Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X
DOI: 10.31110/2413-1571
https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/2413-1571-2022-036-4-008 УДК 378.147

РОЗВИТОК SOFT SKILLS У МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ»

DEVELOPMENT OF PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' SOFT SKILLS STUDYING THE TOPIC "DIOPHANTINE EQUATIONS"

Тетяна ЛУКАШОВА
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
tanya.lukashova2015@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1465-9530
Марина ДРУШЛЯК ✉
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
marydru@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0002-9648-2248
Юрій ХВОРОСТІНА
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
khvorostina13@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8354-944X

Tetiana LUKASHOVA
Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine
tanya.lukashova2015@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1465-9530
Marina DRUSHLYAK ✉
Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine
marydru@fizmatsspu.sumy.ua
https://orcid.org/0000-0002-9648-2248
Yurii KHVOROSTINA
Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine
khvorostina13@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8354-944X

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *У сучасному світі роботодавці не в останню чергу звертають увагу на якості майбутнього – soft skills («Система 4К» – Колаборація, Комунікація, Креативність, Критичне мислення), які повинен мати майбутній конкурентноспроможний фахівець, особливо вчитель, оскільки це професія, у якій soft skills та hard skills відіграють рівнозначну роль.*

Матеріали і методи. *Системний аналіз наукової, навчальної та методичної літератури; порівняння та синтез теоретичних положень; узагальнення власного педагогічного досвіду.*

Результати. *Результати дослідження висвітлюють можливі шляхи вирішення проблеми розвитку soft skills майбутніх вчителів математики на прикладі вивчення теми «Діофантові рівняння» в курсі «Олімпіадна математика» освітньої програми «Середня освіта (Математика. Інформатика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка. Не претендуючи на повноту, автори виділяють десять найбільш поширених методів розв'язування діофантових рівнянь, кожен з яких проілюстровано відповідними прикладами з детальними поясненнями.*

Висновки. *В ході вивчення теми розвиваються такі soft skills, як креативність (вміння застосовувати евристичні прийоми; уміння використовувати набуті знання в нестандартних ситуаціях; здатність генерувати ідеї розв'язання); логічне мислення; критичне мислення (визначення типу діофантового рівняння та раціональний вибір того чи іншого методу його розв'язування, уміння «побачити родзинку», що дає ключ до розв'язку; здатність ставити конструктивні запитання в ході колективного розв'язування рівнянь на заняттях, аналізувати, аргументувати та оцінювати ідеї та розв'язання); комунікація (вміння відстоювати свою точку зору, аргументувати, чому обрано конкретний метод, чому інші методи не підходять до розв'язування заданого типу діофантового рівняння); навички тайм-менеджменту при встановленні дедлайнів виконання домашніх, індивідуальних завдань тощо, вміння при цьому раціонально розподіляти свій час; вміння вчитися, оскільки більшість часу освітньої компоненти відводиться на самостійне вивчення.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: soft skills; майбутні учителі математики; діофантові рівняння; методи розв'язування діофантових рівнянь.

ABSTRACT

Formulation of the problem. *In today's world, employers pay attention to the qualities of the future – soft skills ("System Four Cs» – Collaboration, Communication, Creativity, Critical thinking), which a future competitive specialist, especially a teacher, must have, since this is a profession in which soft skills and hard skills play an equal role.*

Materials and methods. *System analysis of scientific, educational, and methodical literature; comparison and synthesis of theoretical positions; generalization of own pedagogical experience.*

Results. *The results of the study highlight possible ways to solve the problem of developing of pre-service mathematics teachers' soft skills on the example of studying the topic "Diophantine Equations" in the course "Olympic Mathematics" of the educational program "Secondary Education (Mathematics. Computer Science)" of the second (master's) level of higher education at Makarenko Sumy State Pedagogical University. Without pretending to be complete, the authors highlight the ten most common methods of solving Diophantine equations, each of which is illustrated by relevant examples with detailed explanations.*

Conclusions. *During the study of the topic, such soft skills as creativity (the ability to apply heuristic techniques; the ability to use the acquired knowledge in non-standard situations; the ability to generate solution ideas); logical thinking; critical thinking (determining the type of Diophantine equation and the rational choice of one or another method of solving it, the ability to "see the highlight" that gives the key to the solution; the ability to ask constructive questions during the collective solving of equations in classes, analyze, argue and evaluate ideas and solutions); communication (the ability to defend one's point of view, to argue why a specific method is chosen, why other methods are not suitable for solving a given type of Diophantine equation); time management skills when setting deadlines for completing homework, individual tasks, etc., the ability to rationally allocate your time; the ability to learn, since most of the time of the educational component is devoted to independent study, are developed.*

KEYWORDS: soft skills; pre-service mathematics teachers; Diophantine equations; methods of solving Diophantine equations.

Для цитування:
Лукашова Т., Друшляк М., Хворостіна Ю. Розвиток soft skills у майбутніх учителів математики при вивченні теми «Діофантові рівняння». *Фізико-математична освіта*, 2022. Том 36. № 4. С. 57-63. DOI: 10.31110/2413-1571-2022-036-4-008
Лукашова, Т., Друшляк, М., & Хворостіна, Ю. (2022). Розвиток soft skills у майбутніх учителів математики при вивченні теми «Діофантові рівняння». *Фізико-математична освіта*, 36(4), 57-63. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-036-4-008

For citation:
Lukashova, T., Drushlyak, M., & Khvorostina, Yu. (2022). Development of pre-service mathematics teachers' soft skills studying the topic "Diophantine Equations". *Physical and Mathematical Education*, 36(4), 57-63. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-036-4-008
Lukashova, T., Drushlyak, M., & Khvorostina, Yu. (2022). Rozvytok soft skills u maibutnikh uchyteliv matematyky pry vyvchenni temy «Diofantovi rivniannia» [Development of pre-service mathematics teachers' soft skills studying the topic "Diophantine Equations"]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 36(4), 57-63. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-036-4-008

✉ Corresponding author

ВСТУП

Постановка проблеми. При акредитації освітніх програм, серед іншого, звертається увага на те, яким чином освітня програма дозволяє забезпечити набуття упродовж періоду навчання здобувачами вищої освіти так званих soft skills, які відповідають цілям та результатам навчання освітньої програми. У науковій літературі можна зустріти синонімічні терміни «гнучкі навички», «м'які навички», «соціальні навички», «навички успішності», «навички XXI століття» тощо, але на думку Н. А. Тарасенкової, яку ми поділяємо, доцільно вживати англомовний термін «soft skills», оскільки складова синонімічних термінів «навичка» не відображає суті цього поняття: «у даному понятті йдеться про комплекс певних знань (чи інтуїтивних, невербалізованих передзнань), умінь, досвіду, ставлень, який як цілісність апріорі не може набути якості автоматизму (вродженого чи набутого), оскільки в численних проявах і застосуваннях нерідко передбачає розгортання цілої діяльності, її свідомого та підсвідомого (чи надсвідомого) супроводу й почасти вербалізації принаймні окремих її фрагментів» (Тарасенкова, 2019).

На Всесвітньому економічному форумі в 2018 році було визначено десять провідних soft skills як комплекс неспеціалізованих, важливих для кар'єри надпрофесійних здатностей, які відповідають за успішну участь у робочому процесі, високу продуктивність і є наскрізними, тобто не пов'язані з конкретною предметною областю. Це здатність вирішувати складні проблеми, критичне мислення, креативність, навички управління людьми, навички міжособистісного спілкування, емоційний інтелект, здатність робити висновки та приймати рішення, орієнтованість на клієнта, навички ведення переговорів, здатність легко та швидко навчатися новому. Узагальненням цих десяти провідних soft skills є «Four Cs» (Collaboration, Communication, Creativity, Critical thinking) – «Система 4К» (Колаборація, Комунікація, Креативність, Критичне мислення) (10 Top Soft Skills for 2020: What They Are and How To Train Them, 2016).

L. Lippman, R. Ryberg, K. Carney та A. Moore (2015) дотримуються поділу soft skills на п'ять груп: розумові (когнітивні) здатності (критичне мислення, навички вирішення проблем, інноваційне мислення, управління інтелектуальним навантаженням, навички самоосвіти, інформаційні навички); соціальні здатності (міжособистісні навички, групова робота, лідерство, соціальний інтелект, відповідальність,); комунікативні здатності (комунікативні навички, етика спілкування); здатності самоконтролю (здатність контролювати імпульси, спрямовувати та зосереджувати увагу, керувати емоціями та регулювати поведінку, тайм-менеджмент); здатності позитивної самооцінки (емоційний інтелект, емпатія) (Lippman et al., 2015).

Це якості майбутнього, які повинен мати майбутній конкурентноспроможний фахівець і на які не в останню чергу звертають увагу роботодавці. Зокрема, фахівці у HR-сфері рекомендують навчитися планувати свій розвиток, стежити за інноваціями, постійно набувати нового досвіду, брати на себе складні завдання, використовувати різні форми навчання (підвищення кваліфікації, самонавчання, курси, майстер-класи, тренінги, семінари). Науковці наголошують на проблемі невідповідності результатів навчання в університетах, які зосереджуються на традиційному навчанні та набутті випускниками hard skills, та вимогами роботодавців, які звертають увагу на рівень розвитку softs kills у випускників. У цьому напрямку відмітимо роботу (Munir, 2021), який акцентує дану проблему у системі професійної підготовки інженерів. Саме тому при оцінюванні освітньої програми така увага приділяється саме формуванню soft skills. Причому Н.А. Бородіна, С.І. Чеберячко та Н.А. Шевчук (2020) вважають, що «існує направленість лише на надання програмних результатів навчання, а навички soft skills визначаються як соціальна спрямованість цих програмних результатів навчання». Особливо дана проблема актуалізується в системі підготовки майбутніх учителів, оскільки вчитель – це професія, у якій soft skills та hard skills відіграють рівнозначну роль, на чому наголошують, зокрема R. Ağçami та A. Doğanii (2021).

Навчання математики, серед іншого, має високий потенціал щодо можливості розвитку soft skills. Це підтверджують розвідки (Cardoso-Espinosa et al., 2021; Semoushin et al., 2003; Stytsyuk et al, 2022), де аналізуються можливості проєктного навчання та технологій STEM освіти в контексті розвитку soft skills.

При реалізації освітньої програми soft skills розвиваються в тій чи іншій мірі у межах всіх пропонованих освітніх компонент. Але повернемо вектор дослідження до освітньої компоненти ОК 5 «Олімпіадна математика» освітньої програми «Середня освіта (Математика. Інформатика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти (https://sspu.edu.ua/images/2022/docs/opp/2022_opp_so_matematika_informatika_m_1_a1159.pdf) Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка, що обумовлює **мету статті** – розкрити потенціал вивчення теми «Діофантові рівняння» олімпіадної математики у контексті розвитку soft skills майбутніх вчителів математики.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення мети були використані методи теоретичного рівня наукового пізнання: аналіз наукової літератури, синтез, формалізація наукових джерел, опис, зіставлення, узагальнення власного досвіду.

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Процес вивчення усіх без винятку математичних дисциплін передбачає кількісне накопичення знань та їх якісну переробку із подальшим узагальненням. Не секрет, що більшості студентів бракує уміння застосовувати свої знання на практиці, і, як наслідок, самостійно і творчо поповнювати їх, розширювати свої практичні вміння та навички і використовувати їх до розв'язування більш складних задач, що передбачають певну евристичну складову. Це обумовлено цілим рядом причин, але одним зі шляхів подолання цих труднощів є урівноважений розвиток hard skills та soft skills.

Широкі можливості до їх формування надає саме курс «Олімпіадна математика», який передбачає з одного боку, наявність у майбутніх учителів математики hard skills (ґрунтовних знань з багатьох розділів елементарної математики, теорії чисел, уміння застосовувати їх до розв'язування стандартних задач, знання типів діофантових рівнянь та методів їх розв'язування, вміння гармонійно поєднувати алгоритмічні методи і штучні прийоми розв'язання діофантових рівнянь), а з іншого, – певного рівня розвитку soft skills (сформованості вмінь застосовувати евристичні прийоми, гарної інтуїції, високого рівня розвитку логічного мислення, уміння використовувати набуті знання в нестандартних ситуаціях, вміння «побачити родзинку», що дає ключ до розв'язку, що характеризує високий рівень розвитку критичного мислення).

Розглянемо можливості розвитку soft skills у майбутніх вчителів математики на прикладі вивчення однієї з найпопулярніших тем олімпіадної математики – теми «Діофантові рівняння».

Нагадаємо, що *діофантовими* називаються невизначені рівняння з цілими (раціональними) коефіцієнтами, в яких значення невідомих, що задовольняють рівняння, є цілими числами. Як правило, запис умови діофантового рівняння відзначається простотою і не потребує спеціальних знань. Добре відомі алгоритми розв'язування лінійних діофантових рівнянь з двома (трьома) невідомими, а також діофантових рівнянь другого степеня з двома невідомими. Проте, загального алгоритму, який би дозволяв розв'язати будь-яке конкретне діофантове рівняння немає. Ще у 1900 році на Другому міжнародному конгресі математиків німецький учений Давид Гільберт оголосив список з 23 найважливіших, на його думку, невирішених на той час математичних проблем, які вплинули на подальший розвиток математики. Десята проблема стосувалася діофантових рівнянь і полягала у пошуку універсального алгоритма, за допомогою якого можна встановити, чи є кожне конкретне діофантове рівняння розв'язним. Негативну відповідь на це питання дав у 1970 році Ю. В. Матіясевич. Таким чином, не існує й загального метода, який давав би ключ до розв'язання довільного діофантового рівняння. У зв'язку із цим кожне нелінійне діофантове рівняння є певною мірою унікальним, а його розв'язання передбачає як використання й аналіз вже відомих засобів і алгоритмів, так і пошук нових методів.

Розглянемо загальні та евристичні ідеї та прийоми, які застосовуються при розв'язуванні діофантових рівнянь. Не претендуючи на повноту, виділимо наступні, найбільш поширені методи розв'язування діофантових рівнянь:

1) застосування властивостей подільності, ідеї парності;
2) метод повної індукції або перебору;
3) метод послідовного виділення цілої частини (метод розсіювання);
4) метод остач та застосування властивостей конгруенцій;
5) порівняння останньої цифри виразів, що стоять у правій та лівій частинах рівняння;
6) метод нескінченного спуску;
7) пошук взаємно простих (примітивних) розв'язків;
8) ідея симетричності;
9) метод затискання;
10) метод уведення нової змінної та оцінки її значень.

Зазначимо, що наведений поділ є дуже умовним, оскільки часто доводиться комбінувати декілька методів, а вказані вище прийоми у різних джерелах можуть мати різну назву. Окрім того, використання кожного із зазначених методів передбачає використання цілого комплексу фактів теорії подільності цілих чисел та елементарної математики й наявність відповідних умінь (уміння групувати, розкладати вирази на множники, виділяти повний квадрат або куб тощо).

Розглянемо особливості застосування вказаних методів до розв'язування діофантових рівнянь.

Метод 1. Застосування властивостей подільності, ідея парності. При розв'язуванні діофантових рівнянь, окрім загальних властивостей подільності цілих чисел, використовуються спеціальні твердження щодо подільності сум і добутків. Наведемо деякі з них:

1) добуток двох послідовних цілих чисел ділиться на 2, трьох послідовних чисел – на 3!=6, відповідно, k чисел – на k!:
$$n(n+1) \vdots 2,\ n(n+1)(n+2) \vdots 3! \quad n(n+1)\dots(n+k-1) \vdots k!,\ k! = 1\cdot 2\cdot\ldots k;$$
2) добуток двох послідовних парних чисел ділиться на 8: $2n(2n+2) \vdots 8$;
3) $(a^n - b^n) \vdots (a-b),\ n \in N$;
4) $(a^{2n} - b^{2n}) \vdots (a \pm b), n \in N$;
5) $(a^{2n+1} + b^{2n+1}) \vdots (a+b), n \in N$.

Окремої уваги заслуговує питання *парності* сум та добутків цілих чисел. Очевидними і в той же час надзвичайно корисними у багатьох випадках є наступні властивості:

1) сума і різниця довільної кількості парних чисел є числом парним;
2) сума і різниця парної кількості непарних чисел – число парне;
3) добуток непарних чисел є числом непарним і навпаки;
4) сума і різниця цілих чисел мають одну й ту ж парність.

Проілюструємо тепер використання цих властивостей на прикладах.

Приклад 1.1. Розв'язати в цілих числах рівняння $xy(x+1)(y+1) = 2022$.

Розв'язання. Оскільки значення невідомих x та y є цілими числами, то вираз у лівій частині ділиться на 4 (бо містить добутки $x(x+1)$ та $y(y+1)$ послідовних цілих чисел), тому й ліва частина рівняння має ділиться на 4. Але $2022 \not\vdots 4$. Маємо суперечність. Отже, рівняння не має цілих розв'язків.

Приклад 1.2. Розв'язати в цілих числах рівняння $(2x+5y+1)(2^{|x|}+x^2+x+y) = 21$.

Розв'язання. Зрозуміло, що значення виразів, що стоять у кожній з дужок є числами непарними (бо їх добуток дорівнює 21). Оскільки $x^2+x = x(x+1) \vdots 2$, то при $x \neq 0$ значення виразу $(2^{|x|}+x^2+x)$ є числом парним. Отже, y – непарне, бо непарним є вираз $(2^{|x|}+x^2+x+y)$. У такому випадку значення виразу у перших дужках буде парним як сума парного числа і парної кількісті непарних чисел. Маємо протиріччя. Отже, $x = 0$.

Підставивши це значення у вихідне рівняння, одержимо $(5y+1)(y+1) = 21$. Останнє рівняння цілих розв'язків не має, отже, й вихідне рівняння не має розв'язків у $\mathbb{Z}$.

Метод 2. Метод повної індукції або метод перебору. Як відомо, метод повної індукції передбачає встановлення істинності загальних тверджень на основі перебору усіх можливих варіантів. Тому іноді цей метод називають методом перебору. Розглянемо застосування цього методу на прикладах.

Приклад 2.1. Довести, що рівняння $x^2+3y = 2$ не має розв'язків у множині цілих чисел.

Розв'язання. Припустимо, що дане рівняння має цілі розв'язки. Тоді за теоремою про ділення з остачею для числа x маємо одну з трьох можливостей: $x = 3n, x = 3n+1$ і $x = 3n+2$, де $n \in \mathbb{Z}$.

Нехай $x = 3n$. Тоді $x^2 + 3y = 9n^2 + 3y \vdots 3$ і рівність $x^2 + 3y = 2$ у цьому випадку неможлива.

Нехай $x = 3n + 1$. Тоді $x^2 + 3y = 9n^2 + 6n + 1 + 3y = 3(3n^2 + 2n + y) + 1 \neq 2$ (бо ліва і права частина рівняння дають різні остачі при діленні на 3). Маємо протиріччя.

У випадку $x = 3n + 2$ маємо: $x^2 + 3y = 9n^2 + 12n + 4 + 3y = 3(3n^2 + 2n + 1 + y) + 1 \neq 2$ (бо, як і вище, ліва і права частина рівняння дають різні остачі при діленні на 3). Маємо протиріччя, тому припущення неправильне і дане рівняння цілих розв'язків не має.

Умову рівняння, поданого у Прикладі 2.1, можна переформулювати наступним чином: довести, що квадрати цілих чисел при діленні на 3 не можуть давати остачу 2.

У багатьох випадках перед застосуванням методу перебору корисно перетворити рівняння, розклавши вирази, що містять невідомі, на множники, або виділити повні квадрати. Подальше розв'язування полягає у переборі отриманих варіантів та зведенні рівняння до еквівалентної сукупності систем більш простих рівнянь.

Приклад 2.2. Знайти цілі розв'язки рівняння $xy = x + y + 4$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння так, щоб отримати добуток виразів, що дорівнює деякому числу. Маємо: $xy - x - y + 1 = 5$, $x(y - 1) - (y - 1) = 5$ або $(x - 1)(y - 1) = 5$. Оскільки 5 – просте число, то вираз у кожній з дужок може набувати лише наступних значень.

$(x-1)$	$(y-1)$	x	y
1	5	2	6
-1	-5	0	-4
5	1	6	2
-5	-1	-4	0

Зауважимо, що подібні міркування можна застосувати й до знаходження цілочислових розв'язків рівняння $(5y + 1)(y + 1) = 21$, яке наводилося вище у коментарі до Прикладу 1.2.

Приклад 2.3. Розв'язати рівняння $x^2 + y^2 = x + y + 2$ в цілих числах.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на 4 і виділимо повні квадрати по обом змінним:

$4x^2 + 4y^2 = 4x + 4y + 8$, $4x^2 - 4x + 4y^2 - 4y = 8$, $(4x^2 - 4x + 1) + (4y^2 - 4y + 1) = 10$,

$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 10$.

Оскільки $(2x - 1)^2 \geq 0$, $(2y - 1)^2 \geq 0$ і кожен з доданків лівої частини – повний квадрат, маємо наступні випадки:

$(2x-1)^2$	$(2y-1)^2$	$2x-1$	$2y-1$	x	y
1	9	± 1	± 3	1,0	2, –1
9	1	± 3	± 1	2, –1	1,0

Отже, розв'язками рівняння є пари чисел: (1,2), (1,–1), (0,2), (0,-1), (2,1), (–1,1), (2,0), (-1,0).

Метод 3. Метод послідовного виділення цілої частини (метод розсіювання). Ідея цього методу полягає у вираженні однієї змінної через іншу з наступним виділенням цілої частини отриманих алгебраїчних дробів та використанням властивостей подільності. Метод розсіювання застосовується, як правило, до тих рівнянь, що мають дві невідомих, причому степінь однієї з них вища за степінь іншої.

Приклад 3.1. Знайти цілі розв'язки рівняння $3x^2 + y - 3xy + 5x + 5 = 0$.

Розв'язання. Виразимо змінну y через x:

$3x^2 + 5x + 5 = 3xy - y$, $y(3x - 1) = 3x^2 + 5x + 5$, $y = \frac{3x^2+5x+5}{3x-1}$, $y = x + 2 + \frac{7}{3x-1}$.

Оскільки y є цілим числом, то $\frac{7}{3x-1} \in \mathbb{Z}$, іншими словами $7 \vdots (3x - 1)$, звідки $3x - 1 = \pm 1$ або $3x - 1 = \pm 7$. Враховуючи, що $x \in \mathbb{Z}$, маємо $x = 0$ і $x = -2$. Відповідно, $y = -5$ та $y = -1$. Таким чином, розв'язками даного рівняння є пари чисел (0, –5) і (–2, –1).

Метод 4. Метод остач та застосування властивостей конгруенцій. Даний метод застосовується для обґрунтування того, що задане діофантове рівняння не має розв'язків і полягає в аналізі остач, які можуть давати ліва й права частини рівняння при діленні на деяке натуральне число. Це число необхідно вибрати так, щоб вказані множини остач не перетинались.

Корисними у даному випадку є використання властивостей остач:

- при додаванні (відніманні) чисел, остачі від ділення на дане число додаються (віднімаються);
- при множенні чисел остачі від ділення на дане число перемножаються;
- при піднесенні числа до натурального степеня, остачі від ділення на дане число підноситься до того ж степеня.

Узагальненням методу остач є метод застосування конгруенцій, який розглядався авторами в (Лукашова, та ін., 2022).

Досить корисною при застосуванні даного методу є Таблиця 1, в якій наведено можливі узагальнені остачі, які дають квадрати, куби і біквадрати цілих чисел при діленні на 3, 4, 5, 7 і 8. Узагальненими остачами називатимемо найменші за величиною числа, конгруентні з даним за вказаним модулем.

Таблиця 1

Значення узагальнених остач від ділення деяких степенів a на число *n*

n	a^2	a^3	a^4
3	0, 1		0, 1
4	0, 1		0, 1
5	0, 1, –1		0, 1
7		0, 1, –1	
8	0, 1, 4		0, 1

Приклад 4.1. Розв'язати рівняння в цілих числах $21x^2 + 22y^2 = 2122$.

Розв'язання. Порівняємо остачі, які дають при діленні на 3 ліва і права частини рівняння:

$21x^2 \equiv 0(mod\ 3), y^2 \equiv \left[\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.(mod\ 3),$ тому $22y^2 \equiv \left[\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.(mod\ 3).$

Отже, $21x^2 + 22y^2 \equiv \left[\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.(mod\ 3)$. З іншого боку, $2122 \equiv 1(mod\ 3)$. Отже, остачі лівої і правої частин рівняння при діленні на 3 різні. Це означає, що дане рівняння не має цілих розв'язків.

Метод 5. Порівняння останньої цифри виразів, що стоять у правій та лівій частинах рівняння. Даний метод є частинним випадком попереднього, оскільки остання цифра числа є остачею від ділення на 10. У Таблиці 2 наведено останні цифри степенів a^n $(n = 1,2,3,4,5)$ залежно від останньої цифри a . Як видно з таблиці, останні цифри чисел a та a^5 однакові.

Таблиця 2

Знаходження останньої цифри степенів числа *a*

a	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
a^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
a^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
$\boldsymbol{a^5}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Таким чином, щоб знайти останню цифру числа a^n, потрібно знайти остачу *r* від ділення показника n на 4. Якщо остача $r \neq 0$, то останню цифру числа a треба піднести до степеня r; якщо $r = 0$, то останню цифру підносимо до степеня 4 (для парного a вона рівна 0 або 6; для непарного – відповідно 1 або 5).

Приклад 5.1. Розв'язати рівняння $x^{2020} + y^{2020} = 2022^{2022}$ в цілих числах.

Розв'язання. Оскільки права частина рівняння парна, то числа x та y мають однакову парність. Більш того, враховуючи, що $2022^{2022} ⋮ 4$, нескладно довести, що x та y парні. Тоді x^{2020} та y^{2020} закінчуються на 0 або 6. Отже, їх сума закінчується 0, 2 або 6. З іншого боку, відповідно до сформульованого вище правила, 2022^{2022} закінчується на 4. Таким чином, ліва і права частина закінчуються різними цифрами, тобто дане рівняння не має цілих розв'язків.

Метод 6. Метод нескінченного спуску. В основу даного метода покладено процес побудови нескінченної спадної послідовності цілих додатних чисел. Оскільки кожна така послідовність має лише скінченне число членів, то маємо суперечність, а відповідне рівняння не матиме розв'язків у множині натуральних чисел.

Приклад 6.1. Розв'язати рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ в цілих невід'ємних числах.

Розв'язання. Очевидним розв'язком даного рівняння є трійка чисел (0,0,0). Зрозуміло також, що якщо одна зі змінних дорівнює 0, то й дві інших також є нулями. Отже, далі будемо вважати, що $x, y,$ та z є натуральними числами. Оскільки права частина рівняння ділиться на 2, то і ліва має ту ж властивість. Це можливо лише за умови, коли значення усіх змінних $x, y,$ та z парні або ж два з них непарні, а одне – парне. Проте, в останньому випадку ліва частина $x^2 + y^2 + z^2$ ділиться лише на 2, а права – $2xyz$ – на 4. Отже, $x = 2x_1, y = 2y_1$ та $z = 2z_1$. Підставивши знайдені значення у вихідне рівняння, дістанемо: $(2x_1)^2 + (2y_1)^2 + (2z_1)^2 = 16x_1y_1z_1$, звідки

$${x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2 = 4x_1y_1z_1.$$

Застосовуючи до останнього рівняння наведені вище міркування, дістанемо $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$ та $z_1 = 2z_2$ і, відповідно, ${x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2 = 8x_2y_2z_2$. Продовжуючи процес далі, дістаємо нескінченну спадну послідовність натуральних чисел $x > x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots > 0$, де $x_n = 2x_{n+1}$.

Проте, кожна спадна послідовність натуральних чисел має бути скінченною. Суперечність. Отже, дане рівняння не має натуральних розв'язків і трійка (0,0,0) – єдиний розв'язок даного рівняння.

Метод 7. Пошук взаємно простих (примітивних) розв'язків. Даний метод застосовується до рівнянь, які разом із розв'язком $(x, y, z, ..)$ мають розв'язок $(kx, ky, kz, ..), k \in Z$. Тоді набір чисел $(x, y, z, ..)$, який задовольняє рівняння, можна шукати, виходячи з того, що вони є взаємно простими (у сукупності). Як правило, відповідне міркування або приводить до протиріччя (і відповідне рівняння не має ненульових розв'язків) або дозволяє мінімізувати перебір можливих варіантів значень невідомих.

Приклад 7.1. Розв'язати рівняння $6x^3 + 12y^3 + 2022xyz = 2023z^3$ в цілих числах.

Розв'язання. Очевидно, що набір (0,0,0) задовольняє дане рівняння. Нехай одна зі змінних дорівнює 0. Тоді підставляючи нуль замість невідомої в рівняння та застосовуючи метод нескінченного спуску, приходимо до того, що воно не має ненульових розв'язків. Отже, далі будемо вважати, що $x \neq 0, y \neq 0$ та $z \neq 0$.

Нехай (x, y, z) – розв'язок даного рівняння. Тоді його розв'язком є трійка чисел $(kx, ky, kz), k \in Z$. Отже, можна вважати, що числа x, y, z взаємно прості. Оскільки ліва частина рівняння ділиться на 2, то й $z^3 ⋮ 2$, звідки в силу того, що 2 – просте число, $z ⋮ 2$ і $z = 2z_1$. Підставимо це значення у вихідне рівняння й скоротимо обидві частини на 2:

$$3x^3 + 6y^3 + 2022xyz_1 = 2023 \cdot 4z_1^3.$$

Аналогічно, в останньому рівнянні $3x^3 ⋮ 2$, тому $x ⋮ 2$ і $x = 2x_1$. Після підстановки цього значення у отримане на останньому кроці рівняння й скорочення обох частин на 2, одержимо

$$3 \cdot 4x_1^3 + 3y^3 + 2022x_1yz_1 = 2023 \cdot 2z_1^3.$$

Застосовуючи до останнього рівняння ті ж міркування, приходимо до висновку, що $y = 2y_1$. Але у такому випадку числа x, y, z не взаємно прості (бо вони кратні 2). Маємо суперечність із припущенням. Отже, єдиним розв'язком даного рівняння є трійка чисел (0,0,0).

Метод 8. Ідея симетричності. Рівняння $F(x, y, z, \ldots) = 0$ від невідомих $x, y, z, \ldots$ називається *симетричним*, якщо воно не змінюється при довільних перестановках цих змінних: $F(x, y, z, \ldots) = F(y, x, z, \ldots) = F(z, x, y, \ldots) = \ldots = 0.$

Зрозуміло, що разом з кожним набором $(x_0, y_0, z_0, \dots)$, що задовольняє дане рівняння, його розв'язками є усі набори чисел, утворені перестановками компонент $x_0, y_0, z_0, \dots$ вказаного розв'язку. Тому можна шукати значення невідомих $x, y, z, \dots$, виходячи з умови $|x| \le |y| \le |z| \le \dots$ (тобто, зводячи подальше розв'язання до перебору), й записуючи у відповідь усі можливі перестановки знайдених значень.

Приклад 8.1. Знайти натуральні розв'язки рівняння $xy + yz + xz = xyz$.

Розв'язання. Очевидно, що дане рівняння є симетричним, бо воно не змінюється при довільних перестановках змінних. Нехай значення x, y, z такі, що $x \le y \le z$. Розділимо обидві частини рівняння на $xyz \ne 0$:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

Тоді, враховуючи умову $x \le y \le z$, маємо $\frac{1}{z} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{x}$, звідки $1 = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$, $\frac{3}{x} \ge 1$ і $x \le 3$. Отже, $x = 1$, або $x = 2$ або $x = 3$. Якщо $x = 1$, маємо рівняння $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = 0$, яке не має натуральних розв'язків. У випадку $x = 2$, маємо $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, звідки $y = 3, z = 6$ і $y = 4, z = 4$. Нарешті, у випадку випадку $x = 3$, дістаємо рівняння $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$, розв'язками якого є числа $y = 3, z = 3$. Отже, розв'язками даного рівняння є трійки чисел (2,3,6), (2,4,4) та (3,3,3) та всі набори, що утворюються перестановками цифр у вказаних розв'язках (загалом маємо 10 наборів-розв'язків).

Метод 9. Метод затискання. Суть даного методу полягає у тому, щоб довести, що кожна з невідомих може змінюватися лише у скінченному проміжку, а, отже, звести задачу до перебору (Бурбан, 1996). Частково цей метод був застосований до рівняння з Прикладу 8.1, проте окрім простих оцінок значень невідомих в деяких випадках корисно застосовувати більш складні співвідношення, наприклад, «затискати» вирази, які входять у рівняння, між квадратами (або кубами) послідовних цілих чисел. Розглянемо застосування цього прийому на прикладі.

Приклад 9.1. Розв'язати рівняння $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$ в цілих числах.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на 4 і додамо до обох частин одиницю:

$$4x^2 + 4x + 1 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1.$$

Тоді в лівій частині рівняння стоїть повний квадрат $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$. Виділимо повний квадрат у правій частині $4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y)^2 + 3y^2 + 4y + 1$. З іншого боку,

$$4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y + 1)^2 – y^2 + 2y.$$

Отже, $(2x+1)^2 = (2y^2 + y)^2 + 3y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y + 1)^2 – y^2 + 2y$. Тоді за умов

$$3y^2 + 4y + 1 > 0 \text{ і } –y^2 + 2y < 0 \text{ має місце нерівність:}$$

$$(2y^2 + y)^2 < (2x+1)^2 < (2y^2 + y + 1)^2.$$

Тобто, за вказаних умов значення квадрата $(2x+1)^2$ цілого виразу «затиснуто» між квадратами послідовних цілих чисел. Зрозуміло, що така ситуація неможлива і цілих значень x та y, які б задовольняли останню нерівність, не існує. Отже, дане рівняння має цілі розв'язки лише у випадку невиконання умов $3y^2 + 4y + 1 > 0$ та $–y^2 + 2y < 0$ (тобто, у випадку, коли виконуються нерівності $3y^2 + 4y + 1 \le 0$ або $–y^2 + 2y \ge 0$). Розв'язуючи сукупність $\left[\begin{array}{l} 3y^2 + 4y + 1 \le 0 \\ –y^2 + 2y \ge 0 \end{array}\right.$ в цілих числах, отримуємо значення $y = –1, y = 0, y = 1$ та $y = 2$. Підставляючи їх у початкове рівняння, знаходимо відповідні значення x. Розв'язками рівняння є пари (–1, 0), (0,0), (–1,–1), (0,–1), (5,2) та (–6,2).

Метод 10. Метод уведення нової змінної та оцінки її значень. Вказаний метод застосовується до невизначених рівнянь, що містять дві змінних і передбачає заміну однієї змінної, що входить у рівняння, на суму іншої змінної та деякої довільної сталої, значення якої можна обмежити і звести подальший розв'язок до перебору.

Приклад 10.1. Знайти натуральні розв'язки рівняння $x^3 – y^3 = 2xy + 7$.

Розв'язання. Оскільки $2xy + 7 > 0$, то $x^3 > y^3$, звідки $x > y$. Отже, можна вважати, що $x = y + d$, де $d \ge 1$. Підставивши значення x у рівняння та виконавши відповідні перетворення, одержимо квадратне відносно y рівняння:

$$(3d – 2)y^2 + (3d^2 – 2d)\, y + d^3 = 7.$$

Оскільки перші два доданки у лівій частині останнього рівняння додатні, то $d^3 < 7$. Отже, $d = 1$ і $x = y + 1$. Тоді $y^2 + y – 6 = 0$ і $y = –3$ або $y = 2$. Оскільки $y \in \mathbb{N}$, то перший корінь є стороннім. Отже, $y = 2$ і $x = 3$.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У сучасному світі роботодавці не в останню чергу звертають увагу на якості майбутнього – soft skills, які повинен мати майбутній конкурентноспроможний фахівець, особливо вчитель, оскільки це професія, у якій soft skills та hard skills відіграють рівнозначну роль.

Результати дослідження висвітлюють можливі шляхи вирішення проблеми розвитку soft skills майбутніх вчителів математики на прикладі вивчення теми «Діофантові рівняння» курсу олімпіадної математики.

Оскільки не існує загальних методів розв'язування довільного діофантового рівняння і кожне нелінійне діофантове рівняння у цьому контексті можна вважати певною мірою унікальним, то в ході вивчення теми розвиваються як hard skills (ґрунтовні знання з багатьох розділів елементарної математики, теорії чисел, уміння застосовувати їх до розв'язування стандартних задач, знання типів діофантових рівнянь та методів їх розв'язування), так і soft skills, серед яких:

– креативність (вміння застосовувати евристичні прийоми; уміння використовувати набуті знання в нестандартних ситуаціях; здатність генерувати ідеї розв'язання);

– логічне мислення;

– критичне мислення (визначення «типу» діофантового рівняння та раціональний вибір того чи іншого методу його розв'язування, уміння «побачити родзинку», що дає ключ до розв'язку; здатність ставити конструктивні запитання в ході колективного розв'язування рівнянь на заняттях, аналізувати, аргументувати та оцінювати ідеї та розв'язання);

– комунікація (вміння відстоювати свою точку зору, аргументувати, чому обрано конкретний метод, чому інші методи не підходять до розв'язування заданого типу діофантового рівняння);

– навички тайм-менеджменту при встановленні дедлайнів виконання домашніх, індивідуальних завдань тощо, вміння при цьому раціонально розподіляти свій час;

– вміння вчитися, оскільки більшість часу освітньої компоненти відводиться на самостійне вивчення.

Перспективами подальших досліджень вбачаємо у вивченні особливостей розвитку soft skills у працюючих учителів математики під час підвищення кваліфікації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. 10 Top Soft Skills for 2020: What They Are and How To Train Them (2016). https://www.game-learn.com/en/resources/blog/top-soft-skills-2020-how-to-train-them/.
2. Ağçami, R., & Doğanii, A. (2021). A Study on The Soft Skills of Pre-Service Teachers. *International Journal of Progressive Education*, 17, 4, 35-48. https://doi.org/10.29329/ijpe.2021.366.3.
3. Cardoso-Espinosa, E.O., Cortés-Ruiz, J. A., & Zepeda-Hurtado, E. (2021). The Development of Mathematics and Soft Skills at the Graduate Level through Project-Based Learning in Times of COVID-19. *TEM Journal*, 10, 4, 1638-1644, https://doi.org/10.18421/TEM104-20.
4. Lippman, L. H., Ryberg, R., Carney, K., & Moore, A. (2015). *Workforce connections: key "soft skills" that foster youth. Workforce success: toward a consensus across fields*. Child Trends, Inc.
5. Munir, F. (2021). Do the engineering education institutions provide soft skills education? Views of South African engineering professionals. *South African Journal of Higher Education*, 35, 4, 162-179. http://dx.doi.org/10.20853/35-4-4264.
6. Semoushin, I., Tsyganova, J., & Ugarov, V. (2003). Computational and soft skills development through the project based learning. *International Conference on Computational Science (ICCS 2003)*, 2658, 1098-1106.
7. Stytsyuk, R.Y., Lustina, T.N., Sekerin, V.D., Martynova, M., Chernaysky, M.Y., & Terekhova, N.V. (2022). Impact of STEM education on soft skill development in it students through educational scrum projects. *Revista Conrado*, 18, 84, 183-192.
8. Бородіна, Н.А., Чеберячко, С.І., & Шевчук, Н.А. (2020). Формування навичок soft skills та принципів академічної доброчесності у здобувачів вищої освіти при викладанні дисциплін зі спеціальності «Цивільна безпека». *Вісті Донецького гірничого інституту*, 2(47), 206-214. https://doi.org/10.31474/1999-981x-2020-2-206-214.
9. Бурбан, І. І. (1996). Розв'язування рівнянь у цілих числах методом затискання. *У світі математики*, 2(4), 40-44.
10. Лукашова, Т., Друшляк, М., Шишенко, І., & Покідько, О. (2022). Застосування методів та ідей теорії чисел в шкільному курсі алгебри: необхідність усвідомлення майбутніми вчителями математики. *Фізико-математична освіта*, 35 (3), 59-64. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-035-3-008.
11. Тарасенкова, Н. А. (2019). Формування «soft skills» у навчанні математики: до постановки проблеми. *V Всеукраїнська науково-практична конференція «Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи»*, 19-20 листопада 2019 р. Полтава: Астрая, 22-23.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. 10 Top Soft Skills for 2020: What They Are and How To Train Them (2016). https://www.game-learn.com/en/resources/blog/top-soft-skills-2020-how-to-train-them/.
2. Ağçami, R., & Doğanii, A. (2021). A Study on The Soft Skills of Pre-Service Teachers. *International Journal of Progressive Education*, 17, 4, 35-48. https://doi.org/10.29329/ijpe.2021.366.3.
3. Cardoso-Espinosa, E.O., Cortés-Ruiz, J. A., & Zepeda-Hurtado, E. (2021). The Development of Mathematics and Soft Skills at the Graduate Level through Project-Based Learning in Times of COVID-19. *TEM Journal*, 10, 4, 1638-1644, https://doi.org/10.18421/TEM104-20.
4. Lippman, L. H., Ryberg, R., Carney, K., & Moore, A. (2015). *Workforce connections: key "soft skills" that foster youth. Workforce success: toward a consensus across fields*. Child Trends, Inc.
5. Munir, F. (2021). Do the engineering education institutions provide soft skills education? Views of South African engineering professionals. *South African Journal of Higher Education*, 35, 4, 162-179. http://dx.doi.org/10.20853/35-4-4264.
6. Semoushin, I., Tsyganova, J., & Ugarov, V. (2003). Computational and soft skills development through the project based learning. *International Conference on Computational Science (ICCS 2003)*, 2658, 1098-1106.
7. Stytsyuk, R.Y., Lustina, T.N., Sekerin, V.D., Martynova, M., Chernaysky, M.Y., & Terekhova, N.V. (2022). Impact of STEM education on soft skill development in it students through educational scrum projects. *Revista Conrado*, 18, 84, 183-192.
8. Borodina, N.A., Cheberiachko, S.I., Shevchuk, N.A. (2020). Formuvannia navychok soft skills ta pryntsypiv akademichnoi [Formation of soft skills and principles of academic integrity in students of higher education when teaching the discipline of the specialty "Civil Security"]. *Visti Donetskoho hirnychoho instytutu – News of the Donetsk Mining Institute*, 2(47), 206-214. https://doi.org/10.31474/1999-981x-2020-2-206-214. (in Ukrainian).
9. Burban, I. I. (1996). Rozviazuvannia rivnian u tsilykh chyslakh metodom zatyskannia [Solving equations in whole numbers by the clamping method]. *U sviti matematyky – In the world of mathematics*, 2(4), 40-44. (in Ukrainian).
10. Lukashova, T., Drushliak, M., Shyshenko, I., & Pokidko, O. (2022). Zastosuvannia metodiv ta idei teorii chysel v shkilnomu kursi alhebry: neobkhidnist usvidomlennia maibutnimy vchyteliamy matematyky [The application of methods and ideas of number theory in the school course of algebra: the need for awareness by future teachers of mathematics]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and mathematical education*, 35 (3), 59-64. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-035-3-008. (in Ukrainian).
11. Tarasenkova, N. A. (2019). Formuvannia «soft skills» u navchanni matematyky: do postanovky problemy [The formation of "soft skills" in teaching mathematics: before posing a problem]. In: *V Vseukrainska naukovo-praktychna konferentsiia «Osobystisno oriientovane navchannia matematyky : sohodennia i perspektyvy» – V All-Ukrainian scientific and practical conference "Personally oriented teaching of mathematics: present and prospects"*, Novermber, 19-20, 2019. Poltava: Astraia, 22-23. (in Ukrainian).