Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571
https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/2413-1571-2022-036-4-002 УДК 372.851:37.026/004.853

НАСТУПНІСТЬ МЕТОДІВ НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ У ШКОЛІ ТА ЗАКЛАДІ ВИЩОЇ ОСВІТИ: КОНТЕКСТ ІНТЕГРАТИВНОГО ПІДХОДУ

Юлія БОТУЗОВА ✉
Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Україна
vassalatii@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1313-0010

Вікторія НІЧИШИНА
Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Україна
vika.nichishina@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-3771-1589

Ренат РІЖНЯК
Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Україна
rizhniak@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1977-9048

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Стаття присвячена розв'язанню проблеми наступності методів навчання розв'язування математичних задач (на прикладі рівнянь з параметром) з використанням інтегративного підходу, який поєднує в нашому дослідженні як інтеграцію засобів навчання, так і інтеграцію методів. Таким чином, метою дослідження є з'ясування особливостей забезпечення наступності методів навчання розв'язування математичних задач у школі та ЗВО, що відбувається на фоні застосування інтегративного підходу.*

Матеріали і методи. *В дослідженні використовувалися як теоретичні методи – аналіз навчальних програм з математики та освітніх програм спеціальностей зі значною математичною складовою, пошук та аналіз відповідних задач з подальшим конструюванням на їх основі нових дослідницьких задач; узагальнення власного та передового педагогічного досвіду щодо застосування ІТ в освітньому процесі школи та ЗВО, так і емпіричні – спостереження під час роботи з учнями на уроках математики в ЗЗСО та студентами на заняттях з математичних дисциплін у ЗВО.*

Результати. *В ході дослідження авторами на прикладі нескладного логарифмічного рівняння з параметром був проілюстрований комплексний інтегративний підхід до реалізації наступності методів навчання у школі та ЗВО. Цей підхід реалізовувався як з точки зору інтеграції методів навчання – метод доповнювання, технологія укрупнення дидактичних одиниць, метод протиставлення, так і з точки зору засобів навчання – застосування графічних ілюстрацій, інформаційних технологій, схем, алгоритмів аналітичних викладок. Крім того, інтегративних підхід був реалізований і зі змістовної точки зору, так як в ході навчання використовувалися інтегровані образи – образ задачі, образ задачної серії, образ способу розв'язування.*

Висновки. *Автори в результаті проведеного дослідження прийшли до наступних висновків. Ідея технології укрупнення дидактичних одиниць у вигляді розв'язування задач різними способами, а саме поєднання в конкретному випадку аналітичного та графічного способу розв'язування рівнянь з параметром, сприяє кращій наступності навчання математики, так як забезпечує актуалізацію, узагальнення та систематизацію здатностей учнів та студентів щодо реалізації знань та умінь із двох найважливіших*

CONTINUITY OF TEACHING METHODS FOR SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS IN SCHOOLS AND UNIVERSITY: THE CONTEXT OF THE INTEGRATIVE APPROACH

Yuliia BOTUZOVA ✉
Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Ukraine
vassalatii@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1313-0010

Victiria NICHYSHYNA
Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Ukraine
vika.nichishina@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-3771-1589

Renat RIZHNIAK
Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Ukraine
rizhniak@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1977-9048

ABSTRACT

Formulation of the problem. *The article has devoted the problem of the continuity of teaching methods for solving mathematical problems (on the example of equations with a parameter) using an integrative approach. The integrative approach in our research combines the integration of learning tools and the integration of learning methods. The purpose of the research is to determine the features of ensuring the continuity of teaching methods for solving mathematical problems at school and university, which takes place with an integrative approach.*

Materials and methods. *In the study, the analysis of mathematics curricula and educational programs of specialties with a significant mathematical component was carried out, and the search and analysis of relevant problems were followed by the construction of new research problems based on them. A generalization of my own and advanced pedagogical experience regarding the use of ICT in the educational process of schools and universities was also carried out. During work with pupils and students, the educational process was observed.*

Results. *In the example of a simple logarithmic equation with a parameter, the authors illustrated a complex integrative approach to the implementation of the continuity of teaching methods at schools and universities. This approach was implemented from the point of view of the integration of teaching methods - the method of addition, the technology of enlargement of didactic units, and the method of contrast. And also from the point of view of teaching aids - the use of graphic illustrations, information and communication technologies, schemes, and algorithms of analytical statements. In addition, the integrative approach was also implemented from the content point of view, since integrated images were used during the training - the image of the problem, the image of the problem series, and the image of the solution method.*

Conclusions. *As a result of the research, the authors came to the following conclusions: a) the idea of the technology of enlargement of didactic units in the form of solving problems in different ways, namely the combination in a specific case of analytical and graphical methods of solving equations with a parameter, contributes to better continuity of mathematics education. This approach ensures the actualization, generalization, and systematization of the abilities of pupils and students to implement knowledge and skills from the two most important content lines of the school mathematics course (the line of equations, inequalities and their systems, and the functional line); b) the combination of the process*

Для цитування:
Ботузова Ю., Нічишина В., Ріжняк Р. Наступність методів навчання розв'язування математичних задач у школі та закладі вищої освіти: контекст інтегративного підходу. *Фізико-математична освіта*, 2022. Том 36. № 4. С. 16-25. DOI: 10.31110/2413-1571-2022-036-4-002
Ботузова, Ю., Нічишина, В., & Ріжняк, Р. (2022). Наступність методів навчання розв'язування математичних задач у школі та закладі вищої освіти: контекст інтегративного підходу. *Фізико-математична освіта*, 36(4), 16-25. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-036-4-002

For citation:
Botuzova, Yu., Nichyshyna, V., & Rizhniak, R. (2022). Continuity of teaching methods for solving mathematical problems in schools and university: the context of the integrative approach. *Physical and Mathematical Education*, 36(4), 16-25. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-036-4-002
Botuzova, Yu., Nichyshyna, V., & Rizhniak, R. (2022). Nastupnist metodiv navchannia rozviazuvannia matematychnykh zadach u shkoli ta zakladi vyshchoi osvity: kontekst intehratyvnoho pidkhodu [Continuity of teaching methods for solving mathematical problems in schools and university: the context of the integrative approach]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 36(4), 16-25. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-036-4-002

✉ Corresponding author

змістових ліній шкільного курсу математики (лінія рівнянь, нерівностей та їх систем та функціональна лінія). Поєднання процесу розв'язування готових завдань з процесом складання нових укрупнених вправ в конкретному випадку розв'язування або складання рівнянь з параметром з використанням аналітичних викладок або пакетів комп'ютерної математики дає практично необмежені можливості застосування дослідницького методу у навчанні на уроках, факультативних заняттях з математики в школі та на заняттях зі студентами математичних спеціальностей ЗВО, а також дає можливість говорити про реалізацію дидактичного принципу наступності, спрямованого на забезпечення здобувачам освіти можливостей продовження вивчення ними математичних дисциплін на вищих рівнях освіти. Реалізація принципу наступності навчання математичних дисциплін передбачає інтеграцію суміжних дисциплін, встановлення міжпредметних зв'язків і забезпечується внутрішньою інтеграцією методів, засобів, компонентів та змістовних ліній самої математики як навчального предмету в школі та ЗВО. Така інтеграція, що реалізується через побудову інтегрованих образів, можлива лише при поглибленому вивченні конкретних математичних проблем та при умові використання евристичного підходу до навчання.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: інтегративний підхід; наступність навчання математики; математична задача; інформаційні технології; укрупнення дидактичних одиниць.

of solving tasks with the process of compiling new consolidated exercises (for example, solving or compiling equations with a parameter using analytical statements or computer mathematics packages) gives practically unlimited opportunities for applying the research method in teaching mathematics at school and university. It also allows talking about the implementation of the didactic principle of continuity, aimed at providing opportunities for students to continue their study of mathematical disciplines at higher levels of education; c) the implementation of continuity of teaching mathematical disciplines involves the integration of related disciplines, the establishment of inter-subject connections. It is ensured by the internal integration of methods, means, components, and content lines of mathematics as an educational subject in schools and universities. Such integration is realized through the construction of integrated images. It is possible only with an in-depth study of specific mathematical problems and under the condition of using a heuristic approach to learning.

KEYWORDS: integrative approach; continuity of teaching mathematics; mathematical problem; information technologies; enlargement of didactic units.

ВСТУП

Постановка проблеми. Важливою проблемою сьогодення у навчальному процесі є проблема наступності у пізнанні, яка може проявлятися у різних формах. Стосовно навчального процесу в школі та закладі вищої освіти (далі у тексті ЗВО) кількісне накопичення знань має супроводжуватися якісною переробкою знань з його узагальненням. Проте серед учнівської та студентської молоді все більше відчувається «дефіцит» уміння самостійно і творчо переробляти та поповнювати свої знання, розширяти та застосовувати свої практичні вміння та навички. На нашу думку, це безпосередньо пов'язано із порушенням дії принципу наступності у навчальному процесі молоді, зокрема, поодиноким з'ясуванням міжпредметних зв'язків навчального матеріалу. Це у свою чергу призводить до неспроможності системно використовувати набуті знання і вміння у нових умовах, до відсутності цілісного розуміння учнями та студентами навчального предмету.

Мети утворення системних знань учнівської та студентської молоді можна досягти шляхом перетворення наявної навчальної інформації в межах інтегративного підходу у навчальному процесі. Інтегративний підхід у навчальному процесі має полягати у єдності процесів інтеграції змісту, форм та методів навчання. Серед методів інтеграції стосовно даного дослідження варто виділити метод доповнювання та технологію укрупнення дидактичних одиниць.

Аналіз актуальних досліджень. Проблемі реалізації інтегративного підходу та наступності у навчальному процесі присвячені праці філософів, психологів, науковців та педагогів.

Автори філософської літератури і, зокрема, Кедров Б.М. (1988) розглядають інтеграцію як єдину умову адекватно відобразити всі сторони предмету дослідження одночасно в їх зв'язку.

Розглядаючи поняття інтеграції з точки зору психології, автори Брунер Дж. (1977) та Вознюк О.В. (2009) характеризують процес засвоєння знань як послідовний перехід від вузьких, диференційованих знань до знань з розширеними зв'язками, які і можуть забезпечити повноту, системність та цілісність знань, об'єктивне сприйняття навколишнього світу людиною.

Науковці Ільченко В.Р. (1994), (1999), Кедров Б.М. (1988), Клепко С.Ф. (1998) розглядають впровадження інтеграції в педагогічних науках як процес встановлення цілісності у навчальному матеріалі на основі сутнісних зв'язків між відносно незалежними об'єктами, процесами, явищами. Іванчук М.Г. (2004), Моштук В.В. (1991) наголошують на тому, що інтегративні зв'язки «показують» об'єкт з різних сторін у процесі предметних дій. Тому усі аспекти, нові зв'язки мають включатися в існуючу понятійну структуру.

Науковці Гладюк Т., Міщук Н. (1999), Козловська І.М. (1999), (2001), Семенов І. (1999) обґрунтовують необхідність поетапного переважання то інтеграції, то диференціації у навчальному процесі як засобів забезпечення наступності у розвитку знань людини. На єдності принципів доповнення та наступності наголошують науковці Botuzova Yu. (2020), Клепко С.Ф. (1998)]. Причому сутність доповнення стосовно інтеграції автори трактують як не протиставлення суперечливих властивостей або сторін, а як утворення єдності протилежностей з метою отримання цілісного відображення понять. Практичні компоненти інтеграції математичних знань аналізуються в таких працях: (Rizhniak et al, 2020), (Rizhniak et al, 2021), (Пасічник & Ріжняк, 2020), (Нічишина, 2008), (Раков, 2005), (Скафа & Тутова, 2009). Практичні рекомендації щодо вдосконалення внутрішньопредметної інтеграції на уроках математики містяться у публікації (Gogovska & Malcheski, 2012). Treacy P. та O'Donoghue J. (2013) пропонують авторську модель міжпредметної інтеграції математики та природничих наук у школі під назвою «Автентична інтеграція».

Про важливість утворення цілісної системи структурно нових знань говорять і автори технології укрупнення дидактичних одиниць (Эрдниев & Эрдниев, 1986; Эрдниев, 1992). Вони наголошують на тому, що разом із процесом розв'язування готових завдань необхідним є і процес складання нових укрупнених вправ. Причому ці процеси потрібно розглядати як взаємно доповняльні методи навчального процесу. В сучасних умовах доцільним та ефективним є використання математичних програмних засобів (Birgin & Uzun Yazıcı, 2021), зокрема таких як GeoGebra.

Мета статті. Висвітлення особливостей забезпечення наступності методів навчання розв'язування математичних задач у школі та ЗВО, що відбувається на фоні застосування інтегративного підходу.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В ході дослідження використовувалися такі теоретичні методи: аналіз навчальних програм з математики та освітніх програм спеціальностей зі значною математичною складовою, пошук та аналіз відповідних задач з подальшим конструюванням на їх основі нових дослідницьких задач; узагальнення власного та передового педагогічного досвіду щодо застосування ІКТ в освітньому процесі школи та ЗВО. Під час роботи з учнями та студентами на уроках математики в ЗЗСО та на заняттях з математичних дисциплін у ЗВО застосовувався такий емпіричний метод дослідження як спостереження. Також були використанні такі методи наукового пізнання як систематизація та узагальнення, які дозволили узагальнити результати проведеної роботи та сформулювати методичні рекомендації, зробити висновки.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розвиток графічної культури учнів, як зазначається в навчальній програмі з математики, є одним із головних завдань при вивченні математики на профільному рівні. Починаючи із основної школи, у процесі навчання особливу увага слід приділяти дослідженням властивостей функцій, при цьому демонструвати взаємозв'язок між основними поняттями шкільного курсу математики: функція, рівняння та нерівність. Зокрема, в учнів має чітко сформуватися розуміння того, що розв'язання рівняння $f(x) = 0$, нерівностей $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, є окремими випадками задачі на дослідження функції $y = f(x)$, а саме: знаходження нулів функції та проміжків її знакосталості.

Згідно методичних рекомендацій, наведених у навчальній програмі з математики, підвищенню ефективності уроків в старших класах сприяє використання програмних засобів навчального призначення таких як: GeoGebra, Desmos. При цьому доцільним є використання дослідницького методу навчання на уроках та факультативних заняттях з математики.

Враховуючи зазначені вище методичні аспекти, розглянемо детальніше питання наступності застосування інтегративного підходу при формуванні здатностей розв'язування рівнянь з параметром. Для ілюстрації застосування технології розглянемо наступну задачу.

Задача 1: «Розв'язати рівняння для всіх значень a: $log_{2a}(a + 2x - x^2) = 1$». Ця задача у вигляді подібного рівняння міститься у збірнику (Сканаві, 1994), а у вигляді саме такої нерівності – у збірнику задач (Литвиненко & Мордкович, 1995). Розглянемо розв'язування цього рівняння різними способами, тим самим побудувавши інтегрований образ цієї задачі у сенсі, описаному в (Rizhniak et al, 2021). Аналітичний спосіб розв'язання реалізується переходом до рівносильної системи умов:

$$\begin{cases} 2a > 0, \\ 2a \neq 1, \\ a + 2x - x^2 = 2a \end{cases} \quad (1)$$

Звідси маємо:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a \neq \frac{1}{2}, \\ x = 1 + \sqrt{1-a} \text{ або } x = 1 - \sqrt{1-a} \end{cases}.$$

Отже, відповідь буде такою: при $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right]$ $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$, при $a \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$ $x \in \emptyset$. (2)

Графічний спосіб розв'язування полягає у побудові в системі координат xOa графіка рівняння $log_{2a}(a + 2x - x^2) = 1$ або системи умов (1). Для цього при додатних значеннях a будуємо графік функції $a = 2x - x^2$ (рис. 1), з якого після розв'язання третьої умови системи (1) відносно змінної x випливає розв'язок (2). З методичної точки зору розв'язування рівнянь з параметрами в системах координат *xOy* чи *xOa* сприяє кращій реалізації наступності навчання математики, оскільки поєднує знання та вміння із двох змістових ліній шкільного курсу математики (рівняння, нерівності та функції).

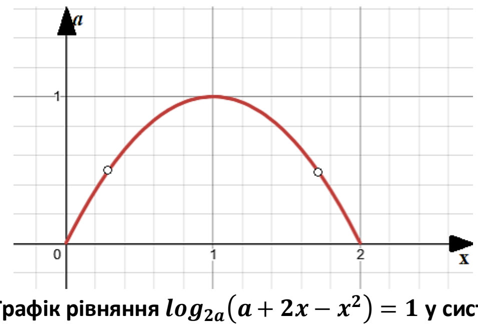


Рис.1. Графік рівняння $log_{2a}(a + 2x - x^2) = 1$ у системі *xOa*

До розв'язаної одним із способів задачі можна поставити додаткові питання:

1) при якому значенні a розв'язками рівняння $log_{2a}(a + 2x - x^2) = 1$ будуть числа $1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ (при $a = \frac{1}{3}$)?;

2) при якому значенні a розв'язками цього рівняння будуть числа $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ та $\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$ (при жодному a; як виправити дану відповідь?)?

3) як змінити умову задачі в частині виразу під знаком логарифма, щоб її графічним розв'язком стала парабола з вершиною в точці (2;4), графік якої проходить через початок координат? Записати відповідні розв'язки. $log_{2a}(a + 4x - x^2)$=1.

Перспективним напрямком формування в учнів математичних здатностей є формування умінь складати задачі. За версією авторів Ерднієв П.М., Ерднієв Б.П. (1986) та Ерднієв П.М. (1992) це є однією з форм проведення укрупнення дидактичних одиниць, а за версією праць (Rizhniak et al, 2021), (Пасічник & Ріжняк, 2020) – реалізацією інтегративного підходу до навчання математики. Тому поставимо проблему ширше, а саме так.

Задача 2. Дослідити варіанти розв'язування видозміненого рівняння задачі 1:

$$log_{na}(ba+cx-dx^2)=m, \quad (3)$$

де x – змінна, a – параметр, *b, c, d, m, n* – довільні числа, які ми будемо задавати для отримання варіантів рівняння (3). Для дослідження варіантів побудованих нових умов задачі 1 будемо використовувати графічний пакет DESMOS та загальні й часткові аналітичні викладки.

Відразу зазначимо, що ключовим для класифікації варіантів нової задачі буде число m. Справді, умова (3) буде рівносильною такій системі умов:

$$\begin{cases} na>0, \\ na\neq 1, \\ (na)^m=ba+cx-dx^2 \end{cases} \quad (4)$$

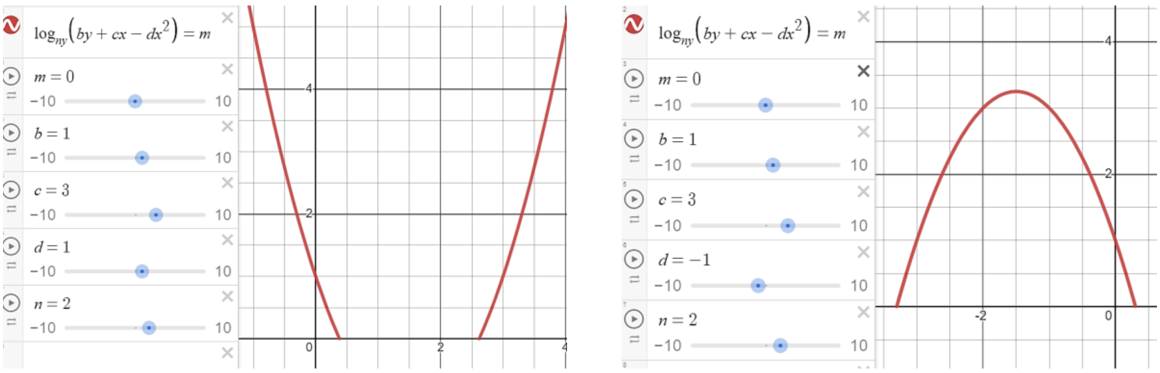
Для простоти викладу обмежимося лише деякими значеннями m. Зрозуміло, що в загальних випадках при $m=0$, $m=1$ графіком рівняння (3) буде парабола (або її частина), а при $m=2$ – коло, парабола, гіпербола, еліпс (або їх частини). Тому при різних значення параметра a рівняння (3) матиме 1, 2 розв'язки або не матиме жодного. Розглянемо вказані варіанти детальніше.

Нехай $m=0$. Тоді рівняння (3) буде рівносильним системі умов:

$$\begin{cases} na>0, \\ na\neq 1, \\ ba+cx-dx^2=1 \end{cases} \quad (5)$$

у загальному випадку при $d>0$ та $n>0$ графічним розв'язком якої буде парабола (або її частина), вітки якої направлені вгору (рис. 2а), а при $d<0$ розв'язком буде парабола (або її частина), вітки якої направлені вниз (рис. 2б). Причому всі розв'язки системи (5) при їх наявності будуть знаходитися у верхній півплощині відносно осі Ox:

$x=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4d(1-ba)}}{2d}$ у випадку 2-х розв'язків та $x=\frac{c}{2d}$ у випадку 1-го.



а) б)

Рис. 2. Графічне представлення рівняння $log_{na}(ba+cx-dx^2)=0$

При $n<0$ розв'язки знаходяться аналогічно, але графічно вже будуть знаходитися у нижній півплощині відносно осі Ox. Зазначимо, що у випадку $m=0$ можуть з'явитися особливі випадки:

а) якщо $d=0$, то графічним розв'язком рівняння (3) буде частина прямої $ba+cx=1$, яка при $n>0$ буде знаходитися у верхній півплощині відносно осі Ox, а при $n<0$ – у нижній півплощині (рис. 3а); відповідно при наявності розв'язку $x=\frac{1-ba}{c}$;

б) при $b=0$ графічним розв'язком будуть 2 (або 1) вертикальні прямі, якщо $c^2-4d\geq 0$ (при $n>0$ – у верхній півплощині (рис. 3б), а при $n<0$ – у нижній півплощині); розв'язками при цьому будуть $x=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4d}}{2d}$ або $x=\frac{c}{2d}$; в) при $c=d=0$ графіком рівняння (3) при $b>0$ та $n>0$ (або при $b<0$ та $n<0$) буде горизонтальна лінія $ba=1$, а отже $x\in R$ лише при $a=\frac{1}{b}$.

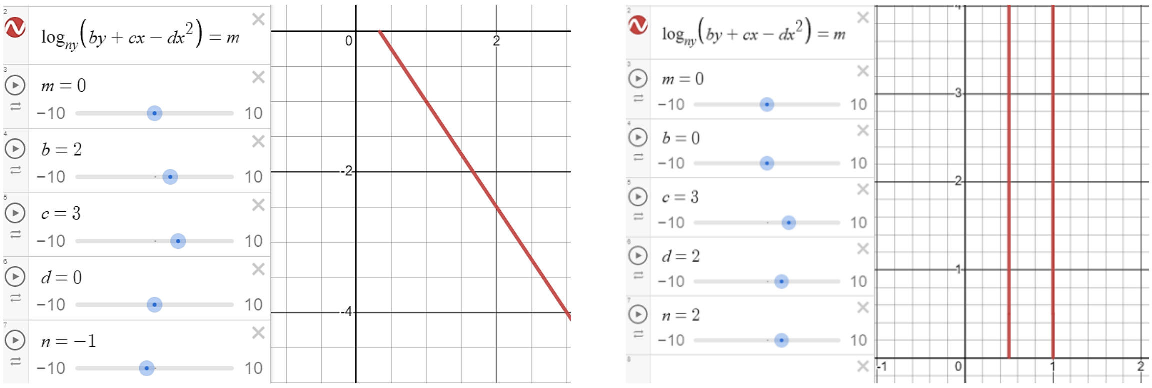
Нехай $m=1$. Тоді рівняння (3) буде рівносильним системі умов:

$$\begin{cases} na>0, \\ na\neq 1, \\ ba+cx-dx^2=na \end{cases} \quad (6)$$

Зрозуміло, що у загальному випадку графічним розв'язком системи (6) буде парабола (або її частина), яка розміщена у верхній півплощині відносно осі Ox при $n>0$ та у нижній півплощині при $n<0$:

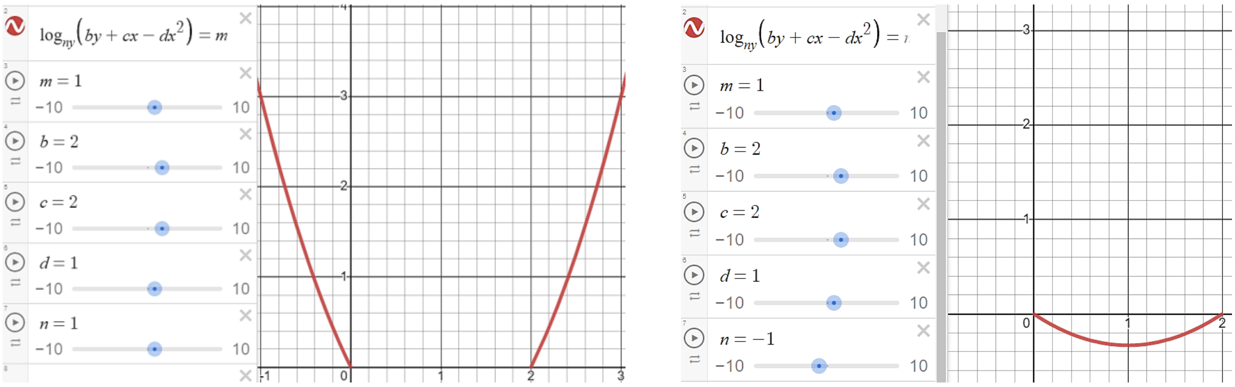
$$a=\frac{d}{b-n}x^2-\frac{c}{b-n}x=\frac{d}{b-n}x\left(x-\frac{c}{d}\right) \quad (7)$$

Враховуючи (7) зазначимо, що вказана парабола буде проходити через точки $(0;0)$ та $\left(0;\frac{c}{d}\right)$ вітками вгору при $\frac{d}{b-n}>0$ (рис. 4а та 4б) та вітками вниз при $\frac{d}{b-n}<0$ (рис. 5а та 5б). При цьому в загальному випадку розв'язки системи (6) у разі їх наявності знаходитимуться за формулою $x=\frac{c\pm\sqrt{c^2+4da(b-n)}}{2d}$.



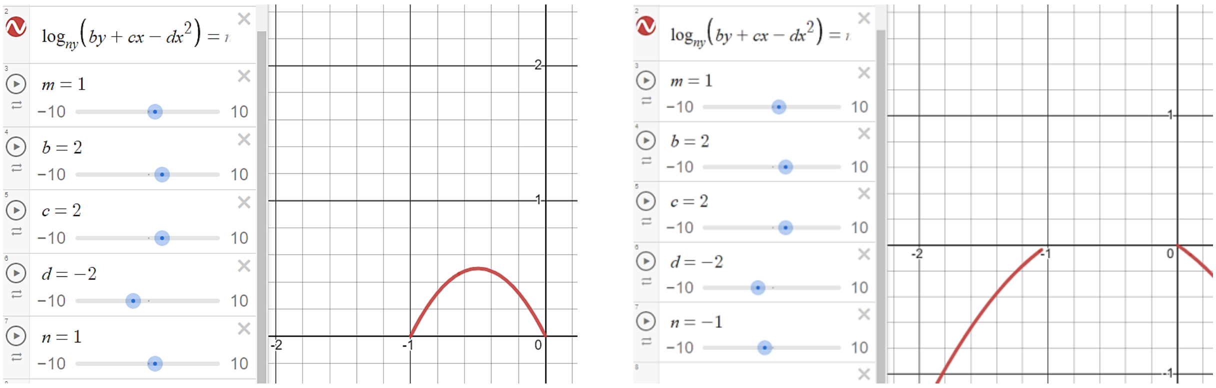
а) б)

Рис. 3. Особливі випадки рівняння $log_{na}(ba + cx - dx^2) = 0$: а) при d=0; б) при b=0.



а) б)

Рис. 4. Графічне представлення рівняння $log_{na}(ba + cx - dx^2) = 1$, де $\frac{d}{b-n} > 0$: а) при n>0; б) при n<0



а) б)

Рис. 5. Графічне представлення рівняння $log_{na}(ba + cx - dx^2) = 1$, де $\frac{d}{b-n} < 0$: а) при n>0; б) при n<0

Зауважимо, що і у випадку $m = 1$ можуть з'явитися особливі порівняно із загальним випадки:

а) якщо $d = 0$, то графічним розв'язком системи (6) буде пряма $(b - n)a + cx = 0$, яка при $n > 0$ буде знаходитися у верхній півплощині відносно осі Ox, а при $n < 0$ – у нижній півплощині; відповідно при наявності розв'язку $x = \frac{(n-b)a}{c}$;

б) при $b = 0$ графічним розв'язком буде також парабола (або її частина) $a = -\frac{d}{n}x^2 + \frac{c}{n}x$, яка розміщена у верхній півплощині відносно осі Ox при $n > 0$ та у нижній півплощині при $n < 0$, причому її вітки будуть направлені вниз при $\frac{d}{n} > 0$ та вгору при $\frac{d}{n} < 0$; розв'язки системи (6) у разі їх наявності знаходяться за формулою $x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4dan}}{2d}$;

в) при $b = n$ графічним розв'язком системи (6) будуть 2 (або 1) вертикальні прямі $x = 0, x = \frac{c}{d}$ (при $n > 0$ – у верхній півплощині, а при $n < 0$ – у нижній півплощині; одна пряма буде у випадку $c = 0$ або $d = 0$); розв'язками при цьому будуть $x = 0, x = \frac{c}{d}$ або $x = 0$.

На цьому етапі дослідження рівняння (3) в залежності від параметрів для учнів доцільно завершити, адже шкільний курс математики обмежується розглядом рівняння кола і не містить аналітичних викладок щодо рівняння еліпса чи то канонічних рівнянь гіперболи й параболи. Хоча поняття еліпса достатньо чітко формується при вивченні стереометрії та розглядається в темі «Зображення фігур у просторі. Паралельне проєктування». Водночас поняття гіперболи формується ще у 8 класі як графік функції $y=\frac{k}{x}$ та закріплюється в 9 класі під час вивчення теми «Геометричні перетворення графіків функцій».

Канонічні рівняння кривих другого порядку, зокрема еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ та параболи $y^2=2px$ починають вивчатися студентами закладів вищої освіти на перших курсах спеціальностей зі значною математичною складовою в таких дисциплінах як «Аналітична геометрія», «Алгебра та геометрія» чи «Вища математика». Тому саме зі студентами, керуючись принципом наступності, доцільно продовжити дослідження представленої задачі 2 (звісно, не опускаючи попередніх етапів).

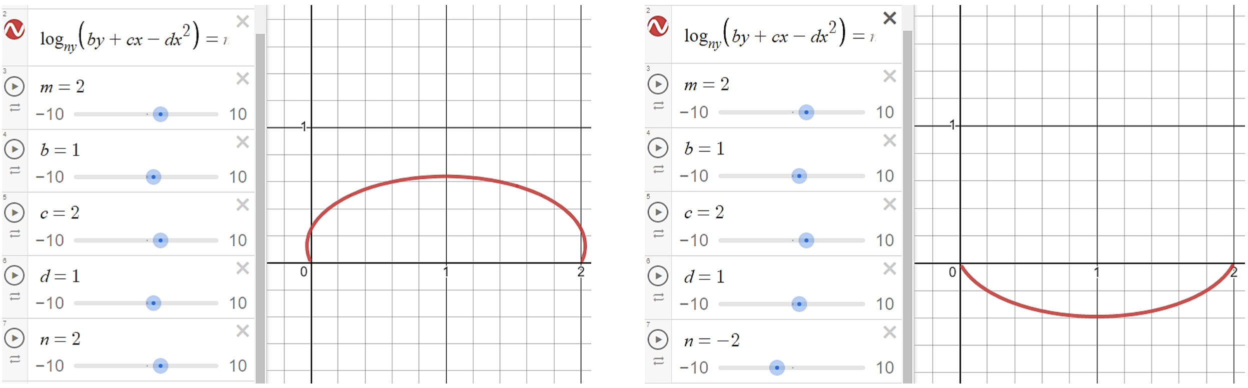
Отже, розглянемо рівняння (3) при значенні $m=2$. Воно буде рівносильне наступній системі:

$$\begin{cases} na>0, \\ na\neq 1, \\ ba+cx-dx^2=(na)^2 \end{cases} \tag{8}$$

Аналіз третьої умови системи (8) показує, що у загальному випадку графічним розв'язком системи (8) буде еліпс (або його частина), який розміщений у верхній півплощині відносно осі Ox при $n>0$ (рис. 6а) або у нижній півплощині при $n<0$ (рис. 6б):

$$\frac{\left(x-\frac{c}{2d}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{d}\left(\left(\frac{b}{2n}\right)^2+\left(\frac{c}{2\sqrt{d}}\right)^2\right)}\right)^2}+\frac{\left(a-\frac{b}{2n^2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}\left(\left(\frac{b}{2n}\right)^2+\left(\frac{c}{2\sqrt{d}}\right)^2\right)}\right)^2}=1$$

Отримане рівняння є канонічним рівнянням еліпса, центр якого знаходиться в точці $O\left(\frac{c}{2d};\frac{b}{2n^2}\right)$, велика його вісь $2\sqrt{\frac{1}{d}\left(\left(\frac{b}{2n}\right)^2+\left(\frac{c}{2\sqrt{d}}\right)^2\right)}$, а мала $2\sqrt{\frac{1}{n^2}\left(\left(\frac{b}{2n}\right)^2+\left(\frac{c}{2\sqrt{d}}\right)^2\right)}$. У загальному випадку еліпс буде перетинати вісь Ox в точках $x=0, x=\frac{c}{d}$; розв'язками в цьому випадку при їх наявності (2-х або 1-го) будуть такі значення $x=\frac{c\pm\sqrt{c^2+4da(b-na)}}{2d}$ (причому, наявність розв'язків можливою буде лише у випадку, коли $\left|\frac{b}{2n^2}\right|<\sqrt{\frac{1}{n^2}\left(\left(\frac{b}{2n}\right)^2+\left(\frac{c}{2\sqrt{d}}\right)^2\right)}$, або $\frac{c^2}{4n^2d}>0$).



а) б)

Рис. 6. Графічне представлення рівняння $log_{na}(ba+cx-dx^2)=2$: а) при n>0; б) при n<0

Зазначимо особливі випадки при $m=2$:

а) при $d=0$ графічним розв'язком умови (8) буде парабола (або її частина) $\left(na-\frac{b}{2n}\right)^2=cx+\frac{b^2}{4n^2}$, яка розміщена у верхній півплощині відносно осі Ox при $n>0$ або у нижній півплощині при $n<0$; розв'язок при $c\neq 0$ буде $x=\frac{1}{c}\left(\left(na-\frac{b}{2n}\right)^2-\frac{b^2}{4n^2}\right)$, а при $c=0$ $x\in R$ лише для $a=\frac{b}{n^2}$;

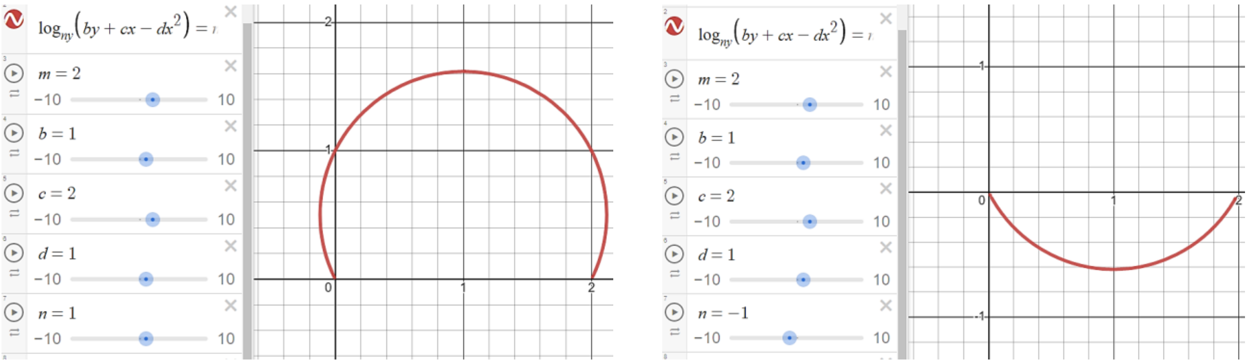
б) при $d<0$ (перепишемо другу умову системи (8) так $ba+cx+dx^2=(na)^2$) графічним розв'язком умови (8) буде гіпербола (або її частина) за умови, що $\frac{c^2}{4d}-\frac{b^2}{4n^2}>0$:

$$\frac{\left(x+\frac{c}{2d}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{d}\left(\frac{c^2}{4d}-\frac{b^2}{4n^2}\right)}\right)^2}-\frac{\left(a-\frac{b}{2n^2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}\left(\frac{c^2}{4d}-\frac{b^2}{4n^2}\right)}\right)^2}=1$$

яка розміщена у верхній півплощині відносно осі Ox при $n>0$ або у нижній півплощині при $n<0$; розв'язок буде $x=\frac{-c\pm\sqrt{c^2+4da(n^2a-b)}}{2d}$; якщо $\frac{c^2}{4d}-\frac{b^2}{4n^2}=0$, то графічним розв'язком буде пара прямих, що перетинаються $d\left(x+\frac{c}{2d}\right)^2-n^2\left(a-\frac{b}{2n^2}\right)^2=0$; якщо $\frac{c^2}{4d}-\frac{b^2}{4n^2}<0$, то графічним розв'язком буде гіпербола, фокуси якої розміщені на осі Oa;

в) при $n=1$ або $n=-1$ та $d=1$ графічним розв'язком умови (8) буде коло (або його частина), яке розміщене у верхній півплощині відносно осі Ox при $n>0$ (рис. 7а) або у нижній півплощині при $n<0$ (рис. 7б). У випадку кола також доцільно послуговуватися його канонічним рівнянням: $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$. Для задачі, що розглядається, рівняння кола матиме вигляд:

$$\frac{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}-\frac{b^2}{4}\right)}\right)^2}-\frac{\left(a-\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\left(\frac{c^2}{4}-\frac{b^2}{4}\right)}\right)^2}=1$$



а) б)

Рис. 7. Графічне представлення рівняння $log_{na}(ba+cx-dx^2)=2$: а) при n=1; б) при n=-1

Проілюструємо проведений аналіз на прикладах щодо складання та розв'язування серії рівнянь, породжених задачею 1, з використанням графічного калькулятора DESMOS.

Приклад 1. Розміщуємо повзунки так: $n=2$, $m=0$, $b=1$, $c=2$, $d=1$. Отримуємо рівняння $log_{2a}(a+2x-x^2)=0$, розв'язки якого будуть такими: при $a\in(-\infty;0]$ $x\in\emptyset$, при $a\in(0;+\infty)$ $x=1\pm\sqrt{a}$.

Алгоритм підбору інших вправ буде аналогічним, тому будемо вказувати лише рівняння та відповіді до нього.

Приклад 2. $log_{3a}(a+2x+x^2)=0$, відповідь: при $a\in(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$ $x\in\emptyset$, при $a\in(0;2]$ $x=-1\pm\sqrt{2-a}$.

Приклад 3. $log_{-a}(a+4x+x^2)=0$, відповідь: при $a\in[0;+\infty)$ $x\in\emptyset$, при $a\in(-\infty;0)$ $x=-2\pm\sqrt{5-a}$.

Приклад 4. $log_{3a}(a+2x)=0$, відповідь: при $a\in(-\infty;0]$ $x\in\emptyset$, при $a\in(0;+\infty)$ $x=\frac{1-a}{2}$.

Приклад 5. $log_{-a}(3x-x^2)=0$, відповідь: при $a\in(-\infty;0)$ $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, при $a\in[0;+\infty)$ $x\in\emptyset$.

Приклад 6. $log_{3a}\left(\frac{a}{2}\right)=0$, відповідь: при $a\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ $x\in\emptyset$, при $a=2$ $x\in R$.

Приклад 7. $log_{2a}(a+4x-x^2)=1$, відповідь: при $a\in(-\infty;0]\cup(4;+\infty)$ $x\in\emptyset$, при $a\in(0;4]$ $x=2\pm\sqrt{4-a}$.

Приклад 8. $log_{-2a}(4x-x^2)=1$, відповідь: при $a\in(-\infty;-2)\cup[0;+\infty)$ $x\in\emptyset$, при $a\in[-2;0)$ $x=2\pm\sqrt{4+2a}$.

Приклад 9. $log_{-2a}(a-4x+2x^2)=1$, відповідь: при $a\in(-\infty;0)$ $x=1\pm\sqrt{1-1{,}5a}$, при $a\in[0;+\infty)$ $x\in\emptyset$.

Приклад 10. $log_{a}(3a-2x)=1$, відповідь: при $a\in(-\infty;0]$ $x\in\emptyset$, при $a\in(0;+\infty)$ $x=a$.

Приклад 11. $log_{-a}(-6x-x^2)=1$, відповідь: при $a\in(-\infty;-9)\cup[0;+\infty)$ $x\in\emptyset$, при $a\in[-9;0)$ $x=-3\pm\sqrt{9+a}$.

Приклад 12. $log_{-a}(-a-2x+x^2)=1$, відповідь: при $a\in(-\infty;0)$ $x=0$ або $x=2$, при $a\in[0;+\infty)$ $x\in\emptyset$.

Приклад 13. $log_{2a}(2a+3x)=1$, відповідь: при $a\in(-\infty;0]$ $x\in\emptyset$, при $a\in(0;+\infty)$ $x=0$.

Приклад 14. $log_{2a}(2a+4x^2)=1$, відповідь: при $a\in(-\infty;0]$ $x\in\emptyset$, при $a\in(0;+\infty)$ $x=0$.

Приклад 15. $log_{2a}(6a+4x-2x^2)=2$, відповідь: при $a\in(-\infty;0]\cup(\frac{29}{16};+\infty)$ $x\in\emptyset$, при $a\in\left(0;\frac{29}{16}\right]$ $x=1\pm\sqrt{1+3a-2a^2}$.

Приклад 16. $log_{-2a}(6a+4x-2x^2)=2$, відповідь: при $a\in\left(-\infty;-\frac{5}{16}\right)\cup[0;+\infty)$ $x\in\emptyset$, при $a\in[-\frac{5}{16};0)$ $x=1\pm\sqrt{1+3a-2a^2}$.

Приклад 17. $log_{a}(2a+4x)=2$, відповідь: при $a\in(-\infty;0]$ $x\in\emptyset$, при $a\in(0;+\infty)$ $x=\frac{a^2-2a}{4}$.

Приклад 18. $log_{a}(2a+4x+3x^2)=2$, відповідь: при $a\in(-\infty;0]$ $x\in\emptyset$, при $a\in(0;+\infty)$ $x=\frac{-2\pm\sqrt{3a^2-6a+4}}{3}$.

Приклад 19. $log_{a}(2a+4x+4x^2)=2$, відповідь: при $a\in(-\infty;0]$ $x\in\emptyset$, при $a\in(0;+\infty)$ $x=\frac{a-2}{2}$, або $x=-\frac{a}{2}$.

Приклад 20. $log_{a}(2a+4x+5x^2)=2$, відповідь: при $a\in(-\infty;0]\cup(1-\frac{\sqrt{5}}{5};1+\frac{\sqrt{5}}{5})$ $x\in\emptyset$, при $a\in\left(0;1-\frac{\sqrt{5}}{5}\right]\cup[1+\frac{\sqrt{5}}{5};+\infty)$ $x=\frac{-2\pm\sqrt{5a^2-10a+4}}{5}$.

Приклад 21. $log_{a}(4a+4x-x^2)=2$, відповідь: при $a\in(-\infty;0]\cup\left(2+2\sqrt{2};+\infty\right)$ $x\in\emptyset$, при $a\in(0;2+2\sqrt{2}]$ $x=2\pm\sqrt{-a^2+4a+4}$.

Як бачимо, засобами елементарної математики та ІКТ на прикладі одного рівняння зі шкільного курсу математики, застосовуючи дослідницький метод навчання, можна продемонструвати значну кількість кривих, що вивчаються, починаючи зі школи і завершуючи закладом вищої освіти.

Продовжуючи реалізацію принципу наступності навчання математичних дисциплін, потрактованим у (Botuzova, 2020) як дидактичний принцип, спрямований на забезпечення здобувачам освіти можливостей продовження вивчення ними математичних дисциплін на вищих рівнях освіти, зможемо продовжити розпочате дослідження у контексті вивчення аналітичної геометрії (вищої математики) у закладі вищої освіти на спеціальностях зі значною математичною складовою. Тим паче, що принцип наступності навчання математичних дисциплін передбачає ще й інтеграцію суміжних дисциплін та встановлення міжпредметних зв'язків.

Комплексна задача з параметром (3), дозволяє при її графічному розв'язуванні побачити різноманітні криві другого порядку, або їх фрагменти, про що мова велась вище.

Поставимо перед студентами нову задачу, дослідницього характеру.

Задача 3. «Побудувати конус та дослідити усі можливі його перерізи площиною. Встановити відповідності між кривими, що отримуються в результаті перерізу поверхні конуса площиною із розв'язками задачі (3)».

Для початку проведення дослідження можна скористатися освітньою онлайн-платформою Mozaik education, в медіа-бібліотеці якої у розділі «Математика» є розроблена 3D-сцена під назвою «Конічні перерізи». Зокрема в ній представлені такі варіанти перерізів як: коло, еліпс, парабола, гіпербола та дві прямі, що перетинаються.

Щоб побачити усі можливі варіанти перерізів рекомендуємо скористатися таким поширеним та безкоштовним онлайн-ресурсом як GeoGebra (розділ 3D графіка). За допомогою інструменту «Перетин двох поверхонь», зможемо побачити, наприклад, частину еліпса і поставити її у відповідність із графічним розв'язком задачі (8), як показано на рис. 8.

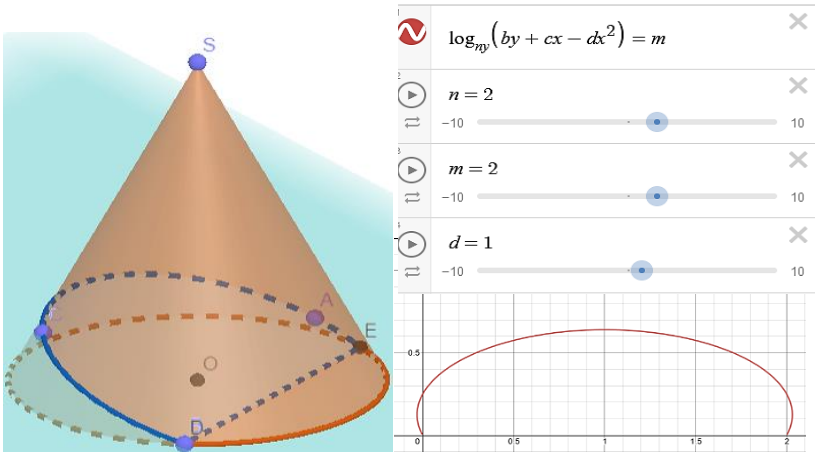


Рис. 8. Співставлення графічних образів розв'язків задачі (3) та конічних перерізів

Розглядаючи запропоновані ІКТ-засоби як допоміжний інструмент при вивченні математичних дисциплін, зазначимо, що достатньо зручною та корисною є функціональна можливість GeoGebra представляти фігури, що утворилися при перетині двох поверхонь (наразі, площини та конуса) у вигляді рівнянь, у даному випадку – параметричних. Це дозволяє формувати у здобувачів освіти цілісні інтегровані образи кривих другого порядку та їхніх частин.

Розуміємо також, що ефективне формування інтегрованих образів можливе лише при поглибленому вивченні конкретних математичних проблем та при умові використання евристичного підходу до навчання. Адже, як відомо, евристичний підхід передбачає активну пізнавальну діяльність учнів, а роль учителя при цьому полягає в конструюванні пізнавального завдання (Скафа & Тутова, 2009). Водночас, у сучасних реаліях організація евристичної діяльності учнів на уроках математики та при вивченні математичних дисциплін нерозривно пов'язана з використанням ІКТ, яке сприяє якісній візуалізації навчального матеріалу, посиленню мотивації навчання, поглибленню міжпредметних зв'язків.

Так викладач може запропонувати продовжити розпочате дослідження під час вивчення класифікації кривих другого порядку у курсі «Аналітичної геометрії» («Вищої математики» чи «Геометрії») за їхніми канонічними рівняннями, сформулювавши завдання наступним чином: «Вкажіть канонічне рівняння кривої та умови, які мають бути накладені на змінні, щоб в результаті побудови отримати зображену на рис. 8 частину еліпса». Це дозволить здобувачам освіти побачити та усвідомити в цілому одну й ту саму фігуру в різних інтерпретаціях: графічна модель логарифмічного рівняння з параметром, конічний переріз, параметричне чи канонічне рівняння з початковими умовами або без них.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Таким чином, контекст застосування інтегративного підходу на сучасному етапі «технологізації» процесу навчання може спричинити внесення коректив до особливостей забезпечення наступності методів навчання розв'язування математичних задач у школі та ЗВО.

По-перше, ідея технології укрупнення дидактичних одиниць у вигляді розв'язування задач різними способами, а саме поєднання в конкретному випадку аналітичного та графічного способу розв'язування рівнянь з параметром, сприяє кращій наступності навчання математики, так як забезпечує актуалізацію, узагальнення та систематизацію здатностей учнів та студентів щодо реалізації знань та умінь із двох найважливіших змістових ліній шкільного курсу математики (лінія рівнянь, нерівностей та їх систем та функціональна лінія).

По-друге, поєднання процесу розв'язування готових завдань з процесом складання нових укрупнених вправ, що також веде до укрупнення дидактичних одиниць, в конкретному випадку розв'язування або складання рівнянь з параметром з використанням аналітичних викладок або пакетів комп'ютерної математики (графічних калькуляторів, моделюючих програм, тощо) дає практично необмежені можливості застосування дослідницького методу у навчанні на уроках, факультативних заняттях з математики в школі та на заняттях зі студентами математичних спеціальностей ЗВО. Використовуючи засоби елементарної математики та інформаційно-комунікаційні технології ми продемонстрували на прикладі одного рівняння зі шкільного курсу математики процес організації дослідження узагальненої вправи на різних рівнях – аналітичному та емпіричному. Це дало можливість не лише розв'язати та вивчити початкову задачу, а й провести умотивоване дослідження значної кількості кривих, що вивчаються, починаючи зі школи і завершуючи закладом вищої освіти. А це й дає можливість говорити про реалізацію дидактичного принципу наступності, спрямованого на забезпечення здобувачам освіти можливостей продовження вивчення ними математичних дисциплін на вищих рівнях освіти.

По-третє, принцип наступності навчання математичних дисциплін передбачає інтеграцію суміжних дисциплін та встановлення міжпредметних зв'язків. Але важливо, що його реалізація забезпечується внутрішньою інтеграцією методів, засобів, компонентів та змістовних ліній самої математики як навчального предмету в школі та ЗВО. Така інтеграція реалізується через побудову інтегрованих образів (інтегрований образ самої задачі, інтегрований образ задачної серії та інтегрований образ способу розв'язування задачі). Вибір обсягу інтегрованого образу проводиться з врахуванням загальної мети організації навчальної діяльності суб'єктів навчання. Формування кожного інтегрованого образу відбувається у процесі детального аналізу та порівняння ознак та характеристик окремих компонентів об'єкту вивчення. Але ефективне формування інтегрованих образів можливе лише при поглибленому вивченні конкретних математичних проблем та при умові використання евристичного підходу до навчання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Birgin, O., & Uzun Yazıcı, K. (2021). The effect of GeoGebra software–supported mathematics instruction on eighth-grade students' conceptual understanding and retention. *Journal of Computer Assisted Learning*, 37(4), 925–939. https://doi.org/10.1111/jcal.12532.
2. Botuzova, Yu. (2020). Factors of Providing the Continuity of Teaching Mathematics During Transition from High School to University. *Universal Journal of Educational Research,* 8(3), 857-865. https://doi.org/10.13189/ujer.2020.080316.
3. Gogovska, V., & Malcheski, R. (2012). Improvement of Intra-disciplinary Integration of Mathematics Instruction. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 46, 5420–5424. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.06.450.
4. Rizhniak, R., Pasichnyk, N., Krasnoshchok, I., Botuzova, Yu., & Akbash, K. (2020). Construction of Theoretical Model for Sustainable Development in Future Mathematical Teachers of Higher Education. *Universal Journal of Educational Research*, 8(5), 2079-2089. https://doi.org/10.13189/ujer.2020.080546.
5. Rizhniak, R., Pasichnyk, N., Zavitrenko, D., Akbash, K., & Zavitrenko, A. (2021). The Implementation of an integrative Approach to Learning with use of integrated Images. *Revista Romaneasca Pentru Educatie Multidimensionala,* 13(1), https://doi.org/10.18662/rrem/13.1/373.
6. Treacy, P., & O'Donoghue, J. (2013). Authentic Integration: a model for integrating mathematics and science in the classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.868543.
7. Брунер, Дж. (1977). *Психология познания*. Пер. с англ. К.И. Бабицкого. Общ.ред. А.Р.Лурия. Москва, Прогресс.
8. Вознюк, О.В. (2009). *Цільові орієнтири розвитку особистості у системі освіти: інтегративний підхід*: монографія. Житомир, Вид-во ЖДУ ім. І. Франка.
9. Гладюк, Т., & Міщук, Н. (1999). Підготовка майбутніх учителів до здійснення інтегративного підходу в навчання природничих дисциплін. *Педагогіка і психологія професійної освіти*, 3, 9–12.
10. Іванчук, М.Г. (2004). *Інтегроване навчання: сутність та виховний потенціал*. Чернівці, Рута.
11. Ільченко, В.Р. (1994). Конструювання цілісності змісту освіти. *Постметодика*, 2, 2–5.
12. Ільченко, В.Р. (1999). *Освітня програма "Довкілля": Інтеграція змісту природничонаукової освіти: Концепт. засади*. АПН України, Інститут пед АПН України. К., Полтава.
13. Кедров, Б.М. (1988). *Науки в их взаимосвязи. История. Теория. Практика*. Москва.
14. Клепко, С.Ф. (1998). *Інтегративна освіта і поліморфізм знання*. Київ-Полтава-Харків, ПОІПОПП.
15. Козловська, І.М. (1999). Філософсько-методологічні аспекти інтеграції знань у змісті сучасної освіти. *Педагогіка і психологія професійної освіти*, 3, 56–61.
16. Козловська, І.М. (2001). *Теоретичні та методичні основи інтеграції знань учнів професійно-технічної школи.* Автореферат дис. доктора пед. наук: 13.00.04. Київ.
17. Литвиненко, В.Н., & Мордкович, А.Г. (1995). *Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учебное пособие для студентов физ.-мат. специальностей пед. институтов*. Москва, ABF.
18. Моштук, В.В. (1991). *Дидактичні умови інтеграції споріднених навчальних предметів*. Дис. канд. пед. наук: спец. 13.00.01. Київ.
19. Нічишина, В.В. (2008). *Інтегративний підхід до вивчення математичних дисциплін у процесі підготовки майбутніх вчителів математики.* Автореф. дис. канд. пед. наук: спец. 13.00.04. Кіровоград.
20. Пасічник, Н.О., & Ріжняк, Р.Я. (2020). Розв'язування математичних задач з реалізацією поліпредметних (економіка, інформатика, математика) інтегративних компонентів. *Фізико-математична освіта*, 2(24), 113–122. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2020-024-2-016.
21. Раков, С.А. (2005). *Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ*. Харків, Факт.
22. Семенов, І. (1999). Інтеграція та диференціація в науці та професійній освіті. *Педагогіка і психологія професійної освіти*, 3, 37–44.
23. Сканаві, М.І. (Ред.) (1994). *Збірник задач з математики для вступників до втузів*. Київ, Вища школа.
24. Скафа, О., & Тутова, О. (2009). *Комп'ютерно-орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики:* навчально-методичний посібник. Донецьк, Вебер.
25. Эрдниев, П.М. (1992). *Укрупнение дидактических единиц как технология обучения (ч. 1)*. Москва, Просвещение.
26. Эрдниев, П.М., & Эрдниев, Б.П. (1986). *Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: книга для учителя*. Москва, Просвещение.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Birgin, O., & Uzun Yazıcı, K. (2021). The effect of GeoGebra software – supported mathematics instruction on eighth-grade students' conceptual understanding and retention. *Journal of Computer Assisted Learning*, 37(4), 925–939. https://doi.org/10.1111/jcal.12532.
2. Botuzova, Yu. (2020). Factors of Providing the Continuity of Teaching Mathematics During Transition from High School to University. *Universal Journal of Educational Research,* 8(3), 857-865. https://doi.org/10.13189/ujer.2020.080316.
3. Gogovska, V., & Malcheski, R. (2012). Improvement of Intra-disciplinary Integration of Mathematics Instruction. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 46, 5420–5424. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.06.450.
4. Rizhniak, R., Pasichnyk, N., Krasnoshchok, I., Botuzova, Yu., & Akbash, K. (2020). Construction of Theoretical Model for Sustainable Development in Future Mathematical Teachers of Higher Education. *Universal Journal of Educational Research*, 8(5), 2079-2089. https://doi.org/10.13189/ujer.2020.080546.
5. Rizhniak, R., Pasichnyk, N., Zavitrenko, D., Akbash, K., & Zavitrenko, A. (2021). The Implementation of an integrative Approach to Learning with use of integrated Images. *Revista Romaneasca Pentru Educatie Multidimensionala,* 13(1), https://doi.org/10.18662/rrem/13.1/373.
6. Treacy, P., & O'Donoghue, J. (2013). Authentic Integration: a model for integrating mathematics and science in the classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.868543.
7. Bruner, J. (1977). *Psihologija poznanija* [*Psychology of cognition*]. Moscow: Progress. (in Russian).
8. Vozniuk, O.V. (2009). *Tsilovi oriientyry rozvytku osobystosti u systemi osvity: intehratyvnyi pidkhid* [*Target orientations of personality development in the education system: an integrative approach*]. Zhytomyr, Publishing House of Zhytomyr Ivan Franko State University. (in Ukrainian).
9. Hladiuk, T., & Mishchuk, N. (1999). Pidhotovka maibutnikh uchyteliv do zdiisnennia intehratyvnoho pidkhodu v navchannia pryrodnychykh dystsyplin [Training future teachers for the implementation of an integrative approach to the teaching of natural sciences]. *Pedahohika i psykholohiia profesiinoi osvity – Pedagogy and psychology of professional education,* 3, 9-12. (in Ukrainian).
10. Ivanchuk, M.H. (2004). *Intehrovane navchannia: sutnist ta vykhovnyi potentsial [Integrated learning: essence and educational potential*]. Chernivtsi, Ruta. (in Ukrainian).
11. Ilchenko, V.R. (1994). Konstruiuvannia tsilisnosti zmistu osvity [Constructing the integrity of the content of education]. *Postmetodyka – Postmethodology*, 2, 2-5. (in Ukrainian).
12. Ilchenko, V.R. (1999). *Osvitnia prohrama "Dovkillia": Intehratsiia zmistu pryrodnychonaukovoi osvity: Kontsept. zasady* [*Curriculum "Environment": Integration for science education: Conceptual foundations*]. APN Ukrainy, Instytut ped APN Ukrainy. K., Poltava. (in Ukrainian).
13. Kedrov, B.M. (1988). *Nauki v ih vzaimosvjazi. Istorija. Teorija. Praktika* [*Sciences in their relationship. Story. Theory. Practice*]. Moscow. (in Russian).
14. Klepko, S.F. (1998). *Intehratyvna osvita i polimorfizm znannia* [*Integrative education and polymorphism of knowledge*]. Kyiv-Poltava-Kharkiv, POIPOPP. (in Ukrainian).
15. Kozlovska, I.M. (1999). Filosofsko-metodolohichni aspekty intehratsii znan u zmisti suchasnoi osvity [Philosophical and methodological aspects of the integration of knowledge in the content of modern education]. *Pedahohika i psykholohiia profesiinoi osvity – Pedagogy and psychology of professional education*, 3, 56–61. (in Ukrainian).
16. Kozlovska, I.M. (2001). *Teoretychni ta metodychni osnovy intehratsii znan uchniv profesiino-tekhnichnoi shkoly: avtoreferat dys. doktora ped. nauk* [*Theoretical and methodological foundations of the integration of knowledge of vocational school students: Abstract of the dissertation of the Doctor of Pedagogical Sciences*]. Kyiv. (in Ukrainian).
17. Litvinenko, V.N., & Mordkovich, A.G. (1995). *Praktikum po jelementarnoj matematike: Algebra. Trigonometrija: Uchebnoe posobie dlja studentov fiz.-mat. special'nostej ped. Institutov* [Elementary mathematics workshop: Algebra. Trigonometry: A textbook for students of pedagogic institutes]. Moscow, ABF. (in Russian).
18. Moshtuk, V.V. (1991). *Dydaktychni umovy intehratsii sporidnenykh navchalnykh predmetiv: Dys. kand. ped. nauk* [*Didactic conditions of integration of related educational subjects: Dissertation of Ph.D.*]. Kyiv. (in Ukrainian).
19. Nichyshyna, V.V. (2008). *Intehratyvnyi pidkhid do vyvchennia matematychnykh dystsyplin u protsesi pidhotovky maibutnikh vchyteliv matematyky: Avtoref. dys. kand. ped. nauk* [*An integrative approach to the study of mathematical disciplines in the process of training future teachers of mathematics: Abstract of the dissertation of Ph.D.*]. Kirovohrad. (in Ukrainian).
20. Pasichnyk, N.O., & Rizhniak, R.Y. (2020). Rozviazuvannia matematychnykh zadach z realizatsiieiu polipredmetnykh (ekonomika, informatyka, matematyka) intehratyvnykh komponentiv [Solving of mathematical problems with the implementation of multipricultural (economics, informatics, mathematics) integrative components]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and mathematical education*, 2 (24), 113–122. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2020-024-2-016. (in Ukrainian).
21. Rakov, S.A. (2005). *Matematychna osvita: kompetentnisnyi pidkhid z vykorystanniam IKT* [*Mathematical education: a competency-based approach using ICT*]. Kharkiv, Fakt. (in Ukrainian).
22. Semenov, I. (1999). Intehratsiia ta dyferentsiatsiia v nautsi ta profesiinii osviti [Integration and differentiation in science and professional education]. *Pedahohika i psykholohiia profesiinoi osvity – Pedagogy and psychology of professional education*, 3, 37-44. (in Ukrainian).
23. Skanavi, M.I. (1994). *Zbirnyk zadach z matematyky dlia vstupnykiv do vtuziv [Collection of problems in mathematics for entrants to higher technical educational institutions]*. Kyiv, Vyshcha shkola. (in Ukrainian).
24. Skafa, O., Tutova, O. (2009). *Kompiuterno-oriientovani uroky v evrystychnomu navchanni matematyky: navchalno-metodychnyi posibnyk* [*Computer-oriented lessons in heuristic teaching of mathematics: a teaching and methodical guide*]. Donetsk, Veber. (in Ukrainian).
25. Jerdniev, P.M. (1992). *Ukrupnenie didakticheskih edinic kak tehnologija obuchenija* [*Enlargement of didactic units as a learning technology*]. Moscow, Prosveshhenie. (in Russian).
26. Jerdniev, P.M., & Jerdniev, B.P. (1986). *Ukrupnenie didakticheskih edinic v obuchenii matematike: kniga dlja uchitelja* [*Enlargement of didactic units in teaching mathematics: a book for the teacher*]. Moscow, Prosveshhenie. (in Russian).