



DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-3-001

УДК 537.217

ПОХИБКА ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНУ КУЛОНА ДО ВЗАЄМОДІЇ ЗАРЯДЖЕНИХ СТРИЖНІВ

Юрій ІВАШИНА

Херсонський державний університет, Україна
 ivashinauriy@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9569-2393>

Наталія ЄРМАКОВА-ЧЕРЧЕНКО ✉

Херсонський державний університет, Україна
 nermakova@ksu.ks.ua
<https://orcid.org/0000-0001-9438-4866>

ERROR IN THE APPLICATION OF COULON'S LAW TO THE INTERACTION OF CHARGED RODS

Yuriy IVASHINA

Kherson State University, Ukraine
 ivashinauriy@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9569-2393>

Nataliia YERMAKOVA-CHERCHENKO ✉

Kherson State University, Ukraine
 nermakova@ksu.ks.ua
<https://orcid.org/0000-0001-9438-4866>

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Визначення сили взаємодії заряджених тіл має важливе практичне та методичне значення. В його основі лежить закон Кулона, але він визначає взаємодію між точковими зарядами. Ідеалізована умова виконання закону (розміри тіл набагато менші відстані між ними) не дозволяє використовувати його для розв'язання практичних задач. У випадку незначної відстані між зарядженими тілами використовується модель неперервно розподіленого заряду і силу взаємодії розраховують шляхом інтегрування по об'єму тіл сил взаємодії елементів тіл, що затрудняє практичне використання цієї моделі.

Матеріали і методи. Порівнювалися результати розрахунку сили взаємодії двох однорідно заряджених стрижнів за різними моделями. Істинна сила визначалася в моделі неперервно розподіленого заряду, кулонівська – моделі точкового. Розраховувалася абсолютна і відносна похибка застосування закону Кулона в залежності від відносної відстані a/L , де a – відстань між центрами зарядів, L – довжина стрижнів.

Результати. Наукова новизна роботи полягає у визначенні похибки застосування закону Кулона до розрахунку сили взаємодії між зарядженими стрижнями в залежності від відносної відстані між ними. Вона зменшується із ростом відносної відстані і залежить від взаємної орієнтації стрижнів. Найбільше значення похибки має при розташуванні стрижнів на одній осі.

Висновки. Розрахунки показали, що закон Кулона можна застосовувати до визначення сили взаємодії заряджених тіл навіть при невеликих значеннях відносної відстані між ними. Для різної взаємної орієнтації стрижнів відносна відстань, при якій похибка застосування закону Кулона стає меншою 0,5%, повинна бути більшою від 5 до 8 одиниць. Так як стрижні є яскравим представником видовжених тіл, для яких умова застосування моделі точкового заряду є несприятливою, то отримані результати можна застосовувати при визначенні взаємодії тіл довільної форми.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: сила взаємодії; закон Кулона; похибка; відносна відстань.

ABSTRACT

Formulation of the problem. Determining the force of interaction of charged bodies is of significant practical and methodical importance. It is based on Coulomb's law, but it defines the interaction between point charges. The idealized condition for the implementation of the law (the sizes of the bodies are much smaller distances between them) does not allow using it to solve practical problems. In the case of a small distance between charged bodies, the model of a continuously distributed charge is used, and the interaction force is calculated by integrating the interaction forces of the elements of the bodies over the volume of the bodies, which complicates the practical use of this model.

Materials and methods. The results of calculating the force of interaction between two uniformly charged rods according to different models were compared. The true force was determined in the continuously distributed charge model, the Coulomb force in the point model. The absolute and relative errors of the application of Coulomb's law were calculated depending on the relative distance a/L , where a is the distance between the centers of charges, L is the length of the rods.

Results. The scientific novelty of the work consists in determining the error of applying Coulomb's law to the calculation of the force of interaction between charged rods depending on the relative distance between them. It decreases with increasing relative distance and depends on the mutual orientation of the rods. The error has the greatest value when the rods are located on one axis.

Conclusions. Calculations showed that Coulomb's law can be applied to determine the force of interaction between charged bodies even at small values of the relative distance between them. For different mutual orientation of the rods, the relative distance at which the error of applying Coulomb's law becomes less than 0.5% should be greater than 5 to 8 units. Since rods are a vivid representative of elongated bodies, for which the condition of applying the point charge model is unfavorable, the obtained results can be used in determining the interaction of bodies of arbitrary shape.

KEYWORDS: force of interaction; Coulomb's law; error; relative distance.

ВСТУП

Постановка проблеми. Визначення сили взаємодії між зарядженими тілами має важливе практичне та методичне значення. З практичної точки зору силу взаємодії потрібно визначати при проектуванні та аналізі роботи різних електротехнічних пристроїв. З методичної точки зору важливим є вибір моделі заряджених тіл – точкового чи неперервно розподіленого заряду. В основі визначення цієї сили лежить експериментальний закон Кулона, але він визначає взаємодію між точковими зарядами. Умовою застосування закону Кулона є те, що відстань між тілами повинна бути набагато більшою ніж їх розміри (Кучерук & Горбачук, 1990; Сивухін, 2004). Така ідеалізована умова не дає можливості використання закону Кулона при розв'язуванні практичних задач.

Для цитування:

Івашина Ю., Єрмакова-Черченко Н. Похибка застосування закону кулона до взаємодії заряджених стрижнів. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 3. С. 7-11. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-3-001

Івашина, Ю., & Єрмакова-Черченко, Н. (2023). Похибка застосування закону кулона до взаємодії заряджених стрижнів. *Фізико-математична освіта*, 38(3), 7-11. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-3-001>

For citation:

Ivashina, Yu., & Yermakova-Cherchenko, N. (2023). Error in the application of Coulon's law to the interaction of charged rods. *Physical and Mathematical Education*, 38(3), 7-11. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-3-001>

Ivashina, Yu., & Yermakova-Cherchenko, N. (2023). Pokhybka zastosuvannya zakonu kulona do vzaemodii zaryadzhenykh stryzhniv [Error in the application of Coulon's law to the interaction of charged rods]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(3), 7-11. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-3-001>

У випадку визначення сили взаємодії між зарядженими тілами їх розбивають на елементи, які розглядають як точкові заряди, і розглядають силу взаємодії між елементами тіл. Сумарну силу визначають шляхом інтегрування по об'ємах тіл, але інтегрування векторної функції має суттєві математичні складнощі.

Розв'язання цієї проблеми можна значно спростити, якщо є можливість застосування закону Кулона. Чим ближча форма зарядженого тіла до сфери, поле якої сферично симетричне як і поле точкового заряду (Фейман та ін., 2016), тим більш точно до тіла можна застосовувати модель точкового заряду. Найбільше від сферичної симетрії відрізняється поле видовжених тіл, ідеальною моделлю яких є стрижні.

Аналіз актуальних досліджень. Незважаючи на те, що практичне застосування закону Кулона пов'язане з визначенням похибки його використання, нам не відомі роботи, в яких би вони розраховувалися.

Мета статті. З огляду на це метою статті є визначення похибки застосування закону Кулона до розрахунку сили взаємодії між зарядженими стрижнями в залежності від відстані між ними.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Експериментальний закон Кулона визначає силу взаємодії між двома нерухомими точковими зарядами. Сила дії заряду q_1 на q_2 (Кучерук, Горбачук, 1990):

$$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (1)$$

де \vec{r}_{12} – радіус-вектор, направлений від заряду q_1 до q_2 .

У випадку взаємодії заряджених тіл сила взаємодії між елементами dV_1 та dV_2 , які розглядаються як точкові заряди $dq = \rho dV$, рівна

$$d\vec{F}_{12} = \frac{k\rho_1 dV_1 \rho_2 dV_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (2)$$

де ρ – об'ємна густина заряду. Сила взаємодії між тілами визначається інтегруванням (2) по об'ємах тіл V_1 та V_2 (Федорченко, 1992).

$$\vec{F}_{12} = k \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho_1 dV_1 \rho_2 dV_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (3)$$

Вираз (3) визначає істинну силу взаємодії між тілами. Наближений розрахунок на основі моделі точкового заряду виконується згідно (1).

У випадку взаємодії лінійних тіл сила взаємодії визначається через лінійну густину заряду τ інтегруванням по довжині тіл L .

$$\vec{F}_{12} = k \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\tau_1 dl_1 \tau_2 dl_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (4)$$

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Порівнювалися результати розрахунку сили взаємодії двох однорідно заряджених стрижнів, що мають однакову довжину $L_1 = L_2$ та заряди q_1 та q_2 .

Істинна сила взаємодії F_i визначалася в моделі неперервно розподіленого заряду згідно (4). Силу F_k розраховували на основі моделі точкового заряду за законом Кулона. Точковий заряд поміщали в центрі стрижня. Так як можливість застосування моделі точкового заряду залежить від відстані a від центра стрижня до точки спостереження і розмірів тіла L , розглядалася відносна відстань a/L . Розраховувалися абсолютна похибка застосування закону Кулона – $\Delta F = F_i - F_k$ і відносна похибка $\varepsilon = \frac{\Delta F}{F_i}$ в залежності від відносної відстані між стрижнями. Розглядалися випадки різного симетричного розташування стрижнів.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

А) Стрижень L_2 , розташований на осі симетрії стрижня L_1 перпендикулярно до нього. Відстань від першого стрижня до центра другого C_2 – a (рис. 1).

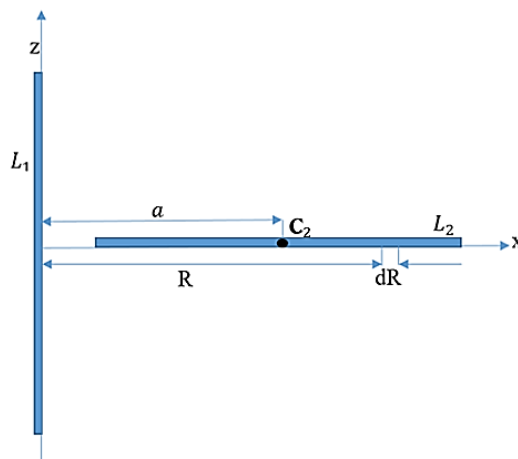


Рис. 1. Взаємно перпендикулярне розташування стрижнів

Другий стрижень знаходиться в полі першого. Напруженість поля стрижня L_1 в усіх точках осі R направлена вздовж цієї осі і рівна (Парсел, 1975)

$$E_{12} = \frac{kq_1}{R\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}} \quad (5)$$

Заряд елемента стрижня L_2

$$dq_2 = \frac{q_2}{L} dl_2 = \frac{q_2 dR}{L} \quad (6)$$

Сила, з якою поле стрижня 1 діє на елемент dl_2

$$dF_{12} = E_{12} dq_2 = \frac{kq_1 q_2 dR}{RL\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}} \quad (7)$$

Сили, що діють на всі елементи стрижня L_2 , направлені вздовж осі R, тому сумарна сила дії першого стрижня на другий також направлена по цій осі і рівна

$$F_{12} = F_R = \frac{kq_1 q_2}{L} \int_{a-\frac{L}{2}}^{a+\frac{L}{2}} \frac{dR}{R\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}} = \frac{2kq_1 q_2}{L^2} \ln \frac{\left(\frac{a+L}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-L}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}\right)}{\left(\frac{a-L}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+L}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}\right)} \quad (8)$$

У (8) перейшли до відносної відстані a/L . Цей вираз визначає істинну силу дії першого стрижня на другий F_i . При $\frac{a}{L} \rightarrow \infty$ сила взаємодії згідно (8) прямує до нуля, що підтверджує вірність розв'язку.

Сила взаємодії між стрижнями яка визначена на основі закону Кулона

$$F_k = \frac{kq_1 q_2}{a^2} = \frac{kq_1 q_2}{L^2 \left(\frac{a}{L}\right)^2} \quad (9)$$

Визначимо на основі (8) та (9) істинну та кулонівську силу взаємодії, абсолютну та відносну похибки застосування закону Кулона в залежності від відносної відстані між стрижнями a/L . Результати розрахунків наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Залежність істинної сили взаємодії між зарядженими F_i , кулонівської сили F_k , абсолютної та відносної похибок від відносної відстані a/L при перпендикулярному розташуванні стрижнів

| $\frac{a}{L}$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| $F_k, \frac{kq_1 q_2}{L^2}$ | 0,2500 | 0,1111 | 0,0625 | 0,0400 |
| $F_i, \frac{kq_1 q_2}{L^2}$ | 0,2575 | 0,1126 | 0,0630 | 0,0402 |
| $\Delta F, \frac{kq_1 q_2}{L^2}$ | 0,0075 | 0,0015 | 0,0005 | 0,0002 |
| $\varepsilon, \%$ | 2,9 | 1,3 | 0,79 | 0,5 |

В) Стрижні розташовані по одній осі.

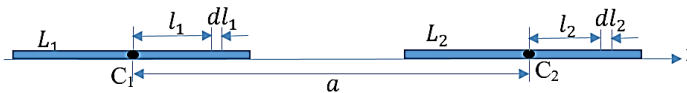


Рис. 2. Розташування стрижнів і їх елементів вздовж однієї осі

Напруженість поля, яке створюється стрижнем L_1 в точці, де знаходиться елемент dl_2

$$E_{12} = \frac{kq_1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dl_1}{(a-l_1+l_2)^2} = \frac{kq_1}{L} \left(\frac{1}{(a-\frac{L}{2}+l_2)} - \frac{1}{(a+\frac{L}{2}+l_2)} \right) \quad (10)$$

Сила дії першого стрижня на елемент другого dl_2

$$dF_{12} = E_{12} \frac{q_2 dl_2}{L} \quad (11)$$

Всі елементарні сили dF_{12} направлені вздовж осі x. Сумарна сила

$$F_{12} = F_i = \frac{kq_1 q_2}{L^2} \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dl_2}{a-\frac{L}{2}+l_2} - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dl_2}{a+\frac{L}{2}+l_2} \right) = \frac{kq_1 q_2}{L^2} \ln \frac{1}{1-\left(\frac{L}{a}\right)^2} \quad (12)$$

при $a \rightarrow \infty$ $F_{12} \rightarrow 0$, що підтверджує вірність розв'язку.

Сила взаємодії, яка розрахована на основі закону Кулона, визначається виразом (9).

Таблиця 2

Залежність істинної сили F_i , сили, визначеної за законом Кулона F_k , абсолютної ΔF і відносної ε похибок від відносної відстані a/L при розташуванні стрижнів по одній осі

| $\frac{a}{L}$ | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 |
|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| $F_k, \frac{kq_1 q_2}{L^2}$ | 0,1111 | 0,0625 | 0,0278 | 0,0156 | 0,01234 |
| $F_i, \frac{kq_1 q_2}{L^2}$ | 0,1178 | 0,0645 | 0,0282 | 0,0157 | 0,01238 |
| $\Delta F, \frac{kq_1 q_2}{L^2}$ | 0,0067 | 0,0020 | 0,0004 | 0,0001 | 0,00004 |
| $\varepsilon, \%$ | 5,68 | 3,1 | 1,42 | 0,64 | 0,32 |

С) Стрижні розташовані паралельно.

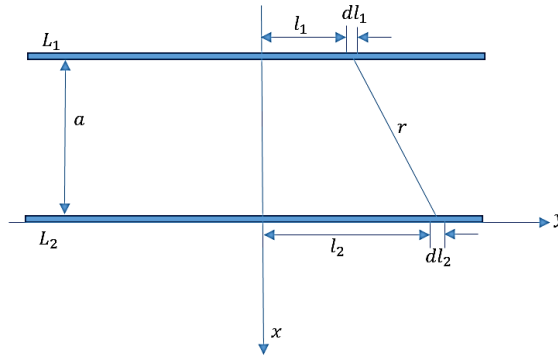


Рис. 3. Паралельне розташування стрижнів та їх елементів

В силу симетрії складові сил, з якими стрижень L_1 діє на елементи dl_2 , в напрямку осі y компенсуються, а в напрямку осі x додаються. Проекція сили dF_{12x} , що діє на елемент dl_2

$$dF_{12x} = \frac{kq_2 dl_2}{L} E_{12x}, \quad (13)$$

де E_{12x} – проекція на вісь x напруженості поля L_1 в точці, де знаходиться елемент dl_2

$$dF_{12x} = \frac{kq_1 q_2 a dl_2}{L^2} \int_{-\frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2}{2}} \frac{dl_1}{[a^2 + (l_2 - l_1)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{kq_1 q_2 dl_2}{L^2 a} \left(\frac{l_2 + \frac{l_2}{2}}{\sqrt{a^2 + (l_2 + \frac{l_2}{2})^2}} - \frac{l_2 - \frac{l_2}{2}}{\sqrt{a^2 + (l_2 - \frac{l_2}{2})^2}} \right) \quad (14)$$

Істинну силу дії першого стрижня на другий знайдемо, проінтегрувавши (14) по стрижню L_2

$$F_{12x} = F_i = 2 \frac{kq_1 q_2}{L^2 \frac{a}{L}} \left(\sqrt{\left(\frac{a}{L}\right)^2 + 1} - \frac{a}{L} \right). \quad (15)$$

Результати розрахунку істинної сили F_i згідно (15), кулонівської сили згідно (9), абсолютної та відносної похибок приведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Залежність істинної сили F_i , сили, визначеної за законом Кулона F_k , абсолютної ΔF і відносної ε похибок від відносної відстані a/L при розташуванні стрижнів по одній осі

| $\frac{a}{L}$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $F_k, \frac{kq_1 q_2}{L^2}$ | 0,1111 | 0,0625 | 0,0400 | 0,0276 | 0,0203 |
| $F_i, \frac{kq_1 q_2}{L^2}$ | 0,1082 | 0,0616 | 0,0396 | 0,0278 | 0,0204 |
| $\Delta F, \frac{kq_1 q_2}{L^2}$ | 0,0029 | 0,0009 | 0,0004 | 0,0002 | 0,0001 |
| $\varepsilon, \%$ | 2,68 | 1,46 | 1,01 | 0,72 | 0,49 |

ОБГОВОРЕННЯ

Отримані результати розрахунку сили взаємодії між однорідно зарядженими стрижнями свідчать, що похибка застосування закону Кулона зменшується зі збільшенням відносної відстані між ними. Так як розглянуто розташування стрижнів в напрямках їх осей симетрії, то в інших напрямках похибка буде мати проміжні значення. Найбільша похибка виникає при розміщенні стрижнів по одній осі. Це обумовлено тим, що в цьому випадку відстані між елементами двох стрижнів найбільше відрізняються від відстані між центрами їх зарядів.

Застосування закону Кулона пов'язане із можливістю застосування до взаємодіючих тіл моделі точкового заряду, яка залежить від відстані між тілами та їх форми. Із збільшенням відмінності від сферичної форми збільшується похибка застосування моделі точкового заряду при фіксованій відстані між тілами. Яскравою моделлю видовженого тіла є заряджений стрижень, тому умови застосування закону Кулона до взаємодії стрижнів є найбільш жорсткими, порівняно з тілами іншої форми, і їх можна використати до визначення сили взаємодії між тілами довільної форми.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Розрахунок сили взаємодії між зарядженими тілами має важливе практичне та методичне значення. В його основі лежить закон Кулона, який визначає силу взаємодії між точковими зарядами. Умова використання цього закону (відстань між тілами значно перевищує їх розміри) не дозволяє застосовувати його при розв'язуванні практичних задач. Похибка застосування закону Кулона при визначенні взаємодії тіл на відстанях, співрозмірних з їх розмірами, і її залежність від відстані в науковій літературі не описана.

Розглянута взаємодія двох однорідно заряджених стрижнів при їх розміщенні в напрямках осей симетрії. Порівнювалася сила взаємодії, визначена за законом Кулона, та істинна сила, яка розрахована на основі моделі неперервно розподіленого заряду шляхом інтегрування по довжині стрижнів. Визначені абсолютна та відносна похибки застосування закону Кулона в залежності від відстані. Так як можливість застосування моделі точкового заряду залежить як від відстані між тілами a , так і від розмірів тіла L , розглядалася відносна відстань a/L .

Наукова новизна роботи полягає у визначенні похибки застосування закону Кулона до розрахунку сили взаємодії між зарядженими стрижнями в залежності від відносної відстані між ними.

Розрахунки взаємодії стрижнів показали, що похибка застосування закону Кулона зменшується при збільшенні відносної відстані між тілами і залежить від взаємної орієнтації стрижнів. Найменша відносна відстань $a/L \geq 5$, при якій похибка не перевищує 0,5%, спостерігається при перпендикулярному розташуванні стрижнів, при розташуванні стрижнів по одній осі ця умова виконується при $a/L \geq 8$.

Отримані результати свідчать, що закон Кулона можна застосовувати до визначення сили взаємодії заряджених тіл навіть при невеликих значеннях відносної відстані між ними, так як стрижні є яскравим представником видовжених тіл, до яких умови застосування моделі точкового заряду найбільш несприятливі.

В подальшому ми плануємо дослідити похибку використання закону Кулона до взаємодії симетричних плоских та об'ємних тіл.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Кучерук, І.М., & Горбачук, І.Т. (1990). *Загальна фізика. Електрика і магнетизм*. Вища школа.
2. Парселл, Э. (1975). *Электричество и магнетизм*. Наука.
3. Фейнман, Р., Лейтон, Р., & Сэндс М. (2016). *Фейнмановские лекции по физике* (Том 5). Либроком, Едиториал УРСС.
4. Сивухин, Д.В. (2004) *Общий курс физики. Электричество* (Том III). ФИЗМАТЛИТ; МФТИ.
5. Федорченко, А.М. (1992). *Теоретична фізика. Класична механіка і електродинаміка* (Том 1). Вища школа.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Kucheruk, I.M., & Horbachuk, I.T. (1990). *General Physics. Electricity and magnetism*. High school (in Russian).
2. Parsell, E. (1975). *Electricity and magnetism*. Science (in Russian).
3. Richard Feynman, Robert Leighton, Matthew Sands (2016). *Feynman Lectures in Physics. Volume 5. Classical electrodynamics*. Librokom, Editorial URSS (in Russian).
4. Syvukhyn, D.V. (2004) *General course of physics. Electricity (Volume III)*. FIZMATLIT; MFTI (in Russian).
5. Fedorchenko, A.M. (1992). *Theoretical physics. Classical mechanics and electrodynamics (Volume 1)*. High school (in Russian).

