ефективність та підготує студентів до свідомого сприйняття лекцій з вищої математики на першому курсі обраного вузу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Алеева А.Я.Методика адаптации иностранных студентов к учебно-информационной среде вуза посредством информационных технологий: дис. кандидата пед. наук: спец. 13.00.02 – Теория и методика обучения информатики, 13.00.08 – Теория и методика профессионального образования / Анна Алеева. – Тамбов – Тамбовский государственный технический университет, 2000. – 212 с.
2. Булгакова Н.Б. Пропедевтическая подготовка в техническом вузе./ Наталия Булгакова. –К. : КМУГА, 1999.-177 с.
3. Сурыгин А.И. Проблемы педагогического проектирования системы предвузовского обучения иностранных учащихся / Александр Игоревич Сурыгин // Актуальные вопросы обучения иностранных студентов. – Воронеж: РЦМАДС ВГУ, 1998. – 123 с.
4. Хинчин А.Я. Педагогические статьи: Вопросы преподавания математики. Борьба с методическими штампами /Александр Яковлевич Хинчин. Серия «Психология, педагогика, технология обучения». 2-е изд. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.

РЕЗЮМЕ

Вихрова Е.В., Зинонос Н.А. Методические особенности обучения математике иноязычных студентов на подготовительных факультетах отечественных вузов. *В статье раскрываются особенности обучения математике иностранных студентов подготовительных отделений. Определены основне условиях эффективности учебного процесса, к которым относятся: специальна подготовка преподавателей математики, наличие адаптированного учебно-методического комплекса, обязательная входная диагностика учебных достижений студентов-иностранцев и проанализировано методические принципы, которые необходимо использовать в процессе работы на подготовительных отделениях университетов. Обучение математике иностранных студентов на подготовительном отделении - это достаточно сложный процесс, который происходит в условиях биологической, педагогической и социокультурной адаптации студентов к новой среде, параллельно с освоением ими языка обучения. Преподавателю необходимо учитывать методические особенности этого процесса - это повысит его эффективность и подготовит студентов к сознательному восприятию учебного материала.*

***Ключевые слова**: методические особенности, обучение математике, студенты-иностранцы, подготовительное отделение.*

SUMMARY

O. Vikhrova, N. Zynonos. Methodical specifics of teaching mathematics to foreign students at the preparation departments of Ukrainian universities. *Methodical specifics of teaching mathematics to foreign students at the preparation departments are considered in the article. Fundamental conditions of the teaching process efficiency that include: special training of mathematics teachers, presence of the adapted educational and methodical complex, compulsory inward diagnostics of foreign students' studying achievements and methodical principles that should be taken into consideration in the teaching process at the universities preparation departments are analyzed. Teaching mathematics to foreign students at the preparation department is quite a challenging process that takes place in the conditions of biological, pedagogical and socio cultural adaptation of students to a new environment that goes together with mastering by them the teaching language. A teacher should take into consideration methodical peculiarities of this process – it will enhance its efficiency and prepare students for conscious perception of the studied material.*

***Key words:** methodical specifics, foreign students, teaching mathematics, university preparation department.*

УДК 511:378.147

Т.В. Дідківська
І.А. Сверчевська
Житомирський державний університет імені Івана Франка

ВИЗНАЧНІ ІСТОРИЧНІ ЗАДАЧІ З ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

Пропонується система визначних історичних задач для вивчення курсу «Теорія чисел» з розділів: подільність, ділення з остачею, прості та складені числа, спеціальні прості числа, ланцюгові дроби та діофантові рівняння. Це задачі математиків XII – XX ст., збережені історією. Наводяться авторські та сучасні розв'язання. Рекомендується література для самостійної роботи студентів. Запропоновані авторами історичні задачі доцільно використовувати поряд з іншими задачами з теорії чисел, які розв'язуються при навчанні цього курсу. Така робота, на думку авторів, дає можливість познайомитися з цікавими та нетрадиційними методами розв'язування задач видатними математиками і запропонувати свої розв'язання.

Розв'язування історичних задач розвиває творчі здібності, породжує мисленеву активність студентів, дає можливість відчути красу наукового пошуку.

***Ключові слова**: історія математики, визначні задачі, предметна компетентність, теорія чисел, подільність, ділення з остачею, прості та складені числа, ланцюгові дроби, діофантові рівняння.*

Постановка проблеми. Успішне вивчення історії математики передбачає володіння студентами основами фундаментальних математичних дисциплін. Для здобуття якісних знань з цих предметів доцільно залучати елементи історії математики вже на молодших курсах. Один зі шляхів – розв'язування історичних задач. Історичні екскурси, які при цьому розглядаються, підвищують інтерес до вивчення предмету. Розв'язання цих задач різними методами (як авторськими, так і сучасними) розвиває творчі здібності, породжує мисленеву активність. А вся робота над визначними історичними задачами формує предметну компетентність, що характеризує освічену людину.

Нами проведено дослідження можливостей залучення історичних задач при навчанні студентів теорії чисел та пропонуються історичні задачі відповідно класифікації: подільність, ділення з остачею; прості та складені числа; спеціальні прості числа; ланцюгові дроби та діофантові рівняння. Наведено авторські й сучасні розв'язання історичних задач.

Мета статті – продемонструвати застосування історичних задач в ході вивчення курсу «Теорія чисел».

Виклад основного матеріалу.

Тема «Подільність. Ділення з остачею»

1) Задача Леонардо Пізанського (близько 1170-після 1228) [3, с. 289]

Один говорить другому: «Дай мені 7 динаріїв, і я буду в 5 разів багатший за тебе». А другий говорить: «Дай мені 5 динаріїв, і я буду в 7 разів багатший за тебе». Скільки у кожного?

Авторське розв'язання.

У першого $5y-7$ динаріїв, у другого $y+7$ динаріїв. Перша умова виконується. Якщо перший дасть другому 5 динаріїв, то утвориться рівність: $y+7+5=7(5y-12),\ y=2\frac{14}{17}$. У другого $2\frac{14}{17}+7=9\frac{14}{17}$. У першого $5\cdot 2\frac{14}{17}-7=7\frac{2}{17}$.

Сучасне розв'язання.

За умовою задачі складаємо систему:

$$\begin{cases} x+7=5(y-7) \\ y+5=7(x-5) \end{cases}$$

Розв'язуючи систему отримуємо $x=7\frac{2}{17}$; $y=9\frac{14}{17}$.

Відповідь: у першого $7\frac{2}{17}$ динарія, у другого – $9\frac{14}{17}$ динарія.

2) Задача Франца ван-Скаутена (1615-1660). Голандський математик – автор твору «Математичні етюди», де розглядалася ця задача [3, с. 440].

Знайти кількість дільників числа $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, де p_i – прості числа [2, с.41].

Розв'язання. Всі дільники цього числа мають вигляд $m=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k}$, де $0\le\beta_i\le\alpha_i$. Щоб знайти кількість дільників, підрахуємо кількість усіх можливих комбінацій для β_i. Оскільки $\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_k$ приймають відповідно $\alpha_1+1,\ \alpha_2+1,\ \dots,\ \alpha_k+1$ значень, то кількість дільників

$$\tau(m)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1).$$

3) Задача Джона Валліса (1616-1703). Основна праця англійського математика Джона Валліса «Арифметика нескінченного» зіграла важливу роль в передісторії інтегрального числення. Валліс знайшов вираз для числа π у вигляді нескінченного добутку та ввів загальноприйнятий знак для нескінченності [3, с. 82].

Знайти суму всіх дільників числа $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, де $p_1, p_2, \dots, p_k$ − прості числа [2, с. 41].

Розв'язання. Очевидно, що сума дільників

$$S(m) = \left(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}\right)\ldots\left(1 + p_k + p_k^2 + \ldots + p_k^{\alpha_k}\right)$$

. Сумуючи кожний множник, маємо: $S(m) = \dfrac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \dfrac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$.

4) Задача Блеза Паскаля (1623-1662) [3, с. 372].

Знайти загальну ознаку подільності на натуральне число [2, с. 41].

Авторське розв'язання.

Нехай при діленні 10 на число n отримуємо остачу r_1, при діленні $10r_1$ на n – остача r_2, при діленні $10r_2$ на n – остача r_3 і так далі. Якщо дане число, наприклад тризначне, буде мати вигляд $\overline{abc}$, де a, b, c – цифри сотень, десятків, одиниць, то загальна ознака подільності цього числа на n наступна.

Якщо $c + br_1 + ar_2$ ділиться на n, то на n ділиться і число $\overline{abc}$. Доведемо. Нехай $10 = nq_1 + r_1,\ 10^2 = 10nq_1 + 10r_1,\ 10r_1 = nq_2 + r_2$. Тоді

$$c + br_1 + ar_2 = c + b(10 - nq_1) + a(10r_1 - nq_2) =$$
$$= c + 10b + 100a - n(bq_1 + 10aq_1 + anq_2).$$

Отже, $c + 10b + 100a$ ділиться на n.

Сучасне розв'язання.

Нехай систематичний запис числа:

$N = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ \ldots + a_1 q + a_0$, де q – основа системи числення, a_i – цифри. Доведемо ознаку подільності на m. Маємо: $q \equiv r_1 (mod\ m)$,

$q^2 \equiv r_2 (mod\ m)$, … , $q^n \equiv r_n (mod\ m)$. Розглянемо наступні порівняння $a_0 \equiv a_0 (mod\ m), a_1 q \equiv a_1 r_1 (mod\ m), \ldots, a_n q^n \equiv a_n r_n (mod\ m)$, додавши їх, одержимо $N \equiv a_n r_n + \ \ldots + a_1 r_1 + a_0 (mod\ m)$.

Відповідь: якщо $a_n r_n + \ \ldots + a_1 r_1 + a_0$ ділиться на m, то на m ділиться число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_q$

5) Задача Г. В. Лейбница (1646-1716) [3, с. 285].

Показати, що якщо n – ціле, то $n^5 - n$ ділиться на 5 [2, с. 42].

Розв'язання. $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$. Якщо n не ділиться на 5 то можливі форми цього числа $5k \pm 1$ і $5k \pm 2$; тоді n^2 має вигляд $25k^2 \pm 10k$+1 і $25k^2 \pm 20k + 4$. Тобто $n^2 - 1$ ділиться на 5 або $n^2 + 1$ ділиться на 5.

6) Задача Г. В. Лейбница (1646-1716) [3, с. 285].

Показати, що якщо n – ціле число, то $n^7 - n$ ділиться на 7 [2, с. 43].

Розв'язання. $n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3 - 1)(n^3 + 1)$. Якщо n не ділиться на 7 то можливі форми цього числа $7k \pm 1$, $7k \pm 2$ і $7k \pm 3$; тоді n^3 має вигляд $343k^3 \pm 147k^2 + 21k \pm 1$; $343k^3 \pm 294k^2 + 84k \pm 8$; $343k^3 \pm 441k^2 + 189k \pm 27$. Тобто $n^3 - 1$ ділиться на 7 або $n^3 + 1$ ділиться на 7.

7) Задача Леонарда Ейлера (1707-1783) [3, с. 181].

Один чиновник купив коней та биків за 1770 талерів. За кожного коня він заплатив по 31 талеру, а за кожного бика – по 21 талеру. Скільки коней і биків купив чиновник? [2, с. 50].

Розв'язання.

Нехай x – кількість коней, y – кількість биків, то $31x + 21y = 1770$ звідки $y = 84 - x - \frac{10x-6}{21}$. З останньої рівності слідує, що $(5x - 3)$ ділиться на 21. Позначимо $5x - 3 = 21z$,

$5x = 21z + 3$, отримаємо $y = 84 - x - 2z$, $x = 4z + \frac{z+3}{5}$. Отже, $(z + 3)$ ділиться на 5, тобто $z + 3 = 5t$, $z = 5t - 3, x = 4z + t = 4(5t - 3) + t, x = 21t - 12, y = 84 - x - 2z = 84 - (21t - 12) - 2(5t - 3)$, $y = 102 - 31t$. Визначимо значення t, якщо $x = 21t - 12$, $y = 102 - 31t$, де x, y – натуральні числа.

$$\begin{cases} 21t - 12 > 0 \\ 102 - 31t > 0 \end{cases}, \begin{cases} 21t > 12 \\ 31t < 102 \end{cases}, \begin{cases} t > \frac{12}{21} \\ t < \frac{102}{31} \end{cases}, \frac{4}{7} < t < 3\frac{9}{31}, t \in N, t = 1, 2, 3.$$

Одержимо при $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$ відповідно $x_1 = 9$, $y_1 = 71$; $x_2 = 30$, $y_2 = 40$; $x_3 = 51$, $y_3 = 9$.

Тема: Прості й складені числа.

1) Задача Фібоначчі (Леонардо Пізанський) (бл. 1170 – після 1228) [3, с. 289].

Для знаходження найменшого дільника натурального числа n достатньо перевірити його подільність на числа, що не перевищують $\sqrt{n}$ [10, с. 79].

Розв'язання.

$$n \vdots d, \ d - \min, \ n = d \cdot n_1, \ n_1 \geq d, \ n \geq d^2, \ d \leq \sqrt{n}.$$

2) Задача Ферма (1601 – 1665) [3, с. 482].

Обґрунтувати спосіб розкладу на множники великого числа, відкритий Ферма. Нехай n – дане число і m – найменше ціле, для якого виконується $m^2 > n$. Утворимо різниці $m^2 - n, \ (m+1)^2 - n, \ (m+2)^2 - n, \ldots$ Якщо деяка різниця є точним квадратом, то одержимо розклад на множники [10, с. 79].

Розв'язання.

Маємо на останньому кроці утворення різниць $x^2 - n = y^2$ Розкладемо дане число на множники як різницю квадратів $n = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Застосовуючи спосіб Ферма, розкласти на множники числа 1591, 6077.

а) $1600 > 1591, \ 40^2 > 1591, \ 40^2 - 1591 = 1600 - 1591 = 9 = 3^2,$

$$1591 = 40^2 - 3^2 = (40 - 3)(40 + 3) = 37 \cdot 43.$$

б) $78^2 = 6084, \ 6084 > 6077, \ 6084 - 6077 = 7 \neq y^2,$

$$79^2 = 6241, \ 6241 - 6077 = 164 \neq y^2,$$

$$80^2 = 6400, \ 6400 - 6077 = 323 \neq y^2, \ 81^2 = 6561, \ 6561 - 6077 = 484 = 22^2,$$

$$6077 = 81^2 - 22^2 = (81 - 22)(81 + 22) = 59 \cdot 103.$$

3) Задача Ейлера (1707 – 1783) [3, с. 181].

При необмеженому зростанні дійсного числа $x > 1$ границя відношення $\frac{\pi(x)}{x}$ дорівнює нулю [4, с. 218].

Розв'язання.

Числова функція $\pi(x)$ визначає кількість простих чисел, що не перевищують дійсного числа $x > 1$. Для доведення використаємо нерівності Чебишова

$a\dfrac{x}{\ln x}<\pi(x)<b\dfrac{x}{\ln x}$, де $x\geq 2,\ a<b$. Справді, маємо $\dfrac{\pi(x)}{x}<\dfrac{b}{\ln x}$. При $x\to\infty,\ \dfrac{b}{\ln x}\to 0$, отже $\dfrac{\pi(x)}{x}\to 0$.

4) Задача Гаусса (1777 – 1855) [3, с. 121].

Довести, що добуток двох цілих додатних чисел, з яких кожне менше простого числа p, не ділиться на p [12, с. 50].

Розв'язання.

Нехай $a<p,\ b<p$, де p – просте число. Для доведення використаємо твердження, вперше доведене Евклідом: якщо добуток кількох натуральних чисел ділиться на просте число р, то принаймні один із співмножників ділиться на р. Припустимо, що $ab\,\vdots\, p$, де p – просте число, то $a\,\vdots\, p$ або $b\,\vdots\, p$, але $a<p,\ b<p$, що неможливо.

5) Задача Сільвестра (1814–1897) [3, с. 438].

Непарне досконале число повинно мати хоча б три різні прості дільники [7, с.10]. Проблема існування непарних досконалих чисел залишається невирішеною.

Розв'язання.

Припустимо спочатку, що N – це непарне досконале число з одним простим дільником р, тобто $N=p^r$, де р – це просте непарне число та $r\geq 1$. Тоді за означенням досконалого числа $\sigma(N)-N=N$, звідки $2N=\sigma(N)$, $2p^r=\sigma(p^r)=\dfrac{p^{r+1}-1}{p-1}$, $2p^r(p-1)=p^{r+1}-1$, $2p^{r+1}-2p^r=p^{r+1}-1$, $p^{r+1}-2p^r=-1$, $2p^r-p^{r+1}=1$. Ми прийшли до протиріччя, тому що ліва частина рівності ділиться на просте число *p*, а права не ділиться. Тому робимо висновок, що непарне досконале число не може мати тільки один простий дільник.

Розглянемо випадок двох простих дільників р і q. Припустимо, що $N=p^kq^r$ є непарним досконалим числом, де $p<q$ – це непарні прості числа. Тоді маємо $2N=\sigma(N)=\sigma(p^kq^r)=\sigma(p^k)\sigma(q^r)$,

$2N=(1+p+p^2+\ldots+p^k)(1+q+q^2+\ldots+q^r)$. Поділимо обидві сторони рівності на $N=p^kq^r$, маємо

$$2=\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^k}\right)\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^r}\right)\leq$$

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^k}\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^r}\right).$$

Оскільки р, як непарне просте число, повинно бути не менше трьох, а оскільки *q* більше за р і є непарним простим числом, то воно повинно бути не менше п'яти, замінимо ці скінченні геометричні прогресії нескінченними та знайдемо їх суми, маємо $2\leq\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{1}{5^j}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{15}{8}$, а це протиріччя. Так ми довели, що непарне досконале число повинно мати три або більше простих дільників.

6) Задача Френцеля [11, с. 98].

Сума довільного непарного степеня числа 4 та одиниці, при довільному показнику степеня, який більше за одиницю, розкладається на два множники, кожний з яких дорівнює сумі квадратів двох натуральних чисел.

Розв'язання.

$$4^{2n+1}+1=2^{4n+2}+1=2^{4n+2}+2\cdot 2^{2n+1}+1-2\cdot 2^{2n+1}=\left(2^{2n+1}\right)^2+2\cdot 2^{2n+1}+1-\left(2^{n+1}\right)^2=$$
$$=\left(2^{2n+1}+1\right)^2-\left(2^{n+1}\right)^2=\left(2^{2n+1}+1+2^{n+1}\right)\left(2^{2n+1}+1-2^{n+1}\right)=$$
$$\left(2^{2n}\cdot 2+2^{n+1}+1\right)\left(2^{2n}\cdot 2-2^{n+1}+1\right)=$$
$$=\left(\left(2^{2n}+2\cdot 2^{n}+1\right)+2^{2n}\right)\left(\left(2^{2n}-2\cdot 2^{n}+1\right)+2^{2n}\right)=$$
$$\left(\left(2^{n}+1\right)^2+\left(2^{n}\right)^2\right)\left(\left(2^{n}-1\right)^2+\left(2^{n}\right)^2\right)=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+b^2\right),$$ де $a=2^n+1$, $b=2^n$, $c=2^n-1$.

7) Задача Джона Вільсона [2, с. 104].

Історична довідка. Англійський математик Едуард Варінг (1734-1798) у 1770 р. опублікував в «Алгебраїчних міркуваннях» найбільш відомий критерій простого числа й приписав його серу Джону Вільсону (1741-1793).

Довести, що натуральне число $n>1$ тоді і тільки тоді є простим, коли $(n-1)!+1$ ділиться на n [10, с. 214].

Розв'язання.

Якщо $N=(n-1)!+1$ ділиться на n, доведемо, n – просте число. Припустимо, n – складене, тоді існує його простий дільник $p<n$. Маємо $N \vdots n$, отже, $N \vdots p$, $(n-1)!$ ділиться на p. З рівності $N=(n-1)!+1$випливає, що $1 \vdots p$, це неможливо. Отже, припущення неправильне, n – просте число.

Якщо n – просте число, доведемо, що $(n-1)!+1$ ділиться на n. Якщо $n=2$, то очевидно $\left((n-1)!+1\right) \vdots 2$. Якщо $n>2$ розглянемо конгруенцію $(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))-(x^{n-1}-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$. Її степінь не перевищує $n-2$, але вона має $n-1$ розв'язок, бо задовольняється числами 1, 2, … , n-1 (перший доданок перетворюється в нуль, а другий порівняний з нулем за теоремою Ферма). Тому ця конгруенція виконується при довільному x. При умові $x=0$, одержуємо $(-1)^{n-1}(n-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\, n)$, n – просте число, тому $n-1$ – парне число і $(-1)^{n-1}=1$. Остаточно одержуємо $(n-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\, n)$, $(n-1)!+1\equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$. Отже, $(n-1)!+1$ ділиться на n.

Тема: «Спеціальні прості числа»

1) Задача Ферма (1601–1665) [3, с. 482].

Для довільного цілого невід'ємного числа n число $F_n=2^{2^n}+1$ – просте [11, с. 54].

Розв'язання.

Дійсно, простими є: $F_0=2^1+1=3$, $F_1=2^2+1=5$, $F_2=2^4+1=17$, $F_3=2^8+1=257$, $F_4=2^{16}+1=65537$, але

$F_5=2^{32}+1=4294967297=641\cdot 6700417$ – складене. У 1732 році Ейлер спростував твердження Ферма і довів, що $F_5 \vdots 641$.

Поправка до твердження Ферма: довести або спростувати, що числа $2+1,\ 2^2+1,\ 2^{2^2}+1,\ldots -$ прості. Доведено, що число $2^{2^{2^{2^2}}}+1\ -$ складене [10, с. 82].

2) Задача Гольдбаха (1690–1764) [3, с. 141].

Довести, що довільне число виду $4n^2+1,\ n\in N$ може бути простим тільки при $n=1$[12, с. 33].

Розв'язання.

$$4n^4+1=\left(\left(2n^2\right)^2+4n^2+1\right)-4n^2=\left(2n^2+1\right)^2-(2n)^2=\left(2n^2+1+2n\right)\left(2n^2+1-2n\right)$$

Якщо $n=1$, то дане число дорівнює 5, якщо $n\neq 1$, воно складене, бо розкладається на множники, що відмінні від одиниці та самого числа.

$$2n^2+2n+1=\left(n^2+2n+1\right)+n^2=(n+1)^2+n^2>1,\ 2n^2-2n+1=(-n+1)^2+n^2>1$$

3) Задача Гольдбаха (1690–1764) [3, с. 141].

Довільне непарне число, яке більше 5, можна подати у вигляді суми трьох простих чисел. Перевірте це на прикладі кількох двозначних чисел [12,с. 33].

Розв'язання.

77=53+17+7, 461=449+7+5 або 461=257+199+5 тощо.

Це твердження назване "проблема Гольдбаха". У першій половині XVIII ст. Ейлер пропонував доведення, що використовує твердження (проблема Ейлера): кожне парне число, починаючи з чотирьох, можна розкласти на суму двох простих чисел. Але проблема Ейлера не доведена. У 1937 році радянський вчений І.М. Виноградов довів проблему Гольдбаха для достатньо великих непарних чисел [6, с. 163].

4) Задача Софі Жермен (1776 – 1831) [3, с. 195].

Довільне число виду $a^4+4\ (a\in N)$ може бути простим тільки при $a=1$ [8, с. 147].

Розв'язання.

Якщо $a=1$, то $a^4+4=5$ – просте число, якщо $a>1$, то $a^4+4=$ $=\left(a^4+4a^2+4\right)-4a^2=\left(a^2+2\right)^2-(2a)^2=\left(a^2+2+2a\right)\left(a^2+2-2a\right)$, де

$$a^2+2+2a=\left(a^2+2a+1\right)+1=(a+1)^2+1\neq 1,$$

$a^2+2-2a=\left(a^2-2a+1\right)+1=(a-1)^2+1\neq 1$. Отже, число a^4+4 має два різних дільника, відмінних від одиниці та самого числа, тобто a^4+4 – складене.

Цю гіпотезу висловив у 1742 році Гольдбах у листі до Ейлера.

5) Задача з підручника С. Банаха, В. Серпінського, В. Сожека "Арифметика" 1933 року видання для 1 гімназійного класу [3, 33, 434].

Вирази названі іменами видатних математиків. При підстановці в ці вирази замість змінних цілих чисел із вказаних проміжків отримуємо прості числа:

а) вираз Лежандра $2x^2+29$ для чисел *x* від 0 до 28;

б) вираз Ейлера x^2+x+41 для чисел *x* від 0 до 39;

в) вираз Скотта $x^2-79x+1601$ для чисел *x* від 0 до 79.

Обчисліть значення цих виразів при кількох значеннях змінної з вказаних проміжків і переконайтеся, що ці значення справді є простими числами. Чи можна вважати ці вирази формулами простих чисел? [9, с. 25]

Розв'язання.

а) $2\cdot 0^2+29=29,\ 2\cdot 1^2+29=31;$ але при *x*=29 вираз ділиться на 29, тому значення виразу – складене число.

б) $1^2+1+41=43,\ 2^2+2+41=47;$ але при x=40 вираз ділиться на 41 $40^2+40+41=\ 40(40+1)+41=\ =41(40+1)=41^2$, тобто це складене число.

в) $0^2-79\cdot 0+1601=1601,\ 1^1-79\cdot 1+1601=1523;$ але при x=80 маємо складене число:

$$80^2-79\cdot 80+1601=\ =80(80-79)+1601=80+1601=1681=41^2.$$

Тема: «Ланцюгові дроби та діофантові рівняння»

1) Задача Бхаскари II (нар. 1114 – помер пізніше 1178). Великий індійський математик і астроном, автор твору «Венець учення», в якому містилися розв'язання алгебраїчних і теоретико-числових задач. Вершиною досягнень Бхаскари II є циклічний метод розв'язування в цілих додатних числах невизначеного рівняння другого степеня з двома невідомими [3, с. 79].

Розв'язати рівняння в цілих числах $100x+90=63y$ [2, с. 28].

Загальний метод розв'язування невизначених рівнянь в Індії було названо методом розсіювання. Розв'яжемо цим методом.

$y=\dfrac{100x+90}{63}=x+\dfrac{37x+90}{63}$, $\dfrac{37x+90}{63}=y_1-$ ціле число. Прийдемо до рівняння: $37x+90=63y_1$, $x=\dfrac{63y_1-90}{37}=y_1+\dfrac{26y_1-90}{37}$, $\dfrac{26y_1-90}{37}=y_2-$ ціле.

$26y_1-90=37y_2$, $y_1=\dfrac{37y_2+90}{26}=y_2+\dfrac{11y_2+90}{26}$, $\dfrac{11y_2+90}{26}=y_3-$ ціле.

$11y_2+90=26y_3$, $y_2=\dfrac{26y_3-90}{11}=2y_3+\dfrac{4y_3-90}{11}$, $\dfrac{4y_3-90}{11}=y_4-$ ціле.

$4y_3-90=11y_4$, $y_3=\dfrac{11y_4+90}{4}=2y_4+\dfrac{3y_4+90}{4}$, $\dfrac{3y_4+90}{4}=y_5-$ ціле.

$3y_4+90=4y_5$ $y_4=\dfrac{4y_5-90}{3}=y_5+\dfrac{y_5-90}{3}$, $\dfrac{y_5-90}{3}=y_6-$ ціле. $y_5=3y_6+90$.

Підставляємо. $x=y_1+y_2=(y_2+y_3)+y_2=2y_2+y_3=$

$$=2(2y_3+y_4)+y_3=5y_3+2y_4=5(2y_4+y_5)+2y_4=12y_4+5y_5=$$

$$=12(y_5+y_6)+5y_5=17y_5+12y_6=17(3y_6+90)+12y_6=63y_6+1530,$$

$x=1530+63y_6$.

З даного рівняння $\mathrm{y}=\dfrac{100\mathrm{x}+90}{63}=\dfrac{153000+6300y_8+90}{63}=100y_6+2430.$

Маємо $\begin{cases}x=1530+63t\\ y=2430+100t\end{cases}$, $t\in Z$. Якщо $t=-24$, то $x=18,\ y=30$.

Відповідь: $\begin{cases}x=18+63t\\ y=30+100t\end{cases}$, $t\in Z$.

Метод ланцюгових дробів.

$100x-63y=-90$, $100x+63(-y)=-90$, $100x+63z=-90$, в загальному $ax+bz=c$. Розкладемо число $\frac{a}{b}=\frac{100}{63}$ у ланцюговий дріб. $100=63\cdot 1+37,\ q_0=1;$ $63=37\cdot 1+26,\ q_1=1;$ $37=26\cdot 1+11,\ q_2=1;$ $26=11\cdot 2+4,\ q_3=2;$ $11=4\cdot 2+3,\ q_4=2;$ $4=3\cdot 1+1,\ q_5=1;$ $3=1\cdot 3+0,\ q_6=3$

Отримали $\frac{a}{b}=[1;1,1,2,2,1,3]$, $n=6$. Знайдемо підхідні дроби

k		0	1	2	3	4	5	6
q_k		1	1	1	2	2	1	3
P_k	1	1	2	3	8	19	27	100
Q_k	0	1	1	2	5	12	17	63

Використаємо формули: $\begin{matrix} x_0=(-1)^{n-1}\cdot c\cdot Q_{n-1} \\ z_0=(-1)^n\cdot c\cdot P_{n-1}\end{matrix}$, $P_{n-1}=P_5=27,\ Q_{n-1}=Q_5=17$,

$\begin{matrix} x_0=(-1)^5\cdot(-90)\cdot 17=1530 \\ z_0=(-1)6\cdot(-90)\cdot 27=-2430\end{matrix}$, $x=1530+63t$, $z=-2430-100t$, $y=2430+100t$.

Відповідь: $\begin{cases} x=1530+63t \\ y=2430+100t\end{cases}$, $t\in Z$.

2) Задача Фібоначчі (близько 1170 – після 1228) [3, с. 289].

Дехто купив 30 птахів за 30 монет. За три горобці він платив 1 монету, за дві горлиці теж – одну монету, а за кожного голуба – 2 монети. Скільки птахів кожного виду він купив?

Розв'язання.

Нехай $x-$кількість горобців, $y-$кількість горлиць,

$z=(30-x-y)-$кількість голубів. Маємо $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+2(30-x-y)=30$, $2x+3y+12(30-x-y)=180$, $10x+9y=180$. Методом розсіювання: $y=20-\frac{10}{9}x$, $\frac{x}{9}=t$, $x=9t$, $y=20-10t$, $t\in Z$.

$\begin{cases} 9t>0 \\ 20-10t>0\end{cases}$, $\begin{cases} t>0 \\ t<2\end{cases}$, $t\in Z$, $t=1$. Отже, $x=9,\ y=10,\ z=11.$

Відповідь: 9 горобців, 10 горлиць, 11 голубів.

3) Задача Адама Різе (1492 – 1559) (німецький математик автор популярних в той час підручників з арифметики і алгебри) [3, с. 419], [12, с. 195].

26 осіб витратили разом 88 монет, причому кожний чоловік витратив 6, жінка 4, а дівчина 2 монети. Скільки було чоловіків, жінок і дівчат? [2:49].

Розв'язання.

Позначимо кількість чоловіків х, жінок у, тоді кількість дівчат $(26-x-y)$. Складаємо рівняння: $6x+4y+2(26-x-y)=88$. $4x+2y=36$, $2x+y=18$.

Використаємо метод, який у стародавній Індії назвали "методом розсіювання" (подрібнення). $x=\frac{18-y}{2}=9-\frac{y}{2}$, Оскільки x – ціле, то і $\frac{y}{2}=t$ ціле, звідки $y=2t,\ x=9-t$. Отримали загальний розв'язок рівняння: $\begin{cases} x=9-t \\ y=2t \end{cases}$. За умовою задачі $x\ge 0,\ \ y\ge 0$, тоді $\begin{cases} 9-t\ge 0 \\ 2t\ge 0 \end{cases}$, $\begin{cases} t\le 9 \\ t\ge 0 \end{cases}$, тобто $t=0, 1, \ldots, 9$. Задача має 10 розв'язків $(9,\ 0,\ 17)$, $(8,\ 2,\ 16)$, $(7, 4, 15)$, $(6,\ 6,\ 14)$, $(5, 8, 13)$, $(4, 10, 12)$, $(3, 12, 11)$, $(2, 14, 10)$, $(1, 16, 9)$, $(0, 18, 8)$.

4) Задача Гюйгенса (1629-1695) [3, с. 153].

Під час створення у Парижі першого у світі планетарію видатний механік, фізик і математик XVII століття Гюйгенс вирішив виготовити модель для імітації руху всіх планет сонячної системи. Виникла технічна проблема виготовлення зубчатих коліс з дуже великою кількістю зубців, тому потрібно було знайти таке відношення кількості зубців на колесах, яке було б найближчим до заданого. В якості найкращих наближень Гюйгенс використав підхідні дроби відповідних ланцюгових дробів [5, с. 224].

Потрібно виготовити зубчаті колеса з відношенням кутових швидкостей $x=\frac{938}{727}$. Виготовити міцні колеса з 938 і 727 зубцями не можна, тому потрібно підібрати колеса з меншою кількістю зубців, щоб похибка була як можна меншою [1, 324].

Розв’язання. Розкладемо число $x=\frac{938}{727}$ у ланцюговий дріб.

$938=727\cdot 1+211,\ q_0=1;\qquad 727=211\cdot 3+94,\ q_1=3;\qquad 211=94\cdot 2+23,\ q_2=2;$
$94=23\cdot 4+2,\ q_3=4;\ 23=2\cdot 11+1,\ q_4=11;\ \ 2=1\cdot 2+0,\ q_5=2$

Отримали $x=[1;3,2,4,11,2]$. Знайдемо підхідні дроби

k		0	1	2	3	4	5
q_k		1	3	2	4	11	2
P_k	1	1	4	9	40	449	938
Q_k	0	1	3	7	31	348	727

$\frac{P_0}{Q_o}=1,\ \frac{P_1}{Q_1}=\frac{4}{3},\ \frac{P_2}{Q_2}=\frac{9}{7},\ \frac{P_3}{Q_3}=\frac{40}{31},\ \frac{P_4}{Q_4}=\frac{449}{348},\ \frac{P_5}{Q_5}=\frac{938}{727}$. Оцінимо, що $\frac{P_4}{Q_4}<x<\frac{P_3}{Q_3}$, тому $x\approx\frac{P_3}{Q_3}$ з похибкою $\varepsilon<\frac{1}{Q_3Q_4}$, тобто $x\approx\frac{40}{31}$ з похибкою менше $\frac{1}{31\cdot 348}=\frac{1}{10788}<\frac{1}{10000}$.

Отже, якщо виготовити зубчаті колеса з 40 і 31 зубцями, то відношення їх кутових швидкостей дорівнюватиме $\frac{40}{31}$ і буде відрізнятися від заданого відношення $\frac{938}{727}$ менше ніж на $\frac{1}{10000}$ (практично така похибка не відчутна).

Висновки. Запропоновані історичні задачі доцільно використовувати поряд з іншими задачами з теорії чисел, які розв'язуються при навчанні цього курсу. Така робота дає можливість познайомитися з цікавими та нетрадиційними методами розв'язування задач видатними математиками і запропонувати свої розв'язання. При цьому важливими і цікавими є короткі історичні довідки про життя та діяльність цих математиків. Пошук різних історичних задач можна проводити під час написання курсових робіт та роботи в проблемній групі. Розв'язування історичних задач дає можливість відчути красу наукового пошуку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андронов И.К. Арифметика рациональных чисел / И.К. Андронов, А.К. Окунев – М.: Просвещение, 1971. – 400 с.
2. Баврин И.И. Старинные задачи / И.И. Баврин, Е.А. Фрибус – М.; Просвещение, 1994. – 128 с.
3. Бородін О.І. Біографічний словник діячів у галузі математики / О.І. Бородін, А.С. Бугай – К.: Вища шк., 1973. – 552 с.
4. Бородін О.І. Теорія чисел / О.І. Бородін – К.: Вища шк., 1970. – 275 с.
5. Бухштаб А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб – М.: Просвещение, 1966, 384с.
6. Глейзер Г.И. История математики в школе VII – VIII кл. / Г.И. Глейзер – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.
7. Данхем В. Ойлер та теорія чисел / В. Данхем // У світі математики. – 2000. – Т. 6. – Вип. 3. – С. 1 – 19.
8. Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі / А.Г. Конфорович – К.: Рад. шк., 1981. – 189 с.
9. Тадеєв В.О. Неформальна математика. 6 – 9 кл. / В.О. Тадеєв – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 288 с.
10. Требенко Д.Я. Алгебра і теорія чисел / Д.Я. Требенко, О.О. Требенко – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. – Ч. 1. – 400 с.
11. Фаермарк Д.С. Задача пришла с картины / Д.С. Фаермарк – М.: Наука, 1974. – 160 с.
12. Чистяков В.Д. Старинные задачи по элементарной математики / В.Д. Чистяков – Минск: Высшая шк., 1978. – 270 с.

РЕЗЮМЕ

Дидковская Т.В., Сверчевская И.А. Замечательные исторические задачи по теории чисел. *Предлагается система замечательных исторических задач для изучения курса «Теория чисел» по разделам: делимость, деление с остатком, простые и составные числа, специальные простые числа, цепные дроби и диофантовые уравнения. Это задачи математиков XII – XX ст., которые сохранены историей. Приводятся авторские и современные решения. Рекомендуется литература для самостоятельной работы студентов. Предложенные авторами исторические задачи целесообразно использовать наряду с другими задачами по теории чисел, решаемые при обучении этого курса. Такая работа, по мнению авторов, дает возможность познакомиться с интересными и нетрадиционными методами решения задач выдающимися математиками и предложить свои решения. Решение исторических задач развивает творческие способности, порождает мисленеву активность студентов, дает возможность почувствовать красоту научного поиска.*

***Ключевые слова**: история математики, замечательные задачи, предметная компетентность, теория чисел, делимость, деление с остатком, простые и составные числа, цепные дроби, диофантовые уравнения.*

SUMMARY

T. Didkivs'ka, I. Sverchevs'ka. Distinguished historical problems in the quantity theory. *The system of distinguished historical problems for studying the course "Quantity theory" in the following parts is suggested: divisibility, division with remainders, special composite numbers, continued fractions and diophantine equations. These problems are the ones suggested by the mathematicians of XII – XX centuries and are historically preserved. Literature sources for students' independent work are recommended. It is reasonable to apply suggested by the authors historical problems together with other problems of the quantity theory that are solved in the process of teaching this course. Such kind of work, in authors' opinion, gives an opportunity to get acquainted with interesting and non-conventional methods of problems solving suggested by the outstanding mathematicians and propose one's own solving methods. Solving historical problems develops creative abilities, generates students' thinking activity, and gives an opportunity to sense the beauty of scientific search.*

***Key words**: history of mathematics, distinguished problems, subject-matter competence, quantity theory, divisibility, division with remainders, prime and composite numbers, continued fractions, diophantine equations.*