1. Ходырева Н. Г. Методическая система становления готовности будущих учителей к формированию математической компетентности школьников : автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (математика)» / Н. Г. Ходырева. – Волгоград, 2004. – 23 с.

РЕЗЮМЕ

Ачкан В. В. Формирование исследовательской и конструктивно-графической математических компетентностей старшеклассниковв процессе изучения тригонометрических уравнений инеравенств в классах разных профилей.

В статье раскрыты методические аспекты формирования исследовательской и конструктивно-графической математических компетентностей старшеклассников в процессе изучения тригонометрических уравнений и неравенств в классах, которые обучаются по программам академического, профильного и углубленного уровней. Предложены пути и средства формирования исследовательской и конструктивно-графической математических компетентностей старшеклассников.

***Ключевые слова:** исследовательская и конструктивно-графическая математические компетентности, тригонометрические уравнения и неравенства, профильная школа.*

SUMMARY

Achkan V. Forming of senior pupils' constructive-graphic and research mathematical competences during the process of studying trigonometrical equatations and inequalities in the classes of different profiles.

In the article methodical aspects of forming of senior pupils procedural constructive-graphic and research mathematical competences during the process of studying trigonometric equations and inequalities in the classes that are taught in the program academic, profile, in-depth levels are revealed . The ways and means of senior pupils' constructive-graphic and research mathematical competences formation are offered.

***Keywords:** constructive-graphic and research mathematical competences, trigonometrical equatations and inequalities, profile school.*

УДК 372.851

Д. В. Бойкіна

Пловдівський університет ім. Паісія Хілендарського,
Болгарія

СКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ «ЗВЕРНЕННЯ»

Обґрунтовано актуальність здійснення діяльності складання завдань. Складання математичних задач стає необхідним елементом процесу навчання методиці викладання математики студентів – майбутніх вчителів на сучасному етапі освіти. Існують різні методи складання задач. Розглянуто метод «звернення» для складання педагогічно доцільної системи математичних завдань. Застосування методу «звернення» пов'язане з формулюванням так званих обернених тверджень до даного істинного твердження. Таким чином, значно збільшується число завдань, які можна скласти. Використання методу «звернення» при складанні математичних задач дозволяє досягати дидактичних, розвивальних і виховних цілей.

***Ключові слова**: система задач, метод «звернення», складання задач.*

Постановка проблемы, анализ актуальных исследований. Основная цель современного образования – формирование у учащихся познавательных умений, из которых одно из самых важных это умение решать задачи (учебные и житейские). Как указывает А. А. Столяр, «самое эффективное средство развития математической деятельности учащихся – это обучение «через задачи». Поэтому возникает проблема построения педагогически целесообразной системы задач, с помощью которых можно было бы последовательно перевести школьника через все аспекты математической деятельности… Эта проблема поставлена прежде всего перед составителями учебников и сборников задач, но она частично возникает и перед учителем в его практической деятельности» [5, с. 190].

По нашему мнению, эта проблема возникает перед учителем не субъективно, а объективно потому, что в своей ежедневной практике для каждого урока ему приходится подбирать, из имеющихся учебников или сборников, задачи, подчиненные определенным целям, а иногда и самому составлять подходящие задачи для достижения конкретной цели. Кроме того, перед учителем возникает необходимость составлять определенное количество задач для классных или контрольных работ по математике так, чтобы составленные задачи, при помощи которых можно проверить определенные знания и умения, были бы одинаковой сложности для всех учеников. При этом труд учителя при проверке писменных работ будет облегчен.

Таким образом, составление математических задач становится необходимым элементом процесса обучения методике преподавания математики студентов – будущих учителей на современном этапе образования. Существуют разные методы составления задач. Здесь мы остановимся на методе «обращения».

Цель статьи – рассмотреть различные аспекты использования метода «обращения» при составлении задач.

Изложение основного материала. Применение метода «обращения» связано с формулированием так называемых обратных утверждений данному истинному утверждению. Это значит, что из известного утверждения вида $p \to q$ требуется получить новое утверждение вида $q \to p$, которое может оказаться неверным. Более широкие возможности и интересные задачи получаются, когда условие p или заключение q исходной задачи (или обе одновременно) являются конъюнкциями суждений, то есть когда исходная задача имеет структуру $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_k)$, где p_i (i=1,2,…,n) простые утверждения, из которых состоит условие задачи, а q_j (j=1,2,…,k) – простые утверждения, из которых состоит ее заключение.

Таким образом, значительно увеличивается число задач, которые можно составить.

Возрастают также возможности и потребности в исследовании, а именно: какие из составленных задач на доказательство оказываются верными утверждениями, какие бессмысленны и какие неверны. Эти вопросы подробно исследованы А. Молловым в его диссертации [4], поэтому мы не будем их затрагивать. Отметим, однако, что при использовании идеи применения общей схемы для формулирования обратных утверждений, в известном смысле, список обратных утверждений составляется «механически» [1, с. 109], а их наполнение соответствующим содержанием происходит после уточнения конкретного смысла суждений $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ и $q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_k$.

Приведём примеры применения первого аспекта, которые мы использовали в учебной работе со студентами.

Так, в курсе по выбору «Методы и методика составления задач», после коллективного рассмотрения вопроса о получении обратных утверждений из теоремы о средней линии треугольника, студентам предлагается задание: составить самостоятельно аналогичным способом задачи, соответствующие другим известным теоремам или выбранной ими задаче из учебника (сборника) по математике для средней школы. Представим некоторые задачи, которые разработаны студентами.

Задача 1. Дан треугольник *ABC*. Если точки *M* и *N* – середины соответственно сторон *AC* и *BC*, т.е. отрезок *MN* является средней линии треугольника *ABC*, то *MN* //*AB* и $MN = \frac{1}{2} AB$.

Эту задачу можно записать следующим образом:

$\triangle ABC$: Если $\boldsymbol{p_1}$**:** *M* – середина *AC* и $\boldsymbol{p_2}$**:** *N* – середина *BC*,

то $\boldsymbol{q_1}$**:** *MN* //*AB* и $\boldsymbol{q_2}$**:** $MN = \frac{1}{2} AB$.

Тогда структура этой задачи имеет следующий вид: $p_1 \wedge p_2 \to q_1 \wedge q_2$.

Используя это, составим задачи методом «обращения».

Если поменять местами условия и заключения, получим задачу **1$^{\mathrm{I}}$**: $q_1 \wedge q_2 \rightarrow p_1 \wedge p_2$.

<u>Задача 1$^{\mathrm{I}}$</u>. Если некоторый отрезок параллелен и равен половине одной из сторон треугольника и его концы лежат соответственно на двух других сторонах треугольника, то этот отрезок является средней линией этого треугольника.

Так сформулированная задача **1$^{\mathrm{I}}$** (через полное «обращение» условия и заключения) оказывается верным утверждением и часто называется обратной теоремой о средней линии треугольника.

Теперь рассмотрим различные комбинации между p_1, p_2, q_1, q_2.

<u>Задача 1$^{\mathrm{II}}$</u>: $p_1 \wedge q_1 \rightarrow p_2 \wedge q_2$.

Точка *M* – середина стороны *AC* треугольника *ABC* и отрезок *MN* //AB, точка *N* принадлежит стороне *BC.* Докажите, что точка *N* – тоже середина стороны *BC* и $MN = \frac{1}{2}AB$.

Утверждение в задаче **1$^{\mathrm{II}}$** тоже верно и поэтому также называется обратной теоремой теореме о средней линии треугольника.

<u>Задача 1$^{\mathrm{III}}$</u>: $p_1 \wedge q_2 \rightarrow p_2 \wedge q_1$.

Точка *M* середина стороны *AC* треугольника *ABC*, $MN = \frac{1}{2}AB$, точка *N* принадлежит стороне *BC*. Докажите, что точка *N* является серединой стороны *BC* и *MN*//*AB*.

Оказывается, однако, что утверждение в задаче 1$^{\mathrm{III}}$ не является верным в общем случае. Оно является только обратным утверждением для утверждения 1, но не является теоремой.

<u>Задача 1$^{\mathrm{IV}}$</u>*:* $p_2 \wedge q_1 \rightarrow p_1 \wedge q_2$.

<u>Задача 1$^{\mathrm{V}}$</u>: $p_2 \wedge q_2 \rightarrow p_1 \wedge q_1$.

Формулировки задач 1IV и 1V совпадают с формулировками задач 1$^{\mathrm{II}}$ и 1$^{\mathrm{III}}$, так как p_1 и p_2 равноправны.

Ниже представим некоторые примеры задач, составленных студентами в курсовых работах.

<u>Задача 2</u>. Дана трапеция *ABCD*. Точки *M* и *N* – середины сторон *AD* и *BC* соответственно. Доказать, что отрезок *MN* параллелен основаниям *AB* и *CD* трапеции и $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Сокращенная запись задачи:

ABCD – трапеция. Если p_1**:** *M* – середина *AD* и p_2**:** *N* – середина *BC*, то q_1**:** *MN*//*AB* и *MN*//*CD*; q_2**:** $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Структура этой задачи имеет вид: $p_1 \wedge p_2 \rightarrow q_1 \wedge q_2$.

Так как задача 2 аналогична задаче 1, студенты без затруднения сформулировали соответствующие обратные задачи как в задаче 1. Поэтому мы их рассматривать не будем.

Задача 3. Если четырехугольник *ABCD* параллелограмм, то его противоположные стороны равны.

Запишем задачу следующим образом:

ABCD – параллелограмм. Если p_1**:** *AB*//*CD* и p_2**:** *AD*//*BC* , то

q_1**:** *AB*=*CD* и q_2**:** *AD*=*BC*.

Структура задачи: $p_1 \wedge p_2 \rightarrow q_1 \wedge q_2$.

Представим формулировки задач, составленные студентами методом «обращения».

Задача 3$^{\text{I}}$: $q_1 \wedge q_2 \rightarrow p_1 \wedge p_2$.

Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то они параллельны, то есть четырехугольник – параллелограмм.

Как известно, существует такая теорема (теорема-признак).

Задача 3$^{\text{II}}$: $p_1 \wedge q_1 \rightarrow p_2 \wedge q_2$.

Если две противоположные стороны некоторого четырехугольника параллельны и равны, то и другие две стороны параллельны и равны, т.е. четырехугольник – параллелограмм. Это тоже теорема (теорема-признак).

Задача 3$^{\text{III}}$: $p_1 \wedge q_2 \rightarrow p_2 \wedge q_1$.

Условие $p_1 \wedge q_2$ в этой задаче обозначает, что две противоположные стороны четырехугольника *ABCD* параллельны, а другие две – равны. Но в общем случае это означает, что такой четырехугольник может оказаться равнобедренной трапецией. Следовательно, эта задача, сформулированная методом «обращения»,– неверна.

Аналогичный вывод сделан и в следующих составленных задачах.

Задача 3$^{\text{IV}}$: $p_2 \wedge q_1 \rightarrow p_1 \wedge q_2$.

Задача 3$^{\text{V}}$: $p_2 \wedge q_2 \rightarrow p_1 \wedge q_1$.

Ясно, что последняя задача аналогична задаче **3$^{\text{II}}$**.

Задача 4. В треугольнике *ABC* известно, что $\angle C = 90^0$, а *BF* и *AD* – биссектрисы $\angle ABC$ и $\angle BAC$ соответственно. Если $FM \perp AB$ и $DN \perp AB$, доказать, что:

а) $FM=FC$ и $DN=DC$; б) $\angle MCN=45°$.

Задача имеет структуру: $p \wedge q \wedge r \rightarrow s \wedge t$, где

p: $\angle C=900$,

q: BF и AD – биссектрисы $\angle B$ и $\angle A$ соответственно,

r: $FM \perp AB$ и $DN \perp AB$,

s: $FM=FC$ и $DN=DC$,

t : $\angle MCN=45°$.

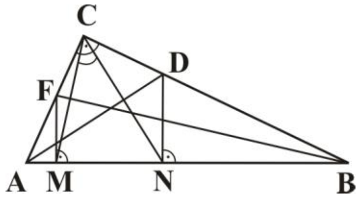

Рис. 1

Так как задача 4 не является теоремой школьного курса геометрии, студенты представили кратко ее решение.

а) Так как $\Delta FCB \cong \Delta FMB$ и $\Delta ADN \cong \Delta ACD$, то $FC=FM$ и $CD=DN$.

б) Обозначим $\angle MCF=\angle FMC=\angle 1$, $\angle CND=\angle NCD=\angle 2$ и $\angle MCN=x$. Тогда для ΔMNC выполнено $x + (90°-\angle 1) +(90°-\angle 2) =180°$, откуда следует, что $x = \angle 1 + \angle 2$. С другой стороны, имеем $\angle 1 + \angle 2 + x =\angle C = 90°$. Следовательно $x=45°$.

Теперь перейдем к вопросу о составлении новых задач, используя метод «обращения». Студентка Й.Р. Грудева, применяя «механически» схему конструирования обратных утверждений и имея ввиду, что из 5 элементов p, q, r, s, t возможны $C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10$ вариантов вида, представила:

1) $p \wedge q \wedge r \rightarrow s \wedge t$ – основная задача 4;
2) $p \wedge q \wedge s \rightarrow r \wedge t$
3) $p \wedge q \wedge t \rightarrow r \wedge s$
4) $p \wedge s \wedge r \rightarrow q \wedge t$
5) $p \wedge t \wedge r \rightarrow q \wedge s$
6) $r \wedge q \wedge s \rightarrow p \wedge t$
7) $t \wedge q \wedge s \rightarrow p \wedge r$
8) $r \wedge t \wedge q \rightarrow p \wedge s$
9) $p \wedge t \wedge s \rightarrow r \wedge q$
10) $r \wedge s \wedge t \rightarrow p \wedge q$.

В своей курсовой работе она исследовала, какие из этих утверждений верны и какие – неверны. Так, например, утверждения 3), 5), 6), 9) неверны.

Отметим еще, что структуру задачи 4 можно представить в более развернутом виде, если утверждения q, r и s разбить на составляющие их суждения. Так, например, если утверждение q представить в виде $q=q_1\wedge q_2$, где q_1: BF – биссектриса $\angle B$, q_2: AD – биссектриса $\angle A$; утверждение r – в виде $r=r_1\wedge r_2$, где r_1: $FM\perp AB$, r_2: $DN\perp AB$; а утверждение s – в виде $s=s_1\wedge s_2$, где s_1: $FM=FC$, s_2: $DN=DC$; то структура задачи 4 принимает следующий вид: $\boldsymbol{p\wedge q_1\wedge q_2\wedge\ r_1\wedge r_2\rightarrow\ s_1\wedge s_2\wedge t}$. Тогда из этой задачи методом «обращения» можно составить более «богатое» множество утвержений, некоторые из которых верны, а другие – неверны.

Для учебной практики оказывается очень полезно не только требовать от учащихся формулировать задачи методом «обращения» из уже известных задач (как, например, задача о средней линии треугольника и трапеции), но и обосновывать, какие из сформулированных утверждений являются верными (делая соответствующие выводы об обратных теоремах) и какие из них являются только обратными утверждениями, но неверны, а также отыскивать подходящие контрпримеры для их опровержения.

Проведение таких рассуждений со студентами (и с учениками) имеет большое образовательное и воспитательное значение, потому что усиливает и углубляет их критическое мышление, обостряет их внимание, развивает их сообразительность.

Второй аспект. Метод составления задач через «обращение» основан на так называемом «логическом алжебре», введенном Ив. Ганчевым в его монографии [2, с. 96]. Известно, что большинство задач на доказательство (включая и теоремы, которые по своей сути тоже являются задачами на доказательство) можно сформулировать в условной форме: «Если …, то …», т.е. они имеют структуру импликации:

(1) $(p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_k)\rightarrow q$

Согласно [2 , с. 96] выполнена следующая эквивалентность

(2) $((p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_i\wedge\ldots\wedge p_k)\rightarrow q)\Leftrightarrow((p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge\bar{q}\wedge\ldots\wedge p_k)\rightarrow\overline{p_i})$, которая называется «логическим алжебром».

Она дает возможность почти из каждой теоремы составлять новые задачи, эквивалентные ей, и таким образом, можно построить «дидактически целесообразные системы эквивалентных между собою задач» [2, с. 98]. Для этой цели выбирается некоторая задача (теорема), сформулированная в условной форме, условие которой является конъюнкцией хотя бы двух утверждений; составляются эквивалентные ей задачи с помощью «логического алжебра»; устанавливается какая из всех задач этого класса решается легче всего (без использования какой-либо из остальных задач этого класса), и эта задача занимает первое место в системе. После нее размещаются задачи, заключения которых – простые суждения, потом задачи, заключения которых являются дизъюнкциями двух суждений и так далее.

Как указано в [3, с. 52], импликация (1), «логический алжебр» (2) и закон де Моргана представляют не только «дескриптивную модель» деятельности в обучении математике, но она указывает, какие процедуры нужно сделать с оригиналом, чтобы получить определенные результаты. Поэтому Ив. Ганчев называет эту модель и аналогичные ей модели «оперативными».

Отметим, что при использовании «логического алжебра» для составления задач, в отличии от первого аспекта – простого «обращения», полученные утверждения всегда верны. Иллюстрируем на конкретном примере применение «логического алжебра» для составления эквивалентных задач.

Задача 5. В параллелограмме *ABCD* биссектрисы $\angle BAD$ и $\angle ABC$ пересекаются в точке *M*, *AB*=2*AD.* Доказать, что *M* лежит на *DC.*

Задача имеет следующую структуру: $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \rightarrow q$, где

p_1**:** *AM* – бисектриса $\angle BAD$,

p_2**:** *BM* – бисектриса $\angle ABC$,

p_3**:** *AB* = 2*AD*,

*q***:** *M* лежит на *DC*.

Используя «логический алжебр», из задачи 5 можно составить эквивалентные задачи, имеющие следующие структуры:

Задача 5^I^. $p_1 \wedge p_2 \wedge \overline{q} \rightarrow \overline{p}_3$.

С данной структурой можно сформулировать три задачи.

Задача 5^Ia^. В параллелограмме *ABCD* биссектрисы углов $\angle BAD$ и $\angle ABC$ пересекаются в точке *M*. Доказать, что, если точка *M* не лежит на *DC*, то $AB \neq 2AD$.

Задача 5^Iб^. В параллелограмме *ABCD* биссектрисы углов $\angle BAD$ и $\angle ABC$ пересекаются в точке *M*. Доказать, что, если точка *M* внутренняя для *ABCD*, то $AB<2CD$.

Задача 5^Iв^. В параллелограмме *ABCD* биссектрисы углов $\angle BAD$ и $\angle ABC$ пересекаются в точке *M*. Доказать, что, если точка *M* внешняя для *ABCD*, то $AB>2CD$.

<u>Задача 5^{II}</u>. $p_1 \wedge \bar{q} \wedge p_3 \to \bar{p}_2$.

Для параллелограмма *ABCD* известно, что *AB*=2*CD*. На биссектрисе угла *BAD* взята точка *M*, которая не лежит на стороне *DC*. Доказать, что *BM* не вляется биссектирисой угла *ABC*.

<u>Задача 5^{III}</u>. $\bar{q} \wedge p_2 \wedge p_3 \to \bar{p}_1$.

Так как p_1 и p_2 равноправные суждения, то задача 5^{III}, по сути, не отличается от задачи 5^{II}, поэтому ее формулировку мы опускаем.

Отметим, что посредством «логического алжебра», используя задачу 4 в качестве отправной, тоже можно составить серию эквивалентных задач.

Вывод. Использование метода «обращения» при составлении математических задач позволяет достигать дидактических, развивающих и воспитательных целей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баев Б. Приложение на взаимно-свързаните твърдения за съставяне на задачи / Баев Б., Пашов И. // В Сб.: Материали от програмата на Шуменския полуден на X пролетна конференция на СМБ. – Шумен, 1981. – С. 102-110.
2. Ганчев Ив. Основни учебни дейности в урока по математика (синтез на резултати от различни изследвания). – С.: Модул-96», 1999. – 198 с.
3. Ганчев Ив. Логически модели в методиката на обучение по математика / Ив. Ганчев // В: «Юбилейна научна конференция 25 г. ШУ», Математика и информатика, част II. – Шумен, 1998. – С. 49-52.
4. Моллов А. Някои идеи за съставяне на задачи и системи от такива, свързани с училищния курс по математика / А. Моллов.– Автореферат. – София, 1987.
5. Столяр А. А. Педагогика на математиката / А.А. Столяр. – София: «Народна просвета», 1976. – 408 с.

РЕЗЮМЕ

Бойкина Д. В. Составления математических задач методом «обращение».

Обоснована актуальность осуществления деятельности составление заданий. Составления математических задач становится необходимым элементом процесса обучения методике преподавания математики студентов – будущих учителей на современном этапе образования. Существуют различные методы составления задач. Рассмотрен метод «обращения» для составления педагогически целесообразной системы математических задач. Применение метода «обращение» связано с формулировкой так называемых обратных утверждений к данному истинного утверждения. Таким образом, значительно увеличивается число задач, которые можно сложить. Использование метода «обращение» при составлении математических задач позволяет достигать дидактических, развивающих и воспитательных целей.

***Ключевые слова**: система задач, метод «обращения», составление задач.*

SUMMARY

Boykina D. Creating mathematical problems using the «reverse» method

Actuality operate assembly tasks. Preparation of mathematical problems is an essential element of training methods of teaching mathematics students – future teachers at the present stage of education. There are various methods of assembly tasks. The method of «treatment» for assembling pedagogically expedient of mathematical problems. Application of the «treatment» is concerned with the formulation of the so-called inverse statements to present a true statement. Thus, significantly increases the number of tasks that can be folded. Using the method of «treatment» in the preparation of mathematical problems can achieve didactic, developmental and educational goals.

Key words: *a system of problems, the «reverse» method «, creating problems.*