того, яке буде довільне ε. Чим менше ε, тим більше $n_0(\varepsilon)$, проте винятком є той випадок, коли послідовність складається з однакових членів. Досить очевидним є твердження: якщо $n_2(\varepsilon) > n_1(\varepsilon)$ і нерівність (1.2) виконується при будь-яких $n > n_1(\varepsilon)$, то вона буде виконуватися і при $n > n_2(\varepsilon)$. [3, с.73]

Розглянемо декілька прикладів, розв'язання яких спирається на означення границі числової послідовності.

Доведемо, що число $a = 3$ є границею послідовності, загальний член якої має вигляд

$$x_n = \frac{4+3n^2}{n+n^2}.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і доведемо, що існує число $n_0(\varepsilon)$ таке, що для будь-якого $n > n_0(\varepsilon)$ виконуватиметься нерівність $|x_n - 3| < \varepsilon$. [27, с.110-111]

Розглянемо

$$|x_n - 3| = \left|\frac{4+3n^2}{n+n^2} - 3\right| = \left|\frac{4+3n^2-3n-3n^2}{n+n^2}\right| = \left|\frac{4-3n}{n+n^2}\right|.$$

Оскільки отриманий вираз менше нуля для всіх $n \geq 2$, то за означенням абсолютної величини числа отримаємо

$$\left|\frac{4-3n}{n+n^2}\right| = -\frac{4-3n}{n+n^2} = \frac{3n-4}{n+n^2}.$$

Якщо $a = 3$ є границею даної послідовності, то починаючи з деякого n, виконується подвійна нерівність

$$0 < \frac{3n-4}{n+n^2} < \varepsilon.$$

Покажемо, що знайдеться такий номер n члена послідовності $\{x_n\}$, починаючи з якого буде виконуватися остання нерівність Оскільки для цього потрібно знайти таке дійсне число $n_1(\varepsilon) > 0$ для якого при $n > n_1(\varepsilon)$ виконується остання подвійна нерівність.

Для спрощення міркувань застосуємо штучний прийом. Розглянемо вираз

$$\frac{3n-4}{n+n^2} < \frac{3n}{n(n+1)} = \frac{3}{n+1}$$

і покажемо, що він менший від ε. Очевидно, що нерівність

$$\frac{3}{n+1} < \varepsilon,$$

має місце для всіх $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$. Тоді для всіх натуральних значень $n > n_1(\varepsilon)$, виконується остання нерівність, а це й означає, що

$$\left|\frac{4+3n^2}{n+n^2} - 3\right| < \varepsilon.$$

Отже, число $a = 3$ є границею даної послідовності.

Далі розглянемо приклад в якому покажемо, що числова послідовність може не мати границі. Проілюструємо на послідовності $-1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$. [3, с.74]

Доведемо методом від супротивного. Оскільки загальний член даної послідовності $x_n = (-1)^n$, то припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = a$. Нехай $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тоді існує $n_0(\varepsilon)$ таке, що виконується нерівність $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ для $n > n_0(\varepsilon)$.Оскільки x_n набуває значень 1 або -1, то повинні виконуватися наступні нерівності $|1 - a| < \frac{1}{2}$ і $|-1 - a| < \frac{1}{2}$. Звідси, отримаємо:

$$2 = |1 - a + a - (-1)| \leq |1 - a| + |a - (-1)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

тобто $2 < 1$, що неможливо.

Отже, послідовність $x_n = (-1)^n$ не має границі.

Існують інші способи задання послідовності, одним із них є рекурентний спосіб задання, тобто коли відома формула за якою можна обчислити будь-який член послідовності знаючи попередній. Відомими прикладами є арифметична і геометрична прогресії.

Розглянемо, наведений спосіб задання послідовності на прикладі: довести, що послідовність $1, q^1, q^2, q^3, \dots, q^n$, ..., має границю рівну 0 при $|q| < 1$. [3, с.75]

Дійсно, $|q^n - 0| < \varepsilon$, тоді $|q^n| < \varepsilon$. Прологарифмуємо останню нерівність, отримаємо

$$n \lg|q| < \lg\varepsilon \; n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$$

Отже, для будь-якого ε відповідне число

$$n_0(\varepsilon) = E\left(\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right)$$

Далі розглянемо геометричне представлення границі числової послідовності.

Числову послідовність (1.1) можна розглядати як послідовність точок прямої. Тому про границю числової послідовності можна говорити як про точку на прямій. Розглянемо нерівність (1.2), вона рівносильна нерівності

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Тому означення границі числової послідовності можна сформулювати наступним чином.

Якщо точка a є границею послідовності точок (1.1) тоді, який би окіл $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ точки a ми не задали, знайдеться таке число $n_0(\varepsilon)$, що всі точки послідовності (1.1) з номерами $n > n_0(\varepsilon)$ потраплять в заданий окіл.

Поза цим околом може бути тільки скінченне число точок $x_1, x_2, \dots, x_n$. Якщо взяти $\varepsilon' < \varepsilon$, то окіл $(a - \varepsilon'; a + \varepsilon')$ буде міститися в околі $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Відповідно в нього потраплять точки послідовності, починаючи з більш високого номера.

Загальний член x_n є змінною, що приймає цю послідовність значень. Тому границя послідовності (1.1), також, називається границею змінної x. [3, с.76]

З означення границі числової послідовності випливає наступне твердження: якщо послідовність має границю, то вона є збіжною; якщо послідовність не має границі, то вона - розбіжна. [10, с.113]

Існує ще одне означення границі числової послідовності, яке дається на основі поняття нескінченно малої величини.

Послідовність $\{x_n\}$, границею якої є число 0, називається нескінченно малою величиною або нескінченно малою.

Якщо в класичному означенні границі числової послідовності $a = 0$, то нерівність (1.2) набуде вигляду $|x_n - a| = |x_n| < \varepsilon$. Отже, означення нескінченно малої величини можна сформулювати наступним чином: послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно малою, якщо вона за абсолютною величиною менше як завгодно малого наперед заданого $\varepsilon > 0$.

У першому означенні, границі числової послідовності, яке ми розглянули, бачимо, що різниця між змінною та її границею $(\alpha_n = x_n - a)$ є нескінченно малою, оскільки в силу нерівності (1.2) маємо, що $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ для будь-якого $n > n_0(\varepsilon)$. І навпаки, якщо α_n є нескінченно малою, то $x_n \to a$. Це приводить до наступного твердження: для того, щоб послідовність $\{x_n\}$ мала своєю границею постійне число a, необхідно і достатньо, щоб різниця між ними $\alpha_n = x_n - a$ була нескінченно малою.

У зв'язку з цим введемо наступне означення границі числової послідовності.

Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо різниця між ними є нескінченно мала величина.

Отже, якщо $x_n \to a$, то x_n можна представити у вигляді $x_n = a + \alpha_n$,де α_n – нескінченно мала, і навпаки. [29, с.47-48]

Оскільки границя числової послідовності, може набувати різних значень, включаючи й нуль, то справедливою є наступна теорема.

Теорема 1.1. Якщо $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ і $a > b$ $(a < b)$, то значення змінної x_n, починаючи з деякого n будуть також більші (менші) за деяке число b.

Доведення. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ і $a > b$ $(a < b)$. Візьмемо окіл $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ точки a, де ε менша відстань між точками a і b, тобто $\varepsilon < a - b$ $(a - \varepsilon > b)$. Таке ε бажано взяти для того, щоб точка b виявилася поза околом. Тоді за означенням границі числової послідовності матимемо, що для будь-якого як завгодно малого наперед заданого $\varepsilon > 0$ існує $n_0(\varepsilon)$ таке, що виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, звідси $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ для $\forall n > n_0(\varepsilon)$. Отже, починаючи з $n = n_0(\varepsilon) + 1$, маємо $x_n > a - \varepsilon > b$, тобто $x_n > b$.

Зауважимо, що випадок $a < b$ доводиться аналогічно.

З геометричної точки зору: якщо послідовність точок прямої $\{x_n\}$ прямує до точки a, і точка a лежить правіше будь-якої точки b, то і всі точки послідовності, починаючи з деякого $n_0(\varepsilon)$, лежать правіше від точки b. [3, с.82]

Розглянемо теорему, яка лежить в основі операції граничного переходу.

Теорема 1.2. Послідовність може мати тільки одну границю.

Доведення. Доведемо методом від супротивного. Нехай послідовність $\{x_n\}$ має дві різні границі a і b $(a \neq b)$. Тоді, для будь-якого $\varepsilon > 0$, існують числа

$n_1(\varepsilon)$ і $n_2(\varepsilon)$ такі, що при $n > n_1(\varepsilon)$ виконується нерівність $|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, а при $n > n_2(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Візьмемо яке-небудь число $n_0(\varepsilon)$, більше кожного із чисел $n_1(\varepsilon)$ і $n_2(\varepsilon)$, отримаємо, що при $n > n_0(\varepsilon)$ будуть виконуватися нерівності:$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ і $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Але тоді

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, для $n > n_0(\varepsilon)$ будемо мати: $|a - b| < \varepsilon$. Проте ця нерівність неможлива, оскільки ε як завгодно мале довільне додатне число, а абсолютна величина різниці двох різних заданих чисел не може бути менше будь-якого наперед заданого додатного числа. Отримали протиріччя, отже, якщо послідовність має границю, то вона єдина. [27, с.113]

Перейдемо до розгляду теорем, які стосуються операції граничного переходу.

Теорема 1.3. Якщо дві послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ при будь-яких їх змінах рівні, причому кожна має свою границю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то рівні і їх границі $a = b$.

Доведення. Оскільки $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ позначають одну послідовність, то за теоремою 1.2, $a = b$. [29, с.56]

Теорема 1.4. Якщо для двох послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$завжди виконується нерівність $x_n \geq y_n$, при чому кожна із них має границю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то і $a \geq b$.

Доведення. Доведемо методом від супротивного. Нехай $a < b$. Візьмемо яке-небудь число r між числами a і b $(a < r < b)$. Тоді, з одного боку, знайдеться такий номер $n_1(\varepsilon)$, що для $n > n_1(\varepsilon)$ буде виконуватися нерівність $x_n < r$, з іншого боку – знайдеться і такий номер $n_2(\varepsilon)$, що для $n > n_2(\varepsilon)$ виконуватиметься $y_n > r$. Якщо $n_0(\varepsilon)$ більше обох чисел $n_1(\varepsilon)$ і $n_2(\varepsilon)$, то для номерів $n > n_0(\varepsilon)$ будуть одночасно виконуватися обидві нерівності $x_n < r$ і $y_n > r$, звідси, $x_n < y_n$, що суперечить умові. [29, с.56]

Теорема 1.5. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мають границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $a < b$, то знайдеться такий номер $n_0(\varepsilon)$, що $n > n_0(\varepsilon)$ виконуватиметься нерівність $x_n < y_n$.

Доведення. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$, нехай це буде $\frac{b-a}{2}$, тоді

$$a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$b - \varepsilon = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

З цього випливає, що $a + \varepsilon = b - \varepsilon$. Оскільки a – границя $\{x_n\}$, то знайдеться номер $n_1(\varepsilon)$ такий, що

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \tag{1.3}$$

при $n > n_1(\varepsilon)$.

Оскільки b – границя $\{y_n\}$, то знайдеться номер $n_2(\varepsilon)$ такий, що

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon \tag{1.4}$$

при $n > n_2(\varepsilon)$.

Нехай число $n_0(\varepsilon) > n_1(\varepsilon)$ і $n_0(\varepsilon) > n_2(\varepsilon)$. Тоді при $n > n_0(\varepsilon)$, одночасно виконуються відношення (1.3) і (1.4), так що $x_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon < y_n$.

Отже, $x_n < y_n$. [27, с.115]

Зауважимо, що з теорем 1.3-1.5 випливає, що знаки рівності й нестрогої нерівності зберігаються при граничному переході. Що ж стосується граничного переходу в строгій нерівності $(x_n < y_n)$, то при переході до границі може з’явитися знак рівності $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n\right)$. [3, с.83] Покажемо це на прикладі, розглянемо послідовності, загальні члени яких дорівнюють

$$x_n = -\frac{2}{5n}, \qquad y_n = \frac{2}{5n}$$

Очевидно, що $x_n < y_n$ для будь-яких n, у той час як $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Перейдемо до розгляду теореми, яка застосовується при встановленні існування й величини границі послідовності.

Теорема 1.6. Якщо для послідовностей $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ завжди виконується нерівність $x_n \leq y_n \leq z_n$, при чому послідовності $\{x_n\}$ і $\{z_n\}$ прямують до однакової границі a: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то і послідовність $\{y_n\}$ має ту саму границю $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доведення. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий номер $n_1(\varepsilon)$, що при $n > n_1(\varepsilon)$ виконується нерівність $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Потім, знайдеться такий номер $n_2(\varepsilon)$, що при $n > n_2(\varepsilon)$ виконується нерівність $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$.

Нехай $n_0(\varepsilon)$ буде більшим за $n_1(\varepsilon)$ і $n_2(\varepsilon)$, тоді при $a > n_0(\varepsilon)$, виконуються обидві попередні нерівності, тоді $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$.

Отже, при $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ або $|y_n - a| < \varepsilon$.

Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. [29, с.57; 27, с.116-117]

Розглянемо дану теорему з геометричної точки зору. Візьмемо довільний окіл $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ точки a. Оскільки змінна $x_n \to a$, то всі значення x_n, починаючи з деякого, знаходяться в цьому околі. Аналогічно, з $z_n \to a$ випливає, що всі значення z_n, починаючи з деякого, також знаходяться в цьому околі. Так як для будь-яких значень n виконується подвійна нерівність $x_n \leq y_n \leq z_n$, то значення y_n, починаючи з деякого, будуть належати околу $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Оскільки окіл обирали довільним, то цим доведено, що будь-який окіл точки a містить всі значення y_n. Це означає, що $y_n \to a$. [3, с.84]

Зауважимо, що теореми 1.4-1.6 застосовуються і у випадку, коли границя дорівнює нескінченності.

Розглянемо теорему, яка пов'язана з арифметичними операціями над послідовностями, для цього введемо наступне означення.

Якщо $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ – послідовності, то їх сумою, добутком і часткою називають відповідно послідовності $\{x_n + y_n\}, \{x_n y_n\}, \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. Означення частки можливе лише за умови $y_n \neq 0$ для $\forall n \in N$.

Далі розглянемо леми, які будуть потрібні при доведенні теореми про арифметичні операції над послідовностями.

Лема 1.1. Нехай $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ – послідовності. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то

1) для $\forall c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = ca$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a)(y_n - b) = 0$.

Доведення. 1) Якщо для $\forall \varepsilon > 0$ і $c \neq 0$ існує $n_0(\varepsilon)$ таке, що при $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$, тоді $|cx_n - ca| < \varepsilon$.

Для $c = 0$, твердження 1) очевидне.

2) Якщо для $\forall \varepsilon > 0$ існують $n_1(\varepsilon)$, $n_2(\varepsilon) \in N$ такі, що при $n > n_1(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n - a| < \sqrt{\varepsilon}$, а при $n > n_2(\varepsilon)$ - $|y_n - b| < \sqrt{\varepsilon}$. Тоді при $n > \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, отримаємо:

$$|(x_n - a)(y_n - b) - 0| = |x_n - a| \cdot |y_n - b| < \varepsilon. \text{ [20, c.43]}$$

Лема 1.2. Нехай $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ – послідовності. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ причому $y_n \neq 0$ для $\forall n \in N$ і $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$.

Доведення. Візьмемо $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ і виберемо номер $n_1(\varepsilon) \in N$ такий, що при $n > n_1(\varepsilon)$ виконується нерівність $|y_n - b| < \varepsilon$. Звідси маємо, що при $n > n_1(\varepsilon)$

$$\left(|y_n - b| < \frac{|b|}{2}\right) \Leftrightarrow \left(b - \frac{|b|}{2} < y_n < b + \frac{|b|}{2}\right).$$

Якщо $a \geq 0$, то з лівої нерівності отримаємо $y_n > \frac{b}{2}$. Якщо $a < 0$, то із правої нерівності отримаємо $y_n < \frac{b}{2}$. В обох випадках $|y_n| > \frac{|b|}{2}$. Далі при довільному $\varepsilon > 0$ візьмемо $n_2(\varepsilon) \in N, n_2(\varepsilon) > n_1(\varepsilon)$ таке, що при $n > n_2(\varepsilon)$ виконується нерівність $|y_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}$. Звідси, при $n > n_2(\varepsilon)$ маємо:

$$\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|y_n-b|}{y_n b}<|y_n-b|\cdot\frac{2}{b^2}<\varepsilon.\ [20, \text{с}.\,43]$$

Теорема 1.7. Нехай $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ – послідовності. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, якщо $y_n \neq 0\ \forall n \in N$ і $b \neq 0$.

Доведення. 1) Нехай задано $\varepsilon > 0$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то існує $n_1(\varepsilon) \in N$ таке, що для $\forall n > n_2(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то існує $n_2(\varepsilon) \in N$ таке, що для $\forall n > n_2(\varepsilon)$ виконується нерівність $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Звідси для $\forall n > max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, маємо:

$$\varepsilon > |y_n - b| + |x_n - a| \geq \big|(y_n - b) + (x_n - a) = |(x_n + y_n) - (a + b)|\big|.$$

2) Для доведення цього твердження використаємо лему 1.2 і скористаємося тотожністю

$$x_n y_n - ab = (x_n - a)(y_n - b) + a(y_n - b) + b(x_n - a).$$

Переходячи до границі в лівій і правій частинах рівності, використовуючи лему 1.1 і твердження 1) цієї теореми, умову 2) доведено.

3) Це твердження випливає із леми 1.2 і твердження 2) цієї теореми.

Ми довели, кожне твердження теореми окремо, тому і всю теорему доведено. [20, с.43-44]

Зауважимо, що дана теорема справедлива й у випадку, коли одна із границь дорівнює нескінченості.

Усі раніше розглянуті теореми дозволяють знаходити границю числової послідовності, про те вони не являють собою жодного єдиного прийому для дослідження послідовності на існування її границі. Очевидно, що перед тим як знаходити границю числової послідовності, необхідно показати, що вона існує. Інколи взагалі не потрібно знати точної границі числової послідовності, а важливо знати, що вона існує, тоді послідовність є збіжною. Тому є досить важливим розглянути ознаку збіжності числових послідовностей. Проте спочатку розглянемо означення монотонних послідовностей.

Послідовність (1.1) називається монотонно зростаючою, якщо для будь-яких натуральних значеннях n виконується нерівність $x_{n+1} > x_n$. [27, с.100]

Покажемо на прикладі монотонно зростаючу послідовність. Довести, що послідовність непарних натуральних чисел монотонно зростаюча. Нехай маємо послідовність $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$ загальний член якої $x_n = 2n-1$. Дійсно, $x_{n+1} - x_n = [2(n+1)-1] - (2n-1) = 2$, отримали, що $x_{n+1} - x_n > 0$, тобто $x_{n+1} > x_n$ для будь-якого натурального n. Отже, за означенням монотонно зростаючої послідовності маємо, що послідовність непарних натуральних чисел монотонно зростаюча.

Послідовність (1.1) називається монотонно спадною, якщо для будь-яких натуральних значеннях n виконується нерівність $x_{n+1} < x_n$.

Розглянемо приклад монотонно спадної послідовності:

$$3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \dots, \frac{2n+1}{n}, \dots,$$

де $x_n = \frac{n+1}{n}$.

Дійсно,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0,$$

тобто $x_{n+1} < x_n$ для будь-яких n, що й потрібно було довести.

Послідовність (1.1) називається монотонно неспадною або монотонно незростаючою, якщо для $\forall n \in N$ виконується нерівність $x_{n+1} \geq x_n$ або $x_{n+1} \leq x_n$ відповідно. [27, с.101]

Наведемо приклади цих послідовностей: послідовність члени якої рівні між собою є одночасно монотонно неспадною і монотонно незростаючою; послідовність у якої за кожним непарним числом, починаючи з одиниці, слідує підряд два однакових парних числа, на одиницю більше за попереднє непарне число, є монотонно неспадною, наприклад, $1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, \dots$.

Якщо жодна з умов не виконується, то послідовність не є монотонною.

Теорема 1.8 (критерій Вейєрштрасса). Монотонна послідовність збіжна тоді й тільки тоді, коли вона є обмеженою.

Доведення. Розглянемо випадок для монотонно зростаючої послідовності, випадок монотонно спадної послідовності доводиться аналогічно.

Нехай $\{x_n\}$ – обмежена монотонна послідовність. Оскільки множина $\{x_n: n \epsilon N\}$ обмежена, то існує $\sup x_n = a$ таке, що для $\forall \varepsilon > 0$ існує $n_1(\varepsilon) \epsilon N$ таке, що виконується нерівність $a - \varepsilon < x_{n_1(\varepsilon)} < a$. Інакше a не було б точною верхньою гранню множини $\{x_n\}$. Оскільки $\{x_n\}$ зростаюча послідовність, то при $n > n_1(\varepsilon)$ маємо $a - \varepsilon < x_{n_1(\varepsilon)} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon$.

Звідси слідує, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. [20, с.47-48]

Наслідок 1.1. Члени монотонно незростаючої (спадної) послідовності, яка має границю, не менше (більше) цієї границі.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}$ - монотонно незростаюча і має границю. Тоді $\{x_n\}$ – обмежена знизу, а отже має границю, яка співпадає з нижньою гранню, і тому виконується

$$x_n \geq a, \tag{1.5}$$

тобто кожен член монотонно незростаючої послідовності не менше її границі.

Зауважимо, що у випадку монотонно неспадної послідовності в (1.5) для всіх n буде виконуватися строга нерівність $x_n > a$.

Дійсно, якщо припустити, що хоча б для одного значення $n = k$ виконується нерівність (1.5), тобто $x_k > a$, то в силу означення монотонно незростаючої послідовності $x_{k+1} < x_k$ отримаємо $x_{k+1} < a$, що суперечить нерівності (1.5), яке повинно виконуватися для всіх n.

Наслідок 1.2. Члени монотонно неспадної (зростаючої) послідовності, яка має границю, не більше (менше) цієї границі.

Доведення аналогічне до доведення наслідку 1.1. [27, с.138]

При доведенні багатьох теорем математичного аналізу часто застосовують метод вкладених відрізків. Він базується на принципі вкладених відрізків, який випливає із теореми про границю монотонної послідовності.

Якщо для нескінченної послідовності відрізків

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots, [a_n, b_n], \dots \qquad (1.6)$$

мають місце відношення:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \qquad (1.7)$$

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots, \qquad (1.8)$$

при чому $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, то нескінченна послідовність відрізків (1.6) називається послідовністю вкладених відрізків.

Теорема 1.9. Будь-яка послідовність вкладених відрізків має одну і тільки одну точку, спільну з всіма відрізками, тобто існує тільки одне число c, яке задовольняє відношення $a_n \leq c \leq b_n$ при будь-якому n.

Доведення. Для довільного n маємо:

$$a_n < b_n \leq b_1, \text{ тобто } a_n < b_1,$$

$$b_n > a_n \geq a_1, \text{ тобто } b_n > a_1.$$

Тому, як у монотонно неспадній послідовності (1.7), так і у монотонно не зростаючій послідовності (1.8) існує границя, тобто існує $\lim_{n\to\infty} a_n$ і $\lim_{n\to\infty} b_n$.

За умовою

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Позначимо через c значення цих границь. При цьому, з наслідків із критерію Вейєрштрасса, маємо: $a_n \leq c$ і $b_n \geq c$, яке б не було n, так що при будь-якому натуральному n виконується нерівність $a_n \leq c \leq b_n$, тобто точка c належить кожному з відрізків (1.6).

Доведемо, що іншої такої точки не існує. Для цього покажемо, що кожна точка c', спільна для всіх відрізків $[a_n, b_n]$, неодмінно співпадає з c. Припустимо, що при будь-якому n виконується нерівність $a_n \leq c' \leq b_n$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$, то за теоремою 1.3, маємо: $\lim_{n\to\infty} c' = c$, тобто $c' = c$. [27, с.144-145]

Зауважимо, якщо аналогічним способом дати означення послідовності вкладених інтервалів, то в цьому випадку теорема виявиться не вірною. Дійсно, якщо взяти інтервал $(0; 1)$ і розділити його навпіл. Виберемо в якості другого інтервалу ліву частину, тобто $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Поділимо знову інтервал $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ навпіл і виберемо його частину, тобто $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ і т. д. Цей процес нескінчений. Відповідно отримаємо нескінченну послідовність вкладених інтервалів: $(0; 1) \supset \left(0; \frac{1}{2}\right) \supset \left(0; \frac{1}{4}\right) \supset \cdots \supset \left(0; \frac{1}{2^n}\right) \supset \cdots$. Інтервали цієї послідовності не містять жодної спільної точки, оскільки, яку б точку α на проміжку, знайдеться таке число n_0, що $\frac{1}{2^{n_0}} < \alpha$ й інтервали послідовності починаючи з $\left(0; \frac{1}{2^n}\right)$ не містять точку α. Точка 0 є спільним кінцем для всіх інтервалів, але не належить їм. [3, с.104]

Дана теорема має назву «теореми Кантора про вкладені відрізки»; і може приймати інше формулювання: для будь-якої підпослідовності вкладених відрізків існує єдина точка, що належить всім відрізкам даної послідовності.

При розгляді збіжності послідовності $\{x_n\}$ за допомогою означення збіжної послідовності доводиться робити оцінку границі $(x_n - a)$ елементів послідовності та її границі a. Іншими словами, величину границі a цієї послідовності доводиться вгадувати. Проте можна встановити критерій збіжності послідовності, який дозволяє зробити висновок про її збіжність лише по величині її елементів і не використовуючи величини передбачуваної границі цієї послідовності. Для встановлення такого критерію введемо поняття фундаментальної послідовності. [11, с.102]

Послідовність $\{x_n\}$ називається фундаментальною або послідовністю Коші, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ існує $n_0(\varepsilon) \in N$ таке, що при $n > n_0(\varepsilon)$ і $m > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Теорема 1.10 (критерій Коші). Числова послідовність збігається тоді і тільки тоді, коли вона є фундаментальною.

Доведення. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. За даним числом $\varepsilon > 0$ знайдемо номер $n_0(\varepsilon)$ такий, щоб при $n > n_0(\varepsilon)$ виконувалася нерівність $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Якщо тепер $m > n_0(\varepsilon)$ і $n > n_0(\varepsilon)$, то $|x_m - x_n| < |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Таким чином, ми перевірили, що збіжна послідовність є фундаментальною.

Нехай тепер $\{x_k\}$ – фундаментальна послідовність. За даним $\varepsilon > 0$ знайдемо номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що із $m \geq n_0(\varepsilon)$ і $k \geq n_0(\varepsilon)$ випливає нерівність $|x_m - x_k| < \frac{\varepsilon}{3}$. Зафіксуємо $m = n_0(\varepsilon)$, отримаємо, що для $\forall k > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$x_{n_0(\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{3} < x_k < x_{n_0(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{3} \quad (1.9)$$

але оскільки маємо скінченне число членів послідовності $\{x_n\}$ з номерами, які менші $n_0(\varepsilon)$, то ми довели, що фундаментальна послідовність обмежена.

Для $n \epsilon N$ покладемо $k \geq n$, $a_n \coloneqq \inf x_k\,, b_n \coloneqq \sup x_k$.

З цього випливає, що $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Послідовність вкладених відрізків $[a_n; b_n]$ має спільну точку a, за теоремою 1.9.

Оскільки для $\forall n \epsilon N$ виконується нерівність $a_n \leq a \leq b_n$, а при $k \geq n$, $a_n \coloneqq \inf x_k\,, b_n \coloneqq \sup x_k$, то при $k \geq n$ маємо

$$|a - x_k| \leq b_n - a_n. \quad (1.10)$$

Але з (1.1) випливає, що при $n > n_1(\varepsilon)$ і $k \geq n$

$$x_{n_0(\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{3} \leq \inf x_k = a_n \leq b_n = \sup x_k \leq x_{n_0(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{3},$$

тому при $n > m$

$$b_n - a_n \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \quad (1.11)$$

Порівнюючи (1.10) і (1.11), знаходимо, що при будь-якому $k > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|a - x_k| < \varepsilon$.

Отже, $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. [10, с.119-120]

Відмітимо, що критерій Коші має досить важливе теоретичне значення, проте він не є, як завгодно зручним практичним способом дослідження послідовності на існування її границі.

Покажемо на прикладі застосування критерію Коші. Доведемо, що послідовність $x_n = 1 + q + \cdots + q^n$, де q – будь-яке число з інтервалу $0 < q < 1$ є збіжною.

Для будь-якого номера n і будь-якого $m \in N$ виконується нерівність

$$|x_{n+m} - x_n| = (1 + q + \cdots + q^{n+m}) - (1 + q + \cdots + q^n) = q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^{n+m} = \frac{q^{n+1} - q^{n+1+m}}{1-q} < \frac{q^{n+1}}{1-q}. \quad (1.12)$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки при $0 < q < 1$ послідовність $\{q^n\}$ є нескінченно малою, то для додатного числа $\varepsilon(1 - q)$ знайдеться номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що при всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$q^n < \varepsilon(1 - q). \quad (1.13)$$

Із нерівностей (1.12) і (1.13) випливає, що при будь-яких $n \geq n_0(\varepsilon)$ і будь-якого $m \in N$ виконується нерівність

$$|x_{n+m} - x_n| < \frac{\varepsilon(1-q)}{1-q} = \varepsilon,$$

а це означає, що дана послідовність є фундаментальною і за критерієм Коші є збіжною. [11, с.105]

Критерій Коші дозволяє також встановлювати розбіжність послідовності, тому розглянемо заперечення означення фундаментальної послідовності:

Послідовність $\{x_n\}$ називається не фундаментальною, якщо для $\forall\varepsilon > 0$ існує $n_0(\varepsilon) \in N$ таке, що при $n > n_0(\varepsilon)$ і $m > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_m - x_n| \geq \varepsilon$.

Розглянемо послідовність $\{x_n\}$, де

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

якщо візьмемо $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, отримаємо розбіжну послідовність.

Нехай задана послідовність x_n, розглянемо послідовність n_k – додатних цілих чисел, таку, що $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Тоді послідовність x_{n_k} називається підпослідовністю послідовності $\{x_n\}$.

Теорема 1.11. Якщо послідовність (1.1) збігається, то будь-яка її підпослідовність

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots \quad (1.14)$$

також збігається, причому до того ж числа, що і задана послідовність.

Доведення. Позначимо границю послідовності (1.1) через a і виберемо довільне число $\varepsilon > 0$. Для послідовності (1.14) незалежною змінною фактично є k, і тому, щоб довести, що і підпослідовність (2.14) має границею число a, потрібно довести, що для вибраного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число K, що при $k > K$ виконується нерівність

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon. \quad (1.15)$$

Оскільки границя x_n дорівнює a, то знайдеться таке число $n_0(\varepsilon)$, що при $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність (1.2).

Виберемо число K так, щоб було $n_K > n_0(\varepsilon)$. Тоді при $k > K$ будемо мати $n_k > n_K$ і, відповідно, $n_k > n_0(\varepsilon)$, а це означає, що для n_k буде виконуватися нерівність (1.2), тобто нерівність (1.15). Отже, що границя послідовності (1.14) дорівнює a. [27, с.114]

Зауважимо, що протилежне твердження змісту не має.

Теорема 1.12 (Больцано-Вейєрштрасса). З будь-якої обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.

Доведення. Нехай всі числа послідовності (1.1) обмежена, тобто вона розташована в межах чисел a і b ($a \le x_n \le b, \forall n$). Поділимо проміжок $[a;\ b]$ навпіл, тоді хоча б в одній його половині буде міститися нескінченна множина елементів даної послідовності, або, в іншому випадку, і в усьому проміжку $[a;\ b]$ цих елементів містилося б скінченне число, що не можливо. Нехай і проміжок $[a_1; b_1]$ буде тією з його половин, яка містить скінченну множину чисел (1.1) (або, якщо обидві половини такі, то – будь-яка з них).

Аналогічно, з проміжку $[a_1; b_1]$ виділимо його половину $[a_2; b_2]$, при умові, що в ній міститься нескінченна множина чисел $\{x_n\}$ і так далі. Продовжуючи цей процес до нескінченності, на k-ій стадії його виділимо проміжок $[a_k; b_k]$, який також містить нескінченну множину чисел $\{x_n\}$.

Кожний із побудованих проміжків, починаючи з другого, міститься в попередньому, що складає його половину. Крім того, довжина k-го проміжку, рівна $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ прямує до нуля зі зростанням k. Застосуємо теорему Кантора про вкладені відрізки, отримаємо, що a_k і b_k прямують до спільної границі c.

Далі побудуємо підпослідовності $\{x_{n_k}\}$. В якості x_{n_1} візьмемо будь-який з елементів послідовності $\{x_n\}$ (наприклад, перший), який міститься на проміжку $[a_1; b_1]$ У якості x_{n_2} візьмемо будь-який з елементів послідовності $\{x_n\}$ (наприклад, перший), які слідують за x_{n_1} і містяться в проміжку $[a_2; b_2]$, і так далі. Загалом, в якості елемента x_{n_k} візьмемо будь-який з елементів x_n (наприклад, перший), який слідує за раніше виділеними $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}, \dots$ й міститься на проміжку $[a_k; b_k]$. Можливість такого послідовного вибору обумовлюється тим, що кожен з проміжків $[a_k; b_k]$ містить нескінченну множину чисел x_n, тобто містить елементи $\{x_n\}$ з як завгодно малими номерами.

Далі, так як $a_k \le x_{n_k} \le b_k$ і $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c,$ то за теоремою 1.4 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} =$ с. [29, с.87-88]

Умова обмеженості послідовності суттєва, оскільки існують необмежені послідовності, із яких не можна виділити збіжну підпослідовність. Проте звідси не слідує, що тільки з обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність. Розглянемо на прикладі.

Послідовність $x_n = n^{(-1)^n}$ є необмеженою, проте з неї можна виділити збіжну до деякої границі послідовність. Для цього необхідно надати n тільки непарних значень. [3, с.106]

1.3. Топологічний підхід до введення поняття границі числової послідовності

У цьому пункті ми будемо досліджувати границю числової послідовності та її властивості в метричних просторах, а також умови збіжності. Основну увагу буде приділено виконанню класичних теорем у метричному просторі, а саме критерію Коші.

Відомо, що найважливішою операцією математичного аналізу є граничний перехід. У її основі лежить той факт, що на числовій прямій визначено відстань від однієї точки до іншої. Узагальнюючи уявлення про дійсні числа, як про множину, на якій введено відстань між елементами, приходимо до поняття метричного простору, яке є одним із найважливіших понять сучасної математики. [14, с.48] Тому почнемо з розгляду означення метричного простору.

Довільна множина M називається метричним простором, якщо для будь-яких двох елементів x і y із множини M визначене невід'ємне дійсне число $\rho(x,y)$, яке називається відстанню між цими елементами й задовольняє наступним аксіомам:

1) $\forall\, x, y \in M: \rho(x,y) > 0$ при $x \neq y$ і $\rho(x,y) = 0$ при $x = y$ (аксіома невід'ємності);
2) $\forall\, x, y \in M: \rho(x,y) = \rho(y,x)$ (аксіома симетрії);
3) $\forall\, x, y, z \in M: \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (аксіома трикутника).

$\rho(x,y)$ – будемо називати метрикою, а елементи метричного простору будемо інколи називати точками цього простору. [1, с.15]

Найпростішим прикладом метричного простору є множина елементів довільної природи з метрикою

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, \text{якщо } x \neq y, \\ 0, \text{якщо } x = y, \end{cases}$$

який називають простором ізольованих точок. [28, с.14]

Наведемо інший приклад: множина впорядкованих груп з n дійсних чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ з метрикою

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}\,,$$

який називається n – вимірним арифметичним евклідовим простором R^n. Доведемо, що даний простір є метричним простором. Для цього покажемо, що виконуються аксіоми 1) - 3).

Для R^n аксіоми невід'ємності та симетрії виконуються і це очевидно. Доведемо виконання, аксіоми трикутника.

Нехай $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ і $z = (z_1, \ldots, z_n)$, тоді аксіома трикутника набуде вигляду

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2}.$$

Покладемо $y_k - x_k = a_k, z_k - y_k = b_k$, тоді $z_k - x_k = a_k + b_k$, а нерівність трикутника матиме вигляд

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Але ця нерівність випливає з нерівності Коші-Буняковського.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Дійсно, в силу цієї нерівності маємо:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2.$$

Звідси нерівність 3) доведено.

Отже, R^n є метричним простором. [14, с.49]

Далі розглянемо множину всіх обмежених нескінченних послідовностей дійсних чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Покладемо

$$\rho(x, y) = \sup_k |y_k - x_k|,$$

отримаємо метричний простір і позначимо його через m. У цьому просторі справедливість аксіом 1) – 3) очевидна.

Отже, метричний простір m будемо називати простором всіх обмежених послідовностей дійсних чисел. [14, с.51]

Поняття відстані дозволяє узагальнити поняття збіжної числової послідовності на випадок послідовності точок довільного метричного простору.

Нагадаємо означення скінченної границі числової послідовності $\{x_n\}$: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ тоді і тільки тоді, якщо для $\forall\varepsilon > 0$ існує номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для $\forall n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n - x| < \varepsilon$.

Узагальнимо поняття границі числової послідовності на випадок, коли члени цієї послідовності є точками довільного фіксованого метричного простору. [9, с.24]

Нехай $\{x_n\}$ - послідовність точок метричного простору M. Тоді говорять, що ця послідовність є збіжною до точки x, якщо для будь-якого як завгодно малого наперед заданого $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що кожний окіл точки x містить всі точки послідовності $\{x_n\}$, для $\forall n > n_0(\varepsilon)$. Саму точку x називають границею послідовності $\{x_n\}$. [14, с.58]

Іншими словами: послідовність точок $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ метричного простору M є збіжною до точки x цього ж простору, якщо $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. [30, с.32]

Наведемо приклад на якому покажемо, що означає збіжність послідовності в метричному просторі. Нехай метричний простір M лежить в n-вимірному просторі R^n, так що відстань між точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ і $y = (y_1, \dots, y_n)$ задана формулою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Покажемо, що означає збіжність послідовності $x_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots\right)$ при $n = 1,2, \dots$ до точки $x = (x_1, \dots, x_n)$. Оскільки

$$\rho(x, x_n) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_k^{(n)}\right)^2},$$

то $\rho(x, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$ тоді і тільки тоді, коли всі числові послідовності $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ $(n = 1,2, \dots)$ збігаються відповідно до границь $x_1, x_2 \dots, x_n$. Коротко можно сформулювати так: збіжність в R^n є збіжністю по всіх координатах. [30, с.33]

З означення границі послідовності в метричному просторі випливають наступні теореми.

Теорема 1.13. Кожна послідовність у просторі (M, ρ) має не більше однієї границі.

Доведення. Припустимо, що деяка послідовність $\{x_n\}$ у деякому метричному просторі (M, ρ) має більше однієї границі. Тоді у цьому просторі існують точки x_1 і x_2 такі, що $x_1 \neq x_2$, але $x_n \to x_1$ і $x_n \to x_2$ при $n \to \infty$. Враховуючи аксіому 3), маємо $\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, x_n) + \rho(x_n, x_2)$ для $\forall n \in N$. Звідси, враховуючи, що $\rho(x_1, x_n) = (x_n, x_1) \to 0$ і $\rho(x_n, x_2) \to 0$ при $n \to \infty$ маємо, що $\rho(x_1, x_2) \leq 0$. Але $\rho(x_1, x_2) > 0$, оскільки $x_1 \neq x_2$, то отримаємо протиріччя. [8, с.10]

Теорема 1.14. Якщо послідовність $\{x_n\}$ є збіжною до деякої точки x, то і будь-яка її підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ є збіжною до цієї точки.

Доведення. Нехай $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\rho\left(x_{n_k}, x\right)$, як підпослідовність збіжної до нуля числової послідовності $\rho(x_n, x)$ є збіжною до нуля. Отже, $x_{n_k} \to x$ при $n \to \infty$. [7, с.108]

Розглянемо лему, яка знадобиться в подальшому для доведення теорем.

Лема 3.1. Для будь-яких точок x, y, z, u з простору M виконується нерівність $|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, u)$.

Доведення. За аксіомою трикутника маємо:

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z) \le \rho(x,z) + \rho(z,u) + \rho(y,u),$$

Звідки

$$\rho(x,y) - \rho(z,u) \le \ \rho(x,z) + \rho(y,u).$$

Помінявши місцями x і z, y і u, отримаємо

$$\rho(x,y) - \rho(z,u) \le \ \rho(x,z) + \rho(y,u).$$

Отже, $|\rho(x,y) - \rho(z,u)| \le \rho(x,z) + \rho(y,u)$. [7, с.108]

Теорема 1.15. Якщо $x_n \to x$ і $y_n \to y$ при $n \to \infty$ у метричному просторі (M,ρ), то $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y)$ при $n \to \infty$.

Доведення. За лемою 3.1 маємо

$$|\rho(x_n,y_n) - \rho(x,y)| \le \rho(x_n,x) + \rho(y_n,y) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отже, $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y)$ при $n \to \infty$. [7, с.108]

В метричному просторі M як і в n-вимірному евклідовому просторі R^n можна означити поняття кулі і ε-окіл точки. Розглянемо ці поняття.

Нехай a – точка метричного простору M, а r – додатне дійсне число. Множина точок $x \,\epsilon\, M$, що задовольняють нерівність $\rho(x,a) < r$ або $\rho(x,a) \le r$ називається кулею з центром у точці a й радіусом r, і позначається $S(a,r)$.

ε-околом точки a з простору M називається куля $S(a,\varepsilon)$ з центром у точці a й радіусом $\varepsilon > 0$. [7, с.109]

Теорема 1.16. Якщо послідовність є збіжною у метричному просторі (M,ρ), то вона є обмеженою у цьому просторі.

Доведення. Якщо $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то $\rho(x_n,x) \to 0$ при $n \to \infty$ і, отже, $\rho(x_n,x) < C$, де C – дійсне додатне число.

Якщо x – довільний фіксований елемент простору M, то за аксіомою трикутника для будь-якого n маємо:

$$\rho(x_n,x) \le \rho(x_n,x) + \rho(x,x) < C + \rho(x,x) = K.$$

Отже, всі точки x_n при $n \to \infty$ містяться в кулі $S(x,K)$.

Розглянемо умови збіжності числових послідовностей у метричному просторі. Ми вже дослідили метричний простір m з метрикою

$$\rho(x,y) = \sup_{n \,\epsilon\, N} |x_n - y_n|,$$

який є простором всіх обмежених послідовностей дійсних чисел Тому розглянемо збіжність у просторі R^m й покажемо, що вона рівносильна покоординатній збіжності.

Нехай $x^{(n)} = \left\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right\}$ послідовність точок простору R^m, яка збігається до $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ при $n \to \infty$ простору R^m. Тобто

$$\rho\left(x^{(n)}, x\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} \left(x_k^{(n)} - x_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

тоді $\rho\left(x^{(n)}, x\right) \to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки $\rho\left(x^{(n)}, x\right) \geq \left|x_k^{(n)} - x_k\right|$, де $n \geq 1$ для будь-якого $k \in [1, m]$, то $x_k^{(n)} \to x_k$ при $n \to \infty$ для $\forall k \in \overline{1, m}$. [8, с.10; 9, с.27]

Отже, має місце наступна теорема.

Теорема 1.17 (критерій збіжності послідовності у просторі R^m). Для того щоб послідовність $\{x_n\} = \left\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right\}$ простору R^m була збіжною до точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ необхідно і достатньо, щоб вона була покоординатно збіжною до цієї точки, тобто $x_k^{(n)} \longrightarrow x_k$ при $n \to \infty$ для $\forall k \in \overline{1, m}$. [9, с.24-25]

Для просторів R^m виконується теорема Больцано-Вейєрштрасса.

Теорема 1.18 (теорема Больцано-Вейєрштрасса). Кожна обмежена у просторі R^m послідовність $\{x_n\}$ має збіжну у цьому просторі підпослідовність.

Доведення. Розглянемо довільну нескінченну обмежену множину E з простору R^m.У ній існує зчисленна підмножина $E_1 \subset E$, елементи якої утворюють послідовність $\{x_n\}$ з попарно різними членами

$x_n = \left\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right\}$. Зрозуміло, що $\{x_n\}$ – обмежена послідовність, а тому для елемента $a = (0,0, \dots, 0)$ з простору R^m існує $r > 0$ таке, що

$$\rho(x_n, a) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left|x_k^{(n)} - 0\right|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left|x_k^{(n)}\right|^2} < r \text{ для } \forall n \in N.$$

Звідси випливає, що для фіксованого $k \in \overline{1, m}$ виконується нерівність $\left|x_k^{(n)}\right| < r$ для $\forall n \in N$, тобто числова послідовність $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ є обмеженою у просторі R^1 для $\forall k \in \overline{1,m}$. Оскільки, кожна обмежена послідовність має границю, то, існує $\left\{x_1^{\left(n_i^{(1)}\right)}\right\}$ збіжна до a_1 підпослідовність послідовності $\left\{x_1^{(n)}\right\}$. Так само існують: $\left\{x_2^{\left(n_i^{(2)}\right)}\right\}$ - збіжна до a_2 підпослідовність послідовності $\left\{x_2^{\left(n_i^{(1)}\right)}\right\}$, $\left\{x_3^{\left(n_i^{(3)}\right)}\right\}$ - збіжна до a_3 підпослідовність послідовності $\left\{x_3^{\left(n_i^{(2)}\right)}\right\}$ і взагалі, $\left\{x_k^{\left(n_i^{(k)}\right)}\right\}$ - збіжна до a_k підпослідовність послідовності $\left\{x_k^{\left(n_i^{(k-1)}\right)}\right\}$ для $\forall k \in \overline{2,m}$.

Враховуючи, що за побудовою послідовність $\left\{x_k^{\left(n_i^{(m)}\right)}\right\}$ є підпослідовністю послідовності $\left\{x_k^{\left(n_i^{(k)}\right)}\right\}$ для $\forall k \in \overline{1,m}$, маємо: $x_k^{\left(n_i^{(m)}\right)} \to a_k$ при $i \to \infty$ для $\forall k \in \overline{1,m}$. Звідси за критерієм збіжності послідовності у просторі R^m маємо: $x_{n_i^{(m)}} \in E$ для $\forall i$ та

$$x_{n_i^{(m)}} = \left(x_1^{\left(n_i^{(m)}\right)}, x_2^{\left(n_i^{(m)}\right)}, \dots, x_m^{\left(n_i^{(m)}\right)}\right) \to (a_1, a_2, \dots, a_m) = a \text{ при } i \to \infty,$$

причому для всіх досить великих номерів $n_i^{(m)}$ члени $x_{n_i^{(m)}} \neq a$, оскільки вони попарно різні. [9, с.34-35]

Виникає питання про те, чи виконується у довільному метричному просторі критерій Коші збіжності послідовності.

Введемо поняття фундаментальної послідовності в метричному просторі.

Послідовність $\{x_n\}$ точок метричного простору (M, ρ) називається фундаментальною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0(\varepsilon) \in N$, такий що $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ і $m > n_0(\varepsilon)$. [13, с.70]

По-іншому, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$.

Наприклад, будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною.

Дійсно, за нерівністю трикутника, маємо:

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m),$$

і якщо $x_n \to x$, то права частина нерівності при $m \to \infty$ і $n \to \infty$ стає меншою будь-якого наперед заданого ε.

Якщо M – дійсна пряма, то поняття фундаментальної послідовності точок співпадає з класичним поняттям фундаментальної числової послідовності. В теорії дійсних чисел виконується критерій Коші, в силу якого будь-яка фундаментальна числова послідовність є збіжною.

Критерій Коші виконується не для всіх метричних просторів.

Розглянемо інтервал $(0; 1)$, який є метричним простором зі звичайною метрикою числової осі. Послідовність $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, очевидно є фундаментальною в цьому метричному просторі, але вона є розбіжною. Звідси випливає, що в метричному просторі $(0; 1)$ критерій Коші не виконується. [30, с.40]

Розглянемо детальніше, критерій Коші.

З'ясуємо, який зв'язок між фундаментальністю, збіжністю й обмеженістю послідовності.

1. Зв'язок між збіжністю і фундаментальністю.

Якщо $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, тобто $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x, x_n)$, коли $m \geq n$ при $n \to \infty$.

Отже, кожна збіжна послідовність у просторі (M, ρ) є фундаментальною у цьому просторі.

2. Зв'язок обмеженості та фундаментальності.

Нехай $\{x_n\}$ – фундаментальна послідовність у метричному просторі (M, ρ), тоді для числа $\varepsilon = 1$ існує номер $n_0(1)$ такий, що для будь-яких $m \geq n \geq n_0$ виконується нерівність $\rho(x_n, x_m) < 1$. Візьмемо довільну точку $a \in M$ і позначимо $H_1 = \max_{1\leq n\leq n_0} \rho(x_n, a)$. Тоді для $\forall n \in N$ виконується

$$\rho(x_n, a) \leq \begin{cases} H_1, \text{якщо } n \leq n_0, \\ \rho(x_n, x_{n_0}) + \rho(x_{n_0}, a) < 1 + H_1, \text{якщо } n > n_0. \end{cases}$$

Отже, $\forall a \in M$ існує $H = H_1 + 1$ таке, що $\rho(x_n, a) < H$ для $\forall n \in N$, тобто послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою, якщо вона фундаментальна.

3. Зв'язок фундаментальності й збіжності.

Припустимо, що фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ має збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Тоді для $\forall\varepsilon > 0$ існує номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що виконується нерівність $\rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, коли $m \geq n \geq n_0$, а $\rho\left(x_{n_k}, a\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, коли $n_k \geq n_0$.

Враховуючи це, для кожного $n \geq n_0(\varepsilon)$ знайдемо $n_k \geq n_0$ і візьмемо $\rho(x_n, a) \leq \rho\left(x_n, x_{n_k}\right) + \rho\left(x_{n_k}, a\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ для $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$, тобто $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$, або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Отже, якщо фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ має збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, то $\{x_n\}$ є збіжною послідовністю.

4. Зв'язок фундаментальності та розбіжності.

Нехай послідовність $\{x_n\}$ збігається до точки x у метричному просторі (M, ρ), причому $x_n \neq x$ для $\forall n$. Тоді вона фундаментальна у цьому просторі, а також у просторі (M_1, ρ), де $M_1 = M/\{x\}$.

Якщо припустити, що $\{x_n\}$ є збіжною послідовністю у метричному просторі (M_1, ρ), тобто існує $x_1 \epsilon M_1$ таке, що $\rho(x_n, x_1) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\{x_n\}$ є збіжною послідовністю до точки x_1 і в просторі (M, ρ). Отже, у просторі (M, ρ) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \neq x_1 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, що не можливо за властивістю єдиності границі.

Приходимо до висновку, що має місце

Теорема 1.19.

1. Кожна збіжна у просторі (M, ρ) послідовність є фундаментальною у цьому просторі, але не навпаки.
2. Кожна фундаментальна послідовність є обмеженою.
3. Фундаментальна послідовність є збіжною, якщо вона має збіжну підпослідовність.
4. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ у просторі (M, ρ), причому $x_n \neq x$ для $\forall n$, а $M_1 = M\backslash\{x\}$, то послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною, але розбіжною, у просторі (M_1, ρ). [9, с.58-59; 21, с123-124]

Зауважимо, що в метричних просторах критерій Коші виконується тоді і тільки тоді, коли метричний простір є повним.

Введемо означення повноти означення повноти метричного простору.

Метричний простір (M, ρ) називається повним, якщо довільна фундаментальна послідовність його точок збігається до деякої точки простору(M, ρ). [13, с.70]

Перевіримо повноту метричного простору R^n з метрикою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Нехай $x_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}\right)$ – фундаментальна послідовність. Оскільки

$$\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|^2 = \rho^2\,(x_n, x_m),$$

то числова послідовність $x_k^{(n)}$, де $n = 1,2, \dots$ при будь-якому фіксованому k є фундаментальною числовою послідовністю і має деяку границю x_k. Числа

Розглянемо повноту простору m.

Якщо послідовність $\{x_n\}$, де $x_n = x_k^{(n)}$, є фундаментальною у метричному просторі m, то для $\forall \varepsilon > 0$ існує номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що $m \geq n \geq n_0(\varepsilon)$ і виконується нерівність $\rho(x_m, x_n) = \sup\limits_{k} \left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Звідси випливає, що для $\forall k \in N$ $\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, коли $m \geq n \geq n_0(\varepsilon)$, тобто числова послідовність $x_k^{(n)}$ є фундаментальною у просторі R^1 для кожного фіксованого $k \in N$. Тому існує $\lim\limits_{n \to \infty} x_k^{(n)} = a_k$ для $\forall k \in N$. Отже, послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою, тобто для $\forall b \in m$ існує деяке додатне число H таке, що $\rho(x_n, b) = \sup\limits_{k \in N} \left|x_k^{(n)} - b_k\right| \leq H$ для $\forall n \in N$.

Звідси випливає, що $\left|x_k^{(n)} - b_k\right| \leq H$ для $\forall n, k \in N$.

Отже, $\lim\limits_{n \to \infty} \left|x_k^{(n)} - b_k\right| = \left|\lim\limits_{n \to \infty} x_k^{(n)} - b_k\right| = |a_k - b_k| \leq H$ для $\forall k \in N$.

Тому вважаючи $b_k = 0$ для $\forall k \in N$, дістанемо $|a_k| \leq H$ для $\forall k \in N$, тобто $a = \{a_k\} \in m$.

Враховуючи це, перейдемо у нерівності $\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ до границі при $m \to \infty$, отримаємо $\left|a_k - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, при $n \geq n_0(\varepsilon)$ для $\forall k \in N$.Тому $\rho(x_n, a) = \sup\limits_{k \in N}\left|x_k^{(n)} - a_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ для $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$, тобто кожна послідовність $\{x_n\}$, що є фундаментальною у просторі m, є також збіжною у цьому просторі.

Отже, простір m є повним метричним простором. [9, с.62]

Наведемо ще одну теорему, що є аналогом теореми про вкладені відрізки (теореми Кантора). Спочатку розглянемо наступне означення.

Нехай (M, ρ) – метричний простір. Замкненою кулею радіуса $\varepsilon > 0$ з центром в точці $x \in M$ називається множина $O_\varepsilon(x) = \{y \in M: \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$. [13, с.69]

Теорема 1.20 (про вкладені кулі). Для того, щоб метричний простір (M, ρ) був повним, необхідно і достатньо, щоб в ньому будь-яка послідовність вкладених одна в одну замкнутих куль, мала непорожній перетин.

Доведення. Нехай простір (M, ρ) повний і нехай $B_1, B_2, B_3, \ldots$ - послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, r_n – радіус, а x_n центр кулі B_n. Послідовність центрів $\{x_n\}$, фундаментальна, оскільки $\rho(x_n, x_m) < r_n$ при $m > n$, а $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки за умовою простір (M, ρ) повний, то існує $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Покладемо $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, тоді $x \in \bigcap_n B_n$. Дійсно, куля B_n містить всі точки послідовності $\{x_k\}$, за виключенням, може бути, точок $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$. Таким чином, x є точкою дотику для кожної кулі B_n. Оскільки B_n замкнута множина, то $x \in B_n$ для всіх n.

Нехай $\{x_n\}$ фундаментальна послідовність. Доведемо, що вона має границю. В силу фундаментальності ми можемо вибрати таку точку x_{n_1} послідовності $\{x_n\}$, що $\rho\left(x_n, x_{n_1}\right) < \frac{1}{2}$ для всіх $n \geq n_1$. Приймемо точку x_n за центр замкненої кулі радіуса 1. Позначимо цю кулю B_1. Потім виберемо x_{n_2} із

$\{x_n\}$ так, щоб було $n_2 > n_1$ і $\rho\left(x_n, x_{n_2}\right) < \frac{1}{2^2}$ для всіх $n \geq n_2$. Приймемо точку x_{n_2} за центр кулі радіуса $\frac{1}{2}$ і позначимо цю кулю B_2. Взагалі, якщо точки $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ уже вибрані $(n_1 < n_2 < \cdots < n_k)$, то виберемо точку $x_{n_{k+1}}$ так, щоб було $n_{k+1} > n_k$ і $\rho\left(x_n, x_{n_{k+1}}\right) < \frac{1}{2^{k+1}}$ для всіх $n \geq n_{k+1}$ і точка $x_{n_{k+1}}$ була центром замкненої кулі B_{k+1} радіуса $\frac{1}{2^k}$. Продовжуючи цю побудову, отримаємо послідовність замкнутих куль B_k, вкладених одна в одну, причому куля B_k має радіус $\frac{1}{2^{k-1}}$. Ця послідовність куль має, за припущенням, спільну точку; позначимо її x. Відповідно, ця точка x є границею послідовності $\left\{x_{n_k}\right\}$. Але якщо фундаментальна послідовність містить збіжну до x підпослідовність, то вона збігається до тієї ж самої границі. Отже, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. [14, с.69-70]

1.4. Побудова теорії границь на основі аксіоми Больцано-Вейєрштрасса

Одним із цікавих підходів при побудові теорії границь є розгляд теореми Больцано-Вейєрштрасса як аксіоми. Саме його досліджено в [5] і [12], в яких розглядається класичне поняття границі числової послідовності, але теорема Больцано-Вейєрштрасса, приймається як аксіому і в силу такого припущення доводяться теореми, що стосуються границь числових послідовностей і дійсних чисел. Цей підхід, ми будемо розглядати в даному пункті, але спочатку розв'яжемо декілька задач, розв'язання яких приводить до необхідності введення поняття границі числової послідовності.

Двом школярам доручили вести календар погоди. Вони повинні відмічати дні знаками "$+$" і "$-$": гарній погоді відповідає "$+$",поганій "$-$". Перший школяр вчиняв так: робив спостереження три рази на день – вранці, вдень і ввечері. Якщо хоча б під час одного спостереження йшов дощ, він ставив знак "$-$", в інших випадках ставив знак "$+$". Другий школяр робив спостереження в той самий час, що й перший. Якщо хоча б під час одного спостереження дощу не було, він ставив знак "$+$", в інших випадках ставив "$-$". Отже, погоді щодня відповідав набір знаків: " + +", " + –", " – +", " – –". Чи всі набори знаків можуть зустрітися при дослідженні зміни погоди?

Нехай за день дощу не було жодного разу, то обидва школярі поставлять знак " + ". Отже, набір знаків " + +" можливий. Тоді, якщо весь день йшов дощ, то обидва школярі поставлять знак " – ". Отже, набір знаків " – –" можливий. Якщо ж вранці йшов дощ, а в обід і ввечері дощу не було, то перший поставить " – ", а другий " + ". Отже, набір знаків " – +" можливий.

Розглянемо набір знаків " + –". У даному наборі знак " + " стоятиме на першому місці тільки тоді, коли дощу не було взагалі, але тоді й на другому місці має бути знак " + ", що не можливо. Тоді набір знаків " + –" не можливий.

Отже, не всі набори знаків можуть зустрітися при дослідженні зміни погоди двома школярами.

Розглянемо цю задачу, коли у процесі дослідження погоди беруть участь три школярі, тоді до попередньої задачі додаються наступні умови: третій школяр робить спостереження в той самий час, що й два перших, ставлячи знак " – ", якщо хоча б під час двох спостережень йшов дощ і " + " в інших випадках. Які з восьми наборів знаків " + + + ", " + + – ", " + – + ", " – + + ", " – + – ", " – – + ", " + – – ", " – – – " мають місце при дослідженні зміни погоди?

Нехай перший школяр поставив " + ", це означає, що дощу не було взагалі. Тоді інші два також поставлять " + "Отже, отримаємо набір знаків " + + + ". Якщо перший поставив " – ", а третій " + ", це означає, що дощ йшов рівно один раз із трьох. У цьому випадку другий школяр повинен поставити " + ". Загальний набір знаків набуде вигляду " – + + ". Якщо перший і третій поставлять " – ", це означає, що дощ йшов або 2 рази з трьох, або всі рази. В першому випадку другий школяр поставить " + ", а в другому випадку " – ". Тоді набір знаків набуде вигляду " – + – " або " – – – ". Оскільки ми розглянули всі можливі випадки, інших оцінок бути не може.

Отже, з восьми наборів знаків, мають місце наступні: " + + + "," – + + "," – + – ", " – – – ". [5, с.15]

Розглянемо наступну задачу: чи існує таке число C, що при всіх цілих k виконується нерівність

$$\left|\frac{k^3-2k+1}{k^4-3}\right| < C?$$

Дослідимо поведінку виразу в лівій частині нерівності при великих значення k. Очевидно, що в чисельнику основний числовий внесок відіграє член k^3, а в знаменнику k^4. Можна припускати, що при великих значеннях k вираз буде приблизно рівним $\left|\frac{k^3}{k^4}\right| = \frac{1}{|k|}$. Оцінимо похибку виразу при заміні даного виразу його наближеним значенням, для цього виконаємо перетворення:

$$\left|\frac{k^3-2k+1}{k^4-3}\right| = \left|\frac{k^3\left(1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right)}{k^4\left(1-\frac{3}{k^4}\right)}\right| = \frac{1}{|k|}\cdot\frac{\left|1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right|}{\left|1-\frac{3}{k^4}\right|}.$$

Нехай $|k| \geq 2$, тоді

$$\left|1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right| \leq 1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{|k|^3} \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8} < 2,$$

$$\left|1-\frac{3}{k^4}\right| \geq 1-\frac{3}{k^4} \geq 1-\frac{3}{16} > \frac{1}{2}.$$

Тоді при $k \geq 2$ виконується нерівність

$$\frac{1}{|k|}\cdot\frac{\left|1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right|}{\left|1-\frac{3}{k^4}\right|} < \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Отже, при $|k| \geq 2$ вихідний вираз не більше 2. Знайдемо, яких значень набуває вираз при $k = -1; 0; 1$. Ці значення рівні відповідно $1; \frac{1}{3}; 0$.

Отже, шукане число C існує, наприклад, можна взяти $C = 2$. [5, с.34]

Розглянемо приклад на якому покажемо, що для довільного числа C існує нескінченна множина цілих чисел k, для яких виконується наступна нерівність $k \cdot \sin k > C$?

Даний вираз є добутком двох чисел k і $\sin k$, де перше з них можна обрати як завгодно великим. Якщо при цьому друге число не буде занадто малим, то і весь добуток буде великим числом. Нехай $\sin k > \frac{1}{2}$, тоді множина точок x, складається із нескінченного числа інтервалів виду $2\pi n + \frac{\pi}{6} < x < 2\pi n + \frac{5\pi}{6}$, де n - будь-яке ціле число. Довжина кожного інтервалу дорівнює $\frac{2\pi}{3}$. Ця довжина більша за одиницю, тому всередині кожного із цих інтервалів є хоча б одне ціле число. Звідси випливає, що для будь-якого числа C існує нескінченно багато чисел, для яких добуток $k \cdot \sin k \ > C$. Насправді для всіх чисел k, які лежать в інтервалі $\left(2\pi n + \frac{\pi}{6}; 2\pi n + \frac{5\pi}{6}\right)$, виконується нерівність $\sin k > \frac{1}{2}$. Тому, якщо натуральне число k більше, ніж $2C$, і лежить всередині одного з зазначених інтервалів, $k \cdot \sin k \ > C$, то таких чисел, очевидно, нескінченно багато.

Отже, ми розглянули задачі, які спрямовують нас до введення поняття границі числової послідовності. Розглянемо графік послідовності $x_n = \frac{1}{n}$. Не виконуючи побудову, бачимо, що цей графік необмежено наближатиметься до осі абсцис (прямує до неї). Слова «необмежено наближається» і «прямує», зрозумілі до того часу, поки йде мова про наглядні властивості графіка. Проте, щоб використовувати їх у математичних роздумах і обчисленнях, такого розуміння не достатньо. Тому потрібно точно сформулювати, що означають ці вислови на мові чисел. Це приводить нас до одного із найважливіших понять, які використовуються в математиці, - поняття границя.

Класичне означення границі числової послідовності було вже розглянуто, тому ми лише зробимо деякі зауваження щодо нього.

Розглянемо яку властивість графіка послідовності $\{x_n\}$ виражає рівність $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Якщо розглядати пряму $x = a$, то вона належатиме смузі шириною 2ε. Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ означає, що точки (n, x_n) знаходиться всередині цієї смуги. Отже, якщо послідовність $\{x_n\}$ прямує до a, то майже весь графік послідовності лежить всередині вказаної смуги.

В означенні границі число ε може бути будь-яким, як завгодно малим, тому описана властивість графіка зберігається для будь-якої, як завгодно вузької смуги. [12, с.22] З цієї властивості випливає наступне означення границі послідовності.

Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо майже весь графік цієї послідовності лежить всередині як завгодно вузької смуги, що містить пряму $x = a$. [12, с.22]

В теорії границь дуже важливою є одна з властивостей дійсних чисел, яку зазвичай приймають за аксіому. Вона відображає властивість «повноти» сукупності дійсних чисел. Образно кажучи, вона виражається в тому, що на числовій осі немає «проколів» і «дірок».

Аксіома Больцано-Вейєрштрасса. Будь-яка монотонна обмежена послідовність має границю.

У курсі математичного аналізу доводиться, що аксіома Больцано Вейєрштрасса рівносильна кожному з наступних тверджень:

1. Якщо на числовій прямій побудована нескінченна послідовність вкладених відрізків, де кожен наступний відрізок лежить всередині попереднього, то всі ці відрізки мають принаймні одну спільну точку.
2. Будь-яке дійсне число можно записати у вигляді нескінченного десяткового дробу, і кожному такому дробу відповідає деяке дійсне число.

Доведемо, що з аксіоми Больцано-Вейєрштрасса слідує твердження 1.

Нехай $\{x_n\}$ - монотонно зростаюча послідовність, яка обмежена зверху числом M. Поставимо у відповідність числу M деякий відрізок довжини M. Виберемо на цьому відрізку ще один відрізок довжини x_{n+k} і так далі, всередині відрізка довжини x_2 відкладемо відрізок довжини x_1. Отримаємо послідовність вкладених відрізків. За аксіомою Больцано-Вейєрштрасса послідовність $\{x_n\}$ має границю, нехай ця границя рівна a. А це й означає, що кожен з вкладених відрізків містить на числовій прямій точку a, яка є спільною для цих відрізків, що і треба було довести.

Зауважимо, що якщо одне з цих тверджень прийняти за аксіому, то інше твердження й аксіома Больцано-Вейєрштрасса стануть теоремами, які можна довести. [5, с.42]

Аксіома Больцано-Вейєрштраса забезпечує тільки існування границі й нічого не говорить про її величину. Проте, інколи достатньо знати, що границя існує, щоб її знайти. Розглянемо приклад.

Знайти границю послідовності

$$x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots .$$

Для даної послідовності справедлива наступна рівність $x_{n+1}^2 = 2x_n$.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ має границю a, то ліва частина рівності прямує до a^2, а права – до $2a$. Отримаємо рівність $a^2 = 2a$, звідки $a = 0$ або $a = 2$.

Очевидно, що 0 не є границею послідовності $\{x_n\}$. Отже, якщо границя існує, то вона рівна 2.

Для доведення існування границі використаємо аксіому Больцано-Вейєрштрасса. За індуктивним припущенням можна довести, що при будь-якому n виконується нерівність $x_n < x_{n+1} < 2$.

Тому послідовність $\{x_n\}$ монотонна й обмежена. [12, с.27-28; 23, с.43-44]

РОЗДІЛ 2

ПРАКТИЧНИЙ АСПЕКТ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

2.1. Операція граничного переходу при формулюванні математичних понять

Операція граничного переходу є однією з найважливіших у математичному аналізі. На її основі будується інтегральне та диференціальне числення, вводяться поняття неперервності, похідної, суми ряду, а також частина понять усієї неперервної математики. До операції граничного переходу зводиться збіжність функціональних послідовностей і рядів; слабка та сильна збіжності послідовностей елементів нормованих просторів чи функціоналів.

У цьому пункті ми розглянемо означення границі функції, яке ґрунтується на означенні границі числової послідовності, а також зв’язок границі числової послідовності з диференціальним численням і теорією рядів. Почнемо з поняття неперервності функції в точці.

Відомо, що числова послідовність є частинним випадком функції, тому дамо визначення границі функції користуючись означенням границі числової послідовності. Розглянемо функцію $y = f(x)$ задану на деякому проміжку X, за виключенням, може бути, точки x_0 цього проміжку. Візьмемо з проміжку X послідовність точок, відмінних від x_0:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, \tag{2.1}$$

яка збігається до x_0. Значення функції в точках цієї послідовності утворюють відповідну числову послідовність:

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots, \tag{2.2}$$

по відношенню до якої ми можемо ставити питання про існування і величину границі. Оскільки на вибір чисел послідовності (2.1) не накладено жодних умов, крім того, що вона збігається до деякого числа x_0, то її можна обирати будь-яким способом. Відповідно, будемо отримувати різні числові послідовності (2.2).

Якщо послідовності (2.2), відповідають будь-яким послідовностям (2.1), і мають однакову границю A, то говорять, що $\lim_{n\to\infty} f(x) = A$.

Якщо, хоча б для однієї з послідовностей (2.1), яка збігається до x_0 не існує границі, або вона відмінна від іншої границі послідовності (2.2), то говорять, що функція $f(x)$ в точці x_0 границі не має.

Дамо строге означення границі функції, що ґрунтується на понятті границі числової послідовності.

Число A називається границею функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якої послідовності точок (2.1) із проміжку X, відмінних від x_0, яка збігається до точки x_0, послідовність відповідних значень функції (2.2), збігається до числа A. [3, с.107]

Покажемо на прикладі, застосування означення границі функції в точці. Довести за означенням границі функції, що $\lim_{x\to 3}(x^2 - 5x + 2) = -4$.

Нехай $\{x_n\}$ – довільна послідовність точок x, збіжних до 3, тобто $x_n \to 3$. За теоремою про арифметичні дії над границями числових послідовностей, маємо:

$$\lim_{x_n\to 3} x_n^2 = \lim_{x_n\to 3} x_n \cdot x_n = 3 \cdot 3 = 9; \qquad \lim_{x_n\to 3} 5x_n = 5 \cdot 3 = 15.$$

Отже,

$$\lim_{x_n\to 3} f(x_n) = \lim_{x_n\to 3}(x_n^2 - 5x_n + 2) = 9 - 15 + 2 = -4.$$

Оскільки вибір послідовності, здійснюється довільним чином, то за означенням границі функції маємо, що $\lim_{x\to 3}(x^2 - 5x + 2) = -4$.

Далі розглянемо поняття неперервності функції в точці, яке спирається на означення границі функції в деякій точці. Нехай задано функцію $y = f(x)$, яка належить деякому проміжку і точку x_0, що належить цьому проміжку.

Якщо границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці, то функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (2.3)$$

Отже, якщо функція $f(x)$ неперервна і необхідно знайти її границю при $x \to x_0$, то достатньо у вираз функції замість x підставити x_0 та знайти відповідні значення $f(x_0)$. Тепер відповідно до означення границі функції дамо означення неперервності функції в точці на мові послідовностей.

Функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо для будь-якої послідовності (2.1), збіжної до x_0, послідовність (2.2) збігається до $f(x_0)$. При цьому $x \to x_0$, і може приймати значень x_0. [3, с.133-134]

Користуючись даним означенням, довести неперервність функції $f(x) = x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 2$ на проміжку $(-\infty;\ +\infty)$.

Виберемо і зафіксуємо точку x_0 з проміжку $(-\infty;\ +\infty)$, і знайдемо границю функції в цій точці. За теоремою про арифметичні дії над границями числових послідовностей, маємо:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 2) = x_0^4 + 5x_0^3 - 11x_0^2 - 2.$$

Оскільки, ми показали, що виконується (2.3) то за означенням неперервності функції, $f(x)$ – неперервна в точці x_0. Оскільки, точка x_0 – довільна точка проміжку $(-\infty;\ +\infty)$, то ми довели неперервність даної функції в кожній точці заданого проміжку.

Дослідимо застосування границі числової послідовності при розгляді степеня з раціональним показником. Проілюструємо на прикладі однієї із властивостей ірраціональних чисел: для кожного ірраціонального числа μ існує зростаюча послідовність раціональних чисел $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, яка збігається до μ.

Наприклад, якщо розглянути деяке число μ, що представлено у вигляді нескінченного дробу, із цілою частиною рівною k і десятковими знаками c_n, тобто $\mu = k, c_1 c_2 \dots c_n \dots$, то можна прийняти $r_n = k, c_1 c_2 \dots c_n$, отримаємо

$$r_n = k + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + \dots + \frac{c_n}{10^n}.$$

Отже, в якості r_n виступає десяткове наближення до μ з недостачею.

Лема 2.1. Нехай $a > 0$ і μ – деяке ірраціональне число. Тоді для будь-якої послідовності раціональних чисел, яка є збіжною до μ, послідовність $a^{r_1}, \dots, a^{r_n}, \dots$ збігається до однієї і тієї самої границі A.

Доведення. Якщо $a = 1$, то $A = 1$.

Розглянемо випадок, коли $a > 1$. Розглянемо спочатку деяку фіксовану неспадну послідовність раціональних чисел $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$, яка є збіжною до μ. Тоді

$$a^{\rho_1} \leq \ a^{\rho_2} \leq \cdots \leq a^{\rho_n} \leq \cdots \qquad (2.4)$$

Виберемо раціональне число r таке, що $r > \mu$. Тоді для будь-якого n виконується нерівність $\rho_n < r$. Звідси слідує, що $a^{\rho_n} < a^r$, тобто послідовність (2.4) обмежена зверху. За теоремою про монотонну послідовність, вона має границю рівну A, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\rho_n} = A$. При цьому $A > 0$, оскільки $a^{\rho_n} > 0$ і послідовність (2.4) неспадна.

Далі розглянемо довільну послідовність раціональних чисел

$$r_1 - \rho_1, r_2 - \rho_2, \dots, r_n - \rho_n, \dots ,$$

яка збігається до нуля і $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n - \rho_n} = 1$. Проте $a^{r_n} = a^{\rho_n} \cdot a^{r_n - \rho_n}$, звідси слідує, що $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\rho_n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n - \rho_n} = A$.

Залишилось розглянути випадок, коли $0 < a < 1$. Припустимо, що $\frac{1}{a} = b$, тоді $b > 1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n} = B, B > 0$. Звідси, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b^{r_n}} = \frac{1}{B} > 0$.

Отже, ми показали, що для будь-якої послідовності раціональних чисел $r_1, r_2, \dots, r_n$, ..., яка є збіжною до μ, послідовність (2.4) збігається до однієї і тієї самої границі. [3, с.162]

Також операція граничного переходу використовується при розв'язуванні задач диференціального числення. Зокрема в задачі про вільне падіння матеріальної точки, ми переходимо до границі у виразі для миттєвої швидкості за умови, що проміжок часу $\Delta t \to 0$.

$$v_{\text{м}} = \lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

В задачі про дотичну до кривої, використовується операція граничного переходу при знаходженні кутового коефіцієнту за умови, що $\Delta x \to 0$.

$$\mathrm{t}g\, \alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Задачі, що наведені вище приводять до поняття похідної, при введені якого використовується математична операція обчислення границі відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Знаходження загальних формул для обчислення похідних деяких функцій здійснюється за допомогою операції граничного переходу.

Так для знаходження похідної функції $f(x) = \sqrt{x}$, використовують вираз

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. [27, \text{с}. 249]$$

А для знаходження загальної формули, похідної тригонометричної функції $f(x) = \sin x$, шукають границю відношення наступного виразу

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right] = 1 \cdot \cos x = \cos x\,. [27, \text{с}. 263]$$

Похідна показникової функції $f(x) = a^x$ $(a > 0)$, знаходиться з виразу

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a\,. [27, \text{с}. 264]$$

Перейдемо до розгляду зв’язку границі числової послідовності з теорією рядів, оскільки вона побудована на поняттях послідовність і границя числової послідовності.

В теорії числових рядів при наданні символу

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

математичного змісту, застосовується операція граничного переходу.

Нехай задано числовий ряд

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots. \qquad (2.5)$$

З членів цього ряду можна утворити частинні суми $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ такі, що $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ при $n = 1, 2, \dots$. Тоді говорять, що $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$.

Зауважимо, що якщо існує границя S_n, то числовий ряд називається збіжним. Якщо ж такої границі не існує, то ряд називають розбіжним. [4, с.30]

Продемонструємо на прикладі геометричної прогресії поняття збіжності числового ряду.

Нехай задано геометричну прогресію $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, aq^n, \dots$

Якщо $|q| < 1$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, звідси випливає, що

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Якщо $|q| > 1$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, звідси випливає, що

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \infty.$$

Оскільки границі по підмножинам різні, то границя S_n не існує і геометрична прогресія є розбіжною. Збіжною вона є тільки тоді, коли $|q| < 1$, причому $S = \frac{a}{1-q}$. $[4, \text{с}. 14]$

Майже всі теореми теорії рядів пов'язані з операцією граничного переходу. Зокрема, в теоремі: необхідна умова збіжності числового ряду, потрібно знаходити границю n-го члену числового ряду, розглянемо її.

Теорема 2.1. Якщо ряд (2.5) збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доведення. Якщо ряд (2.5) є збіжним, то послідовність його частинних сум S_n $(n = 1,2, \dots)$ і S_{n-1} $(n = 2,3, \dots)$, очевидно, мають одну і ту ж саму границю S цього ряду. Тому, відмічаючи, що $u_n = S_n - S_{n-1}, n = 2,3, \dots$, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. [15, с.8]

Критерій Коші збіжності послідовностей може бути легко переформульований стосовно рядів, а також з нього можна отримати необхідну умову збіжності числового ряду.

Теорема 2.2 (критерій Коші). Для того, щоб ряд (2.5) був збіжним, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого як завгодно малого наперед заданого

$\varepsilon > 0$ існував номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для $\forall n \epsilon N, n \geq n_0(\varepsilon)$ і при будь-якому цілому $p \geq 0$ виконувалася нерівність $|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$.

Якщо взяти $p = 0$, то отримаємо необхідну умову збіжності ряду.

Покажемо на прикладі застосування критерію Коші. Розглянемо числовий ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

і доведемо, що цей ряд є розбіжним.

Дійсно, для будь-якого $n = 1,2, \ldots$ маємо:

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

тобто для будь-якого n при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і $p = n - 1$ критерій Коші не виконується.

Отже, даний ряд є розбіжним, його називають гармонічним рядом.

Більшість ознак збіжності числових рядів ґрунтується також на теорії границі числової послідовності, розглянемо деякі з цих ознак. [15, с.11-12]

Почнемо з розгляду ознак порівняння числових рядів. У цих теоремах операція граничного переходу застосовується при знаходженні частинних сум числового ряду, а також при доведенні обмеженості послідовності частинних сум ряду.

Теорема 2.3. Нехай дано два ряди

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2.6)$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (2.7)$$

причому члени першого ряду, починаючи з деякого не більші відповідних членів другого ряду:

$$u_n \leq v_n, \ n = k, k+1, \ldots \qquad (2.8)$$

Тоді із збіжності ряду (2.7) слідує збіжність ряду (2.6), а із розбіжності ряду (2.6) слідує розбіжність ряду (2.7).

Доведення. О відкидання кінцевого числа членів ряду не впливає на збіжність ряду, достатньо довести випадок при $k = 1$. Нехай $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ і $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$ - послідовності частинних сум рядів (2.6) і (2.7) відповідно. Із (2.8) слідує, що

$$S_n \leq \theta_n,\ n = 1,2, \dots . \quad (2.9)$$

Нехай ряд (2.7) збігається і θ його сума. Із додатних членів ряду (2.7) слідує, що $\theta_n \leq\ \theta$ при будь-якому n. Це означає, що частинні суми ряду (2.6) в сукупності обмежені і тому ряд (2.6) збіжний. Позначимо його суму через S. Переходячи в нерівності (2.9) до границі, отримаємо $\lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$, тобто $S \leq \theta$.

Нехай тепер ряд (2.6) є розбіжним. Це означає, що його частинні суми необмежено зростають. Але тоді, в силу (2.9), повинні необмежено зростати і часткові суми ряду (2.7), які будуть розбіжні. [4, с.51-52]

Теорема 2.4. Нехай дано ряди (2.6) і (2.7), причому можна вказати такі числа $k > 0$ і K, що починаючи з деякого n,

$$k \leq \frac{u_n}{v_n} \leq K. \quad (2.10)$$

Тоді ряди (2.6) і (2.7) одночасно збіжні або розбіжні.

Іншими словами, якщо існує $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K$, причому $K > 0$, то ряди (2.6) і (2.7) є одночасно збіжними або розбіжними.

Доведення. Із (2.10) випливає, що

$$kv_n \leq u_n \leq Kv_n. \quad (2.11)$$

Якщо ряд (2.9) збігається, то з лівої частини нерівності (2.11) за теоремою 2.3, отримуємо збіжність ряду $kv_1, kv_2, \dots, kv_n, \dots$. Звідси, випливає збіжність ряду (2.7). Тому якщо ряд (2.7) розбіжний, то і ряд (2.6) розбіжний.

Якщо ряд (2.7) збігається, то ряд також збігається $Kv_1, Kv_2, \dots, Kv_n, \dots$, і, відповідно, за теоремою 2.3, на основі правої частини нерівності (2.11). Отже, із збіжності ряду (2.6) слідує збіжність ряду (2.7). [4, с.53-54]

Теорема 2.5. Якщо для двох рядів (2.6) і (2.7) починаючи з деякого n, виконується нерівність

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \tag{2.12}$$

то із збіжності ряду (2.7) слідує збіжність ряду (2.6), а із розбіжності ряду (2.6) слідує розбіжність ряду (2.7).

Доведення. Із нерівності (2.12) маємо, що

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$$

починаючи з деякого $n = n_0$. Це означає, що відношення $\frac{u_n}{v_n}$, починаючи з деякого n_0 складають спадну послідовність. Тому, нехай $\frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} = K$ і з (2.12) отримаємо, що при $n \geq n_0$ маємо $\frac{u_n}{v_n} \leq K$. Застосувавши теорему 2.4, ми й доводимо дану теорему. [4, с.56-57]

На основі теореми 2.5, можна сформулювати і довести ознаку Даламбера збіжності числового ряду. В якій операція граничного переходу застосовується для знаходження суми числового ряду і доведення збіжності.

Теорема 2.6 (ознака Даламбера). Якщо для ряду (2.5), починаючи з деякого номера n_0 відношення $(n+1)$-го члена до попереднього, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, не перевищує деякого числа $q < 1$, тобто

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1, \tag{2.13}$$

то ряд (2.5) є збіжним.

І навпаки, якщо для ряду (2.5), починаючи з деякого номера n_0 відношення $(n+1)$-го члена до попереднього, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, буде не менше одиниці, тобто

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \tag{2.14}$$

то ряд (2.6) є розбіжним.

Іншими словами, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ або нескінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, тоді якщо $0 \leq l < 1$ – ряд збіжний, в іншому випадку розбіжний.

Доведення. Нехай виконується умова (2.13). Візьмемо в теоремі 2.5 в якості допоміжного ряду $v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$, збіжну геометричну прогресію $q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$. У цьому випадку нерівність (2.13) може бути записана так

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Це й означає, що за теоремою 2.5 ряд (2.5) є збіжним.

Нехай тепер виконується умова (2.14). Візьмемо в третій ознаці порівняння в якості $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, розбіжний ряд $1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$, а в якості ряду $v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$- ряд (2.5), який досліджуємо. В цьому випадку нерівність (2.14) набуде вигляду

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

і ряд (2.5) є розбіжним за третьою ознакою порівняння.

Наслідок 2.1. Якщо для ряду (2.5) існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, l < 1$, то цей ряд є збіжним; $l > 1$, то ряд є розбіжним. [4, с.65-67]

2.2. Застосування спеціальних теорем теорії границь числових послідовностей

Однією з найважливіших теорем у теорії границь числових послідовностей є теорема Больцано Вейєрштрасса про монотонну збіжну послідовність. Ця теорема застосовується для доведення і розв’язування досить великої кількості задач.

Розглянемо два додатних числа x і y причому $x > y$. Знайдемо їх середнє арифметичне і середнє геометричне, отримаємо:

$$x_1 = \frac{x + y}{2}, \quad y_1 = \sqrt{xy}.$$

Очевидно, що $x_1 > y_1$, і виконується нерівність $x < x_1 < y_1 < y$. Для чисел x_1 і y_1 складемо середнє арифметичне і середнє геометричне, отримаємо:

$$x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2}, \quad y_2 = \sqrt{x_1 y_1},$$

причому $x_1 < x_2 < y_2 < y_1$ і так далі.

Бачимо закономірність

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_n = \sqrt{x_n y_n},$$

і $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$.

Отже, маємо дві послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, причому $\{x_n\}$ зростаюча, а $\{y_n\}$ – спадна. Оскільки $x < x_n < y_n < y$, то ці послідовності обмежені і за теоремою Вейєрштрасса мають границі:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Якщо у виразі для x_{n+1} перейти до границі при $n \to \infty$, то отримаємо

$$a = \frac{a+b}{2},$$

звідки $a = b$.

Отже, послідовності середніх арифметичних $\{x_n\}$ і послідовності середніх геометричних мають спільну границю $\mu = \mu(a, b)$, яке називають середнім арифметико-геометричним чисел x і y. [29, с.73-74]

У математиці особливу роль відіграє число e, яке є фундаментальною математичною константою. Воно є важливим у диференціальному й інтегральному численні, а також у багатьох інших розділах математики.

Розглянемо послідовність $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ і доведемо, що вона має границю.

Оскільки при збільшенні степеня n основа степеня зменшується, то монотонний характер послідовності $\{x_n\}$ не враховується. Переконаємося в цьому, застосовуючи біном Ньютона, отримаємо:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Якщо від x_n перейти до x_{n+1}, тобто збільшити n на одиницю, то з'явиться ще один додатній член $(n+2)$. Кожен із розглянутих членів $(n+1)$ збільшиться, тобто будь-який множник в дужках виду $\left(1 - \frac{s}{n}\right)$ буде замінений множником $\left(1-\frac{s}{n+1}\right)$. Звідси і випливає, що $x_{n+1} > x_n$, тобто послідовність $\{x_n\}$ є зростаючою.

Далі покажемо, що вона обмежена зверху. Опустимо всі множники в дужках, тим самим збільшуючи цю послідовність, так що

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Замінимо кожний множник в знаменниках дробів числом 2, отримаємо:

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Але прогресія, яка починається членом $\frac{1}{2}$ має суму меншу за одиницю, тому $y_n < 3$, а це означає що й $x_n < 3$. Це говорить про те, що послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає і обмежена зверху.

Отже, послідовність $\{x_n\}$ за теоремою Вейєрштрасса має границю, яка не перевищує числа 3. [19, с.77]

Отримана границя є визначеним числом, яке називають числом e, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Існує спосіб знаходження числа e з досить великою точністю. Розглянемо його, повернемося до розкладу послідовності $\{x_n\}$ за біномом Ньютона. В цьому розкладі зафіксуємо k і будемо вважати, що $n > k$, і відкинемо всі члени, що містяться за $(k+1)$-м, тоді отримаємо нерівність

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Перейдемо до границі при $n \to \infty$, маємо:

$$e \geq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k.$$

Ця нерівність справедлива при будь-якому натуральному k. Отже, маємо $x_n < y_n \leq e$, звідки слідує, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$.

Зауважимо, що y_n є $(n+1)$ частинна сума для нескінченного числового ряду

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots,$$

і останнє граничне співвідношення показує, що e є його сумою.

Послідовність $\{y_n\}$ для наближеного обчислення числа e є більш зручною, ніж послідовність $\{x_n\}$. Оцінимо ступінь близькості $\{y_n\}$ до e. Для цього розглянемо різницю між будь-яким значенням y_{n+m}, які слідують за y_n, отримаємо

$$y_{n+m} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+m)}\right).$$

Якщо в дужках замінити всі множники в знаменниках дробів на $(n+2)$, то отримаємо нерівність

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right),$$

яка посилиться, якщо замінити вираз у дужках сумою нескінченної прогресії

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Будемо збільшувати m до нескінченності, а n вважати сталим. Так y_{n+m} буде набувати послідовність значень $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+m}, \dots$, яка, очевидно, збігається до e. Тому отримаємо

$$e - y_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1},$$

або

$$0 < e - y_n \leq \frac{1}{n!\,n}.$$

Якщо через θ позначити відношення різниці $e - y_n$ до числа $\frac{1}{n!n}$, то можна записати також

$$e - y_n \leq \frac{\theta}{n!\,n}.$$

Замінивши в останній рівності y_n його розгорнутим виразом, отримаємо:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!\,n}.$$

Ми прийшли до важливої формули, яка є відправною точкою до обчислення числа e. Відкидаючи останній, «додатковий» член, і замінюючи кожен із залишених членів його десятковим наближенням, ми отримаємо наближене значення для e. [29, с.81]

Також важливими теоремами в теорії границь числових послідовностей є теореми Штольця і Тепліця. Вони дають можливість обчислювати певний досить широкий набір границь числових послідовностей, які не підлягають розв'язанню за допомогою стандартних методів.

Теорема 2.7 (теорема Тепліця). Нехай дійсні числа $\{c_{nk}: 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ задовольняють умовам:

1) $c_{nk} \geq 0$;
2) $\sum_{k=1}^{n} c_{nk} = 1$;
3) $c_{nk} \to 0$ при $n \to \infty$ для кожного фіксованого k.

Тоді для довільної збіжної послідовності чисел $\{x_n\}$ послідовність

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}\, x_k$$

також є збіжною, причому $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доведення. За умовою $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, звідси випливає, що:

1) послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою, тобто існує таке число $M > 0$, що для всіх $n \in N$ виконується нерівність $|x_n| \leq M$;
2) послідовність $\{x_n - a\}$ є також обмеженою, оскільки

$$|x_n - a| \leq |x_n| + |a| \leq 2M \text{ для } \forall n \in N. \tag{2.15}$$

3) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.16}$$

З 3) випливає, що для $\forall \varepsilon > 0$ існує номер $n_1(\varepsilon) > n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n \geq n_1(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$c_{nk} < \frac{\varepsilon}{4n_0(\varepsilon)M} \tag{2.17}$$

для кожного фіксованого $1 \le k \le n_0(\varepsilon)$.

Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, розглянемо для всіх $n \ge n_1(\varepsilon)$ вираз:

$$|y_n - a| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_{nk}x_k - a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_{nk}x_k - \sum_{k=1}^{n} c_{nk}a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_{nk}(x_k - a)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} c_{nk}|x_k - a| = \sum_{k=1}^{n_0(\varepsilon)} c_{nk}|x_k - a| + \sum_{k=n_0(\varepsilon)+1}^{n} c_{nk}|x_k - a|.$$

Для оцінки першої суми скористаємося нерівностями (2.15) і (2.17), а для оцінки другої – нерівністю (2.16). Матимемо, що для $\forall n \ge n_1(\varepsilon)$, виконується нерівність:

$$|y_n - a| \le n_0(\varepsilon)\frac{\varepsilon \cdot 2M}{4n_0(\varepsilon)M} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{n} c_{nk} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Оскільки така нерівність виконується для будь-якого $\varepsilon > 0$, то теорему доведено. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Зауважимо, що в теоремі Тепліця послідовність $\{y_n\}$ є перетворенням збіжної послідовності $\{x_n\}$ за допомогою набору чисел $\{c_{nk}: 1 \le k \le n, n \ge 1\}$. Ця теорема встановлює умови, при яких таке перетворення не змінює границі. [26, с.170-171]

Теорема 2.8 (теорема Штольця). Нехай $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ – дві числові послідовності, такі, що:

1) $y_{n+1} > y_n$ для $\forall n \in N$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$.

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

Доведення. Нехай $x_0 = y_0 = 0$ і $y_i > 0$. Будемо вважати, що

$$c_{nk} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n},\ \ 1 \le k \le n,\ \ n \in N,$$

і розглянемо послідовність $z_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, n \in N$, яка збіжна до числа a.

Послідовність дійсних чисел $\{c_{nk}: 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ задовольняє вимоги теореми Тепліця. Справді, з 1) випливає, що $c_{nk} > 0$, а з 2) $c_{nk} \to 0$ для будь-якого фіксованого k і

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk} = \frac{1}{y_n}\left((y_1 - y_0) + (y_2 - y_i) + (y_n - y_{n-1})\right) = 1.$$

За теоремою Теппліця, послідовність

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}\, z_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} = \frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{x_n}{y_n}$$

є збіжною, причому $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Продемонструємо на прикладі застосування теореми Тепліця.

Нехай $\{x_n\}$ – збіжна послідовність, причому $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Утворимо послідовність $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, n \in N$, і доведемо, що ця послідовність є також збіжна, причому $\lim_{n\to\infty} A_n = a$.

Покладемо $c_{nk} = \frac{1}{n}, 1 \leq k \leq n, n \in N$ і розглянемо послідовність $\{x_n\}$, яка збіжна до числа a.

Послідовність дійсних чисел $\{c_{nk}: 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$, очевидно, задовольняє вимоги даного прикладу. Отже, за теоремою Тепліця, послідовність (A_n) – збіжна і $\lim_{n\to\infty} A_n = a$. [26, с.171-172]

Далі розглянемо на прикладах застосування теореми Штольця.

Нехай $a_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}, k \in N$. Знайти $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Покладемо $x_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k, y_n = n^{k+1}$ так, що $a_n = \frac{x_n}{y_n}$, і дослідимо на збіжність послідовність $\{b_n\}$:

$$b_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Маємо:

$$b_n = \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{n^k}{n^{k+1} - n^{k+1} + C_{k+1}^1 n^k - \dots - (-1)^{k+1}} =$$

$$= \frac{n^k}{(k+1)n^k - \varphi(n;k)} = \frac{1}{(k+1) - \frac{\varphi(n;k)}{n^k}},$$

де

$$\varphi(n;k) = \frac{(k+1)k}{2!} n^{k-1} - \frac{(k+1)k(k-1)}{3!} n^{k-2} + \dots + (-1)^{k+1}.$$

Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n;k)}{n^k} = 0$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{k+1}$.

Отже, за теоремою Штольця: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$. [26, с.173]

Розглянемо ще один приклад на застосування теореми Штольця при обчисленні границі числової послідовності. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \left(k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \dots + \frac{(k+n)!}{n!} \right).$$

Нехай

$$x_n = k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \dots + \frac{(k+n)!}{n!},$$

а $y_n = n^{k+1}$, причому $n \epsilon N$.

Послідовність $\{y_n\}$ задовольняє умовам теореми Штольця, тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(k+n)!}{n!}}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\dots(n+k)}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Отже, за теоремою Штольця,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \left(k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \dots + \frac{(k+n)!}{n!} \right) = \frac{1}{k+1}. [18, \text{с}. 58]$$

Наведемо ще один приклад на застосування даної теореми. Нехай послідовність $\{x_n\}$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+2} - x_n) = 0$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$.

Вважатимемо для зручності $x_0 = x_1 = 0$ і покладемо $y_n = x_{n+2} - x_n, n \epsilon N$, тоді $y_n \to 0$. Кожна підпослідовність послідовності $\{y_n\}$ також збіжна до нуля, отже, $y_{2n} \to 0$ і $y_{2n+1} \to 0$ при $n \to \infty$.

За теоремою Штольця, послідовності

$$Y_n' = \frac{y_0 + y_2 + \cdots + y_{2n-2}}{n} \text{ і } Y_n'' = \frac{y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}}{n}$$

також збіжні, причому $\lim_{n\to\infty} Y_n' = \lim_{n\to\infty} Y_n'' = 0.$

Зауважимо, що з означення $\{y_n\}$ матимемо

$$\lim_{n\to\infty} Y_n' = \frac{x_{2n}}{n} \text{ і } \lim_{n\to\infty} Y_n'' = \frac{x_{2n+1}}{n}$$

для $\forall n \epsilon N$. А тому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{2n} = 0 \text{ і } \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n}+1}{2n+1} = 0.$$

Отже, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0$. [26, с.175]

Розглянемо досить цікавий приклад на застосування теореми Штольця, з використання ірраціональних чисел. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

Нехай $x_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n-1]{n-1}$, а $y_n = n$. Тоді $x_{n-1} = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}$, а $y_{n-1} = n - 1$.

Підставимо у рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n} - 1 - \sqrt{2} - \sqrt[3]{3} - \cdots - \sqrt[n-1]{n-1},}{n - n + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Що й потрібно було довести. [18, с.59]

Отже, ми показали один з прийомів обчислення границь числових послідовностей.

2.3. Границі числових послідовностей, які задані рекурентними співвідношеннями

Послідовність можна розглядати як частинний випадок функції, а це означає, що її можна задавати тими самими способами, що й функцію. Одним із них є рекурентний спосіб задання послідовностей. У цьому пункті ми будемо досліджувати задачі в яких послідовності задані рекурентними співвідношеннями.

Задачі, в яких розглядаються рекурентні послідовності, мають різні шляхи розв'язання. Інколи за рекурентною формулою вдається знайти загальний член послідовності, що значно спрощує подальші міркування. Якщо для рекурентно заданої послідовності знаходження її загального члену є занадто складним, то потрібно шукати інші підходи. Проте, інколи досить легко переконатися, що задана рекурентна послідовність є монотонною та обмеженою, а отже, за теоремою Вейєрштрасса вона має границю, знаходження якої зводиться до розв'язання деякого рівняння.

Розглянемо послідовність $\{x_n\}$, яка задана рекурентним співвідношенням

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n, x_1 = 1, n \geq 1.$$

Доведемо, що існує границя $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n x_n$ і знайдемо її.

Розглянемо послідовність $\{y_n\}$, де $y_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n x_n$ для $\forall n \in N$. Оскільки

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}, n \geq 1,$$

то

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n x_n + \frac{3}{2}, n \geq 1,$$

а отже,

$$y_1 = \frac{3}{2}, y_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot y_n + \frac{3}{2}, n \geq 1.$$

Тоді,

$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right),$$

$$y_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right),$$

і так, далі. Бачимо закономірність,

$$y_n = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right), n \geq 1.$$

Застосуємо метод математичної індукції. При $n = 1$, $y_1 = \frac{3}{2}$. Припустимо, що при $n = k$, $y_k = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)$, і доведемо, що

$$y_{k+1} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Дійсно,

$$y_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot y_k + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{3}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right),$$

що й треба було довести.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 3$. [18, с.48-49]

Розглянемо випадок, коли для знаходження границі числової послідовності необхідно розв'язати рівняння.

Нехай послідовність $\{x_n\}$ задано рекурентним співвідношенням

$$x_{n+1}^2 = 3x_n - 2, x_1 = \frac{3}{2}, n \geq 1.$$

Припустимо, що границя існує. Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тоді з рекурентного співвідношення випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = 3 \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - 2)$, тобто $x^2 = 3x - 2$. Розв'язавши квадратне рівняння, отримаємо: $x_1 = 2$ або $x_2 = 1$.

Покажемо, що послідовність монотонна і обмежена. Із співвідношення

$$x_n = \frac{x_{n+1}^2 + 2}{3},$$

випливає, що $x_n > 0$ для $\forall n \geq 1$, тоді $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}, n \geq 1$.

Оскільки,

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = +\sqrt{3\cdot\frac{3}{2} - 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} > \frac{3}{2} = x_1.$$

Припустимо, що послідовність зростає, тобто $x_{n+1} > x_n, n \geq 1$. Розглянемо різницю квадратів двох сусідніх членів: $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 3(x_n - x_{n-1}), n \geq 2$, звідки $(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) = 3(x_n - x_{n-1})$.

Оскільки $x_n > 0$ для $\forall n \geq 1$, то $x_{n+1} + x_n > 0$ для $\forall n \geq 1$. Тому вирази $x_{n+1} - x_n$ і $x_n - x_{n-1}$ мають однакові знаки, тобто або $x_{n+1} > x_n > x_{n-1}$, або $x_{n+1} < x_n < x_{n-1}, n \geq 1$. Але при $n = 1$ ми перевірили, що $x_2 > x_1$. Отже, послідовність $\{x_n\}$ є зростаючою. З цього випливає, що границею послідовності $\{x_n\}$ може бути тільки число $a = 2$.

Доведемо це методом математичної індукції. При $n = 1$, $x_1 = \frac{3}{2} < 2$. Припустимо, що при $n = k, x_k < 2$ і доведемо для $n = k + 1$. Дійсно,

$$x_{k+1} = \sqrt{3x_k - 2} < \sqrt{3\cdot 2 - 2} = 2.$$

Отже, за теоремою Вейєрштрасса $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. [18, с.52-54]

Існують послідовності, які широко використовуються в сучасній математиці при наближених обчисленнях кореня квадратного із додатного дійсного числа. Розглянемо послідовність $\{x_n\}$

$$x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}} \tag{2.18}$$

і знайдемо її границю, за умови, що $a > 0$, і загальна кількість квадратних коренів дорівнює n.

Задану послідовність $\{x_n\}$ можна задати рекурентним відношення

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \quad n = 1,2, \ldots, \tag{2.19}$$

за умови, що

$$x_1 = \sqrt{a}. \tag{2.20}$$

Доведемо, що границя існує. Для цього покажемо, що дана послідовність є збіжною. Для цього досить показати, що вона є зростаючою і обмеженою.

Спочатку доведемо, що послідовність $\{x_n\}$ є зростаючою, тобто доведемо, що виконується нерівність

$$x_n < x_{n+1}. \tag{2.21}$$

Доведемо нерівність (2.21), методом математичної індукції. При $n = 1$, нерівність (2.21) виконується і при цьому, маємо:

$$x_1 \leq x_2 \tag{2.22}$$

Припустимо, що нерівність (2.21) виконується для будь-якого номера n і доведемо, для $n + 1$, тоді маємо

$$x_{n+1} < x_{n+2}. \tag{2.23}$$

Нерівність (2.22) виконується із відношення $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a}$.

Доведемо, що із нерівності (2.21) випливає нерівність (2.23). Із нерівності (2.21) і рекурентної формули (2.19) випливає, що

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + x_{n+1}}. \tag{2.24}$$

З іншого боку, записуючи рекурентне відношення (2.19) для номера $n + 1$, ми отримаємо рівність

$$x_{n+2} = \sqrt{a + x_{n+1}}. \tag{2.25}$$

Співставимо рівності (2.25) і (2.24), отримаємо рівність (2.23).

Отже, ми показали, що послідовність $\{x_n\}$ є зростаючою.

Доведемо тепер, що послідовність є обмеженою зверху, тобто, що для $\forall n$ виконується нерівність

$$x_n \leq M, \tag{2.26}$$

де M – найбільше з двох чисел a і 2.

Застосуємо метод математичної індукції. Спочатку перевіримо виконання нерівності (2.26) для номера $n = 1$. Розглянемо окремо випадки $0 < a \leq 2$ і $a > 2$, користуючись нерівністю (2.20) отримаємо:

$$\begin{array}{ll} x_1 = \sqrt{a} \leq \sqrt{2} < \sqrt{2}, & \text{якщо } 0 < a \leq 2 \\ x_1 = \sqrt{a} < a, & \text{якщо } a > 2 \end{array} \tag{2.27}$$

Із (2.27) випливає, що $x_1 \leq M$, де $M = \max\{a, 2\}$.

Нехай нерівність (2.26) справедлива для даного номеру n. Використовуючи рекурентне співвідношення (2.19), розглянемо окремо випадки $0 < a \leq 2$ і $a > 2$, ми отримаємо, що

$$\begin{gathered} x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \leq \sqrt{2+2} = 2, \text{ якщо } 0 < a \leq 2 \\ x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \leq \sqrt{a+a} = \sqrt{2a} < a, \text{ якщо } a > 2 \end{gathered} \tag{2.28}$$

Із (2.28) випливає справедливість нерівності $x_{n+1} \leq M$, де $M = \max\{a, 2\}$.

Ми доведи обмеженість послідовності $\{x_n\}$.

Отже, послідовність $\{x_n\}$ є збіжною до деякої границі x.

Знайдемо цю границю. Із (2.18) бачимо, що всі елементи послідовності невід'ємні, відповідно і шукана границя є невід'ємною.

Піднесемо до квадрату (2.19), отримаємо $x_{n+1}^2 = a + x_n$.

Оскільки послідовність $\{x_n\}$ є збіжною до деякої границі x, то переходячи в рівності до границі, ми отримаємо $x^2 = a + x$ або $x^2 - x - a = 0$.

Розв'язавши квадратне рівняння, маємо

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} > 0 \qquad \text{і} \qquad x = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0$$

Оскільки, шукана границя є невід'ємним числом, то ми отримуємо, що він співпадає з додатнім коренем квадратного рівняння, тобто дорівнює

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}. \text{ [11, с.90-92]}$$

Далі розглянемо задачу в якій комбінуються різні способи обчислення границь числових послідовностей.

Нехай послідовність $\{x_n\}$ визначається рекурентним співвідношенням: $x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}, n \in N, x_1 = 1$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n - \sqrt{n}\right)$.

Зауважимо, що $x_2 = 2, x_3 = 2$, а отже, $x_1 < x_2 \leq x_3$. За допомогою методу математичної індукції доведемо, що послідовність $\{x_n\}$ монотонно неспадна. Для цього доведемо нерівність $x_n \leq x_{n+1}$ для $\forall n \in N$.

Справді, при $n = 1$ – нерівність виконується.

Нехай нерівність виконується для будь-якого $n \leq k$. Доведемо, що вона виконується при $n = k + 1$. Дійсно,

$$x_{k+1} = 1 + \frac{k}{x_k} = 1 + \frac{k+1}{x_k + \frac{x_k}{k}} = 1 + \frac{k+1}{1 + \frac{k-1}{x_{k-1}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{kx_{k-1}}} =$$

$$= 1 + \frac{k+1}{1 + \frac{k}{x_{k-1}} + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{x_{k-1}}\right)} \leq 1 + \frac{k+1}{1 + \frac{k}{x_{k-1}}}.$$

Оскільки виконується нерівність $x_{k-1} \leq x_k$, далі маємо:

$$x_{k+1} \leq 1 + \frac{k+1}{1+\frac{k}{x_k}} = 1 + \frac{k+1}{x_{k+1}} = x_{k+2}.$$

Ми довели, що послідовність $\{x_n\}$ монотонна, тоді із співвідношення, яке задає дану послідовність маємо, з одного боку

$$x_n^2 \leq x_{n+1} \cdot x_n = x_n + n \text{ або } \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq n + \frac{1}{4},$$

а тому

$$x_n - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n + \frac{1}{4}}, n \in N.$$

З іншого боку,

$$\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{x_{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{n-1}{x_{n-1}}\left(1 + \frac{n-1}{x_{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{n-1}{x_{n-1}} \cdot x_n \geq \frac{1}{4} + n - 1 = n - \frac{3}{4}$$

(адже в силу монотонності $\frac{x_n}{x_{n-1}} \geq 1$), тому

$$x_n - \frac{1}{2} \geq \sqrt{n - \frac{3}{4}},\ n \in N.$$

З двох останніх доведених нерівностей для послідовності матимемо:

$$\sqrt{n - \frac{3}{4}} - \sqrt{n} + \frac{1}{2} \leq x_n - \sqrt{n} \leq \sqrt{n + \frac{1}{4}} - \sqrt{n} + \frac{1}{2},$$

тобто

$$-\frac{3}{4\left(\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\sqrt{n}\right)} + \frac{1}{2} \leq x_n - \sqrt{n} \leq \frac{1}{4\left(\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\sqrt{n}\right)} + \frac{1}{2}, n \in N.$$

За теоремою про три послідовності

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}. \text{ [26, c.176-178]}$$

ВИСНОВКИ

У роботі проаналізовано основну теорію границі числової послідовності, задачі, які розв'язуються за допомогою границь, а також нестандартний підхід до теорії границь. У ході дослідження була досягнута мета, яка ставилася на початку роботи, та виконані поставлені завдання.

Доведено еквівалентність різних означень границі числової послідовності, що не зустрічається в джерелах, які висвітлюють дану тему. Також були розв'язані задачі різного виду, що ілюструють застосування поняття границі послідовності, та розглянуто використання даної теми в теорії рядів.

Було описано три підходи до визначення поняття границі числової послідовності: алгебраїчний (класичний підхід за Коші), геометричний та підхід, що стосується теорії множин. Відповідно до даних підходів існують декілька означень границі числової послідовності, які було розглянуто, та доведено еквівалентність цих означень.

Названі підходи також стосуються і розв'язування задач, оскільки відповідно до підходу будується та чи інша теорія. Найчастіше використовується алгебраїчний підхід, на основі нього знаходять границі числових послідовностей за означенням чи, користуючись властивостями даної теорії. Досить цікавим, але менш вживаним є геометричний підхід. На основі геометричного підходу побудована, наприклад, теорія інтегралів, але він має і інші цікаві застосування. Рідше за інші зустрічається підхід, що ґрунтується на основі теорії множин, відповідно до цього задачі, що стосуються даного підходу зустрічаються найрідше.

Хотілося б зазначити, що теорія границі числової послідовності розв'язує також деякі основні, важливі в математиці задачі (наприклад, задача, що стосується числа e). Це ще раз доводить фундаментальність теорії границі числової послідовності.

Дипломну роботу можна використовувати при розв’язуванні різних задач з даної теми, бо приклади і задачі були підібрані таким чином, щоб максимально проілюструвати застосування границі послідовності.

Важливим також є те, що не потрібно розглядати різні питання лише з одної сторони, а необхідно шукати різні розв’язки однієї проблеми, бо це може привести до неочікуваних і корисних результатів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров О.І., Стреляєв Ю.М. Аналіз у метричних просторах: Навчальний посібник для студентів математичного факультету. Запоріжжя: ЗНУ, 2008. 72 с.
2. Бел Э.Т. Творцы математики. Предшественики современной математики. Пособие для учителей: пер. с англ. М.: Просвещение, 1979. 256 с.
3. Бохан К.А., Егорова И.А., Лащенов К.В. Курс математического анализа Т.1. Учебное пособие для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. Москва: Просвещение, 1972. 512 с.
4. Воробьев Н.Н. Теория рядов. Москва: Наука, 1979. 408 с.
5. Гельфанд С.И., Гервер М.Л., Кириллов А.А., Константинов Н.Н., Кушниренко А.Г. Задачи по елементарной математике. Последовательности. Комбинаторика. Пределы. Москва: Наука, 1965. 176 с.
6. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики: пер. с франц. Москва: Мир, 1986. 432 с.
7. Давидов Н.А. Курс математичного аналізу. Ч.3. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. Київ: Вища школа, 1979. 384 с.
8. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник у двох частинах. Ч.2. Київ: Либідь, 1994. 304 с.
9. Жалдак М.І., Михалін Г.О., Декалов С.Я. Математичний аналіз. Функції багатох змінних: Навчальний посібник. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. 430 с.
10. Зорич В.А. Математический анализ Ч.1. Москва: МЦНМО, 2012. 702 с.
11. Ильин В.А., Садовничий В.А., Седнов Бл.Х. Математический анализ. Начальный курс. Москва: Издательство МГУ, 1985. 662 с.
12. Кириллов А.А. Пределы. Москва: Наука, 1973. 96 с.

13. Клюшин Д.А., Семенов В.В. Задачі та вправи по курсу «Функціональний аналіз». Ч.1. «Елементи загальної топології» для студентів факультету кібернетики. Київ: РВЦ. Київський університет, 2004. 115 с.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 546 с.
15. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 720 с.
16. Курант Р. Курс интегрального и диференциального исчисления: пер. с анг. Москва: Наука, 1967. 704 с.
17. Марков С.Н. Курс истории математики: учебное пособие. Иркутск: издательство Иркутского университета, 1995. 248 с.
18. Нестандартні та олімпіадні задачі алгебри та аналізу: практикум для підготовки студентів 1-го курсу: навчальний посібник для студентів ступеня бакалавра/КПІ імені Ігоря Сікорського: уклад.: С.В. Бондарчук, М.К. Ільєнко, Т.В. Маловічко, В.В. Павленко., А.В. Сиротенко. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорького, 2020. 183 с.URL:http://ela.kpi.ua/handle/123456789/39002
19. Никольський С.М. Курс матаматического анализа. Т.1. Москва: Наука, 1983. 464 с.
20. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. Математический анализ. Ч.1. Учебное пособие. Челябинск, 1999. 158 с.
21. Сіра І.С. Різні підходи до побудови теорії границь. Матеріали ІІ Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних вмінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2021» Форум молодих дослідників». Суми, 2021. с. 123-124
22. Сіра І.С. Різні підходи до побудови теорії границь. Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих

науковців. – Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2021. Випуск 15. Т.2. 45 с. 21-22.

23. Сіра І.С. Різні підходи до побудови теорії границь. Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. – Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2021. Випуск 15. Т.1. 45 с. 40-44.
24. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1. Москва: Наука, 1974. 450 с.
25. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. Москва: Наука, 1969. 328 с.
26. У світі математики: Збірник науково-популярних статей: Вип.13. За редакцією доктора фізико-математичних наук професора М.Й. Ядренка. Київ: Радянська школа, 1982. 255 с.
27. Уваренко И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. Т.1. Москва: Просвещение, 1966. 640 с.
28. Федак І.В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Ч.1. Вимірні множини та вимірні функції. Івано-Франківськ: НПУ імені Василя Стефаника, 2020. 52 с.
29. Фихтенгольц Г.М. Курс диференциального и интегрального исчисления. Т.1. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 608 с.
30. Шилов Г.А. Математический анализ. Специальный курс. Москва: Государственное издание физико-математической литературы, 1961. 438 с.
31. Юшкевич А.П. Из истории возникновения математического анализа. Москва: Знание, 1985. 48 с.