Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Коняєва Поліна Сергіївна

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:
______________ Я.О. Чкана
кандидат педагогічних наук, доцент
доцент кафедри математики, фізики
та методик їх навчанння
«___» ______________2021 року
Виконавець:
______________ П.С. Коняєва
«___» ______________2021 року

Суми 2021

ЗМІСТ

ВСТУП……………………………………………………………………….…….3

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ»…………………………………………………………….…..6

1.1 Задачі, що приводять до поняття «Інтегральне рівняння»…………………....6

1.2 Поняття інтегрального рівняння. Типи інтегральних рівнянь……………....14

1.3 Зв’язок інтегральних рівнянь з диференційними. Теорема єдиності розв’язку……………………………………………………………………………17

РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ТЕОРІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ…….31

2.1 Методи розв’язування інтегральних рівнянь……………………………...31

2.2 Розробка курсу «Інтегральні рівняння» для студентів фізико математичних факультетів педагогічних університетів…………………………………………46

ВИСНОВКИ………………………………………………………………….…..74

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ…………………………………………75

ВСТУП

Актуальність теми. Інтегральні рівняння займають значне місце в математиці та інших природничих науках. В теорії інтегральних рівнянь було сформовано ряд ідей, понять і методів, що стали фундаментальними для функціонального аналізу. Проте, в свою чергу, методи функціонального аналізу справили сильний вплив на розвиток теорії інтегральних рівнянь.

Традиційно появу інтегральних рівнянь пов’язують з формулами звернення Ж. Фур’є і роботою Н. Абеля про таутохрони. Проте реальна історія більш рання, вона починається в XVIII ст. і прямує до Л. Ейлера та П.С. Лапласа. Ейлеру належить ідея подання розв’язків диференційних рівнянь у вигляді визначених інтегралів (1741-1763). Результати роботи Абеля були систематизовані Ейлером у другому томі «Інтегрального числення», глава якої має назву «Про побудову диференційних рівнянь за допомогою квадратур кривих».

Праця Н. Абеля про таутохрони спочатку була опублікована 1823 році в «Magazin for Naturvidenskaberne» в Християні (Осло). Дану роботу Абеля не відносять до числа його головних досягнень, проте в ній була розглянута задача, яка привела до інтегральних рівнянь. В цій роботі Абель вивчав рух матеріальної точки у вертикальній площині під дією сили тяжіння.

До кінця XIX ст. окремі частинні, нерідко незв’язні між собою задачі з різних розділів математики, таких як теорія рядів і теорія чисел, призводили до інтегральних рівнянь. В той час ще не було створено загальних підходів і методів, тому для кожної задачі необхідно було розробляти свої прийоми. З розробкою теорії інтегральних рівнянь ми пов’язуємо імена багатьох відомих математиків: С.Д. Пуассона, О.Л. Коші, Ж. Ліувіля, Б. Рімана, Т.І. Стілтьєса, Е. Бельтрамі, Н.Я. Соніна, В.А. Стєклова, К. Нейман, Ш.Е. Пікара, А. Пуанкаре, Г.А. Шварца та інших. Першим, хто усвідомив необхідність створення загальної теорії інтегральних рівнянь, був професор Вищої технічної школи в Берліні Пауль Дюбуа-Реймон. Йому належить сам термін «інтегральне рівняння», запропонований ним у 1888 році в роботі, яка була присвячена теорії потенціалу.

Прорив в теорії лінійних інтегральних рівнянь стався в кінці XIX – початку XX ст. у зв'язку з класичними роботами В. Вольтерра, Е.І. Фредгольма, Д. Гільберта, Е. Шмідта.

Теорія інтегральних рівнянь стимулювала розвиток теорії операторів в абстрактних просторах і функціонального аналізу. У цьому напрямі в Україні отримали класичні результати Н. Ахієзер, В. Марченко, М. Крейн та їхні учні.

Мета дослідження – з'ясувати суть поняття інтегрального рівняння; розглянути типи інтегральних рівнянь та основні методи їх розв'язування; розробити курс «Інтегральні рівняння» для студентів фізико-математичного факультету; підібрати завдання для розв'язування на практичних заняттях.

Завдання дослідження:

- провести аналіз наукової літератури з теми;
- визначити сутність поняття інтегрального рівняння;
- розглянути типи інтегральних рівнянь та методи їх розв'язування;
- навчитися використовувати основні методи розв'язування інтегральних рівнянь на практиці;
- розробити курс «Інтегральні рівняння» для студентів фізико-математичного факультету.

Об'єкт дослідження: інтегральні рівняння.

Предмет дослідження: методи розв'язування інтегральних рівнянь.

Наукова новизна та практичне значення: розробка курсу «Інтегральні рівняння» для студентів фізико-математичного факультету.

Апробація результатів та публікації: стаття «Задачі, що приводять до поняття «Інтегральні рівняння», тези «Методи розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма» для студентської звітної конференції 2021, тези «Курс «Інтегральні рівняння» в професійній підготовці майбутніх учителів математики» для II Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ плюс – 2021». Форум молодих дослідників».

Структура та обсяг роботи. Робота складається з двох розділів, вступу, висновку та змісту.

Перший розділ складається з трьох підпунктів, в яких розглянуто задачі, що приводять до поняття «інтегральне рівняння»; типи інтегральних рівнянь та методи їх розв’язування; зв’язок інтегральних рівнянь з диференціальними; теорема єдиності розв’язку інтегральних рівнянь.

У другому розділі представлена розробка курсу з теми «Інтегральні рівняння» для студентів фізико-математичного факультету.

В роботі є три рисунки та шість таблиць.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

1.1 Задачі що приводять до поняття «Інтегральне рівняння»

Інтегральні рівняння відіграють важливу роль у математичному моделюванні різноманітних фізичних процесів і явищ. Переважно основою для складання інтегральних рівнянь є відповідні фізичні закони. Так, наприклад, відомі закони збереження маси, імпульсу та енергії мають інтегральне формулювання та приводять до складання інтегральних рівнянь як моделей конкретних процесів чи явищ. Також інтегральні рівняння виникають при розв'язуванні задач теорії пружності та пластичності, гідродинаміки, теорії масо- і теплоперенесення, біомеханіки, геофізики, астрономії тощо.

Розглянемо деякі з таких задач.

Задача Абеля є історично першою задачею, розв'язування якої виконано за допомогою інтегральних рівнянь.

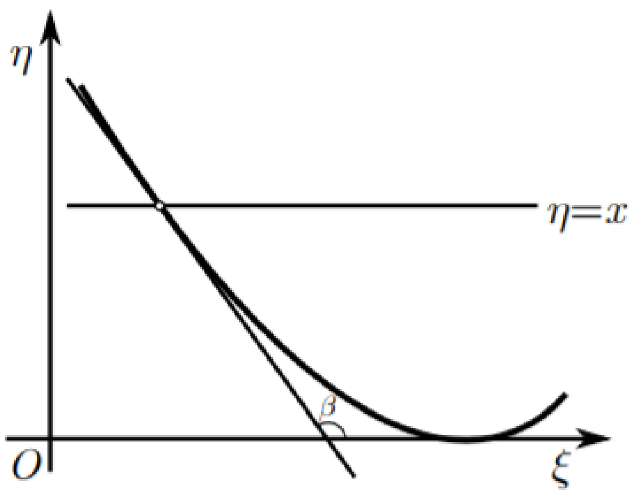

Рис. 1. Рух матеріальної точки за таутохроною [19, с. 8]

Нехай матеріальна точка, на яку діє сила тяжіння, рухається у вертикальній площині (ξ, η) за деякою кривою (рис. 1). За умовою задачі потрібно визначити цю криву так, щоб матеріальна точка, яка починає свій рух без початкової швидкості у точці кривої з ординатою x, досягла вісі $O\xi$ за час $t = f_1(x)$, де $f_1(x)$ – задана функція.[19, с.8]

Абсолютна величина швидкості точки, що рухається під дією сили ваги обчислюється за формулою $v = -\sqrt{2g(x-\eta)}$. Нехай $\beta = \beta(\eta)$ – кут нахилу дотичної до вісі $O\xi$. Тоді матимемо $\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(x-\eta)}sin\beta$. Звідси

$$dt = -\frac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)sin\beta}}.$$

Проінтегруємо останній вираз від 0 до x і покладемо

$$\frac{1}{sin\beta} = \varphi(\eta).$$

Дістанемо

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}} d\eta = -\sqrt{2g} f_1(x). \qquad (1)$$

Нехай $f(x) = -\sqrt{2g} f_1(x)$. Тоді (1) запишемо у вигляді

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}} d\eta = f(x), \qquad (2)$$

де $\varphi(\eta)$ невідома, а $f(x)$ – відома функція. Рівняння типу (2) називають інтегральним рівнянням Абеля. Зауважимо, що воно є частинним випадком лінійного інтегрального рівняння Вольтерра 1-го роду.

З (2) визначимо $\varphi(\eta)$ і складемо рівняння шуканої кривої. Дійсно, $\varphi(\eta) = \frac{1}{sin\beta}$, тоді $\eta = \Phi(\beta)$. Далі,

$$d\xi = \frac{d\eta}{tg\beta} = \frac{\Phi'(\beta)d\beta}{tg\beta}, \xi = \int \frac{\Phi'(\beta)}{tg\beta} d\beta = \Phi_1(\beta).$$

Таким чином, крива визначається параметричним рівнянням:

$$\xi = \Phi_1(\beta), \eta = \Phi(\beta).$$

Зокрема, коли $f(x) = C = const$, такою кривою є циклоїда.

Рівняння Абеля є одним з інтегральних рівнянь, до яких зводиться постановка конкретної задачі механіки чи фізики, без використання проміжних диференційних рівнянь.

Розглянемо задачу про розподіл яскравості світла. Згідно із законом геометричної оптики, зображення об’єкта подібне до самого об’єкта. Отже, відрізок відображається у відрізок, при цьому довжина відрізків у загальному випадку різна.

У заданій системі лінз приладу P оберемо масштаб на осях Ot (об’єкта) і Os (спостерігача) так, щоб для двох взаємно відповідних точок $T(t)$ і $S(s)$ мала місце відповідність $t \to s$.

Точка t об’єкта AB, що світиться, впливає на освітлення всього зображення $A'B'$, причому найбільша яскравість освітлення у точці s. Отже, інтенсивність освітлення K є функцією від s та t, тобто $K=K(s, t)$.

Нехай $\eta(t)$ – щільність яскравості об’єкта. Тоді величина $\eta(t)K(s,t)\Delta t$ визначає наближене значення яскравості зображення у точці s, яке породжується елементом об’єкта Δt, що світиться. У нашому прикладі величина $K(s,t)$ визначається властивостями оптичного приладу P. [19, с. 9]

Яскравість зображення у точці s, згідно з принципом суперпозиції, можна наближено подати у вигляді

$$\sum_k \eta(t_k)K(s,t_k)\Delta t_k. \qquad (3)$$

Нехай довжина відрізка *AB* дорівнює *l*. Знайдемо границю (3) при $\max_k \Delta t_k \to 0$ і дістанемо розподіл яскравості зображення у вигляді

$$\varphi(s) = \int_0^l K(s,t)\eta(t)\,dt. \qquad (4)$$

Залежно від постановки фізичної задачі, із (4) отримаємо різні типи інтегральних рівнянь. Функція $K(s, t)$ є відомою функцією, що визначається властивостями оптичного приладу. Якщо щільність яскравості зображення $\varphi(s)$ відома, і треба знайти розподіл яскравості об'єкта, який надає задану яскравість зображення, тоді $\varphi(s)$ – задана функція, $\eta(s)$ – шукана. Отже, (4) – інтегральне рівняння Фредгольма першого роду.

У випадку, коли зображення таке, що крім геометричної подібності, яскравість зображення також подібна яскравості об'єкта, то $\varphi(s)$ і $\eta(s)$ пропорційні, тобто $\varphi(s) = \frac{1}{\lambda}\eta(s)$, і (4) перетворюється в однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду:

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_0^l K(s,t)\varphi(t)\,dt,$$

де $\varphi(s)$ – шукана функція. При цьому виникає питання: чи може коефіцієнт пропорційності мати будь-яке значення, а якщо це не так, то для яких λ фізична задача має розв'язок.

Якщо змінити фізичну постановку й вимагати, щоб різниця яскравості між точкою об'єкта й точкою зображення мала всюди задану величину $f(s) = \eta(s) - \varphi(s)$, то підстановка до (4) $\varphi(s) = \eta(s) - f(s)$ призведе до неоднорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду:

$$f(s) = \eta(s) - \lambda \int_0^l K(s,t)\eta(t)\, dt,$$

де $\eta(s)$ – шукана функція. [19, с. 10]

Однією з перших задач, яка привела до інтегральних рівнянь, була задача про відшукання функції $f(x)$ за її перетворенням Фур'є

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y)\, dy, \quad (5)$$

де $i = \sqrt{-1}$ – комплексна одиниця. Розв'язок $f(y)$ рівняння (5) у 1811 році отримав французький математик Ж. Фур'є як

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} F(x)\, dx. \quad (6)$$

Можна також вважати, що формула (5) визначає розв'язок інтегрального рівняння (6), в якому $f(y)$ – задана, а $F(x)$ – шукана функція. [1, с. 14]

До інтегрального рівняння

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \quad (7)$$

зводиться задача Коші

$$y' = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0,$$

де $f(x, y)$ – неперервна функція у деякому прямокутнику з центром (x_0, y_0). Інтегральне рівняння (7) є окремим випадком інтегрального рівняння Вольтерра другого роду.

Аналогічно, задачу Коші для диференційного рівняння n-го порядку, розв'язного відносно старшої похідної,

$$y^n = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right),$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

можна звести до системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Зокрема, розглянемо задачу Коші для лінійного диференційного рівняння другого порядку:

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = F(x), \\ y(0) = C_0, y'(0) = C_1. \end{cases} \qquad (8)$$

Позначимо

$$y''(x) = z(x)$$

Тоді, враховуючи початкові умови, послідовно одержуємо:

$$y'(x) = \int_0^x z(s)\,ds + C_1,$$

$$y(x) = \int_0^x (\int_0^x z(s)ds + C_1))\,ds = \int_0^x (x-s)z(s)ds + C_1x + C_0.$$

Отже, задачу Коші (8) можемо записати у вигляді

$$z(x)+a_1(x)\left(\int\limits_0^x z(s)ds+C_1\right)+a_2(x)\left(\int\limits_0^x (x-s)z(s)\,ds+C_1x+C_0\right)=$$
$$=F(x).\,[1,\text{с.}\,15]$$

Якщо позначити

$$K(x,s)=-a_1(x)-a_2(x)(x-s),$$
$$f(x)=F(x)-C_1a_1(x)-C_1xa_2(x)-C_0a_2(x),$$

то маємо лінійне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$z(x)=\int\limits_0^x K(x,s)z(x)ds+f(x).$$

Аналогічно, до лінійного інтегрального рівняння Вольтерра другого роду можна звести задачу Коші для лінійного диференційного рівняння довільного порядку. При цьому потрібно скористатися формулою Коші

$$\int\limits_0^x \dots \int\limits_0^x \varphi(s)\,ds\dots ds=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-s)^{n-1}\varphi(s)\,ds.$$

Також розглянемо задачу Коші для лінійного диференційного рівняння третього порядку:

$$\begin{cases} y'''(x)+a_1(x)y''(x)+a_2(x)y'(x)+a_3(x)y(x)=F(x), \\ y(0)=C_0, y'(0)=C_1, y''(0)=C_2, \end{cases} \qquad (9)$$

Якщо позначити $y''(x)=z(x)$ і врахувати початкові умови, то з (9) послідовно одержуємо:

$$y'(x) = \int_0^x z(s)ds + C_1,$$

$$y(x) = \int_0^x (\int_0^x z(s)ds + C_1)ds = \int_0^x (x-s)z(s)ds + C_1 x + C_0.$$

Оскільки

$$y'''(x) = z'(x),$$

то задачу (9) можемо записати як

$$z'(x) + a_1(x)z(x) + a_2(x)\left(\int_0^x z(s)ds + C_1\right)$$
$$+ a_3(x)\left(\int_0^x (x-s)z(s)ds + C_1 x + C_0\right) = F(x).$$

Позначаючи

$$K(x,s) = a_2(x) + a_3(x)(x-s),$$
$$f(x) = F(x) - C_1 a_2(x) - C_1 x a_3(x) - C_0 a_3(x),$$

одержуємо лінійне інтегро-диференційне рівняння

$$z'(x) + a_1(x)z(x) + \int_0^x K(x,s)z(s)ds = f(x)$$

відносно функції $z(x)$, яка задовольняє початкову умову $z(0) = C_2$.

Зауважимо, що з допомогою заміни

$$y'(x) = z(x)$$

задачу (9) зводимо до лінійного інтегро-диференційного рівняння

$$z''(x) + a_1(x)z'(x) + a_2(x)z(x) + \int_0^x a_3(x)z(s)ds = F(x) - C_0 a_3(x)$$

з початковими умовами

$$z(0) = C_1, z'(0) = C_2. [1, \text{с}. 16]$$

1.2. Поняття інтегрального рівняння. Типи інтегральних рівнянь

Інтегральним рівнянням називають рівняння, яке містить невідому функцію під знаком інтеграла. Наведемо приклади інтегральних рівнянь:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x), x \in [a,b], \quad (10)$$

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x), x \in [a,b], \quad (11)$$

де *K(x)* і *f(x)* – задані функції, а *y(x)* – шукана функція (можуть бути дійсними або комплексними), λ – деяке число (дійсне або комплексне).

Функцію *K(x,s)* називають ядром інтегрального рівняння, *f(x)* – вільним членом. У рівняннях (10), (11) функція *f(x)* визначена на відрізку $x \in [a,b]$. У рівнянні (10) ядро *K(x,s)* визначене у квадраті

$$Q = \{(x, s): a \le x \le b, a \le s \le b\},$$

а у рівнянні (11) – у трикутнику (рис. 2)

$$G = \{(x, s): a \le x \le b, a \le s \le x\}.$$

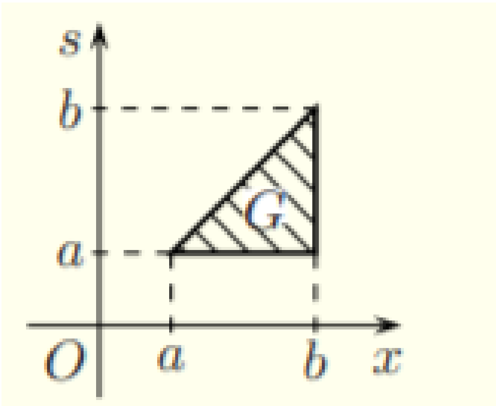

Рис. 2. Область визначення ядра рівняння (11) [3, с. 265]

Розв'язком інтегрального рівняння називають функцію з наперед заданого класу функцій, яка перетворює це рівняння в тотожність. [3, с. 265]

Лінійним інтегральним рівнянням називають інтегральне рівняння, в яке невідома функція входить лінійно.

Якщо шукана функція міститься тільки під знаком інтеграла, то відповідне рівняння називають інтегральним рівнянням першого роду. Наприклад:

$$\int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (12)$$

$$\int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (13)$$

Рівняння (10), (11), у яких шукана функція міститься також під знаком інтеграла називають інтегральними рівняннями другого роду. [1, с. 10]

Одним з найважливіших класів лінійних інтегральних рівнянь є інтегральні рівняння Фредгольма. Серед них виділяють рівняння Фредгольма першого роду (12) та рівняння Фредгольма другого роду (10).

Ще одним важливим класом лінійних інтегральних рівнянь є лінійні інтегральні рівняння Вольтери першого роду (13) та лінійні інтегральні рівняння Вольтери другого роду (11). [1, с. 11]

Нелінійним інтегральним рівнянням називають інтегральне рівняння, в яке функція входить нелінійно. Виділимо три найпоширеніші класи таких рівнянь:

$$\int_a^b K\big(x,s,y(s)\big)ds = f(x), \quad (14)$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b K\big(x,s,y(x)\big)ds + f(x) - \quad (15)$$

інтегральні рівняння Урисона першого (14) та другого (15) роду.

$$\int_a^b K(x,s)F\big(s,y(s)\big)ds = f(x), \quad (16)$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)F\big(s,y(s)\big)ds + f(x) - \quad (17)$$

інтегральні рівняння Гаммерштейна першого (16) та другого (17) роду.

$$\int_a^x K\big(x,s,y(s)\big)ds = f(x), a \le x \le b, \quad (18)$$

$$y(x)=\lambda\int\limits_{a}^{x}K\big(x,s,y(s)\big)ds+f(x), a\le x\le b- \quad (19)$$

нелінійні інтегральні рівняння Вольтери першого (18) та другого (19) роду. [1, с. 12]

1.3. Зв'язок інтегральних рівнянь з диференційними. Теорема єдиності розв'язку

Розв'язок лінійного диференційного рівняння

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_n(x)y=F(x) \quad (20)$$

з неперервними коефіцієнтами $a_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ при початкових умовах

$$y(0)=C_0, y'(0)=C_1,\dots,y^{(n-1)}(0)=C_{n-1} \quad (21)$$

може бути зведене до розв'язування деякого інтегрального рівняння Вольтери 2-го роду. [8, с. 11]

Покажемо це на прикладі диференційного рівняння 2-го порядку

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=F(x). \quad (22)$$

$$y(0)=C_0,\ \ y'(0)=C_1 \quad (23)$$

Припускаємо, що

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x). \qquad (24)$$

Звідси, взявши до уваги початкові умови (23), поступово знаходимо:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + C_1\,, \;\; y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + C_1 x + C_2. \quad (25)$$

При цьому ми використовували формулу

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} |(x)dx = \frac{1}{(n-1)|} \int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z)dz.$$

Враховуючи (24) і (25) , диференційне рівняння (20) запишемо так:

$$\varphi(x) + \int_y^x a_1(x)\varphi(t)dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt +$$

$$+C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x)$$

або

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\varphi(t)dt =$$

$$= F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x). \quad (26)$$

Вважаючи

$$K(x,t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)], \quad (27)$$

$$f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x) \quad (28)\ [8, \text{с.}\ 12]$$

приведемо (26) до вигляду

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + f(x), \quad (29)$$

тобто прийдемо до інтегрального рівняння Вольтери 2-го роду.

Існування єдиного розв’язку рівняння (27) слідує з існування і єдиності розв’язку задачі Коші (22) – (23) для лінійного диференційного рівняння з неперервним коефіцієнтом в околі точки $x=0$.

Навпаки, розв’язуючи інтегральне рівняння (29) з K і f, по відповідним формулам (27) і (28), та підставляючи вираз, отриманий для $\varphi(x)$, в останнє рівняння (25), ми отримаємо єдиний розв’язок рівняння (21), яке задовольняє початковим умовам (23). [8, с. 13]

Приклад. Скласти інтегральне рівняння, яке відповідає диференційному рівнянню

$$y'' + xy' + y = 0 \quad (1')$$

і початковим умовам

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (2')$$

Розв'язання. Покладемо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x). \qquad (3')$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + y'(0) = \int_0^x \varphi(t)dt\,, \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1. \quad (4')$$

Підставляючи $(3')$ та $(4')$ в дане диференційне рівняння, знаходимо

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 = 0$$

або

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x - t)\varphi(t)dt. \quad [5']$$

Деякі інтегральні рівняння Вольтерра першого та другого роду можна розв'язати методом диференціювання.

Розглянемо рівняння Вольтерра другого роду

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt$$

Продиференціюємо дане рівняння

$$y'(x) = f'(x) + \lambda \int_a^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} y(t)dt + K(x,x)y(x)$$

Застосувавши правило диференціювання інтеграла по параметру x (x - змінна за межами інтеграла).

У випадку виродженого ядра можна застосувати правило диференціювання добутку, якщо попередньо винести множник, що залежить тільки від x з під знаку інтеграла.

Виключивши невідомий інтеграл з двох рівнянь, даного і отриманого після диференціювання, отримаємо диференційне рівняння першого порядку. Якщо після першого диференціювання виключити інтеграл від невідомої функції не вдається можна спробувати здійснити виключення після n-кратного диференціювання.

Особливо ефективним даний метод є якщо після n-кратного диференціювання вдається похідну $\frac{\partial' K(x,t)}{\partial x'}$ виразити через ядро $K(x,t)$. Це легко вдається здійснити, наприклад, для наступних функцій:

$K(x,t) = e^{x \pm t}, K(x,t) = \sin(t), K(x,t) = \cos(t).$

Приклад. Знайти розв'язок рівняння Вольтерра другого роду

$$y(x) = e^x + \int_0^x y(t)dt.$$

Розв'язання. Продиференціюємо задане рівняння і отримаємо диференційне рівняння

$$y'(x) = e^x + y(x).$$

Це є лінійне неоднорідне диференційне рівняння першого порядку. Маємо

$$y'(x) - y(x) = e^x,$$

$$y(x) = e^x\left(C + \int e^x e^{-x} dx\right) = e^x(C + x).$$

При початковій умові $y(0) = 1$ знаходимо значення постійної *C:*

$$1 = e^0(C + 0), \ \ C = 1.$$

Отже, розв'язок інтегрального рівняння має вигляд

$$y(x) = (x + 1)e^x.$$

Приклад. Знайти розв'язок рівняння Вольтерра першого роду

$$\int_0^x e^{x+t} y(t)dt = x.$$

Розв'язання. Диференціюємо дане рівняння

$$e^x \int_0^x e^t y(t)dt + e^{2x} y(x) = 1$$

і замінив невідомий інтеграл його значенням з даного рівняння

$$\int_0^x e^x y(t)dt = xe^{-x}$$

знайдемо розв’язок інтегрального рівняння

$$y(x) = (1 - x)e^{-2x}.$$

Перейдемо до доведення однієї з найважливіших теорем теорії диференційних рівнянь, яка стверджує існування та єдиність розв’язку задачі Коші локально, поблизу початкової точки x_0. Розглянемо дві леми, які знадобляться для доведення теореми єдиності розв’язку.

Лема про еквівалентність. Розв’язок $y = \varphi(x)$ задачі Коші

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad f \in C(G), \quad (x_0, y_0) \in G,$$

визначене в деякому проміжку (α, β) , що містить точку x_0, є розв’язком інтегрального рівняння

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt$$

Навпаки, неперервний на (α, β) розв’язок інтегрального рівняння є розв’язком задачі Коші.

Лема Гронуолла. Нехай функція $u(x)$ невід’ємна і неперервна на проміжку $[x_0, x_0 + h]$ і задовільняє нерівність

$$u(x) \le A + B \int_{x_0}^{x} u(t)dt\,, \quad A \ge 0, \qquad B \ge 0$$

Тоді

$$u(x) \le Ae^{B(x - x_0)}, \qquad x \in [x_0, x_0 + h]$$

Теорема 1. Нехай функція *f(x, y)* визначена в прямокутнику

$$\Pi_{(x_0, y_0)}^{(a,b)} = \{(x, y); |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\} \equiv \Pi,$$

неперервна в П та задовольняє умові Ліпшица по змінній y. Тоді диференційне рівняння

$$y' = f(x, y) \qquad (30)$$

має єдиний розв’язок $y = \varphi(x)$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \quad (31)$$

і визначений в проміжку $[x_0 - h, x_0 + h]$, де

$$h = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, M = \max_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|.$$

Цей розв’язок єдиний в тій суті, що будь-який інший розв’язок $y = \psi(x)$ рівняння (30) , що задовольняє ті ж початкові умови

$$\psi(x_0) = y_0,$$

співпадає з $\varphi(x)$ в тому проміжку, де обидва розв’язки визначені одночасно.

Доведення. За лемою про еквівалентність замість задачі (30), (31) можна розглядати задачу знаходження інтегрального рівняння

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)dt.$$

Будемо шукати розв’язок останнього методом послідовних наближень. [9, с. 27]

Побудуємо послідовність функцій, визначених при

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_1(t)\big)dt,$$

… … … … … … … … … … … … … … … …

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)dt,$$

і так далі.

Впевнимося, що члени послідовності $\{y_n(x)\}$ не виходять при $|x - x_0| \leq$ $\leq h$ за межі прямокутника П (в протилежному випадку наші викладки не законні, оскільки функція *f(x,y)* визначена лише в множині П, а ми розглядаємо величину $f(t, y_n(t))$). Маємо оцінку

$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\, dt\right| \leq M|x - x_0|. \quad (32)$$

Звідси видно, що якщо $|x - x_0| \leq b/M$, то $|y_1(x) - y_0| \leq b$, тобто $y_1(x)$ не виходить за межі прямокутника П. Таким чином, зміннаx задовольняє умовам $|x - x_0| \leq a, |x - x_0| \leq b/M$, і якщо покласти $h = \min\{a, b/M\}$, то обидві умови будуть виконані при $|x - x_0| \leq h$. Будемо вважати нерівність $|x - x_0| \leq h$ виконаною. Користуючись нею, отримаємо

$$|y_2(x) - y_0| \leq \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_1(t)\big)dt\right| \leq M|x - x_0| \leq b,$$

… …

$$|y_n(x) - y_0| \leq \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)dt\right| \leq M|x - x_0| \leq b$$

… …

і, відповідно, в проміжку $|x - x_0| \leq h$ члени послідовності $\{y_n(x)\}$ не виходять за межі прямокутника П.

З подальшого буде видно, що зі збільшенням номера n послідовність функцій $y_n(x)$ наближається до розв'язку рівняння. Будемо називати ці функції послідовними наближеними до розв'язку.

Зауважимо, що в нерівності (32) можна було б використовувати замість M величину $M_0 \leq M$:

$$M_0 = \max_{|x-x_0| \leq a} |f(x, y_0)|. \text{ [9, с. 28]}$$

З'ясуємо геометричний зміст обмеження $|x - x_0| \leq h$, яке виникло при побудові послідовних наближень. Річ у тому, що оскільки $|f(x, y)| \leq M$, шукана інтегральна крива $y = \varphi(x)$, що проходить через точку (x_0, y_0), повинна знаходитися всередині кута, утвореного прямими

$$y - y_0 = \pm M(x - x_0). \qquad (33)$$

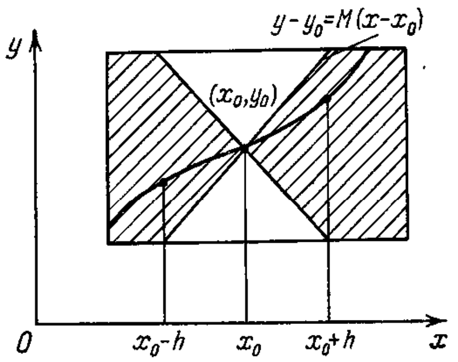

Рис. 3. Графік інтегральної кривої $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$ [9, с. 29]

(заштриховано на рис. 3). Якщо б вона перетинала одну з вказаних прямих, то в точці перетину мала б місце нерівність $|\varphi'(x)| > M$, що неможливо. При проектуванні на вісь Ox точок перетину прямих (33) зі сторонами прямокутника П визначають проміжок $[x_0 - h, x_0 + h]$, в якому розв'язок «напевно» визначений.

Питання про збіжність послідовності $\{y_n\}$ зведемо до розгляду збіжності ряду

$$y_0 + [y_1(x) - y_0] + [y_2(x) - y_1(x)] + \cdots = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[y_n(x) - y_{n-1}(x)]. \quad (34)$$

За умовою теореми функція $f(x, y)$ задовольняє в П умові Ліпшица по змінній y, тобто існує стала L така, що

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \bar{\bar{y}})| \leq L|\bar{y} - \bar{\bar{y}}|. \ (35)$$

З вище сказаного має місце оцінка

$$|y_1(x) - y_0| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_0|\, dt\right| \leq M_0|x - x_0|$$

(використання в даному місці постійної M_0 знадобиться пізніше).

За умовою Ліпшиця і в силу цієї оцінки отримаємо

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} \Big(f\big(t, y_1(t)\big) - f(t, y_0)\Big)\, dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} \left|f\big(t, y_1(t)\big) - f(t, y_0)\right|\, dt\right| \leq L\left|\int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_0|\, dt\right| \leq$$

$$\leq LM_0 \int_{x_0}^{x} |t - x_0|\, dt = LM_0 \frac{|x - x_0|^2}{2!}. \ [9, \text{с.} 29]$$

Міркуючи за індукцією, припустимо, що

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq L^{n-1} M_0 \frac{|x - x_0|^n}{n!}, \quad (36)$$

і перевіримо, що цей закон залишається вірним при переході від n до $n+1$. Маємо

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \Big(f\big(t, y_n(t)\big) - f\big(t, y_{n-1}(t)\big) \Big) dt \right| \le$$

$$\le L \left| \int_{x_0}^{x} |y_n(t) - y_{n-1}(t) dt \right| \le L \frac{L^{n-1} M_0}{n!} \left| \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^n dt \right| =$$

$$= M_0 L^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Таким чином, обґрунтована оцінка (36) загального члену ряду (34). З неї слідує рівномірна збіжність ряду (34) до своєї суми, яку позначимо через $\varphi(x)$, при $|x - x_0| \le h$. Насправді, члени ряду (34) за абсолютною величиною не перевершують членів збіжного числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} L^{n-1} M_0 \frac{h^n}{n!}$$

і, отже, виконана мажорантна ознака Ваєрштрасса рівномірної збіжності ряду (34). Оскільки n-та частинна сума ряду (34) співпадає з $y_n(x)$, то маємо рівномірну збіжність

$$y_n(x) \rightrightarrows \varphi(x), \quad |x - x_0| \le h.$$

А оскільки функції $y_n(x)$ неперервні, то і гранична функція $\varphi(x)$ також неперервна.

Ми довели, що послідовність $\{y_n(x)\}$ збігається рівномірно до неперервної функції $\varphi(x)$ в проміжку $|x - x_0| \le h$. Нижче буде показана оцінка швидкості збіжності, тобто оцінка різниці $|\varphi(x) - y_n(x)|$. Спочатку доведемо, що функція $\varphi(x)$ являє собою шуканий розв’язок. Достатньо впевнитися, що граничний перехід при $n \to \infty$ в рівності

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt \qquad (37)$$

приводить до рівності

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt \qquad (38)$$

(тобто обґрунтувати граничний перехід під знаком інтеграла). [9, с. 30]

Законність такого переходу слідує з оцінки

$$\left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t)dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left|f\big(t, \varphi(t)\big) - f\big(t, y_n(t)\big)\right|dt\right| \leq$$

$$\leq L\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi(t) - y_n(t)|dt\right|.$$

Нерівність (35) в даному випадку може бути застосованою; очевидно, що точка $(x, \varphi(x))$ не виходить за межі прямокутника П при $|x - x_0| \leq h$

В силу рівномірної збіжності послідовності функцій y_n до функції φ можна вибрати номер N так, що при $n > N$ $|\varphi(t) - y_n(t)| \leq \varepsilon/(Lh)$ (таким чином, величина оцінки не перевищить ε). Звідси слідує, що при $n \to \infty$ з (37) отримаємо (38).

Припустимо, що задача Коші (30) і (31) має ще один розв’язок $\psi(x)$, тоді

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \psi(t)\big)dt \qquad (39)$$

і в загальній області визначення обох розв’язків діє оцінка

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt - \int_{x_0}^{x} f\big(t, \psi(t)\big)dt\right| \leq L\int_{x_0}^{x} |\varphi(t) - \psi(t)|dt.$$

За лемою Гронуолла отримаємо $|\varphi(x) - \psi(x)| \equiv 0$, тобто $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. Отже розв'язок $\varphi(x)$ єдиний.

Теорема доведена.▲ [9, с. 31]

РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ТЕОРІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Методи розв’язування інтегральних рівнянь

В даній роботі ми розглянемо декілька методів для розв’язування рівнянь Фредгольма і Вольтери та покажемо застосування цих методів на прикладі.

Метод послідовних наближень для рівнянь Фредгольма

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння Фредгольма дгугого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x) \quad (40)$$

Припустимо, що ядро $K(x,s)$ неперервне у квадраті $Q = [a,b;a,b]$, причому $|K(x,s)| \le M$, а функція $f(x)$ неперервна на відрізку [a,b].

Визначимо відображення

$$Ay(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x) \qquad (41)$$

Оскільки ядро $K(x,s)$ неперервне, то для кожної неперервної на відрізку [a,b] функції $y(x)$ відображення (41) також буде неперервною функцією, тобто $A: C[a,b] \to C[a,b]$. Внаслідок принципу стискаючих відображень для існування та єдиності нерухомої точки відображення (41) у просторі $C[a,b]$ достатньо, щоб воно було стискаючим.

Встановимо умову стискання відображення (41). Оскільки для всіх $x \in [a,b]$

$$|A\bar{y}(x) - A\bar{\bar{y}}(x)| = \left|\lambda \int_a^b K(x,s)\bar{y}(s)ds + f(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\bar{\bar{y}}(s)ds - f(x)\right| \le$$

$$\le |\lambda| \int_a^b |K(x,s)| \cdot |\bar{y}(s) - \bar{\bar{y}}(s)|ds \le |\lambda| \int_a^b M\rho(\bar{y},\bar{\bar{y}})ds =$$

$$= |\lambda| M(b-a)\rho(\bar{y},\bar{\bar{y}}) \ \ [1, \text{с.} \, 71]$$

то

$$\rho(A\bar{y}, A\bar{\bar{y}}) \le |\lambda| M(b-a)\rho(\bar{y},\bar{\bar{y}})$$

Отже, відображення (41) буде стискаючим, якщо

$$|\lambda| M(b-a) < 1 \qquad (42)$$

За виконання умови (42) інтегральне рівняння (40) матиме єдиний розв'язок у просторі $C[a,b]$. Знайти його можна **методом послідовних наближень**. Для цього потрібно:

1) Вибрати довільну неперервну на відрізку $[a,b]$ функцію $y_0(x)$. Зокрема, доцільно взяти $y_0(x0 = f(x)$.
2) Знайти послідовні наближення за формулами

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_{n-1}(s) ds + f(x), \;\; n \in N$$

3) Знайти розв'язок $y(x)$ рівняння (40), здійснивши граничний перехід за формулою $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$

Оскільки у просторі $C[a,b]$ збіжність є рівномірною, то послідовність $y_n(x)$ збігається до розв'язку $y(x)$ рівномірно. [1, с. 72]

Метод ітерованих ядер для рівняння Фредгольма [3, с. 55]

Розглянемо рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s) ds + f(x), \qquad (43)$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $a \le x \le b$, а ядро $K(x,s)$ неперервне в квадраті $Q = \{(x,s): a \le x \le b, a \le s \le b\}$, $|K(x,s)| \le M$

Запишемо рівняння (43) в операторному вигляді

$$(I - \lambda A) y = f \qquad (44)$$

де $Ay(x) = \int_a^b K(x,s) y(s) ds$ є інтегральним оператором Фредгольма у просторі $C[a,b]$.

Якщо

$$|\lambda| M(b-a) < 1 \quad (45)$$

то $|\lambda| \cdot \left||A|\right| < 1$ і, отже, існує оператор

$$(I - \lambda A)^{-1} = I + \lambda A + \cdots + \lambda^n A^n + \cdots,$$

тобто розв'язком операторного рівняння (44) є

$$y = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda A + \cdots + \lambda^n A^n + \cdots) f$$

Тому розв'язком інтегрального рівняння (43) є функція

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,s) f(s) ds + \cdots + \lambda^n \int_a^b K_n(x,s) f(s) ds + \cdots =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b (K_1(x,s) + \lambda K_2(x,s) + \cdots + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \cdots) f(x) ds$$

Правильність останньої рівності випливає з того, що ряд у дужках за умови (45) збігається рівномірно. Справді, оскільки

$$|K_1(x,s)| = |K(x,s)| \le M,$$

$$|K_2(x,s)| = \left| \int_a^b K(x,t) K_1(t,s) dt \right| \le M^2 (b-a), \ldots$$

$$|K_n(x,s)| = \left| \int_a^b K(x,t) K_{n-1}(t,s) dt \right| \le M^n (b-a)^{n-1},$$

$$|\lambda^{n-1} K_n(x,s) \le |\lambda|^{n-1} M^n (b-a)^{n-1}$$

і за ознакою Д'Аламбера при $|\lambda| M(b-a) < 1$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{n-1} M^n (b-1)^{n-1}$ є збіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s)$ рівномірно збіжний.

Якщо позначити

$$R(x,s;\lambda) = K_1(x,s) + \lambda K_2(x,s) + \cdots + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \cdots,$$

то розв'язок $y(x)$ рівняння (43) можемо записати як

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) f(s) ds + f(x) \quad (46)$$

Функцію $R(x,s;\lambda)$ називають **резольвентою**, а наведений спосіб розв'язування інтегральних рівнянь – **методом ітерованих ядер**.

Приклад. Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма

$$y(x) = \int_0^1 xs^2 y(x)ds + x^2$$

$$\lambda = 1, K(x,s) = xs^2, a = 0, b = 1, f(x) = x^2,$$

$$M = \max_{x,s\in[0,1]} |xs^2| = 1.$$

Розв'язання.

1. Метод послідовних наближень

Ядро $K(x,s) = xs^2$ неперервне в у квадраті $0 \leq x \leq 1, 0 \leq s \leq 1$, причому $M = 1$. Розв'язок заданого рівняння можна знайти методом послідовних наближень.

Нехай початкове наближення

$$y_0(x) = f(x) = x^2.$$

Далі послідовно одержуємо

$$y_1(x) = \int_0^1 xs^2 s^2 ds + x^2 = x\int_0^1 s^4 ds + x^2 = \frac{1}{5}x + x^2,$$

$$y_2(x) = \int_0^1 xs^2\left(\frac{1}{5}s + s^2\right)ds + x^2 = \left(\frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5}\right)x + x^2,$$

$$y_3(x) = \int_0^1 xs^2\left(\left(\frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5}\right)s + s^2\right)ds + x^2 = \left(\frac{1}{4^2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 4} + \frac{1}{5}\right)x + x^2.$$

За допомогою методу математичної індукції можна встановити, що

$$y_n(x) = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right)x + x^2.$$

Отже,

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right)x + x^2$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{x}{1 - \frac{1}{4}} + x^2 = \frac{4}{15}x + x^2.$$

2. Метод ітерованих ядер

Послідовно знаходимо

$$K_1(x,s) = K(x,s) = xs^2,$$

$$K_2(x,s) = \int_0^1 xt^2 \cdot ts^2 dt = \frac{1}{4}xs^2,$$

$$K_3(x,s) = \int_0^1 xt^2 \cdot \frac{1}{4}ts^2 dt = \left(\frac{1}{4}\right)^2 xs^2, \dots,$$

$$K_n(x,s) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} xs^2.$$

Отже, резольвентою рівняння є функція

$$R(x,s,\lambda) = xs^2 + \frac{1}{4}xs^2 + (\frac{1}{4})^2 xs^2 + (\frac{1}{4})^3 xs^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} xs^2 + \cdots$$

$$= \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \cdots\right) xs^2 = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} xs^2 =$$

$$= \frac{4}{3}xs^2$$

Розв’язок рівняння знаходимо за формулою (46):

$$y(x) = \int_0^1 \frac{4}{3}xs^2 \cdot s^2 ds + x^2 = \frac{4}{3}x \cdot \frac{1}{5} + x^2 = \frac{4}{15}x + x^2.$$

Для рівнянь Фредгольма з виродженим ядром були доведені три фундаментальні теореми щодо розв’язку таких рівнянь. Ідея Фредгольма полягає у наступному. Задача розв’язання інтегрального рівняння Фредгольма розглядається як аналітичний аналог алгебраїчної проблеми розв’язання системи n лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими.

Неоднорідне лінійне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x) \qquad (47)$$

з виродженим ядром можна записати як

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \int_a^b b_i(s)\, y(s) ds + f(x). \quad (48)$$

Перша теорема Фредгольма. Якщо число λ не є характеристичним, то лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має єдиний розв'язок для довільної інтегровної з квадратом на відрізку $[a,b]$ функції *f(x)*.

Оскільки при цьому відповідне рівнянню (47) однорідне рівняння має тривіальний розв'язок, то теорему часто формулюють інакше:

Для того, щоб лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром мало єдиний розв'язок для довільної інтегровної з квадратом на відрізку [a,b] функції f(x), необхідно і достатньо, щоб відповідне рівняння мало тільки тривіальний розв'язок.

Розглянемо виконання даної теореми на прикладі.

Приклад [1]**.** Розв'язати рівняння

$$y(x) = \int_0^{-1} xs^2 y(s) ds + x^2.$$

Розв'язання. Маємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром, у якому $\lambda = 1$, $K(x,s) = xs^2$, $m = 1$, $a_1 = x$, $b_1 = s^2$, $f(x) = x^2$. Його розв'язок шукаємо у вигляді

$$y(x) = C_1 x + x^2.$$

Підставляючи його у задане рівняння, отримуємо тотожність

$$C_1 x + x^2 \equiv \int_0^1 xs^2 (C_1 s + s^2) ds + x^2,$$

Після виконання спрощень знаходимо значення сталої: $\mathrm{C}_1 = \frac{4}{15}$.

Отже, розв'язком є функція

$$y(x) = \frac{4}{15} x + x^2.$$

Друга теорема Фредгольма. Лінійне однорідне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром і спряжене до нього однорідне рівняння мають однакову кількість лінійно незалежних розв'язків. [3, с. 45]

Третя теорема Фредгольма. Неоднорідне лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має розв'язок тоді і тільки тоді, коли його вільний член ортогональний до всіх розв'язків відповідного спряженого однорідного рівняння. [2, с. 69]

Приклад. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x - s)\, y(s) ds + x.$$

Розв'язання. Оскільки $\sin(x - s) = sinxcos\, s - sinscosx,$ то маємо інтегральне рівняння з виродженим ядром. Тоді

$$y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} sinxcos\, s \cdot y(s) ds - \lambda \int_0^{2\pi} sinscosx \cdot y(s) ds + x =$$

$$= \lambda p_1 sinx - \lambda p_2 cosx + x, (44)$$

де

$$p_1 = \int_0^{2\pi} \cos s \cdot y(s) ds, \quad p_2 = \int_0^{2\pi} sins \cdot y(x) ds. \quad (49)$$

Підставляючи функцію $y(x)$, визначену формулою (48) у (49), та обчисливши інтеграли, отримаємо систему відносно p_1 і p_2:

$$p_1 = \int_0^{2\pi} \cos s\, (\lambda p_1 sins - \lambda p_2 \cos s + s) ds =$$

$$= \lambda p_1 \int_0^{2\pi} \cos s\, sinsds - \lambda p_2 \int_0^{2\pi} cos^2 sds + \int_0^{2\pi} s \cos s\, ds = -\lambda p_2 \pi;$$

$$p_2 = \int_0^{2\pi} sins(\lambda p_1 sins - \lambda p_2 cos\, s + s)ds =$$

$$= \lambda p_1 \int_0^{2\pi} sin^2 sds - \lambda p_2 \int_0^{2\pi} sinscos\, sds + \int_0^{2\pi} s\, sin\, s\, ds = \lambda p_1 \pi - 2\pi.$$

Отже,

$$\begin{cases} p_1 + \lambda\pi p_2 = 0 \\ -\lambda\pi p_1 + p_2 = -2\pi \end{cases}$$

Визначником цієї системи є $D(\lambda) = (\lambda\pi)^2 + 1$. Оскільки $D(\lambda) \neq 0$ для всіх дійсних λ, то неоднорідна система має єдиний розв’язок:

$$p_1 = \frac{2\pi^2\lambda}{(\lambda\pi)^2 + 1}, \qquad p_2 = -\frac{2\pi}{(\lambda\pi)^2 + 1}.$$

Тоді з (44) знаходимо розв’язок даного рівняння

$$y(x) = \frac{2\pi^2\lambda^2}{(\lambda\pi)^2 + 1} sinx + \frac{2\pi\lambda}{(\lambda\pi)^2 + 1} cosx + x.$$

Теорема (Альтернатива Фредгольма). Якщо лінійне однорідне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має лише тривіальний розв’язок, то відповідне неоднорідне рівняння завжди має єдиний розв’язок. Якщо лінійне однорідне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має нетривіальний розв’язок, то відповідне неоднорідне рівняння залежно від вільного члена або не має розв’язку, або має нескінченну кількість розв’язків.

Перша теорема дає нам необхідну та достатню умову для існування єдиного розв’язку рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром.

Друга теорема показує, що

Третя теорема дає нам необхідну та достатню умову для існування розв’язку неоднорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Метод послідовних наближень для рівнянь Вольтерра

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x) \qquad (50)$$

і припустимо, що функція *f(x)* є неперервною на відрізку $[a,\ b]$, а ядро *K(x,s)* – неперервне в трикутнику $\Delta = \{(x,s): a \le s \le x \le b\}$ і $|K(x,s)| \le M.$

Визначимо в просторі C[a, b] відображення

$$Ay(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x). \qquad (51)$$

За властивістю інтегралів зі змінною верхньою межею при накладених умовах функція *Ay(x)* є неперервною на відрізку $[a,\ b]$. Тому $A\colon C[a,b] \to C[a,b]$, при чому з нерівності

$$|Ay(x) - Ay_0(x)| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x,s)\big(y(s) - y_0(s)\big)ds \right| \le |\lambda| M\rho(y,y_0)(x-a) \le$$

$$\le |\lambda| M(b-a)\rho(y,y_0), \ \ x \in [a,b],$$

випливає неперервність відображення (51).

Покажемо, що деякий степінь відображення є стискаючим відображенням. Справді,

$$|A\bar{y}(x) - A\bar{\bar{y}}(x)| \le |\lambda| M(x-a)\rho(\bar{y},\bar{\bar{y}}),$$

$$|A^2\bar{y}(x) - A^2\bar{\bar{y}}(x)| = \left|A\big(A\bar{y}(x)\big) - A\big(A\bar{\bar{y}}(x)\big)\right| =$$

$$= |\lambda| \left| \int_a^x K(x,s)\big(A\bar{y}(s) - A\bar{\bar{y}}(s)\big)ds \right| \le |\lambda| M \int_a^x |\lambda| M(s-a)\rho(\bar{y},\bar{\bar{y}})ds$$

$$= |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \rho(\bar{y},\bar{\bar{y}}),$$

… …

$$|A^n\bar{y}(x) - A^n\bar{\bar{y}}(x)| \le |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} \rho(\bar{y},\bar{\bar{y}}), \ \ x \in [a,b].$$

Звідси

$$\rho(A^n\bar{y}, A^n\bar{\bar{y}}) \leq \alpha_n \rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}),$$

де

$$\alpha_n = |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Оскільки за ознакою Д'аламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ збіжний для всіх λ, то $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ для кожного λ. Отже, для кожного λ знайдеться номер n, для якого $\alpha_n < 1$; при цьому відображення A^n буде стискаючим.

З доведеного та повноти простору C$[a,\ b]$ випливає, що для всіх λ відображення A має єдину нерухому точку. Відповідно, лінійне інтегральне рівняння Вольтерра (50) з неперервним ядром і неперервним вільним членом для кожного λ має у просторі C$[a,\ b]$ єдиний розв'язок. Знайти його можна за допомогою **методу послідовних наближень**:

1. Вибираємо довільну неперервну на відрізку $[a,\ b]$ функцію $y_0(x)$. Зокрема, доцільно взяти $y_0(x) = f(x)$.
2. Шукаємо послідовні наближення за формулами

$$y_n(x) = \int_a^x K(x,s) y_{n-1}(s) ds + f(x), \ \ n \in N.$$

3. Шукаємо розв'язок $y(x)$ рівняння (46) за формулою

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x).$$

При цьому послідовність $y_n(x)$ збігається до $y(x)$ рівномірно.

Зауважимо, що аналогічно можна встановити існування єдиність розв'язку рівняння (41) для кожного λ і у просторі $L_2[a,b]$.

Приклад. Розв'язати методом послідовних наближень лінійне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$y(x) = \int_0^x (x-s)y(s)ds + 1.$$

Розв'язання. Нехай $y_0(x) = f(x) = 1$. Тоді

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (x-s)ds = 1 + x^2 - \frac{x^2}{2} = 1 + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (x-s)\left(1 + \frac{s^2}{2}\right)ds = 1 + x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{8} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Доведемо методом математичної індукції, що

$$y_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Для n=1 ця рівність правильна. Припустивши її правильність для всіх $n \le k$, для $n = k + 1$ отримуємо

$$y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x (x-s)y_k(s)ds =$$

$$= 1 + \int_0^x (x-s)\left(\left(1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \cdots + \frac{s^{2(k-1)}}{\big(2(k-1)\big)!}\right) + \frac{s^{2k}}{(2k)!}\right)ds =$$

$$= 1 + \int_0^x (x-s)\left(y_{n-1}(s) + \frac{s^{2k}}{(2k)!}\right)ds =$$

$$= y_k(x) + \int_0^x (x-s)\frac{s^{2k}}{(2k)!}ds =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2(k+1)}}{\big(2(k+1)\big)!}.$$

Таким чином, остаточно одержуємо розв'язок

$$y(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) = chx.$$

Метод ітерованих ядер для рівняння Вольтерра

Аналогічно, як і для рівнянь Фредгольма другого роду, можна отримати розв'язок рівняння Вольтерра другого роду

$$y(x) = \lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x),\ \ x \in [a,b], \quad (52)$$

у вигляді

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_a^x R(x,s;\lambda)f(s)ds. \qquad (53)$$

Обґрунтуємо, що при цьому ряд

$$R(x,s;\lambda) = K_1(x,s) + \lambda K_2(x,s) + \cdots + \lambda^{n-1}K_n(x,s) + \cdots$$

для кожного значення λ є рівномірно збіжним у трикутнику

$$\Delta = \{(x,s)\colon a \le s \le x \le b\}.$$

Для ядер $K_1(x,s), K_2(x,s), K_3(x,s)$ маємо оцінки

$$|K_1(x,s)| = |K(x,s)| \le M,$$

$$|K_2(x,s)| = \left|\int_s^x K(x,s)K_1(t,s)dt\right| \le M^2(x-s),$$

$$|K_3(x,s)| = \left|\int_s^x K(x,t)K_2(t,s)dt\right| \le \int_s^x (t-s)dt \le M^3\frac{(x-s)^2}{2}.$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо нерівність

$$|K_n(x,s) \le M^n\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!},$$

яку можна довести за допомогою методу математичної індукції.

Звідси випливає, що

$$|\lambda^{n-1}K_n(x,s) \leq |\lambda|^{n-1}M^n\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} = c_n.$$

Оскільки з ознакою Д'Аламбера числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ є збіжним, то за ознакою Вайєрштраса ряд для резольвенти $R(x, s, \lambda)$ для кожного λ збігається рівномірно.

Приклад. Розв'язати методом ітерованих ядер рівняння

$$y(x) = \int_0^x (x-s)y(s)ds + 4e^x. \qquad (54)$$

Розв'язання. Послідовно знаходимо ітеровані ядра:

$$K_1(x,s) = K(x,s) = x - s,$$

$$K_2(x,s) = \int_s^x (x-t)(t-s)dt = \int_s^x \big((x-s)+(s-t)\big)(t-s)dt =$$

$$= (x-s)\int_s^x (t-s)dt - \int_s^x (t-s)^2 ds =$$

$$= (x-s)\frac{(t-s)^2}{2}|_s^x - \frac{(t-s)^3}{3}|_s^x = \frac{(x-s)^3}{2} - \frac{(x-s)^3}{3} = \frac{(x-s)^3}{3!},$$

$$K_n(x,s) = \frac{(x-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Обґрунтуємо останню рівність за допомогою методу математичної індукції. Для n =1 вона правильна. Припускаючи її виконання для n=k, для n=k+1 отримуємо

$$K_{k+1}(x,s)=\int_s^x (x-t)\frac{(t-s)^{2k-1}}{(2k-1)!}dt=\int_s^x \big((x-s)+(s-t)\big)\frac{(t-s)^{2k+1}}{(2k-1)!}dt=$$

$$=\frac{(x-s)}{(2k-1)!}\cdot\frac{(x-s)^{2k}}{2k}-\frac{(x-s)^{2k+1}}{(2k+1)(2k-1)!}=\frac{(x-s)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

звідси випливає правильність потрібної рівності для всіх $n\in N$.

Тепер знайдемо резольвенту рівняння (52):

$$R(x,s;\lambda)=R(x,s;1)=(x-s)+\frac{(x-s)^3}{3!}+\cdots+\frac{(x-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=sh(x-s)$$

Отже,

$$y(x)=\int_0^x sh(x-s)\cdot 4e^s ds+4e^x=2e^x\int_0^x ds-2e^{-x}\int_0^x e^{2s}ds+4e^x=$$

$$=2e^x\cdot x-e^{-x}(e^{2x}-1)+4e^x=(2x+3)e^x+e^{-x}.\ [1]$$

Метод операційного числення для рівнянь Вольтерра

Інтегральне рівняння Вольтерра 1-го роду

$$\int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt=f(x) \qquad (54)$$

у якого ядро $K(x, t)$ залежить лише від різниці аргументів x-t називають інтегральним рівнянням 1-го роду типу згортки.

Розглянемо задачу, що приводить до інтегрального рівняння типу згортки.

Магазин купляє та продає різні товари. Передбачається, що:

1) купівля та продаж неперервні процеси і придбані товари одразу надходять на продаж;

2) магазин придбає кожну нову партію будь-якого товару в такій кількості, яку він може продати за проміжок часу *T*, однаковий для всіх покупок;

3) кожна нова партія товару розпродається рівномірно в проміжку часу *T*.

Магазин розпочинає продажу нової партії товару, загальна вартість якого рівня одиниці. Потрібно знайти такий закон $\varphi(t)$, за яким він повинен робити покупки, для того щоб вартість наявного товару залишалася сталою.

Розв'язання. Нехай вартість початкового товару, що залишився до моменту *t*, рівна *K(t)*, де

$$K(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{T}, & t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

Припустимо, що в проміжок часу від τ до $\tau + d\tau$ купляється товарів на суму $\varphi(\tau)$. Цей запас зменшується внаслідок продажу таким чином, що вартість залишку моменту рівна . Тому вартість не проданої частини товару, придбаних шляхом купівлі, буде до будь-якого моменту *t* дорівнювати

$$\int_0^t K(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Таким чином, $\varphi(t)$ повинна задовольняти інтегральному рівнянню

$$1 - K(t) = \int_0^t K(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Ми отримаємо інтегральне рівняння Вольтерра 1-го роду типу згортки.

Нехай $f(x)$ і $K(x)$ – функції-огригінали, і нехай

$$f(x) \risingdotseq F(\rho), \quad K(x) \risingdotseq \widetilde{K}(\rho), \quad \varphi(x) \risingdotseq \Phi(\rho).$$

Застосовуючи до обох частин рівняння (54) перетворення Лапласа і використовуючи теорему про згортку, будемо мати

$$\widetilde{K}(\rho)\cdot\Phi(\rho)=F(\rho). \qquad (55)$$

Звідси

$$\Phi(\rho)=\frac{F(\rho)}{\widetilde{K}(\rho)} \qquad \left(\widetilde{K}(\rho)\neq 0\right). \qquad (56)$$

Оригінал $\varphi(x)$ для функції $\Phi(\rho)$ що визначається рівністю (56) буде розв'язком інтегрального рівняння (54) [12, с. 58]

Приклад. Розв'язати інтегральне рівняння методом операційного числення

$$\int_0^x e^{x-s}y(s)ds=\sin x. \qquad (57)$$

Розв'язання. З рівняння у зображеннях

$$\frac{1}{\rho-1}\Phi(\rho)=\frac{1}{\rho^2+1}$$

знаходимо

$$\Phi(\rho)=\frac{\rho-1}{p^2+1}=\frac{\rho}{\rho^2+1}-\frac{1}{\rho^2+1},$$

а отже, $y(x)=\cos x-\sin x$.

2.2. Розробка курсу «Інтегральні рівняння» для студентів фізико-метематичних факультетів педагогічних університетів

Фундаментальна математична підготовка забезпечує майбутньому вчителю математики дієві математичні знання, які далеко виходять за межі шкільного курсу математики, але є універсальними для володіння різними математичними навчальними предметами в школі, причому ця фундаментальність не є метою, а засобом підготовки вчителя, і тому повинна бути узгодженою з потребами обраної професії. І тому в педагогічному університеті особлива роль повинна відводитись вивченню математичних структур, найбільш важливих з точки зору професійної спрямованості.[1]

Теорія інтегральних рівнянь була і залишається однією з центральних областей математики. До сьогодення найбільш повні результати отримані з розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтера 1-го та 2-го родів. Досліджувані рівняння точно розв'язуються лише в дуже рідких випадках, тому розробка теоретично обгрунтованих ефективних методів їх наближеного розв'язку в просторі узагальнених функцій є актуальною задачею.

На фізико-математичному факультеті педагогічних університетів дисципліна «Інтегральні рівняння» може вивчатися як вибіркова дисципліна для студентів 1 року навчання ступеня Магістр. Інтегральні рівняння виникли в слід за диференціальними рівняннями в результаті спроб знайти розв'язок останніх, тому вони також можуть входити як окремий розділ в курс диференційних рівнянь. Цей курс призначений для початкового ознайомлення майбутніх учителів математики з основними положеннями теорії інтегральних рівнянь, методами їх розв'язування, використання в різноманітних задачах математики та фізики.

1. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета: систематичне викладання теорії інтегральних рівнянь; придбання студентами професійних компетентностей в області теорії інтегральних рівнянь для формування здібностей використання набутих знань в професійній діяльності і створення математичних моделей професійних задач.

Завдання навчальної дисципліни:

- розуміння теорії інтегральних рівнянь, їх сутність і місце в системі формування математичних моделей методів моделювання фізичних систем;

- вивчення наукових фізичних задач, що приводять до методів теорії інтегральних рівнянь;
- володіння отриманими знаннями і застосування їх при розв’язуванні задач теорії інтегральних рівнянь;
- формування у студентів навичок до аналізу математичних проблем і фізичних процесів в своїй професійній діяльності.

Вивчення даної дисципліни передбачає формування у студентів таких вмінь та навичок:

- засвоєння основних методів розв’язування практичних задач з тем дисципліни;
- засвоєння основних методів розв’язування практичних задач дисципліни

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

- знати: методи розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтера першого і другого роду; основні теореми існування та єдиності розв’язку інтегральних рівнянь; задачі, що приводять до поняття «інтегральне рівняння»;
- вміти: розрізняти види інтегральних рівнянь, розв’язувати найпростіші інтегральні рівняння.

В результаті вивчення дисципліни «Інтегральні рівняння» повинні формуватися такі математичні компетенції:

- здатність використовувати в професійній діяльності базові знання фундаментальних розділів математики,
- здатність створювати математичні моделі типових професійних задач, інтерпретувати отримані результати з врахуванням границь застосування моделей;
- здатність використовувати сучасні методи обробки, аналізу і синтезу інформації в обраній області досліджень.

2. Опис навчальної дисципліни (таблиця 1)

Таблиця 1

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень</td><td>Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>Денна форма навчання</td></tr>
<tr><td>Кількість кредитів
2,3</td><td rowspan="8">Галузь знань:
0402 Фізико-математичні науки

Напрям підготовки:
6.040201 – «Математика»

Спеціальність:
014 Середня освіта (Математика)

Ступінь вищої освіти:
Магістр</td><td>Вибіркова</td></tr>
<tr><td>Модулів
2</td><td>Рік підготовки
1 рік</td></tr>
<tr><td>Зміст модулів
2</td><td>2 семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Загальний обсяг
81 год

Кількість аудиторних занять 30 год</td><td>Лекції
14 год</td></tr>
<tr><td>Практичні заняття
16 год</td></tr>
<tr><td>Самостійна робота
51 год</td></tr>
<tr><td>Індивідуальне науково-дослідне завдання
комплексне практичне завдання</td></tr>
<tr><td>Вид підсумкового контролю
залік</td></tr>
</table>

3. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Інтегральні рівняння Фредгольма

Тема 1. *Задачі, що приводять до поняття «інтегральне рівняння».* Задача Абеля, задача Фур'є, задача Коші.

Тема 2. *Класифікація лінійних інтегральних рівнянь.*

Інтегральні рівняння Фредгольма 1-го та 2-го роду. Інтегральні рівняння Вольтерра 1-го та 2-го роду.

Тема 3. *Інтегральні рівняння Фредгольма 2-го роду.*

Метод послідовних наближень. Метод ітерованих ядер для знаходження резольвенти і розв'зування інтегральних рівнянь.

Тема 4. *Альтернатива Фредгольма.*

Теореми Фредгольма.

Змістовий модуль 2. Інтегральні рівняння Вольтерра

Тема 5. *Інтегральне рівняння Вольтерра 2-го роду*

Метод послідовних наближень. Метод ітерованих ядер для розв'язування інтегральних рівнянь.

Тема 6. *Зв'язок рівнянь Вольтерра з диференціальними рівняннями.*

Зведення задачі Коші до еквівалентного інтегрального рівняння.

Тема 7. *Рівняння Вольтерра 1-го роду типу згортки.*

Застосування перетворення Лапласа до рівняння Вольтерра 1-го роду.

4. **Теми лекційних занять** (таблиця 2)

Таблиця 2

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	***Тема 1.*** *Задачі, що приводять до поняття «інтегральне рівняння».*	2
2.	***Тема 2.*** *Класифікація лінійних інтегральних рівнянь.*	2
3.	***Тема 3.*** *Інтегральні рівняння Фредгольма 2-го роду.*	2
4.	***Тема 4.*** *Альтернатива Фредгольма.*	2
5.	***Тема 5.*** *Інтегральне рівняння Вольтерра 2-го роду*	2

6.	***Тема 6.*** *Зв'язок рівнянь Вольтерра з диференціальними рівняннями*	2
7.	***Тема 7.*** *Рівняння Вольтерра 1-роду типу згортки.*	2
	Разом	**14**

5. **Теми практичних занять** (таблиця 3)

Таблиця 3

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	***Тема 1.*** *Задачі, що приводять до поняття «інтегральне рівняння».*	-
2.	***Тема 2.*** *Класифікація лінійних інтегральних рівнянь.*	2
3.	***Тема 3.*** *Інтегральні рівняння Фредгольма 2-го роду.*	4
4.	***Тема 4.*** *Альтернатива Фредгольма.*	2
5.	***Тема 5.*** *Інтегральне рівняння Вольтерра 2-го роду*	4
6.	***Тема 6.*** *Зв'язок рівнянь Вольтерра з диференціальними рівняннями*	2
7.	***Тема 7.*** *Рівняння Вольтерра 1-роду типу згортки.*	2
	Разом	**16**

Завдання для практичних занять

Тема 2. Класифікація лінійних інтегральних рівнянь

Класифікувати наступні рівняння

$$1)\quad y(x) = 1 + x\int_0^2 \frac{y(t)}{x^2 + t^2 + y(t)}\,dt$$

Дане інтегральне рівняння є інтегральним рівнянням Фредгольма 2-го роду (за означенням інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду)

$$2)\quad y(x) = e^x - 1 + \int_0^x \frac{\sin y(t)}{1 + x^2 + t^2 + y^2(t)} dt$$

Дане інтегральне рівняння є інтегральним рівнянням Вольтерра 2-го роду (за означенням інтегрального рівняння Вольтерра 2-го роду)

$$3)\quad \int_0^2 \frac{y(t)}{1 + x^2 + ty^4(x)} = \cos x^2 - 1$$

Дане інтегральне рівняння є інтегральним рівняння Фредгольма 1-го роду (за означенням інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду)

$$4)\quad \int_0^x \frac{\cos y(t)\, dt}{e^{x+1} y^4(t)} = \frac{1}{1 + x^2} - 1$$

Дане інтегральне рівняння є інтегральним рівнянням Вольтерра 1-го роду (за означенням інтегрального рівняння Вольтерра 1-го роду)

Тема 3. Інтегральні рівняння Фредгольма 2-го роду

Метод послідовних наближень

$$1)\quad y(x) = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t\, y(t) dt + \sin x$$

$$y_0 = \sin x$$

$$y_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t \sin t\, dt + \sin x = \sin x \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t\, dt + \sin x ==$$

$$= \sin x \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} + \sin x = \frac{1}{2}\sin x + \sin x == \frac{3}{2}\sin x$$

$$y_2(x) = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t \frac{3}{2} \sin t \, dt + \sin x = \frac{3}{2} \sin x \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \, dt + \sin x =$$

$$= \frac{3}{2} \sin x \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} + \sin x = \frac{3}{2} \sin x \cdot \frac{1}{2} + \sin x = \frac{3}{4} \sin x + \sin x =$$

$$= \frac{7}{4} \sin x$$

$$y_n = \frac{2n}{2^n} \sin x$$

$$y(x) = 4 \sin x$$

$$2) \quad y(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y(t) dt$$

$$y_0(x) = \sin \pi x$$

$$y_1(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \pi t \, dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}$$

$$y_2(x) = \sin \pi \, x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi}\right) dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}$$

$$y_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$y(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}$$

$$3) \quad y(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin t \, y(t) dt + \sin x$$

$$y_0(x) = \sin x$$

$$y_1(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} x\sin t\sin t\,dt + \sin x = \frac{1}{2}x\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t dt + \sin x =$$

$$= \frac{1}{2}x\left(-\frac{\sin 2\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2}}{4}\right) + \sin x = \frac{1}{2}x\left(-\frac{\sin\pi + \pi}{4}\right) + \sin x =$$

$$= \sin x - \frac{\pi}{8}x$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} x\sin t\left(\sin t - \frac{\pi}{8}t\right)dt + \sin x =$$

$$= \frac{1}{2}x\frac{\pi}{8}\int\limits_0^{\pi/2} (\sin^2 t - t\sin t)dt + \sin x =$$

$$= \frac{\pi}{16}x\left(-\frac{\sin 2\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2}}{4} - \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\right) + \sin x =$$

$$= \frac{\pi}{16}x\left(-\frac{\pi}{4} - 1\right) + \sin x = \sin x - \frac{\pi}{4^2}x - \frac{\pi}{4^3}x$$

$$y_n(x) = \sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\pi^k}{4^{k+1}}x$$

$$y(x) = \sin x - \frac{\pi}{4}x$$

$$4)\quad y(x) = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^2}y(t)dt + \mathrm{arctg}x, \quad y_0(x) = 0$$

$$y_1(x) = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^2}\cdot 0dt + \mathrm{arctg}x = \mathrm{arctg}x$$

$$y_2(x) = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{arctg}t dt + \mathrm{arctg}x = \frac{\mathrm{arctg}1}{2} + \mathrm{arctgx} = \frac{\pi}{8} + \mathrm{arctg}x$$

$$y_3(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\pi}{8} + \text{arctg}t\right)dt + \text{arctg}x =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{1+t^2} + \frac{\text{arctg}t}{1+t^2}\right)dt + \text{arctg}x =$$

$$= \frac{\pi}{8}\text{arctg}1 + \frac{\text{arctg}1}{2} + \text{arctg}x = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \text{arctg}x =$$

$$= \frac{\pi^2}{2^5} + \frac{\pi}{2^3} + \text{arctg}x$$

$$y_n(x) = \text{arctg}x + \sum_{k=0}^{n} \frac{\pi^k}{2^{2k+1}}$$

$$y(x) = \text{arctg}x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{2^{2n+1}} = \text{arctg}x + \frac{1}{2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)} = \text{arctg}x + \frac{2}{4-\pi}$$

5) $y(x) = \int_1^2 \frac{x}{2} y(t)dt + 1,\ \ y_0(x) = 0$

$$y_1(x) = 1$$

$$y_2(x) = \int_1^2 \frac{x}{2}dt + 1 = \frac{x}{2} + 1$$

$$y_3(x) = \int_1^2 \frac{x}{2}\left(\frac{t}{2} + 1\right)dt + 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1$$

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k-1}}{2^{k-1}}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{x}{2}$$

Метод ітерованих ядер

$$1)\quad y(x) = -2\int_0^1 xe^{x-t}y(t)dt + e^x$$

$$K_0(x,t) = xe^{x-t}$$

$$K_1(x,t) = \int_0^1 xe^{x-s}se^{s-t}ds = xe^{x-t}\int_0^1 sds = \frac{1}{2}xe^{x-t}$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 xe^{x-s}\frac{1}{2}se^{s-t}ds = \frac{1}{2}xe^{x-t}\int_0^1 sds = \frac{1}{4}xe^{x-t}$$

$$K_n(x,t) = \frac{1}{2^n}xe^{x-t}$$

$$R(\lambda,x,t) = R(-2,x,t) = -2xe^{x-t}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = -2xe^{x-t}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= -4xe^{x-t}$$

$$y(x) = -2\int_0^1 (-4xe^{x-t})e^t dt + e^x = 8xe^x\int_0^1 dt + e^x = e^x(8x+1)$$

$$2)\quad y(x) = 6\int_0^1 xty(t)dt + \sqrt{1-x^2}$$

$$K_0(x,t) = xt$$

$$K_1(x,t) = \int_0^1 xsstds = xt\int_0^1 s^2ds = \frac{1}{3}xt$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 xs\frac{1}{3}stds = \frac{1}{3}xt\int_0^1 s^2ds = \frac{1}{9}xt$$

$$K_n(x,t) = \frac{1}{3^n}xt$$

$$R(\lambda,x,t)=R(6,x,t)=6xt\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)=6xt\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=18xt$$

$$y(x)=6\int_0^1 18xt\sqrt{1-t^2}dt+\sqrt{1-x^2}=108x\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}dt+\sqrt{1-x^2}=$$

$$=108x\left(-\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{3}\right)+\sqrt{1-x^2}=108x\frac{1}{3}+\sqrt{1-x^2}=$$

$$=36x+\sqrt{1-x^2}$$

$$3)\quad y(x)=4\int_0^{\pi/2} x\sin t\, y(t)dt+\sin x$$

$$K_0(x,t)=x\sin t$$

$$K_1(x,t)=\int_0^{\pi/2} x\sin(s)\, s\sin t\, ds=x\sin t\int_0^{\pi/2} s\cdot\sin s\, ds=x\sin t\left(\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=x\sin t$$

$$K_2(x,t)=\int_0^{\pi/2} x\sin(s)\, s\sin t\, ds=x\sin t\int_0^{\pi/2} s\cdot\sin s\, ds=x\sin t$$

$$K_n(x,t)=x\sin t$$

$$R(\lambda,x,t)=R(4,x,t)=4x\sin t$$

$$y(x)=4\int_0^{\pi/2} 4x\sin t\sin t\, dt+\sin x=16x\int_0^{\pi/2}\sin^2 t dt+\sin x$$

$$=16x\left(-\frac{\sin 2\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{2}}{4}\right)+\sin x=16x\left(-\frac{\sin\pi-\pi}{4}\right)+\sin x$$

$$=-4x(1-\pi)+\sin x$$

$$4)\quad y(x) = e\int_1^e \frac{\ln t}{x} y(t)dt + \ln x$$

$$K_0(x,t) = \frac{\ln t}{x}$$

$$K_1(x,t) = \int_1^e \frac{\ln s}{x}\frac{\ln t}{s} ds = \frac{\ln t}{x}\int_1^e \frac{\ln s}{s} ds = \frac{\ln t}{x}\left(\frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\ln t}{x}$$

$$K_2(x,t) = \int_1^e \frac{\ln s}{x}\frac{1}{2}\frac{\ln t}{s} ds = \frac{1}{2}\frac{\ln t}{x}\int_1^e \frac{\ln s}{s} ds = \frac{1}{4}\frac{\ln t}{x}$$

$$K_n(x,t) = \frac{1}{2^n}\frac{\ln t}{x}$$

$$R(\lambda,x,t) = R(e,x,t) = e\frac{\ln t}{x}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = e\frac{\ln t}{x}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2e\frac{\ln t}{x}$$

$$y(x) = e\int_1^e 2e\frac{\ln t}{x}\ln t\, dt + \ln x = 2e^2x^{-1}\int_1^e \ln^2 t dt + \ln x = 2e^2x^{-1}(e-2) + \ln x$$

$$5)\quad y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int_0^1 xe^{-t}y(t)dt$$

$$K_0(x,t) = xe^{-t}$$

$$K_1(x,t) = \int_0^1 xe^{-s}se^{-t}ds = xe^{-t}\int_0^1 se^{-s}ds = xe^{-t}(1-2e^{-1})$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 xe^{-ss}se^{-t}(1-2e^{-1})ds = xe^{-t}(1-2e^{-1})\int_0^1 se^{-s}ds =$$

$$= xe^{-t}(1-2e^{-1})^2$$

$$K_n(x,t) = xe^{-t}(1-2e^{-1})^n$$

$$R(\lambda,x,t)=R\left(\frac{1}{2},x,t\right)=\frac{1}{2}xe^{-t}\left((1-2e^{-1})+(1+2e^{-1})^2+\cdots+(1+2e^{-1})^n\right)$$

$$=\frac{1}{2}xe^{-t}\left(\frac{e-2\frac{e}{e}}{2}\right)=\frac{1}{4}xe^{-t}(e-2)$$

$$y(x)=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{4}xe^{-t}(e-2)e^{-t}dt+e^{-x}=\frac{1}{8}x(e-2)\int_0^1 e^{-2t}dt+e^{-x}$$

$$=\frac{1}{8}x(e-2)\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{-2}}{2}\right)+e^{-x}=\frac{(e-2)(1-e^{-2})}{16}x$$

Тема 4. Альтернатива Фредгольма

$$1)\quad y(x)=\int_0^1 xt^3y(t)dt+5x^2$$

$$\lambda=1,\ \ K(x,t)=xt^3,\ \ m=1$$

$$a_1(x)=x,\ \ b_1(t)=t^3,\ \ f(x)=5x^2$$

$$y(x)=C_1x+5x^2$$

$$C_1x+5x^2=\int_0^1 xt^3(C_1t+5t^2)dt+5x^2$$

$$C_1x+5x^2=x\int_0^1(C_1t^4+5t^5)dt+5x^2$$

$$C_1x=x\left(C_1\frac{1}{5}+\frac{5}{6}\right)$$

$$C_1\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{6}$$

$$C_1=\frac{25}{24}=1\frac{1}{24}$$

$$y(x) = 1\frac{1}{24}x + 5x^2$$

$$2)\ \ y(x) = \lambda \int_0^1 xt^2 y(t)dt$$

$$y(x) = \lambda C_1 x$$

$$\lambda C_1 x = \lambda \int_0^1 xt^2 \lambda C_1 t\, dt$$

$$\lambda C_1 x = \lambda^2 C_1 x \int_0^1 t^3 dt$$

$$\lambda C_1 x = \lambda^2 \frac{1}{4} C_1 x$$

$$\lambda\left(C_1 x - \lambda \frac{1}{4} C_1 x\right) = 0$$

$$\frac{1}{4}\lambda = 1, \quad \lambda = 4$$

Для довільного $C_1 = \frac{1}{4}$

$$y(x) = x$$

Тема 5. Інтегральні рівняняня Вольтерра 2-го роду

Метод послідовних наближень

$$\mathbf{1})\ y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt$$

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 - \int_0^x (x-t)dt = 1 - \left(\int_0^x x\,dt - \int_0^x tdt\right) = 1 - \left(x \cdot x - \frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\left(1 - \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 - \int_0^x \left(x - x \cdot \frac{t^2}{2} - t + \frac{t^3}{2}\right)dt =$$

$$= 1 - \left(\int_0^x xdt - \int_0^x x \cdot \frac{t^2}{2}dt - \int_0^x tdt + \int_0^x \frac{t^3}{2}dt\right) =$$

$$= 1 - \left(x \cdot x - \frac{x}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4}\right) =$$

$$= 1 - \left(x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right) = 1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$y_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$$

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = \cos x$$

2) $$y(x) = \int_0^x y(t)dt + \frac{x^2}{2}$$

$$y_0(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$y_1(x) = \int_0^x \frac{t^2}{2}dt + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!}$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}\right)dt + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!}$$

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+2)!}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} = \frac{1}{x}(e^x - 2x - 2)$$

$$\mathbf{3)}\ \ y(x) = 1 - \int_0^x \operatorname{tg} t\, y(t)dt$$

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 - \int_0^x \operatorname{tg} t\, dt = 1 - (-\ln(\cos x) = 1 + \ln(\cos x)$$

$$y_2(x) = 1 - \int_0^x \operatorname{tg} t\,(1 + \ln(\cos t))dt = 1 + \ln(\cos x) - \frac{\ln^2(\cos x)}{2}$$

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\ln^k(\cos x)}{k!}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^n(\cos x)}{n!} = \cos x$$

$$\mathbf{4)}\ \ y(x) = 1 + \int_0^x \frac{xy(t)}{x^2 + t^2} dt$$

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = \int_0^x \frac{x}{x^2 + t^2} dt + 1 = \operatorname{arctg}(1) + 1 = \frac{\pi}{4} + 1$$

$$y_2(x) = \int_0^x \frac{x}{x^2+t^2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)dt + 1 = \left(\frac{\pi}{4}+1\right)\int_0^x \frac{x}{x^2+t^2}dt + 1 =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}+1\right)\operatorname{arctg}(1) + 1 = \left(\frac{\pi}{4}+1\right)\frac{\pi}{4} + 1 = \frac{\pi^2}{4^2} + \frac{\pi}{4} + 1$$

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\pi^k}{4^k}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{4-\pi}$$

$$\textbf{5)}\quad y(x) = 1 + \int_0^x \frac{ty(t)}{x^2+t^2}dt$$

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x \frac{t}{x^2+t^2}dt = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{x^2+t^2}dt = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{x^2+t^2}d(t^2) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\ln(x^2+x^2) - \ln x^2) = 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x^2}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \frac{t}{x^2+t^2}\left(1+\frac{1}{2}\ln 2\right)dt = 1 + \left(1+\frac{1}{2}\ln 2\right)\frac{1}{2}\ln 2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2^2}\ln^2 2$$

$$y_n(x) = 1 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2^n}\ln^2 2 + \dots + \frac{1}{2^n}\ln^n 2 = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^k$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\ln 2}{2}}$$

Метод ітерованих ядер

$$1)\quad y(x) = -\int_0^x e^{x-t} y(t)dt + x$$

$$K_0(x,t) = e^{x-t}$$

$$K_1(x,t) = \int_0^x e^{x-s} e^{s-t} ds = e^{x-t} \int_0^x ds = e^{x-t} x$$

$$K_2(x,t) = \int_0^x e^{x-s} e^{s-t} s ds = e^{x-t} \int_0^x s ds = \frac{x^2}{2} e^{x-t}$$

$$K_3(x,t) = \int_0^x e^{x-s} e^{s-t} \frac{s^2}{2} ds = \frac{1}{2} e^{x-t} \int_0^x s^2 ds = \frac{x^3}{6} e^{x-t}$$

$$K_n(x,t) = \frac{x^n}{n!} e^{x-t}$$

$$R(\lambda, x, t) = R(-1, x, t) = -e^{x-t}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = -e^{x-t} e^x =$$

$$= -e^{2x-t}$$

$$y(x) = -\int_0^x -e^{2x-t} t dt + x = e^{2x} \int_0^x \frac{t}{e^t} dt + x = e^{2x}(-x+1)e^{-x} = e^x(-x+1)$$

$$2)\quad y(x) = x3^x - \int_0^x 3^{x-t} y(t)dt$$

$$K_0(x,t) = 3^{x-t}$$

$$K_1(x,t) = \int_0^x 3^{x-s} 3^{s-t} ds = 3^{x-t} \int_0^x ds = 3^{x-t} x$$

$$K_2(x,t) = \int_0^x 3^{x-s} 3^{s-t} s ds = 3^{x-t} \int_0^x s ds = \frac{x^2}{2} 3^{x-t}$$

$$K_3(x,t) = \frac{x^3}{6} 3^{x-t}$$

$$K_n(x,t) = \frac{x^n}{n!} 3^{x-t}$$

$$R(\lambda,x,t) = R(-1,x,t) = -3^{x-t}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = -3^{x-t}e^x$$

$$y(x) = x3^x - \int_0^x (-3^{x-t}e^x)t3^t dt = x3^x + 3^x e^x \int_0^x 3^{-t}t3^t dt = x3^x + 3^x e^x =$$

$$= x3^x + 3^x e^x \frac{x^2}{2} = 3^x\left(x + e^x \frac{x^2}{2}\right)$$

3) $y(x) = \sin x + \int_0^x e^{x-t} y(t)dt$

$$K_0(x,t) = e^{x-t}$$

$$K_1(x,t) = \int_0^x e^{x-s}e^{s-t}ds = e^{x-t}\int_0^x ds = xe^{x-t}$$

$$K_2(x) = \int_0^x e^{x-s}e^{s-t}sds = e^{x-t}\int_0^x sds = \frac{x^2}{2}e^{x-t}$$

$$K_n(x,t) = \frac{x^n}{n!}e^{x-t}$$

$$R(\lambda,x,t) = R(1,x,t) = e^{x-t}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^{x-t}e^x$$

$$y(x) = \sin x + \int_0^x e^{x-t}e^x \sin t\, dt = \sin x + e^{2x}\int_0^x e^{-t}\sin t\, dt =$$

$$= \sin x + e^{2x}\left(-\frac{e^{-2x}(2\sin x + \cos x)}{5}\right) = \sin x - \frac{2\sin x + \cos x}{5}$$

Тема 6. Зв’язок інтегральних рівняня з диференційними

$$1)\quad y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t)\, y(t)dt$$

$$y'(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x-t)\, y(t)dt$$

$$y''(x) = -\sin x + y(x) + \int_0^x \sin(x-t)\, y(t)dt$$

$$y'' = 0, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$$

$$y(x) = x$$

$$2)\quad y(x) = 2\text{sh}x + 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt$$

$$y'(x) = 2\text{ch}x + 1 - \int_0^x y(t)dt$$

$$y''(x) = 2\text{sh}x - y(x)$$

$$y''(x) - y(x) = 2\text{sh}x$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

$$y(x) = \cos x + \sin x + \text{sh}x$$

$$3)\quad y(x) = x - \int_0^x e^{x-t} y(t)dt$$

$$y(x) = x - e^x \int_0^x e^{-t} y(t)dt$$

$$y'(x) = 1 - e^x \int_0^x e^{-t} y(t)dt - e^x \cdot e^{-x} y(x)$$

$$y'(x) = 1 - \int_0^x e^{x-t} y(t)dt - y(x)$$

$$-\int_0^x e^{x-t} y(t)dt = y(x) - x$$

$$y'(x) = 1 + y(x) - x - y(x) = 1 - x$$

$$y(x) = x - \frac{x^2}{2} + C$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$y(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

4) $$\int_0^x e^{x+t} y(t)dt = x$$

$$e^x \int_0^x e^t y(t)dt + e^x e^x y(x) = 1$$

$$x + e^{2x} y(x) = 1$$

$$e^{2x} y(x) = 1 - x$$

$$y(x) = e^{-2x}(1 - x)$$

5) $$y(x) = 2\int_0^x \frac{2t+1}{(2x+1)^2} y(t)dt + 1$$

$$y(x) = \frac{2}{(2x-1)^2}\int_0^x (2t+1)y(t)dt + 1$$

$$y'(x) = -\frac{8}{(2x+1)^3}\int_0^x (2t+1)y(t)dt + \frac{2}{(2x+1)^2}(2x+1)y(x)$$

$$y'(x) = -\frac{8}{(2x+1)^3}\int_0^x (2t+1)y(t)dt + \frac{2}{2x+1}y(x)$$

$$\frac{2}{(2x+1)^2}\int_0^x (2t+1)y9t)dt = y(x) - 1$$

$$y'(x) = -\frac{4}{2x+1}(y(x) - 1) + \frac{2}{2x+1}y(x)$$

$$y'(x) = -\frac{2}{2x+1}y(x) + \frac{4}{2x+1}$$

$$y'(x) + \frac{2}{2x+1}y(x) = \frac{4}{2x+1}$$

$$y(x) = uv, \;\; y'(x) = u'v + uv'$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{2x+1}v\right) = \frac{4}{2x+1}$$

$$\begin{cases} v' + \dfrac{2}{2x+1}v = 0 \\ u'v = \dfrac{4}{2x+1} \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{v} = -\frac{2}{2x+1}$$

$$\ln v = -\ln(2x+1)$$

$$v = \frac{1}{2x+1}$$

$$u' \cdot \frac{1}{2x+1} = \frac{4}{2x+1}$$

$$u' = 4$$

$$u = 4x + C$$

$$y(x) = uv = \frac{4x+C}{2x+1}$$

$$y(0) = 1,\ \ C = 1$$

$$y(x) = \frac{4x+1}{2x+1}$$

Тема 7. Інтегральні рівняння Вольтерра 1-го роду

$$\mathbf{1})\quad \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{x}} \mathrm{ch}(\mathrm{x}-\mathrm{t})\mathrm{y}(\mathrm{t})\mathrm{dt} = 3x^2$$

$$f(x) = 3x^2,\quad K(x) = \mathrm{chx}$$

$$F(p) = \frac{6}{p^2+1},\ \ K(p) = \frac{p}{p^2-1}$$

$$Y(p) = \frac{6}{p^2+1} + \frac{p}{p^2-1}Y(p)$$

$$Y(p) = \frac{6}{p^2+1}\cdot\frac{p^2-1}{p^2-p-1} = \frac{6}{p(p-1)+1}$$

$$y(x) = 6x - x^3$$

$$2)\quad \int\limits_0^x \cos(x-t)\,y(t)dt = \sin x - 2x$$

$$f(x) = \sin x - 2x,\quad K(x) = \cos x$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} - \frac{2}{p^2},\ \ K(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+1} - \frac{2}{p^2} + \frac{p}{p^2+1}Y(p)$$

$$Y(x) = \frac{p^2-2(p^2+1)}{p^2(p^2+1)}\cdot\frac{p^2+1}{p^2-p+1}$$

$$Y(x) = \frac{-p^2-2}{p^2(p^2-p+1)}$$

$$y(x) = 1 - x^2$$

$$3)\quad \int_0^x y(t)dt = x^3 e^x$$

$$f(x) = x^3 e^x, \quad K(x) = 1$$

$$F(p) = \frac{6}{(p-1)^4}, \quad K(p) = \frac{1}{p}$$

$$Y(p) = \frac{6}{(p-1)^4} + \frac{1}{p}Y(p)$$

$$Y(p) = \frac{6}{(p-1)^4} \cdot \frac{p}{(p-1)} = \frac{6p}{(p-1)^5}$$

$$y(x) = (2+x)x^2 e^x$$

$$4)\quad \int_0^x y(t)dt = e^{2x}\sin x$$

$$f(x) = e^{2x}\sin x, \quad K(x) = 1$$

$$F(p) = \frac{2}{(p-2)^2+1}, \quad K(p) = \frac{1}{p}$$

$$Y(p) = \frac{2}{(p-2)^2+1} + \frac{1}{p}Y(p)$$

$$Y(p) = \frac{2}{(p-2)^2+1} \cdot \frac{p}{p-1}$$

$$Y(p) = \frac{2p}{(p-1)\big((p-2)+1\big)}$$

$$y(x) = e^{2x}(\cos x + 2\sin x)$$

6. Самостійна робота (таблиця 4)

Таблиця 4

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	***Тема 1.*** *Задачі, що приводять до поняття «інтегральне рівняння».*	6
2.	***Тема 2.*** *Класифікація лінійних інтегральних рівнянь.*	6
3.	***Тема 3.*** *Інтегральні рівняння Фредгольма 2-го роду.*	10
4.	***Тема 4.*** *Альтернатива Фредгольма.*	8
5.	***Тема 5.*** *Інтегральне рівняння Вольтерра 2-го роду*	10
6.	***Тема 6.*** *Зв'язок рівнянь Вольтерра з диференціальними рівняннями*	5
7.	***Тема 7.*** *Рівняння Вольтерра 1-роду типу згортки.*	6
	Разом	**51**

7. Індивідуальне завдання

Комплексне практичне завдання. Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерра

8. Методи контролю

- Контрольні роботи
- Захист індивідуального завдання
- Залік

Питання для заліку

1) Задачі, що приводять до поняття «інтегральне рівняння». Задача Абеля.

2) Задачі, що приводять до поняття «інтегральне рівняння». Задача Фур'є.

3) Задачі, що приводять до поняття «інтегральне рівняння». Задача Коші.

4) Класифікація лінійних інтегральних рівнянь.

5) Інтегральні рівняння Фредгольма.

6) Метод послідовних наближень для розв’язування інтегральних рівнянь Фредгольма.

7) Метод ітерованих ядер для розв’язування інтегральних рівнянь Фредгольма.

8) Теореми Фредгольма.

9) Інтегральні рівняння Вольтерра.

10) Метод послідовних наближень для розв’язування інтегралььих рівнянь Вольтерра.

11) Метод ітерованих ядер для розв’язування інтегральних рівнянь Вольтерра.

12) Зв’язок рівнянь Вольтерра з диференціальними рівняннями.

13) Теорема єдиності розв’язку.

14) Рівняння Вольтерра 1-го роду типу згортки.

9. Розподіл балів, які отримують студенти (таблиця 5)

Таблиця 5

Поточний контроль знань						ІНДЗ	Залік	Сума
Модуль 1			Модуль 2			25	25	100
лекції	практичні	к. р.	лекції	практичні	к. р.			
2	4	20	1,5	2,5	20			

Шкала оцінювання: національна та ECTS (таблиця 6)

Таблиця 6

СУМА БАЛІВ ЗА ВСІ ВИДИ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ	ОЦІНКА ECTS	ОЦІНКА ЗА НАЦІОНАЛЬНОЮ ШКАЛОЮ	
		для екзамену, курсового проєкту	для заліку

<table>
<tr><td></td><td></td><td>(роботи), практики</td><td></td></tr>
<tr><td>90-100</td><td>A</td><td>відмінно</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>82-89</td><td>B</td><td rowspan="2">добре</td></tr>
<tr><td>74-81</td><td>C</td></tr>
<tr><td>64-73</td><td>D</td><td rowspan="2">задовільно</td></tr>
<tr><td>60-63</td><td>E</td></tr>
<tr><td>35-59</td><td>FX</td><td>незадовільно з можливістю повторного складання</td><td>не зараховано з можливістю повторного складання</td></tr>
<tr><td>0-34</td><td>F</td><td>незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td><td>не зараховано з обов’язковим повторними вивченням дисципліни</td></tr>
</table>

ВИСНОВОК

В даній дипломній роботі нами було розглянуто тему «Інтегральні рівняння», проведено аналіз з навчально-методичної літератури з даної теми.

Ми розглянули основні типи інтегральних рівнянь: інтегральні рівняння Фредгольма, Вольтерра, Урисона, Гаммерштейна першого та другого роду; їх зв'язок з диференціальними рівняннями.

В даній роботі було розглянуто методи розв'язування інтегральних рівнянь, зокрема: метод послідовних наближень, метод ітерованих ядер, метод зведення інтегрального рівняння до диференційного та метод операційного числення. Дані методи було проілюстровано на прикладах.

В другому розділі запропоновано робочу програму розробленого курсу «Інтегральні рівняння» для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. При цьому було сформовано мету, завдання, обґрунтовано необхідність вивчення даного курсу, виділили компетентності які розвиваються у ході вивчення курсу, підібрано теми для лекційних та практичних занять, завдання для розв'язування їх на практичних заняттях.

Запропонована нами робоча програма може бути використана викладачами фізико-математичних факультетів педагогічних університетів, а також інших спеціальностей, які займаються дослідженнями природничих процесів, технічних спеціальностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Василишин Г.В. Інтегральні рівняння: навчальний посібник /Г.В. Василишин, Т.П. Гой, І.В. Федак – Івано-Франківськ: Сімик, 2014. – 222 с.
2. Васильева А.Б. Интегральные уравнения /А.Б. Васильева, Н.А. Тихонова – 2-е изд., стереот. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 160 с.
3. Гой Т.П. Диференційні та інтегральні рівняння: навчальний посібник /Т.П. Гой, О.В. Махиней – вид. 2-ге, випр. Та доп. – Тернопіль: навчальна книга – Богдан, 2014. – 360 с.
4. Гурса Э. Курс математического анализа /Э. Гурса – перевод с французского издания М.Г. Шестопал – М.: Государственное Технико-теоритическое издательство, 1934. – 320 с.
5. Зон Б.А. Лекции по интегральным уравнениям: учебное пособие /Б.А. Зон – М.: Высшая школа, 2004. – 92 с.
6. Килбас А.А. Интегральные уравнения: курс лекций /А.А. Килбас – М.: БГУ, 2005. – 143 с.
7. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. (Введение в теорию) /М.Л. Краснов – М.: Наука, 1975. – 303 с.
8. Краснов М.Л. Интегральные уравнения /М.Л. Краснов. А.И. Киселев, Г.И. Макаренко – М.: Наука. 1998. – 193 с.
9. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа /П.И. Лизоркин – М.: наука, 1981. – 384 с.
10. Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения /У.В. Ловитт – перевод с английского Д.А. Райкова – М.: государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. – 267 с.
11. Манжиров А.В. Методы решения интегральных уравнений: Справочник /А.В. Манжиров, А.Д. Полянин – М.: Факториал, 1999 – 272 с.

12. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям /С.Г.Михлин – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 234 с.
13. Мютц Г. Интегральные уравнения /Г. Мютц – М.: Государственное технико-теоретическое издательство, 1934. – 331 с.
14. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений / И.Г. петровский – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 122 с.
15. Привалов И.И. Интегральные уравнения /И.И. Привалов – М.: Объединенное научно-техническое издательство, 1935. – 250 с.
16. Трикоми Ф. Интегральные уравнения /Ф. Трикоми – перевод с английского Б.В. Боярского и И.И. Данилюка – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 308 с.
17. Уиттекер Э.Т. Курссовременного анализа / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон – перевод с английского под редакцией Ф.В. Широкова – М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1963. – 343 с.
18. Цлаф Л.Я. Вариационное исчесление и интегральные уравнения /Л.Я. Цлаф – М.: Наука, 1970. – 192 с.
19. Чорноіван Ю.О. Конспект лекцій з курсу інтегральних рівняньта елементів функціонального аналізу: Київ, 2017 – 203 с.
20. Чкана Я.О., Мартиненко О.В. Математична компетентність учителів математики і фізики та особливості її формування у процесі фахової підготовки : Монографія – Суми: ФОП Цьома С.П., 2019 – 290 с.
21. Шагидуллин Р.Р. Интегральные уравнения: учебное пособие /Р.Р. Шагидуллин – Казанский университет, 2013. – 209 с.
22. Шишкин Г.А. Линейные инте6гральные уравнения Фредгольма: учебно-методическое пособие /Г.А. Шишкин – Улан-Удэ: Издательство Бурятского государственного университета, 2014. – 106 с.