Міністерство освіти і науки України

Сумський державний педагогічний університет

імені А.С.Макаренка

Олена Мартиненко, Ярослав Чкана

Вступ до математичного аналізу

Навчально-методичний посібник

Суми – 2025

УДК 512.2/.3(075.8.057.875)
М 29
Рекомендовано вченою радою Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка (протокол № 11 від 26.05.2025 р.)

Рецензенти:
Віктор Олександренко, доктор технічних наук, професор кафедри галузевого машинобудування та агроінженерії Хмельницького національного університету
Михайло Шуляк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Агроінжинірінгу» Сумського національного аграрного університету

Мартиненко О.В., Чкана Я.О.
М 29 **Вступ до математичного аналізу.** Навчально-методичний посібник / О.В. Мартиненко, Я.О. Чкана. Суми, ФОП Цьома С.П.., 2025. 114 с.

Посібник написано відповідно до діючих програм з курсу «Математичний аналіз» для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Він зорієнтований на набуття студентами теоретичних знань та практичних умінь з математичного аналізу в частині основних положень теорії аналітичних функцій.

Матеріал, поданий в кінці цього посібника, є керівництвом до організації аудиторної, індивідуальної та самостійної роботи студентів.

Навчальний посібник рекомендовано для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних та технічних університетів, а також вчителів математики загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 512.2/.3(075.8.057.875)

ЗМІСТ

Вступне слово

Математичний аналіз — фундаментальний розділ сучасної математики, що формує підґрунтя для широкого спектра теоретичних та прикладних дисциплін, тому його значення для природничих наук, технічної освіти та науково-дослідної діяльності є беззаперечним. Вивчення математичного аналізу дозволяє сформувати цілісне уявлення про поведінку математичних об'єктів у контексті їх змін, границь, неперервності й інших ключових понять.

Виникнення математичного аналізу було зумовлене історичною необхідністю опису фізичних та астрономічних явищ, які вимагали точного математичного моделювання процесів. Сучасний математичний аналіз ґрунтується на строго визначених логічних принципах і охоплює широкий спектр понять — від базових логічних та множинних структур до складних функціональних залежностей.

Особливу роль у цій теорії відіграють поняття границі та неперервності, які слугують не лише інструментами опису поведінки функцій, але й критеріями для їх класифікації та подальшого аналізу. Вивчення цих понять має не лише теоретичне значення: вони є основою для формування змісту математичної освіти в середній школі, де закладаються уявлення про функціональні залежності, поняття похідної, інтегралу та ряду тощо.

Даний навчальний посібник орієнтований на студентів педагогічних спеціальностей і спрямований на формування глибокого концептуального розуміння основ математичного аналізу, розвиток логіко-теоретичного мислення, а також методичної готовності до викладання математичного матеріалу. Структура посібника передбачає послідовне викладення логічно пов’язаних тем, починаючи з логіко-множинних основ і до поняття границі та неперервності функцій.

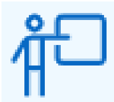
Особливу увагу приділено зосередженню студентів на сутнісному змісті понять, їхніх внутрішніх логічних зв’язках та загальній структурі математичної теорії. Доцільність послідовного вивчення тем, охоплених цим посібником, обумовлена їхньою логічною наступністю, що дозволяє студентам не лише засвоїти матеріал, але й усвідомити внутрішню єдність курсу.

Зміст посібника відповідає навчальній програмі з курсу математичного аналізу для студентів педагогічних університетів та може бути використаний як основа для самостійного опрацювання, підготовки до семінарських занять, контрольних робіт і майбутньої професійної діяльності.

Текст теоретичного матеріалу написаний авторами навчального посібника з урахуванням багаторічного досвіду викладання цієї дисципліни студентам фізико-математичного факультету. Важливе місце відведено ілюстративним прикладам, що мають практичну або методичну цінність.

У навчальному посібнику використано наступні позначення:

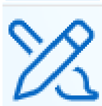
 – основний текст

 – означення понять

 – формулювання тверджень

 – доведення тверджень

 – зауваження

 – розв’язання прикладів

 – геометрична інтерпретація

 – історичні відомості

Вступ до математичного аналізу

1 Логічні операції

Під ***висловлюванням*** розуміють речення, щодо якого однозначно можна зробити висновок про його істинність чи хибність. Наприклад, «3>1», «Псел – річка» – істинні висловлювання, а «2 – ірраціональне число», «Суми – столиця України» – хибні. Висловлювання позначають великими латинськими буквами, наприклад, $A, B, C, \ldots$.

З висловлювань за допомогою логічних операцій утворюють логічні вирази. Основними логічними операціями є: ***заперечення*** ($\overline{A}$ – «не A»), ***диз'юнкція*** ($A \vee B$ – логічне «або»), ***кон'юнкція*** ($A \wedge B$ – логічне „і”), ***імплікація*** ($A \Rightarrow B$ – логічне слідування), ***еквіваленція*** ($A \Leftrightarrow B$ – логічна рівність).

Предикатом називають висловлювання, що містить змінну, яка належить деякій множині. Наприклад, $P(x)$ – «натуральне число x, що ділиться на 3».

Імплікацію $A \Rightarrow B$ або ***еквіваленцію*** $A \Leftrightarrow B$, у якій одне твердження істинне, а істинність другого належить встановити, називають ***теоремою***. Істинне твердження називають ***умовою теореми***, друге – її ***висновком***.

Нехай A – умова теореми $A \Rightarrow B$. Тоді теорема справедлива, коли її висновок B є істинним, і не має місця, коли він хибний. Проте, висновок B і теорема $A \Rightarrow B$ можуть бути істинними навіть тоді, коли A – хибне. Кажуть, що виконання умови A ***достатнє*** для справедливості теореми $A \Rightarrow B$ та її висновку B. Теорему $A \Rightarrow B$ можна формулювати «з A слідує B», а також «A достатньо для B».

Зауваження. Достатність умови *A* слід розуміти так, що її виконання є, можливо, надто сильною вимогою. Тоді умову *A* можна послабити (замінити іншою A_1, такою що $A \Rightarrow A_1$), не порушуючи істинності висновку *B*. Наприклад, у теоремі «число, що ділиться на вісім, є парним» умова «число, що ділиться на вісім» – достатня і може бути замінена слабшою: «число, що ділиться на чотири».

У теоремі $A \Rightarrow B$ твердження *A* не може бути істинним без істинності *B*, тому отримуємо ще одне формулювання цієї теореми: «*B* є ***необхідним*** для *A*».

Теорему $A \Rightarrow B$ називають ***прямою теоремою***, а теорему $B \Rightarrow A$ – ***оберненою*** до неї. Проте, не завжди, коли має місце пряма теорема справедливою є й обернена до неї. У випадку, коли виконуються і пряма, і обернена теореми, справедлива еквіваленція $A \Leftrightarrow B$, при цьому твердження *A*, *B* одночасно істинні чи хибні. Тоді теорему формулюють: «*A* ***необхідно і достатньо*** для *B*», або «*B* виконується ***тоді й тільки тоді***, коли виконується *A*», або «*A* виконується ***тоді й тільки тоді***, коли виконується *B*».

Доведення теореми $A \Rightarrow B$ є ланцюжком очевидних та істинних імплікацій $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{i-1} \Rightarrow A_i \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$, який починається з умови теореми *A*, закінчується її висновком *B* та містить тільки істинні, раніше доведені твердження або аксіоми A_i.

Доведення теореми $A \Leftrightarrow B$ складається з двох етапів:

1) доведення необхідності *A* для *B*, тобто доведення $B \Rightarrow A$;

2) доведення достатності *A* для *B*, тобто доведення $A \Rightarrow B$.

Досить часто при доведенні теореми $A \Rightarrow B$ використовують метод «***доведення від супротивного***», коли доведення істинності цієї імплікації замінюється доведенням хибності висловлювання $A \wedge \overline{B}$.

Метод доведення від супротивного полягає в тому, що для доведення істинності певного твердження спочатку припускається, що це твердження хибне, а потім показується, що з цього припущення випливає протиріччя з умовою або відомими математичними фактами.

Основні кроки методу:

1) припускаємо твердження, протилежне до того, що потрібно довести;

2) на основі припущення робимо логічні висновки;

3) виявляємо протиріччя між отриманими висновками і умовою теореми або відомими математичними фактами;

4) робимо висновок, що припущення було хибним, а, отже, початкове твердження є істинним.

Приклад **Методом від супротивного довести твердження: «Число, кратне 4, є парним».**

Нехай висловлювання A – «x – кратне 4»; B – «x – парне». Тоді твердження теореми має вигляд $A \Rightarrow B$. Застосуємо метод від супротивного і припустимо, що x кратне 4 і непарне. Оскільки x кратне 4, то x ділиться на 2. Отже, маємо, що непарне число ділиться на 2. Отримане протиріччя (хибне висловлювання) дає підставу для заміни прийнятого припущення на протилежне твердження, а саме: x – парне.

Також часто вживаним методом доведення тверджень є ***метод математичної індукції***, який використовується у випадках, коли треба показати істинність твердження для всіх натуральних чисел або для чисел, більших за деяке натуральне число.

Суть методу математичної індукції:

1. **База індукції**: спочатку доводимо, що твердження істинне для початкового значення $n = n_0$, де n_0 – початковий індекс. Зазвичай це число 1, але іноді це може бути інше натуральне число.
2. **Індукційне припущення**: припускаємо, що твердження істинне для деякого натурального числа $n = k$.
3. **Індукційний крок**: на основі індукційного припущення доводимо, що твердження також істинне для наступного числа $n = k + 1$.

Висновок: якщо попередні кроки виконуються, то робимо висновок, що твердження є істинним для всіх натуральних чисел, більших або рівних n_0.

Приклад **Довести твердження, що сума перших n натуральних чисел дорівнює** $S(n)=1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. **База індукції**: для $n=1$ маємо, що $S(1)=1$, за формулою також $S(1)=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}=1$, отже, база індукції виконана.

2. **Індукційне припущення**: припустимо, що для деякого $n=k$ формула виконується, тобто $S(k)=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

3. **Індукційний крок**: доведемо, що для $n=k+1$ формула також виконується. Маємо:

$$S(k+1)=1+2+...+k+(k+1)=S(k)+(k+1).$$

За індукційним припущенням, $S(k)=\dfrac{k(k+1)}{2}$, тому:

$$S(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

тобто для $n=k+1$ формула виконується.

Отже, за методом математичної індукції твердження справедливе для всіх натуральних чисел.

У математичному аналізі низка тверджень, які виражають найбільш важливі і часто вживані в логічних міркуваннях відношення між об'єктами, одержала назву ***кванторів***. До них відносять:

1) ***квантор загальності*** $\forall$ (перевернута перша літера англійського слова All) – «для всіх», «для кожного», «для будь-якого»;

2) ***квантор існування*** $\exists$ (перевернута перша літера англійського слова Exist) – «існує»; сполучення $\exists!$ вказує на єдиність об'єкту – «існує єдиний».

Також використовуються такі ***символи***:

$\overset{def}{=}$	дорівнює за означенням
$:$ або $\vert$	такий що, виконується, вірно

Приклад **Записати твердження за допомогою кванторів та символів.**

1) Якщо функція $y=\cos x$, то її модуль не перевищує 1:

$$y=\cos x \Rightarrow |y|\le 1.$$

2) Графік функції $y=\log_a x$ перетинає вісь Ox лише в одній точці $x=1$:

$$\exists!\ x=1 : \log_a x = 0.$$

Іноді потрібно побудувати заперечення деякого математичного висловлювання, яке містить квантори загальності та існування. При цьому користуємося наступними правилами:

$$\overline{\forall x\in M \quad P(x)} \Leftrightarrow \exists x_0 \in M \quad \overline{P(x)},$$

$$\overline{\exists x_0\in M \quad P(x_0)} \Leftrightarrow \forall x \in M \quad \overline{P(x)},$$

тобто знак $\exists$ заміняємо на $\forall$ і навпаки, а твердження P на його заперечення.

2 Множини та дії над ними

Поняття множини є фундаментальним у математиці та використовується у багатьох математичних дисциплінах, зокрема, математичному аналізі, теорії чисел, алгебрі, геометрії тощо. Хоча множина є неозначуваним поняттям, її можна інтуїтивно визначити як ***сукупність або набір об'єктів, об'єднаних певною спільною властивістю***. Множину вважають заданою, коли задано ознаку, за якою для кожного об’єкта однозначно визначено його приналежність цій множині. Так, прикладами множин є набір натуральних чисел, множина розв’язків певного рівняння, множина студентів конкретної групи тощо.

Об’єкти, що складають множину, називаються її ***елементами*** і мають спільну властивість, що визначає цю множину. Залежно від кількості елементів множини бувають ***скінченні*** та ***нескінченні***. Прикладом скінченної множини є множина студентів університету, а множина натуральних чисел є нескінченною.

У теорії множин важливим є поняття ***порожньої множини*** (позначають $\varnothing$), яка не містить жодного елемента. Наприклад, множина дійсних розв’язків рівняння $x^2+1=0$ є порожньою, оскільки це рівняння не має дійсних коренів. Крім того, існують множини, що складаються лише з одного елемента (***одноелементні***), як, наприклад, множина розв’язків рівняння $x+5=0$.

Множини зазвичай позначають великими латинськими літерами $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, а їхні елементи – відповідними малими $a, b, \ldots, x, y, \ldots$. Якщо елемент a ***належить*** множині A, це записують як $a \in A$; якщо ***не належить***, то пишуть $a \notin A$.

Якщо елементи множини можна позначити окремими символами, то їх виписують підряд у фігурних дужках. Наприклад, $A=\{a,b,c,d\}$ або $N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$. Зазначимо, що для множини N виписано не всі її елементи, але досить зрозуміло, що множина натуральних чисел є нескінченною.

Також множину можна записати за допомогою фігурних дужок, вказавши ***характеристичну властивість***, яку задовольняють всі її елементи. Наприклад, $C=\left\{c : c^2-5c+6\geq 0\right\}$ визначає множину розв'язків нерівності.

Множину A називають ***підмножиною*** множини B, якщо всі елементи множини A також є елементами B, і це записують як $A\subset B$. Наприклад, множина A студентів 511 групи є підмножиною множини B студентів факультету, тобто $A\subset B$.

Множини A та B називають ***рівними***, якщо $A\subset B$ і $B\subset A$, тобто вони складаються з одних і тих самих елементів. Так, множини $A=\{2;3\}$ і $B=\left\{x : x^2-5x+6=0\right\}$ рівні між собою.

Дії над множинами є операціями, які дозволяють не лише комбінувати різні множини, а й формувати нові множини з потрібними властивостями, що є важливим для аналізу і розв'язання складних математичних задач. Основними діями над множинами є об'єднання, перетин, різниці, а також доповнення множини. Дії над множинами візуально зручно зобразити на так званих кругах Ейлера.

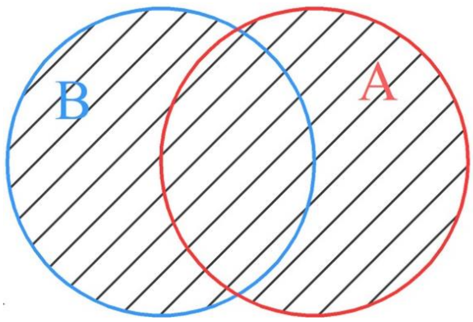


Рис. 1

Об'єднання двох множин A і B визначають як множину, що містить усі елементи, які належать або множині A, або множині B (або обом множинам одночасно) і позначають як $A\cup B$ (рис. 1). Наприклад, якщо A – множина парних чисел, а B – множина простих чисел, то $A\cup B$ міститиме всі числа, які є або парними, або простими.

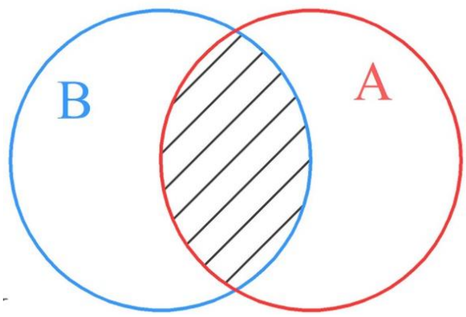


Рис. 2

Перетином множин A і B є множина, що складається з елементів, які належать обом множинам одночасно. Перетин позначається як $A\cap B$ (рис. 2). Якщо жоден елемент не належить одночасно обом множинам, перетин вважається порожньою множиною. Наприклад, якщо A – множина парних чисел, а B – множина чисел, що діляться націло на 3, то $A\cap B$ міститиме всі числа, які діляться націло на 6.

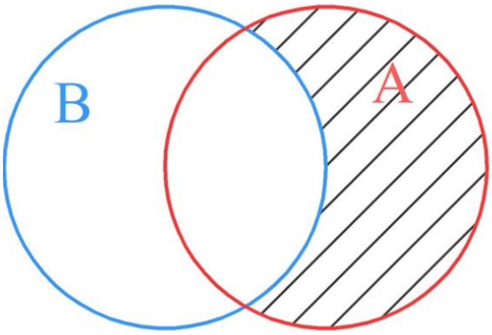


Рис. 3

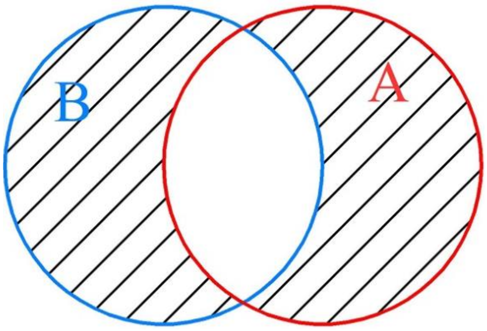


Рис. 4

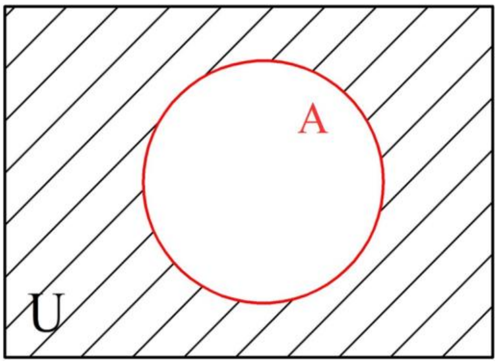


Рис. 5

Різницею множин A і B є множина, яка складається з елементів множини A, які не належать множині B, позначається як $A\backslash B$ і читається як «A мінус B» або «A без B» (рис. 3). Наприклад, якщо A – множина студентів математичного факультету, а B – множина студентів, що беруть участь у семінарі, то $A\backslash B$ є множиною студентів факультету, які не беруть участі у семінарі.

Доречним є введення такої операції як симетрична різниця множин A і B, позначається як $A\Delta B$. ***Симетричною різницею*** множин A і B називають множину, яка є об'єднанням множин $A\backslash B$ та $B\backslash A$ (рис. 4).

Доповненням множини A до деякою універсальної множини U називають множину всіх елементів, які належать U, але не належать A. Позначають це доповнення як $C_U A$ або $U\backslash A$ (рис. 5).

Декартовим добутком множин A та B називають множину впорядкованих пар $(x; y)$, де $x \in A$ і $y \in B$, і позначають як $A \times B$.

Наприклад, якщо $A = \{1; 2\}$, $B = \{3; 4\}$, то $A \times B = \{(1;3), (1;4), (2;3), (2;4)\}$.

Аналогічно можна визначити добуток декількох множин або цілого сімейства множин. Добутки $E \times E$, $E \times E \times E$ позначаються як E^2, E^3 відповідно. Звідси добуток n множин всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$ позначають через $\mathbb{R}^n$.

Наприклад, множина точок площини позначається через $\mathbb{R}^2$, а множина точок простору – $\mathbb{R}^3$.

Якщо кожному елементу множини X можна поставити у відповідність один і тільки один елемент множини Y, причому кожний елемент множини Y відповідатиме тільки одному елементу множини X, то говорять, що між елементами множин X та Y встановлена ***взаємно однозначна відповідність***. Дві множини, між елементами яких можна встановити взаємно однозначну відповідність, називаються ***еквівалентними***. Наприклад, між елементами множини натуральних чисел N і множиною всіх парних чисел M взаємно однозначну відповідність можна встановити формулою $m = 2n$, отже, ці множини еквівалентні. Про дві еквівалентні множини говорять, що вони мають ***однакову потужність*** (***рівнопотужні***), а у випадку скінченних множин – мають однакову кількість елементів.

Множина називається ***впорядкованою***, якщо вказано порядок, за яким з будь-яких двох різних елементів x та y множини X один передує іншому, причому виконуються ***властивості***:

а) властивість ***необоротності*** (має місце тільки одне із співвідношень: x передує y, y передує x);

б) ***транзитивність*** (якщо x передує y і y передує z, то x передує z).

Наприклад, множина натуральних чисел є впорядкованою, оскільки для будь-яких двох чисел завжди можна визначити, яке з них більше або менше.

Нагадаємо ***основні числові множини***:

$N = \{1,2,3,4,\dots\}$ – множина натуральних чисел,

$N_0 = \{0,1,2,3,4,\dots\} = N \cup \{0\}$,

$Z = \{0,\pm1,\pm2,\dots\}$ – множина цілих чисел,

$Q = \left\{\frac{m}{n} : m \in Z, n \in N\right\}$ – множина раціональних чисел.

Проміжки на числовій прямій:

$[a;b] = \{x : a \le x \le b\}$ – ***відрізок***;

$(a;b) = \{x : a < x < b\}$ – ***інтервал***;

$(a;b] = \{x : a < x \le b\}$ – ***напівінтервал***;

$(a;+\infty) = \{x : x > a\}$,

$(-\infty;+\infty) = R$.

Зауваження. Якщо неважливо, який проміжок розглядають, то використовують позначення $\langle a;b\rangle$.

Справедливі включення $N\subset N_0\subset Z\subset Q$.

Однією з важливих задач математики є задача про вимірювання величин. ***Виміряти величину*** означає порівняти її з якоюсь відомою величиною, що вибрана за одиницю виміру або еталон. Результат вимірювання подається певним числом. Задача вимірювання має два типи розв'язку: результат є раціональним числом або не є таким.

Розглянемо задачу вимірювання деякої величини, наприклад, відрізка прямої. Для цього виберемо деяку одиницю виміру e та перевіримо, скільки разів вона міститься у вимірюваній величині. Можливі два випадки: дана величина дорівнює цілому числу одиниць виміру, або ж не вимірюється абсолютно точно вибраною одиницею виміру, не кратна їй. У другому випадку вибирають новий еталон e_1, поділивши початкову одиницю виміру на n рівних частин, тобто $e_1=\frac{1}{n}\cdot e$. Якщо еталон e_1 міститься у вимірюваній величині рівно m разів, то говорять, що ця величина є співвимірною з одиницею виміру і дорівнює $me_1=\frac{m}{n}e$. Символ $\frac{m}{n}$ називають ***звичайним дробом*** або ***відношенням***.

Дроби $\frac{m}{n}$ та $\frac{mp}{np}$ ($p\in N$) одержуються при різних способах вимірювання однієї і тієї ж величини. Справедливим є і більш загальне твердження: якщо $ms=nr$, де $s\neq 0$, $r\neq 0$, то дроби $\frac{m}{n}$ та $\frac{r}{s}$ виражають результат вимірювання однієї і тієї ж величини. Тому ці дроби будемо називати *еквівалентними* і записувати як $\frac{m}{n}\sim\frac{r}{s}$.

Наприклад, $\frac{6}{8}\sim\frac{9}{12}\sim\frac{3}{4}$.

Означення. ***Раціональним числом*** називають клас всіх еквівалентних дробів $\frac{m}{n}$, де $m \in Z,\ n \in N$.

Кожне раціональне число можна зобразити деякою точкою на числовій прямій.

Будь-яке ціле число m можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{1}$, який є еквівалентним дробу $\frac{mn}{n}$, тому будемо ототожнювати ціле число з класом дробів $\left\{\frac{mn}{n}\right\}$. Отже, множина цілих чисел є підмножиною раціональних.

Кожне раціональне число r, відмінне від нуля, завжди можна подати у вигляді *нескоротного дробу* $r = \frac{m}{n}$, де m і n – взаємно прості числа. Таке представлення є однозначним.

Означення. ***Множиною раціональних чисел*** Q називається множина класів еквівалентних дробів, на якій введено відношення порядку та алгебраїчні операції додавання, віднімання, множення та ділення.

Відношення порядку можна ввести так: для будь-яких двох раціональних чисел a і b справедливим є одне і тільки одне із співвідношень: або $a > b$, або $b > a$, або $a = b$.

Множина раціональних чисел є *замкненою* відносно алгебраїчних операцій, тобто сума, різниця, добуток двох раціональних чисел, а також їх частка за умови , що знаменник не дорівнює нулю, є числом раціональним.

Множина раціональних чисел є *щільною*: між будь-якими двома раціональними числами завжди існує проміжне раціональне число. Наприклад, це може бути їх середнє арифметичне. Очевидно, що існує нескінченна множина раціональних чисел, які лежать між будь-якими двома раціональними числами.

Отже, множина раціональних чисел має такі **властивості**:

- упорядкованість (всі її елементи розташовані в строго визначеному порядку відповідно до їх числової величини);
- аксіома Архімеда: для будь-яких двох раціональних чисел p і q завжди знайдеться таке натуральне число n, що виконується нерівність $np > q$;
- щільність.

Не всі задачі математики можна розв'язати в множині раціональних чисел.

Приклад **Довести, що не існує такого раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2.**

Припустимо супротивне. Нехай існує раціональне число $\frac{p}{q}$ таке, що $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, і дріб $\frac{p}{q}$ – нескоротний. Тоді маємо $p^2 = 2q^2$. Оскільки права частина цієї рівності ділиться на 2, то і ліва частина також ділиться на 2, тобто $p^2 \div 2$ і $p \div 2$. Тому число p можна записати у вигляді $p = 2m$. Підставимо останній вираз до рівності $p^2 = 2q^2$. Маємо $4m^2 = 2q^2, 2m^2 = q^2$. Аналогічно приходимо до висновку, що і число $q \div 2$, тобто $q = 2n$. Тоді дріб $\frac{p}{q} = \frac{2m}{2n}$ можна скоротити, що суперечить припущенню. Отже, ми довели, що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2.

Приклад **Показати, що послідовність вкладених один в одного відрізків з раціональними кінцями не завжди матиме спільну точку, яка відповідає саме раціональному числу на числовій прямій.**

Розглянемо послідовність числових відрізків, кінці яких є раціональними числами: $[1;2] \supset [1{,}4;1{,}5] \supset [1{,}41;1{,}42] \supset \ldots$. Ліві кінці відрізків отримані видобуванням квадратного кореня з числа 2 з точністю до 1, до 0,1, до 0,01 і т.д. з недостачею, а праві кінці – з надвишком. Різниця між правим та лівим кінцями дорівнює $b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$ та при зростанні n може стати як завгодно малою. Покажемо, що не існує такого раціонального числа, яке б належало всім цим відрізкам.

Припустимо супротивне: нехай існує деяке раціональне число $\frac{p}{q}$, що належить всім відрізкам, тобто $a_n \le \frac{p}{q} \le b_n$ при довільному n. Тоді справедлива нерівність $a_n^2 \le \frac{p^2}{q^2} \le b_n^2$. З алгоритму побудови відрізків маємо, що $a_n^2 < 2 < b_n^2$. Тоді $\left|\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2\right| < b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) = \frac{b_n + a_n}{10^n} < \frac{4}{10^n}$, тобто невід'ємна різниця двох сталих величин менша за як завгодно мале число. А це можливо лише за умови, коли $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, що суперечить вище доведеному твердженню. Отже, немає жодного раціонального числа, яке б належало такій послідовності вкладених відрізків з раціональними кінцями.

Ці приклади вказують на необхідність розширення множини раціональних чисел до такої, де подібні задачі будуть розв'язними. Такою множиною є множина *ірраціональних чисел*, яка позначається символом I. В математиці розглядається три класичні теорії ірраціональних чисел: теорія Вейєрштрасса (1815-1897), теорія Дедекінда (1831-1916), теорія Кантора (1845-1918).

Об'єднання множин раціональних і ірраціональних чисел утворюють множину всіх дійсних чисел R, тобто $Q \bigcup I = R,\ Q \bigcap I = \varnothing$. Очевидно, що для множини дійсних чисел мають місце властивості упорядкованості, щільності та аксіома Архімеда. Проте, на відміну від множини раціональних чисел множина дійсних чисел має ще й *властивість неперервності*: між будь-якими двома дійсними числами не існує чисел іншої природи. З геометричної точки зору цю властивість можна сформулювати так:

Якщо на прямій є нескінченна множина вкладених відрізків $G_1, G_2, G_3, \ldots$, кожний з яких містить наступний, і відрізок G_k при всіх досить великих k буде як завгодно малий, то на прямій існує одна і тільки одна точка, що належить кожному з відрізків G_k.

Це означає, що дійсні числа «заповнюють» всю числову пряму повністю, без жодних пропусків чи розривів, проте як між раціональними точками є «дірки».

Справедливі твердження:

Кожне раціональне число можна подати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу. Кожне ірраціональне число подається у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Всі дійсні числа поділяються на ***алгебраїчні*** і ***трансцендентні***. *Алгебраїчним* називається число, що є коренем алгебраїчного рівняння з раціональними коефіцієнтами:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \;\; (a_0 \neq 0,\ n \geq 1).$$

Наприклад, всі раціональні числа є алгебраїчними, $\sqrt[n]{a}$ – алгебраїчне число, оскільки воно є коренем рівняння $x^n - a = 0$.

Усі ірраціональні числа, які не є алгебраїчними, називаються *трансцендентними*. Наприклад, e, π, 2^{π}, $2^{\sqrt{2}}$.

3 Модуль дійсного числа

Означення. ***Модулем*** або ***абсолютною величиною*** дійсного числа a називається число $|a|$, що визначається так:

$$|a| = \begin{cases} a, \ \textit{якщо} \ a > 0, \\ 0, \ \textit{якщо} \ a = 0, \\ -a, \ \textit{якщо} \ a < 0. \end{cases}$$

Наприклад, $|5{,}1| = 5{,}1$, $\left|-\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$, $|0| = 0$.

Властивості модуля

1) $\forall a: \ |a| \geq 0$, причому $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

2) $\forall a: \ -|a| \leq a \leq |a|$ та $|-a| = |a|$.

3) Рівносильні нерівності:

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \quad (|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b).$$

Нехай $|a| \leq b$, тоді $-|a| \geq -b$. Оскільки $-|a| \leq a \leq |a|$, то справедлива нерівність $-b \leq a \leq b$. Навпаки, нехай виконується нерівність $-b \leq a \leq b$, що означає одночасне виконання нерівностей $a \leq b$ і $a \geq -b$. З останньої нерівності маємо $-a \leq b$. Оскільки за означенням $|a| = \pm a$, то відповідно і $|a| \leq b$.

4) $|a_1 + a_2 + \ldots a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$, тобто модуль суми n дійсних чисел не перевищує суми їх модулів.

Доведемо цю нерівність для випадку двох чисел, тобто $|a+b| \leq |a| + |b|$. Для довільних дійсних чисел a і b справедливі нерівності $-|a| \leq a \leq |a|$, $-b \leq b \leq |b|$. Додамо їх почленно: $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|)$. За попередньою властивістю 3 ця подвійна нерівність рівносильна нерівності $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Випадок більшої кількості чисел доводиться методом математичної індукції.

5) $|a-b| \leq |a| + |b|$.

Якщо в попередній нерівності замінити b на $-b$, отримаємо дану нерівність.

6) $|a-b| \geq |a|-|b|$

Для довільних чисел a і b маємо: $a=(a+b)-b$, тоді з попередньої нерівності отримаємо: $|a|=|(a+b)-b| \leq |a+b|+|b|$, звідки випливає $|a|-|b| \leq |a+b|$. Замінивши b на $-b$, отримаємо нерівність $|a-b| \geq |a|-|b|$.

7) $|ab|=|a||b|$.

Для випадку більшої кількості чисел $|a_1a_2 \ldots a_n|=|a_1||a_2|\ldots|a_n|$, зокрема $|a^n|=|a|^n$.

8) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$.

9) **Геометричний зміст модуля**: з геометричної точки зору $|a|$ визначає відстань ρ від початку координат до точки A, що зображує число a на координатній осі.

Можна довести, що модуль різниці двох чисел a і b виражає відстань між ними на координатній прямій, тобто $|a-b|=\rho(a;b)$.

10) $|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$.

Приклад

Розв'язати рівняння $|x-4|=6$.

$$\left[\begin{array}{l} x-4=6, \\ x-4=-6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Розв'язати рівняння $|3-x|-|3x+7|=5$.

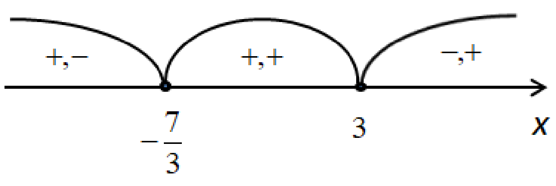


Рис. 6

Знаходимо нулі підмодульних виразів: $x_1=3,\ x_2=-\dfrac{7}{3}$. На кожному з інтервалів розкриваємо модулі з урахуванням знаків підмодульних виразів (рис. 6).

Приклад

1) для $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right)$ маємо $3 - x + 3x + 7 = 5$, $2x = -5$, $x = -\frac{5}{2}$;

2) для $x \in \left[-\frac{7}{3}; 3\right)$ маємо $3 - x - 3x - 7 = 5$, $-4x = 9$, $x = -\frac{9}{4}$;

3) для $x \in [3; +\infty)$ маємо $-3 + x - 3x - 7 = 5$, $-2x = 15$, $x = -\frac{15}{2} \notin [3; +\infty)$.

Отже, розв'язками рівняння є $x = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{9}{4}$.

Розв'язати нерівність $|2x - 5| \le 3$.

$|2x - 5| \le 3$

$\Leftrightarrow \ -3 \le 2x - 5 \le 3 \ \Leftrightarrow \ 2 \le 2x \le 8 \ \Leftrightarrow \ 1 \le x \le 4$

Отже, розв'язками нерівності є $x \in [1; 4]$.

Розв'язати нерівність $x^2 - 9 > 0$.

$x^2 - 9 > 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 > 9 \ \Leftrightarrow \ |x| > 3 \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -3 \end{array}\right.$, тобто

розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

Розв'язати нерівність $|x^2 - 5x + 6| \le x^2 - 5x + 6$.

Очевидно, що $|a| \le a \ \Leftrightarrow \ a \ge 0$, звідси маємо:

$x^2 - 5x + 6 \ge 0 \ \Leftrightarrow \ (x - 2)(x - 3) \ge 0$ або $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

4 Обмежені множини. Грані множин

Нехай A – деяка множина дійсних чисел. Ця множина називається ***обмеженою зверху***, якщо існує таке число b, що для всіх елементів $a \in A$ виконується нерівність $a \leq b$. Усі числа b, що володіють зазначеною властивістю, називаються ***верхніми гранями*** множини A.

Наприклад, для множини A всіх раціональних чисел вигляду $\frac{m}{n}$, де $0 < m < n$, верхніми гранями є числа 3; 8; 100 тощо. Проте серед усіх верхніх граней є найменша – це число 1. Зрозуміло, що для довільного правильного дробу виконується $\frac{m}{n} < 1$ і для довільного елемента $x \in A$ такого, що $x < 1$, завжди знайдеться правильний дріб, більший за x.

Теорема (Вейєрштрасса). ***Якщо непорожня множина $A \subset R$ обмежена зверху, то серед її верхніх граней є найменша.***

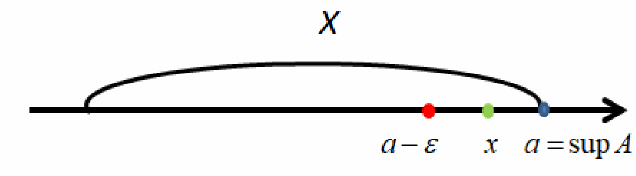
Доведення. Розглянемо дві множини: множину A і множину B її верхніх граней. Із означення верхньої грані випливає, що множина B лежить справа від множини A. Тому існує хоча б одне число c, що розділяє ці множини, тобто таке, що $a \leq c$, якщо $a \in A$, і $c \leq b$, якщо $b \in B$. З того, що $a \leq c$ для всіх $a \in A$ випливає, що c є однією з верхніх граней множини A. При цьому ця верхня грань є найменшою, оскільки $c \leq b$ для всіх $b \in B$.

Означення. Найменша з верхніх граней множини A називається її ***точною верхнею гранню*** і позначається $\sup A$ (від латинського слова supremum - верхній).

Якщо число a є точною верхнею гранню множини X, то:

1) для будь-якого $x \in X$ справедлива нерівність $x \leq a$;

2) для будь-якого числа $a' < a$ існує хоча б один елемент $x \in X$ такий, що $x > a'$.



Зауважимо, що умову 2) можна сформулювати так: для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує хоча б один елемент $x \in X$ такий, що $x > a - \varepsilon$.

Множина A називається ***обмеженою знизу***, якщо існує таке число b, що $b \le a$ для всіх $a \in A$. Довільна обмежена знизу непорожня множина має найбільшу нижню грань, яку називають ***точною нижньою гранню*** і позначають $\inf A$ (від латинського слова infimum – нижній).

Аналогічно можна сформулювати умови 1)-2) для точної нижньої грані та візуалізувати їх.

Якщо множина A обмежена знизу і зверху, то її називають ***обмеженою***. У цьому випадку вона має і нижню, і верхню грані: $\alpha = \inf A,\ \beta = \sup A$, тобто множина A цілком міститься на відрізку $[\alpha; \beta]$.

Якщо $\sup A \in A$, то його називають ***найбільшим елементом*** множини A або ***максимумом*** A і позначають $\max A$. У цьому випадку $\max A = \sup A$. Аналогічно визначають ***найменший елемент*** множини A, або ***мінімум*** A: $\min A = \inf A$, коли $\inf A \in A$.

Приклад **Знайти екстремуми та точні грані множини** $A = \left\{ \dfrac{n^2}{n^2+1}, n \in N \right\}$.

Порівняємо два сусідні числа, що відповідають натуральним числам n і $n+1$. Для цього розглянемо їх різницю:

$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{(n+1)^2(n^2+1) - n^2((n+1)^2+1)}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)^2 n^2 + (n+1)^2 - (n+1)^2 n^2 - n^2}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} = \frac{2n+1}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} > 0$$

Це означає, що число $\frac{1}{2}$, яке відповідає $n=1$, є найменшим елементом даної множини, а отже, і точною нижньою гранню цієї множини.

З іншого боку, числа виду $\frac{n^2}{n^2+1}$ є правильними дробами і тому завжди менші за 1. Очевидно, що найбільшого елемента дана множина не має.

Покажемо, що число 1 є її точною верхнею гранню. Перевіримо виконання умови 2). Виберемо довільне число $\varepsilon > 0$ і розв'яжемо нерівність $\frac{n^2}{n^2+1} > 1-\varepsilon$ відносно n. Отримаємо, що $n > \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$. Зокрема, поклавши $\varepsilon = 0{,}01$, маємо, що остання нерівність виконується при $n > 9$, тобто всі числа даної множини, починаючи з числа, що відповідає $n=10$, містяться між числами $1-\varepsilon$ та 1.

Отже, $\min A = \inf A = \frac{1}{2}$, $\max A$ не існує, $\sup A = 1$.

5 Функція: основні поняття

У математичному аналізі ми часто зустрічаємося з величинами, які в умовах певної задачі можуть набувати різних числових значень. Величину x будемо називати ***змінною величиною***, якщо множина її числових значень E складається більше, ніж з одного елемента. Сама множина E називається ***областю зміни*** змінної величини. Якщо ж множина значень E деякої величини складається лише з одного елемента, то цю величину називають ***сталою***.

Змінні величини здебільшого позначають буквами $x, y, z, u, v, \ldots$, а сталі – буквами $a, b, c, k, m, n\ldots$.

При дослідженні різних процесів доводиться розглядати змінні величини не самі по собі, а різні зв'язки між ними. Наприклад, шлях s тіла, що вільно падає, пов'язаний з часом t за формулою $s = \dfrac{gt^2}{2}$, де g – стала величина; довжина кола залежить від його радіуса тощо. При цьому кажуть, що одна змінна величина є *функцією* від іншої змінної величини.

Сам термін «функція» уперше було вжито німецьким математиком Лейбницем у 1673 р. у листі до Гюйгенса (під функцією він розумів відрізок, довжина якого змінюються за певним законом), а у публікаціях ввів у 1694 р.

Означення. Нехай X та Y – непорожні множини елементів довільної природи. Якщо відоме правило (закон) f, за яким кожному елементу $x \in X$ поставлено у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, то говорять, що на множині X задана ***функція*** $y = f(x)$. При цьому елемент $x \in X$ називається ***незалежною змінною*** або ***аргументом***, а елемент $y \in Y$ – ***залежною змінною*** або ***функцією***. Множина X називається ***областю визначення*** функції або *областю задання* функції і позначається $D(y)$ або $D(f)$, а множина Y – ***областю*** її ***значень*** і позначається $E(y)$ або $E(f)$.

В основі означення функції лежать поняття множини і відповідності, при чому не має значення, якими правилами та засобами встановлюється ця відповідність. Отже, функція визначається (1) множиною значень аргументу і (2) законом відповідності f.

Наприклад, функції $y = x^2,\ x \in R$ та $y = x^2,\ x \in [2;5]$ є різними, оскільки вони відрізняються областю значень аргументу.

Зауваження. Область визначення функції може бути задана, може випливати з умови задачі, а може визначатися безпосередньо законом відповідності.

Способи задання функцій

1) Спосіб задання функції, коли закон, за яким залежно від x обчислюється значення y, виражається словами, називається ***словесним*** або ***описовим***. Наприклад, *функція Діріхле* $y = D(x)$, коли кожному раціональному числу поставлено у відповідність число 1, а кожному ірраціональному числу – число 0, тобто

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } x \in Q, \\ 0, & \text{коли } x \in I. \end{cases}$$

2) Спосіб задання функції за допомогою формули називається ***аналітичним***. Зазначимо, що цей спосіб дає найбільше можливостей для вивчення властивостей функцій. Наприклад, $y = \dfrac{\sqrt{1 - \sin^3 x}}{\ln arctgx}$.

Зауваження. При такому способі задання функції під областю її визначення ми будемо розуміти множину значень незалежної змінної, коли аналітичний вираз функції має зміст.

3) Досить часто у повсякденному житті відображення відповідності між елементами множин подають у формі таблиці, яка містить ряд окремих значень аргументу і відповідні їм значення функції. Такий спосіб задання функції називається ***табличним***.

Перевагою цього способу є те, що для знаходження значення функції для певного значення аргументу не потрібно виконувати обчислень. Проте запис функції у вигляді таблиці не завжди є зручним, оскільки ми маємо значення функції тільки для окремих значень аргументу. Наприклад, таблиця значень тригонометричної функції.

3) Одним із наочних методів представлення функції, що дозволяє легко аналізувати її властивості є ***графічний*** спосіб. Він передбачає зображення функціональної залежності на координатній площині у вигляді кривої лінії, яка називається графіком функції.

Графік функції можна побудувати за допомогою експериментальних даних або аналітичного виразу. У першому випадку спочатку визначають значення функції для конкретних аргументів, а потім наносять отримані точки на координатну площину і з'єднують їх плавною лінією. Якщо ж функція задана аналітично, то її ***графіком*** є геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівняння функції, а графік будують шляхом визначення характерних точок цієї функції.

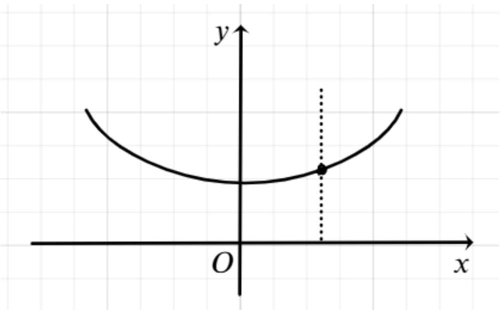


Рис. 7

Нехай на площині маємо прямокутну систему координат xOy. Будь-яка крива на цій площині задає деяку функцію y від x, якщо довільна пряма, паралельна осі Oy, перетинає цю криву не більше, ніж в одній точці (рис. 7).

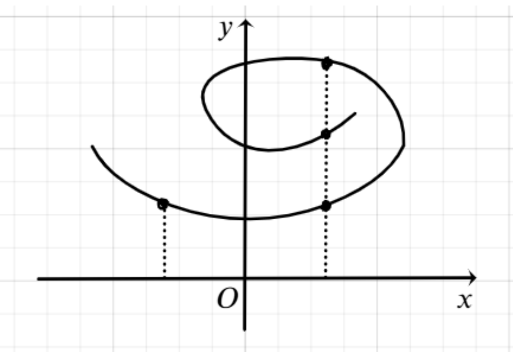


Рис. 8

Натомість, крива не задає функцію, коли деяка пряма, паралельна осі Oy, перетинає цю криву в двох або більше точках (рис. 8).

Графічний метод є потужним інструментом для візуалізації функцій та ілюстрації її властивостей, проте для отримання точних результатів його варто використовувати разом із аналітичними або чисельними методами.

Наочність графічного способу подання функції роблять його зручним для дослідження властивостей функції, тому часто використовують графічне зображення навіть тих функцій, які задані за допомогою таблиці або формули.

Якщо функцію задано таблицею, то, використовуючи відповідність між парами чисел і точками на координатній площині, наносимо ці точки на графік і з'єднуємо їх плавною лінією, що ілюструє характер зміни функції. У випадку, коли функцію задано формулою, необхідно спочатку побудувати таблицю значень аргументу та відповідних значень функції, після чого виконати ті самі кроки для побудови графіка.

Слід зауважити, що не всяку функцію можна зобразити графічно однією або декількома «плавними» кривими. Так, для функції Діріхле, як би густо не брали точки на числовій прямій і скільки б точок на площині не отримали, жодні дві з них не можна з'єднати «плавною» кривою, оскільки між довільними значеннями аргументу завжди є безліч як раціональних, так і ірраціональних значень, тому в будь-якому проміжку як завгодно часто будуть зустрічатися значення функції, рівні 0 або 1.

Графік функції

$$y = \begin{cases} x^3 & \text{при } -2 \le x \le 1, \\ 2^x & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 4 - x & \text{при } 2 < x \le 3 \end{cases}$$

буде складатися з трьох кривих, побудованих окремо для кожної множини з області визначення цієї функції (рис. 9).

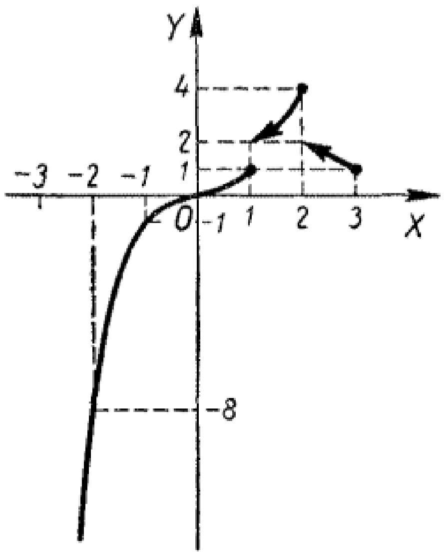


Рис. 9

Аналітично задану функцію можна подати у явному або неявному вигляді:

- ***явний спосіб*** полягає в тому, що залежність між змінними подана формулою, в якій одна із змінних виражається через іншу, наприклад, $y=f(x)$. Це дозволяє безпосередньо обчислювати значення функції для заданих значень аргументу;
- ***неявний спосіб*** передбачає, що рівняння, яке пов'язує змінні x і y, задано у загальному вигляді, наприклад, $F(x,y)=0$, і функцію не завжди можна безпосередньо виразити через її аргумент. У таких випадках знаходження значень функції може вимагати додаткових обчислень або аналізу. Наприклад, $y^3-2x^5y^2+x=0$.

Зауваження. Розподіл функцій на явні та неявні характеризує тільки спосіб їх задання. Всяку явну функцію можна записати й у неявному вигляді, наприклад, для функції $y=2+x^2$ неявний вигляд є $y-2-x^2=0$. Проте, якщо функція задана в неявному вигляді, то її не завжди можна записати як явну.

Розглянемо ще один спосіб задання функції. Якщо для змінної $t\in[\alpha;\beta]$ за правилом $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ кожному значенню $x\in X$ відповідає єдине y, то говорять, що ці рівняння на множині X визначають функцію $y(x)$ ***параметричним способом***. Змінну t називають ***параметром***.

Наприклад, рівності $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$, у яких $t\in[0;\pi]$, параметрично визначають функцію $y(x)$, яку можна подати у явному вигляді $y=\sqrt{1-x^2}$. Ці самі рівності, у яких параметр $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, функції не визначають.

Розглянемо операцію утворення складної (складеної) функції, тобто функції, аргументом якої є деяка функція. Таку дію ще називають *суперпозицією* функцій.

Означення. Нехай маємо дві функції $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$. Тоді ***складною функцією*** $y = F(x)$, утвореною ***суперпозицією*** функцій $f(u)$ і $\varphi(x)$, називають функцію $y = F(x) = f(\varphi(x))$. При цьому функцію $u = \varphi(x)$ називають *проміжною* змінною або *внутрішньою* функцією, а функцію $y = f(u)$ – *зовнішньою*.

Суперпозицію функцій $f(u)$ і $\varphi(x)$ позначають як $f \circ \varphi$.

Наприклад, нехай $y = \sin u$, а $u = x^2$, тоді суперпозиція функцій $\sin u$ та x^2 утворює складну функцію $y = \sin x^2$.

Складні функції можуть бути утворені суперпозиціями двох, трьох або більше функцій. Наприклад, функція $y = arctg\left(\lg\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\right)$ утворена суперпозицією чотирьох функцій $y = arctgu$, $u = \lg v$, $v = x + \sqrt{z}$, $z = x^2 + 1$.

Область визначення функції від функції складається з тих значень x з області визначення функції $u = \varphi(x)$, для яких відповідні значення u входять до області існування функції $y = f(u)$.

Наприклад, нехай $y = \sqrt{2 - x}$ – складна функція, у якої $y = \sqrt{u}$, $u = 2 - x$. Функція u існує при $x \in R$, а функція y лише при $u \geq 0$, тому областю визначення складної функції є проміжок $x \in (-\infty; 2]$, який визначається з нерівності $2 - x \geq 0$.

Приклад **Функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[0;1]$. Знайти області визначення функцій $f(x^2)$, $f(\sin x)$, $f(x - 2)$.**

Під символом $f(x^2)$ ми розуміємо функцію, отриману для аргументу x^2 за тим самим законом $y = f(x)$. Наприклад, якщо $f(x) = x^2 - x + 1$, то $f(x^2) = (x^2)^2 - x^2 + 1 = x^4 - x^2 + 1$.

Оскільки за умовою $f(x)$ визначена на відрізку $[0;1]$, то $f(x^2)$ має зміст лише для тих значень x, для яких $0 \le x^2 \le 1$, тобто при $|x| \le 1$. Отже, областю визначення функції $f(x^2)$ є відрізок $[-1;1]$.

Функція $f(\sin x)$ визначена для тих x, які задовольняють нерівність $0 \le \sin x \le 1$, тобто для $x \in [\pi n;(n+1)\pi]$, $n \in Z$.

Область визначення функції $f(x-2)$ характеризується подвійною нерівністю $0 \le x-2 \le 1$ або $x \in [2;3]$.

Приклад

Приклад. Знайти область визначення функцій:

а) $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 9}$**; б)** $y = \sqrt{16 - x^2}$ **;**

в) $y = \ln(\sin x)$**; г)** $y = \arcsin\dfrac{2x-1}{3}$**.**

а) Область визначення даної функції складається з тих значень змінної x, при яких знаменник відмінний від нуля, тобто $D(y) = \{x:\ x^2 - 6x + 9 \ne 0\} = \{x:\ (x-3)^2 \ne 0\} = (-\infty;3) \cup (3;+\infty) = R \setminus \{3\}$.

б) Функція визначена при тих значеннях x, при яких існує квадратний корінь, тобто

$$D(y) = \{x:\ 16 - x^2 \ge 0\} = \{x:\ (4-x)(x+4) \ge 0\} = [-4;4].$$

в) Дана функція визначена при таких значеннях x, коли підлогарифмічний вираз набуває додатних значень, а саме:

$$D(y) = \{x:\ \sin x > 0\} = \bigcup_{n \in Z} (\pi n; \pi(n+1)).$$

г) Для знаходження області визначення даної функції врахуємо, що $-1 \le \dfrac{2x-1}{3} \le 1$ або $-1 \le x \le 2$. Отже, $D(y) = [-1;2]$.

Приклад Розв’язати рівняння

$$arctg\sqrt{x(x+1)}+\arcsin\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Областю визначення функції з лівого боку цього рівняння є множина розв’язків системи $\begin{cases} x^2+x\geq 0, \\ 0\leq x^2+x+1\leq 1.\end{cases}$ Маємо, що $x^2+x=0$, а отже, ліва частина рівняння приймає дійсних значень лише при $x=0$ та $x=-1$. Безпосередньою перевіркою можна впевнитись, що ці два числа дійсно є коренями даного рівняння.

При аналітичному способі задання функції для різних значень аргументу можуть використовуватись різні аналітичні вирази, наприклад,

$$y=\begin{cases} x^2-1 \text{ при } x\leq 0, \\ 3x+2 \text{ при } -0<x\leq 2, \\ \sin x \text{ при } x>2.\end{cases}$$

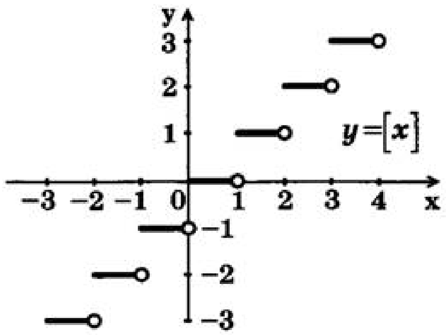


Рис. 10

Ще одним прикладом функції, що задається різними аналітичними виразами на різних проміжках, є функція Антьє $y=[x]$ – *ціла частина* x, тобто найбільше ціле число, що не перевищує x. З її означення слідує, що $\left[7\frac{3}{4}\right]=7$, $[-3{,}6]=-4$, $\left[\sqrt{2}\right]=1$ (рис. 10).

З даною функцією тісно пов’язана інша функція – *дробова частина* x, яка задається як $y=\{x\}=x-[x]$. З означення випливає, що $\left\{7\frac{3}{4}\right\}=\frac{3}{4}$, $[-3{,}6]=0{,}4$ (рис. 11).

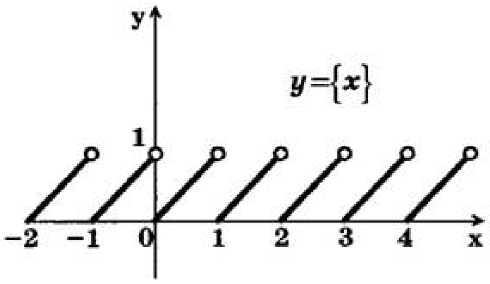


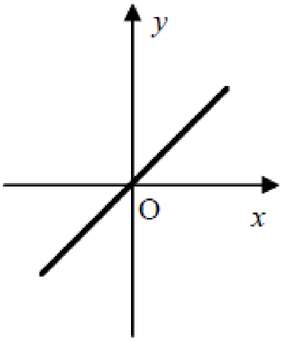
Рис. 11

6 Основні елементарні функції

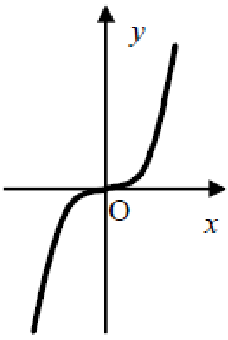
До ***основних елементарних функцій*** відносяться наступні:

1) Степенева функція $y = x^{\alpha}$, де α – дійсне число

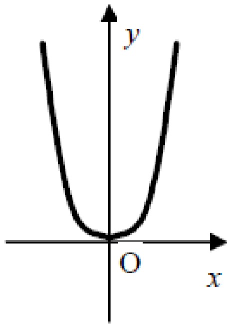
$y = x$



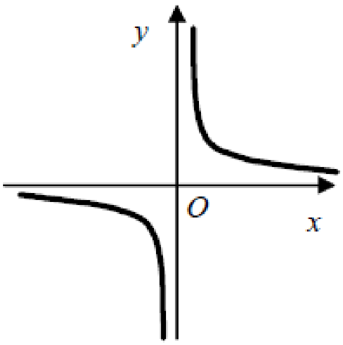
$y = x^3$, $y = x^{2n+1}$



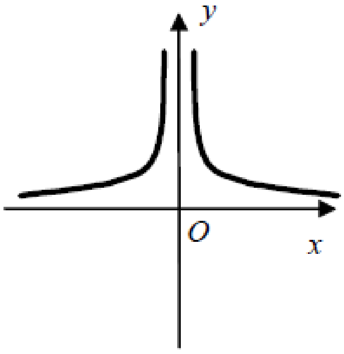
$y = x^2$, $y = x^{2n}$



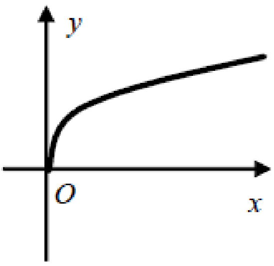
$y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^{2n+1}}$



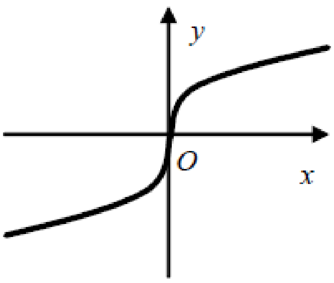
$y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$



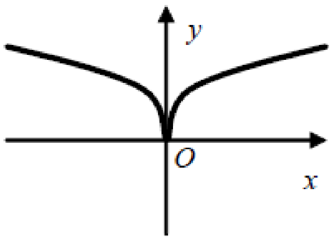
$y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[2n]{x}$



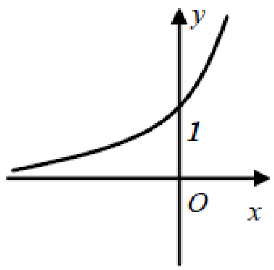
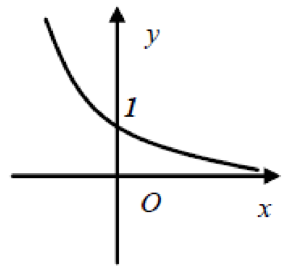
$y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[2n+1]{x}$



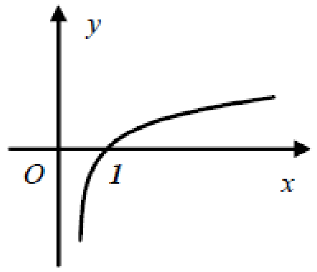
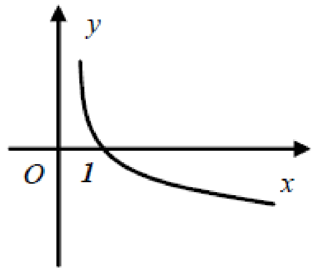
$y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = \sqrt[2n+1]{x^{2m}}$
$(2n + 1 > 2m)$



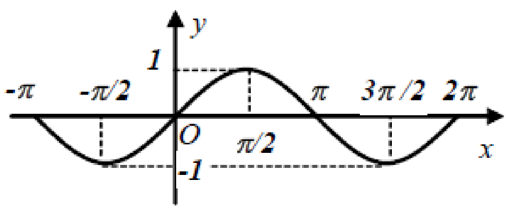
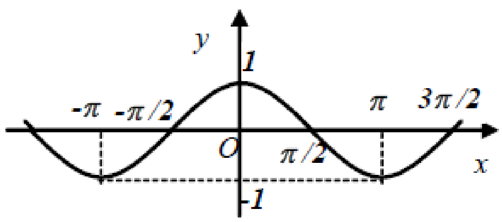
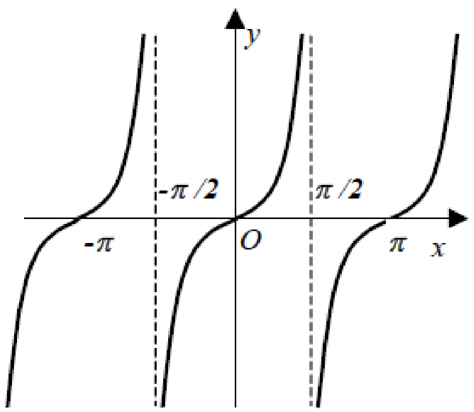
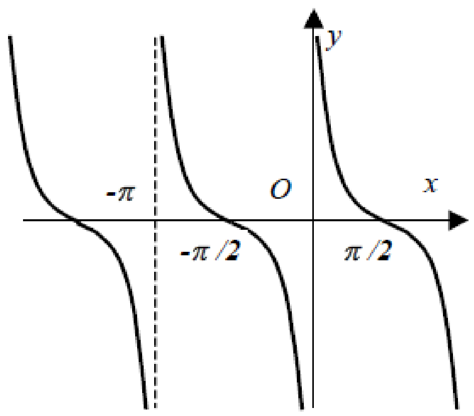
2) Показникова функція $y = a^x$, $a \neq 1, a > 0$

$y = a^x, a > 1$	$y = a^x, 0 < a < 1$
	

3) Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a \neq 1, a > 0$

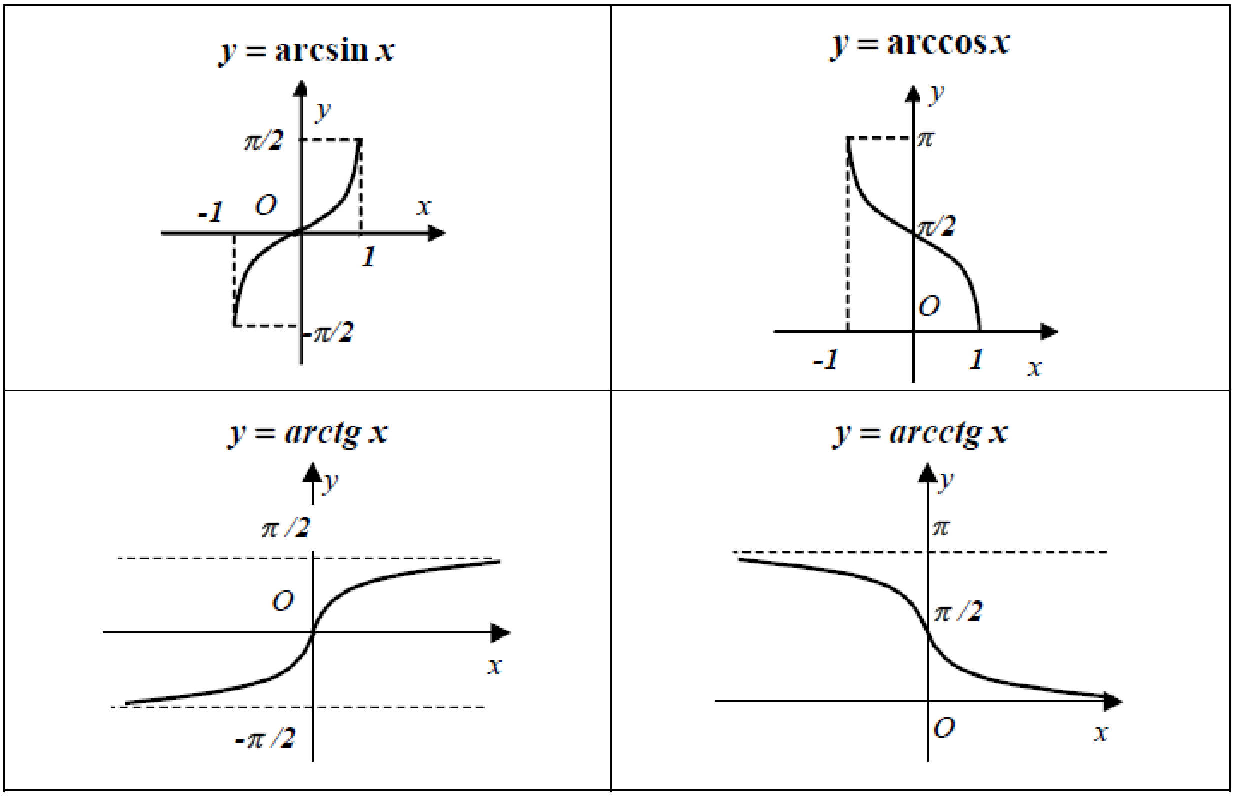
$y = \log_a x, a > 1$	$y = \log_a x, 0 < a < 1$
	

4) Тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

$y = \sin x$	$y = \cos x$
	
$y = tg\, x$	$y = ctg\, x$
	

5) Обернені тригонометричні функції

$$y=\arcsin x,\; y=\arccos x,\; y=\mathrm{arctg}\,x,\; y=\mathrm{arcctg}\,x$$



Означення. Функція $y=f(x)$ називається ***елементарною***, якщо вона задана єдиним аналітичним виразом, який складено з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості дій додавання, віднімання, множення, ділення та суперпозиції.

Зауваження. Функцію $y=\cos x$ можна було б не відносити до числа основних елементарних функцій, оскільки її можна було утворити суперпозицією функцій $y=\sin u$ та $u=x+\dfrac{\pi}{2}$.

Приклад

1) Функція $y=tg\sqrt{x^2+1}-\ln(\sin x)$ є елементарною.

2) Функція $y=|x|$ не є елементарною.

3) Функція Діріхле $y=\begin{cases}1, x\in Q,\\ 0, x\in I\end{cases}$ не є елементарною.

Основні елементарні функції

Всі елементарні функції поділяються на алгебраїчні та трансцендентні.

Означення. Функцію y називають *алгебраїчною*, якщо вона задовольняє якесь алгебраїчне рівняння виду

$$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + P_1(x)y + P_0(x) = 0,$$

де n – ціле додатне число, а $P_k(x)$– цілі раціональні функції, тотожно не рівні нулю.

Цілі раціональні функції (поліноми, многочлени) – це функції виду

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

де $a_k \in R$, що називаються ***коефіцієнтами***, а показники степенів – цілі додатні числа або нуль. Число n, що є найбільшим показником степеня многочлена, називають ***степенем*** цього многочлена. Наприклад, $y = 2x^5 - \frac{3}{4}x^2 + \sqrt{2}x + \pi$ – многочлен 4-го степеня, а $y = 2$ – многочлен нульового степеня.

Дробово-раціональні функції – це функції виду $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$, $g(x)$ – цілі раціональні функції. Наприклад, $y = \dfrac{3-x}{x^2+x+1}$.

Ірраціональні алгебраїчні функції – це функції, які містять під знаком кореня цілу раціональну або дробово-раціональну функцію змінної x. Наприклад, $y = \sqrt[3]{\dfrac{3-x}{x^2+x+1}}$.

Функції, які не є алгебраїчними, називаються ***трансцендентними.*** Так, до трансцендентних належать усі основні елементарні функції, крім степеневої з раціональним показником.

7 Деякі окремі класи функцій

Введемо поняття приросту функції.

Означення. Нехай дано функцію $y=f(x)$, визначену на проміжку $<a;b>$, і x_1,x_2 – деякі точки цього проміжку. Тоді число $\Delta f(x_1)=x_2-x_1$ називається ***приростом функції*** при переході від точки x_1 до точки x_2. Величину $\Delta x=x_2-x_1$ називають ***приростом аргументу***.

Маємо $x_2=x_1+\Delta x$, тоді приріст функції можна записати у вигляді

$$\Delta f(x_1)=f(x_1+\Delta x)-f(x_1).$$

Приклад **Обчислити приріст функції $y=\sin^2 x$ в точці x_0.**

$$\Delta y(x_0)=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)=\sin^2(x_0+\Delta x)-\sin^2 x_0=$$
$$=(\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0)(\sin(x_0+\Delta x)+\sin x_0)=$$
$$=4\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\frac{\Delta x}{2}=\sin\Delta x\sin(2x_0+\Delta x)$$

Монотонні функції

Означення. Функція $f(x)$ називається ***монотонно зростаючою*** (***неспадною***) на множині E, якщо для довільних $x_1,x_2\in E$ таких, що $x_1>x_2$, виконується нерівність $f(x_1)>f(x_2)$ ($f(x_1)\geq f(x_2)$). Іншими словами, функція є монотонно зростаючою (неспадною) на множині E, коли більшому значенню аргументу відповідає більше (більше або рівне) значення функції.

Функція $f(x)$ називається ***монотонно спадною*** (***незростаючою***) на множині E, якщо для довільних $x_1,x_2\in E$ таких, що $x_1>x_2$, виконується нерівність $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)\leq f(x_2)$), тобто більшому значенню аргументу відповідає менше (менше або рівне) значення функції.

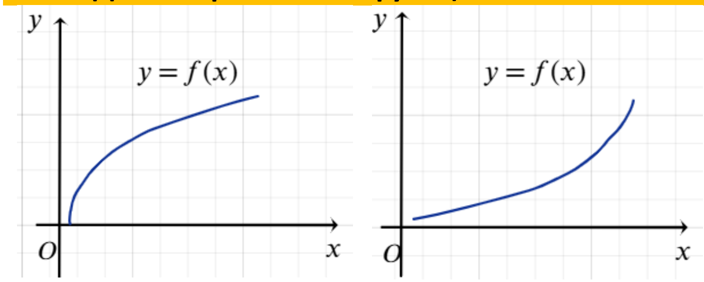


Рис. 12

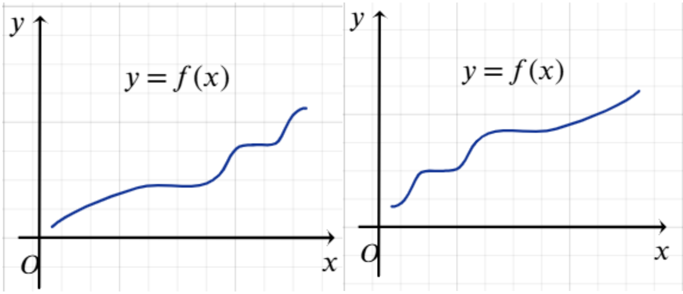


Рис. 13

Усі монотонно спадні, незростаючі, зростаючі та неспадні на множині E функції називають ***монотонними***. При цьому зростаючі або спадні функції називають ***строго*** монотонними (рис. 12), а незростаючі або неспадні – ***нестрого*** монотонними функціями (рис. 13).

Зауважимо, що для монотонно зростаючої функції додатному приросту аргументу Δx відповідатиме додатний приріст $\Delta f(x)$, а приріст монотонно спадної функції при додатному прирості аргументу завжди є від'ємним. На мові приростів функція називається ***монотонною на деякому проміжку***, якщо її приріст на цьому проміжку не змінює свого знаку.

Наприклад, функція $y = x^2$ є монотонно зростаючою для $x > 0$, оскільки для довільних $x_1, x_2 \in (0;+\infty)$ таких, що $x_1 < x_2$, маємо $y_1 - y_2 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$. А функція $y = 2^{-x}$ є спадною на всій дійсній осі, оскільки для довільних $x_1, x_2 \in R$ таких, що $x_1 < x_2$, маємо $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{2^{x_1}}{2^{x_2}} = 2^{x_1 - x_2} < 1$.

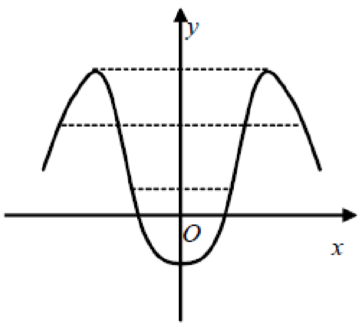
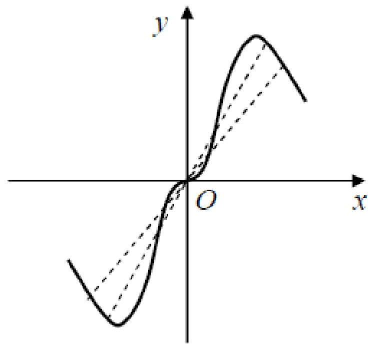
Парні та непарні функції

Означення. Множина A називається ***симетричною відносно нуля***, якщо разом з кожним елементом $a \in A$ цій множині належить і протилежний елемент $-a$.

Наприклад, симетричними відносно нуля є множини $[-2;2]$, $(-3;3)$, $R \setminus \{0\}$, а несиметричними – $[-2;2)$, $(-3;4)$, $R \setminus \{2\}$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***парною*** (***непарною***), якщо область визначення $D(y)$ функції є множиною, симетричною відносно нуля, і виконується рівність $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Очевидно, що графік парної функції розташований симетрично відносно осі ординат (осьова симетрія), а графік непарної – симетрично відносно початку координат (центральна симетрія). Завдяки симетричним властивостям парних і непарних функцій побудова їхніх графіків значно спрощується: достатньо побудувати графік у частині області визначення, що належить невід'ємній півосі Ox, а далі для парної функції продовжити його симетрично відносно осі Oy, а для непарної – відносно початку координат.

Парні функції	**Непарні функції**
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$
	

Приклад **Дослідити на парність функцію** $y = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$.

Область визначення даної функції є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} 1 + x + x^2 \geq 0, \\ 1 - x + x^2 \geq 0. \end{cases}$

Оскільки квадратні тричлени в лівій стороні кожної з нерівностей від'ємні, то ці нерівності справедливі для всіх дійсних чисел, тому $D(y) = R$. Ця множина є симетричною відносно нуля. Далі маємо

$$y(-x) = \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2} = -\left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}\right) = -y(x).$$

Отже, за означенням ми отримали, що дана функція є непарною.

Не кожна функція є обов'язково парною чи непарною, більшість з них не належать ні до тієї, ні до іншої категорії. Такі функції називають ***ні парними, ні непарними***, або функціями ***загального вигляду***. Наприклад, функція $y=x^2+x+1$ є функцією загального вигляду.

Теорема. ***Будь-яка функція $f(x)$, визначена на симетричній відносно нуля множині E, може бути подана у вигляді суми двох функцій, одна з яких парна, а інша непарна, і це представлення єдине.***

Періодичні функції

Означення. Функцію $f(x)$ називають ***періодичною***, якщо існує таке дійсне число $t\neq 0$, що для довільного $x\in D(f)$ виконується рівність $f(x-t)=f(x)=f(x+t)$. При цьому число t називається ***періодом*** функції $f(x)$.

Справедливі твердження:

1) ***якщо число t є періодом функції $f(x)$, то і число $-t$ також є періодом функції $f(x)$***;

2) ***якщо числа t_1 і t_2 є періодами функції $f(x)$, причому $t_1+t_2\neq 0$, то число t_1+t_2 також є періодом функції $f(x)$***;

3) ***якщо число t є періодом функції $f(x)$, то довільне число виду nt, де $n\in Z$, $n\neq 0$, також є її періодом, отже, кожна періодична функція має безліч періодів***;

4) ***якщо число t є періодом функції $f(x)$, то число $\frac{t}{k}$, де $k\neq 0$, є періодом функції $f(kx+b)$.***

Нехай функція $f(x)$ є періодичною з періодом t. Тоді для довільного $x\in D(y)$ маємо

$$f(kx+b)=f((kx+b)\pm t)=f\left(k\left(x\pm\frac{t}{k}\right)+b\right).$$

Отже, $f\left((kx+b)-\frac{t}{k}\right)=f(kx+b)=f\left((kx+b)+\frac{t}{k}\right)$ і це доводить, що число $\dfrac{t}{k}$ є періодом функції $y = f(kx+b)$.

Деякі окремі класи функцій

Якщо серед усіх періодів функції $f(x)$ існує найменший додатний період, то його називають ***основним*** (***головним***) ***періодом*** функції $f(x)$ і позначають символом T.

Приклад **Довести, що основним періодом функцій $y=\sin x$ і $y=\cos x$ є число 2π, а для функцій $y=tgx$ і $y=ctgx$ є число π.**

Доведення проведемо для функції $y=\sin x$. Якщо число T є періодом для функції $y=\sin x$, то рівність $\sin(x+T)=\sin x$ виконується для довільного $x\in R$, зокрема, і при $x=-\dfrac{T}{2}$.

Маємо

$$\sin\left(-\frac{T}{2}+T\right)=\sin\left(-\frac{T}{2}\right),$$

$$\sin\frac{T}{2}=-\sin\frac{T}{2} \text{ або } \sin\frac{T}{2}=0.$$

Як відомо, така рівність можлива при $\dfrac{T}{2}=\pi k, k\in Z$. Зрозуміло, що найменшим додатним числом цієї множини чисел є число $T=2\pi$ (при $k=1$).

Для інших функцій доведення аналогічне.

Приклад **Знайти основний період функції $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$.**

Маємо, що

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=$$

$$=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cos 4x.$$

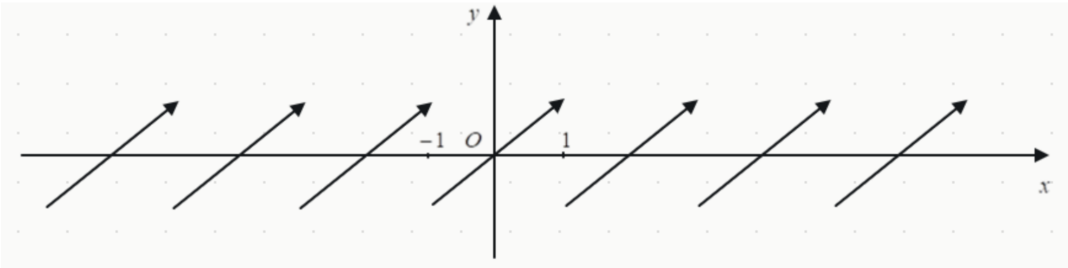
Отже, основний період заданої функції співпадає з періодом функції $y=\cos 4x$, який за твердженням 4) дорівнює $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

Цікавим прикладом періодичної функції є функція дробової частини числа $y=\{x\}$. Якщо додати до x одиницю або будь-яке ціле число, то його дробова частина не зміниться, зокрема, $\{x+1\}=\{x\}$. Очевидно, що 1 є основним періодом функції $y=\{x\}$.

Є періодичні функції, які не мають основного періоду, тобто серед додатних періодів не існує найменшого. Наприклад, періодом функції Діріхле є будь-яке раціональне число. Дійсно, якщо x – раціональне число, то $x+r$ також раціональне число і тому $D(x+r)=D(x)=1$, якщо ж x – ірраціональне, то $x+r$ – ірраціональне і тому $D(x+r)=D(x)=0$.

Для того щоб побудувати графік T-періодичної функції, достатньо його побудувати в межах одного періоду, тобто на довільному проміжку вигляду $a \le x < a+T$. Далі, здійснюючи рух побудованого графіка вправо та вліво на відстані, кратні періоду, отримуємо графічне представлення функції на бажаному проміжку. Отже, дослідження періодичної функції можна звести до аналізу її властивостей на проміжку довжиною в один період, оскільки ці властивості повторюються з тією ж періодичністю.

Наприклад, якщо функція $f(x)$ має період 2 і на напівінтервалі $[-1;1)$ співпадає з функцією $y=x$, то її графік зображено на рисунку нижче.



Функцію $f(x)$, задану на деякому відрізку $[a;b]$, можна доозначити на всій числовій прямій так, щоб вона стала періодичною з наперед заданим періодом $T \ge b-a$. Ця операція називається ***періодичним продовженням*** функції.

Зауваження. У фізиці досить часто зустрічається функція $y = A\sin(\omega x+\alpha)$, яка називається загальною ***синусоїдальною змінною*** і має період $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. При цьому число A називають ***амплітудою***, ω – ***частотою***, $\omega x+\alpha$ – ***фазовим аргументом***, α – ***початковою фазою***.

Обмежені функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***обмеженою зверху*** (***знизу***), якщо існує таке число $M \in R$, що для всіх $x \in D(y)$ виконується нерівність $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$). Функція $y = f(x)$ називається ***обмеженою***, якщо існує таке додатне число $M \in R$, що для всіх $x \in D(y)$ виконується нерівність $|f(x)| \le M$. Якщо ж для довільного числа M знайдеться таке число $x_0 \in D(y)$, що $|f(x_0)| > M$, то функцію називають ***необмеженою*** на множині $D(y)$.

Наприклад, функція $y = x^2$ є обмеженою на $[0;5]$, оскільки для довільного $x \in [0;5]$ виконується нерівність $x^2 \le 25$. Але на всій числовій прямій ця функція необмежена. Дійсно, якщо $M > 1$ і $x > M$, то $x^2 > M^2 > M$.

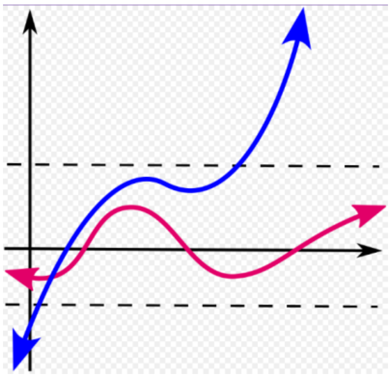


Рис. 14

Графічна ілюстрація обмеженої функції (червона) та необмеженої функції (синя) показана на рис. 14. Зрозуміло, що графік обмеженої функції розміщується в межах певної горизонтальної смуги, тоді як для необмеженої функції такої смуги не існує, тобто її графік виходить за будь-які фіксовані межі по вертикалі.

Наприклад, функція $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ обмежена на всій числовій прямій, оскільки $0 < \dfrac{1}{1+x^2} \le 1$. Графік цієї функції називається ***локоном Аньєзі*** (рис. 15).

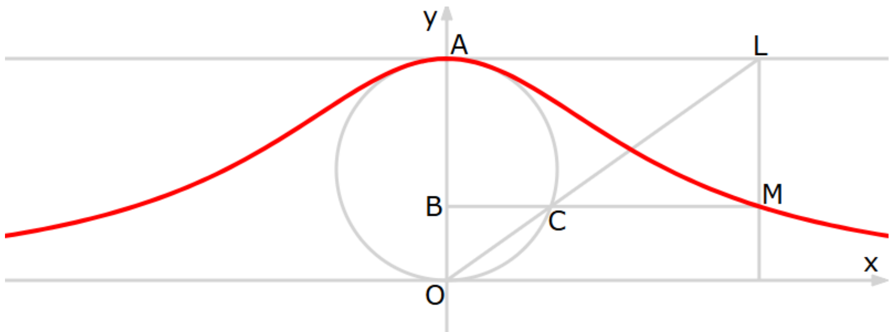


Рис. 15

Обернена функція

Нехай на деякому проміжку X визначена функція $y = f(x)$, значення якої належать деякому проміжку Y на осі ординат. Це означає, що для довільного значення $y_0 \in Y$ існує така точка $x_0 \in X$, що $f(x_0) = y_0$. Інакше кажучи, кожному значенню $y \in Y$ відповідає одне або декілька значень $x \in X$. Коли така відповідність ***взаємно-однозначна*** (кожному значенню однієї змінної відповідає тільки одне значення іншої, і навпаки), то x можна розглядати як деяку функцію від y, тобто $x = \varphi(y)$, визначену на проміжку Y із значеннями в X.

Знаходження аналітичного виразу функції $x = \varphi(y)$ зводимо до розв'язування рівняння $y = f(x)$ відносно змінної x. Після цього перепозначаємо змінні x та y, в результаті отримуємо функцію $y = \varphi(x)$, яку називають ***оберненою*** до функції $y = f(x)$ і позначають $y = f^{-1}(x)$. В цьому випадку саму функцію $y = f(x)$ називають ***оборотною***.

Графіки прямої та оберненої функцій розташовані симетрично відносно прямої $y = x$***, що є бісектрисою першого та третього координатних кутів.***

Зазначимо, що достатньою умовою існування оберненої функції є строга монотонність функції $y = f(x)$, при цьому обернена функція зберігатиме відповідний характер монотонності.

Зауваження. Вимога строгої монотонності функції $f(x)$ істотна. Якби вона була порушена, то $x = \varphi(y)$ могла б не задовольняти означенню функції, оскільки порушилась би властивість однозначності. Якщо функція не є монотонною на деякій множині, то цю множину можна розбити на інтервали монотонності цієї функції і на кожному з них побудувати обернену функцію.

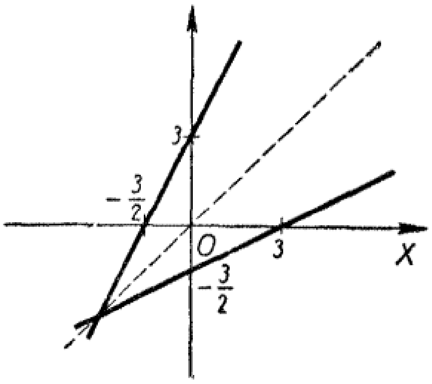


Рис. 16

Наприклад, для функції $y = 2x + 3$, визначеної на R, оберненою є функція $y = \frac{x-3}{2}$, яка також визначена на R (рис. 16).

Приклад **Для функції $y = x^2 + 4x$ знайти обернену та побудувати її графік.**

Функція $y = x^2 + 4x$ є монотонно спадною при $x < -2$ і монотонно зростаючою при $x > -2$, тому на кожному з цих проміжків вона має обернену. З рівняння $x^2 + 4x - y = 0$ знаходимо, що $x = -2 \pm \sqrt{4 + y}$. Це значить, що задана функція матиме дві обернені функції $y = -2 + \sqrt{4 + x}$ та $y = -2 + \sqrt{4 + x}$, графіки яких зображено на рис. 17.

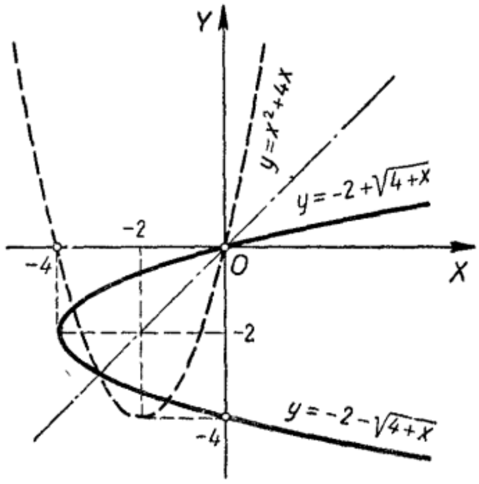


Рис. 17

8 Перетворення графіків функцій

Побудова графіків функцій за його точками є доволі громіздким процесом, особливо коли йдеться про складні функції. Для кожного нового випадку потрібно виконувати багато розрахунків: вибирати значення аргументу, знаходити відповідні значення функції, наносити точки на координатну площину та з’єднувати їх кривою. Тому в математиці в багатьох випадках застосовують інший, більш ефективний підхід: спочатку будують графіки деяких базових функцій (наприклад, основних елементарних функцій, $y=|x|$ тощо), а графіки інших функцій отримують шляхом перетворень уже відомих.

Розглянемо основні типи перетворень, які застосовуються до графіків функцій.

1) *Перетворення* $y=f(x)+b$**,** де b – деяка стала**.**

Очевидно, що ординати графіка функції $y=f(x)+b$ на b одиниць більше відповідних ординат графіка функції $y=f(x)$. При збільшенні кожної ординати на величину b одержимо нову криву, утворену паралельним перенесенням на b одиниць графіка функції $y=f(x)$ вздовж осі ординат (*вертикальне зміщення*).

При цьому, якщо $b>0$, то перенесення виконується вгору, а якщо $b<0$ – вниз. Наприклад, для побудови графіка функції $y=x^2+3$ спочатку будуємо параболу $y=x^2$, потім її паралельним перенесенням «піднімаємо» на 3 одиниці вгору вздовж осі Oy, при цьому вершина параболи (0;0) переходить в точку (0;3), а перетворення $y=\sin x-2$ «опускає» синусоїду $y=\sin x$ на 2 одиниці вниз.

2) *Перетворення* $y=kf(x)$**.**

Кожна ордината цього графіка відрізняється в k разів від відповідної ординати графіка функції $y=f(x)$.

Якщо $k>1$, то всі ординати графіка функції $y=f(x)$ при множенні на k збільшуються і зберігають напрямок, тому графік «розтягується» вертикально.

При $0<k<1$ всі ординати навпаки зменшуються, зберігаючи напрямок, тому графік «стискається» (*вертикальне стискання /розтягування*). Якщо ж $k<0$, то ординати графіка множаться на $(-k)$ та змінюють напрям, тобто графік «перевертається» відносно осі Ox (*вертикальне віддзеркалення*). Наприклад, графік функції $y=2\sin x$ має амплітуду 2 (замість 1), для $y=\frac{1}{2}\sin x$ – амплітуда дорівнює $\frac{1}{2}$, а графік функції $y=-\ln x$ утворений віддзеркаленням вниз графіка логарифмічної функції $y=\ln x$.

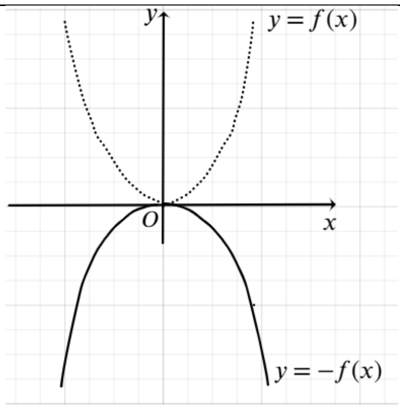
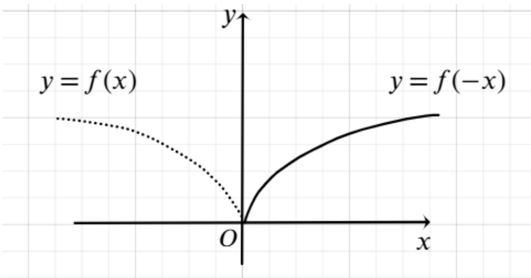
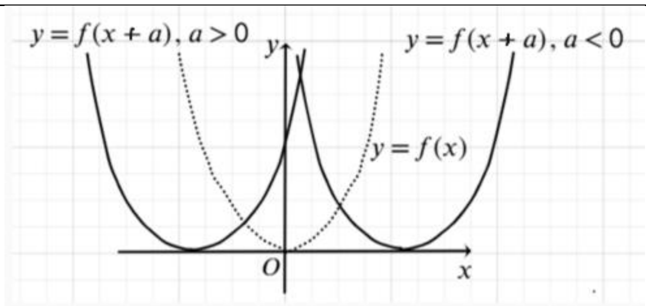
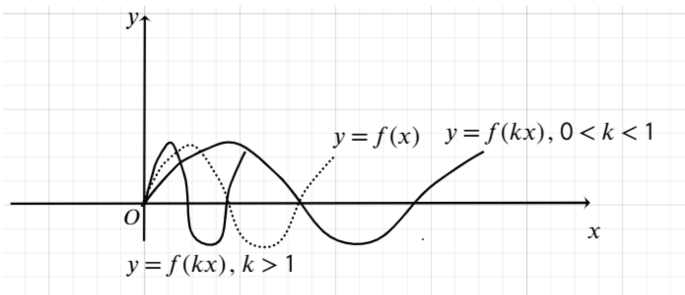
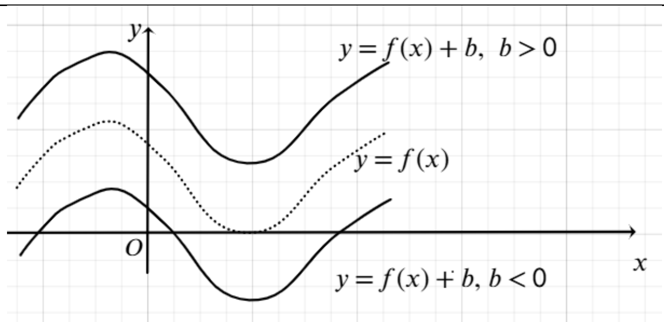
1) *Перетворення* $y=f(x+a)$.

Ордината графіка функції $y=f(x+a)$ в точці x співпадає з ординатою графіка функції $y=f(x)$ в точці $x+a$. Якщо $a>0$, то точка $(x,\ f(x+a))$ лежить на a одиниць лівіше від точки $(x+a,f(x+a))$. Тому весь графік функції $y=f(x+a)$ отримується з графіка функції $y=f(x)$ паралельним перенесенням цього графіка на a одиниць вліво. Якщо $a<0$, то перенесення відбувається вправо. Наприклад, $y=\sqrt{x-2}$ – це графік $y=\sqrt{x}$, зміщений на 2 одиниці вправо, а $y=(x+1)^2$ – парабола $y=x^2$, перенесена на 1 одиницю вліво.

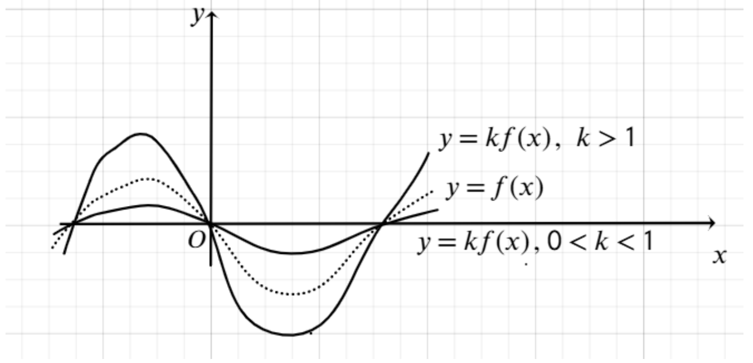
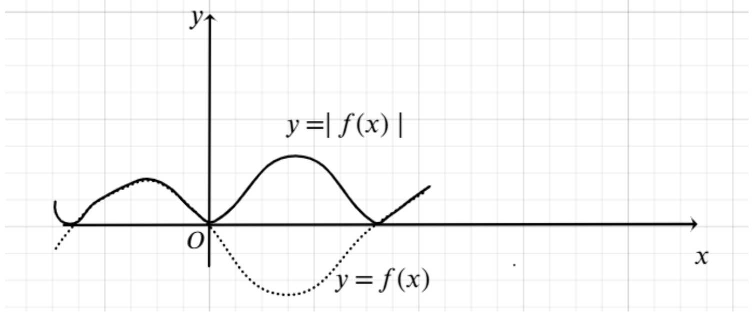
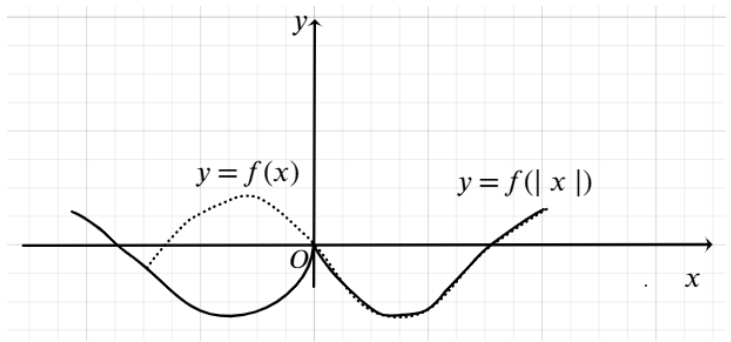
2)*Перетворення* $y=f(ax)$.

Ордината графіка функції $y=f(ax)$ в точці x співпадає з ординатою графіка функції $y=f(x)$ в точці ax. Тому графік функції $y=f(ax)$ отримується з графіка функції $y=f(x)$ шляхом ділення всіх абсцис точок графіка на a. Це означає, що для кожного значення змінної x ми обчислюємо значення функції в точці ax. Графік такої функції стискається при $a>1$ або розтягується при $0<a<1$ вздовж осі Ox (тобто по горизонталі). Наприклад, $y=\sin 2x$ має період π (замість 2π), а $y=\frac{1}{2}x$ «повільніше» зростає, ніж $y=x$. Якщо $a<0$, то графік функції $y=f(ax)$ отримується за допомогою симетричного відображення графіка $y=f(x)$ відносно осі Oy.

Перетворення графіків функцій

$y=-f(x)$	Симетрія відносно осі Ox	
$y=f(-x)$	Симетрія відносно осі Oy	
$y=f(x+a)$	Паралельне перенесення вздовж осі Ox на a одиниць	
$y=f(kx)$	При $k>1$ стиск вздовж осі абсцис в k разів; при $0<k<1$ розтяг вздовж осі абсцис в $\frac{1}{k}$ разів	
$y=f(x)+b$	Паралельне перенесення вздовж осі Oy на b одиниць	

Перетворення графіків функцій

<table>
<tr>
<td>$y = kf\left(x\right)$</td>
<td>При $0 < k < 1$ стиск вздовж осі абсцис в $\frac{1}{k}$ разів; при $k > 1$ розтяг вздовж осі абсцис в k разів</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$y = \left|f\left(x\right)\right|$</td>
<td>Частина графіка у верхній півплощині залишаємо без змін, а частину графіка з нижньої півплощини симетрично відображаємо відносно осі Ox</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$y = f\left(\left|x\right|\right)$</td>
<td>Частину графіка для $x \geq 0$ симетрично відображаємо відносно осі Oy</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

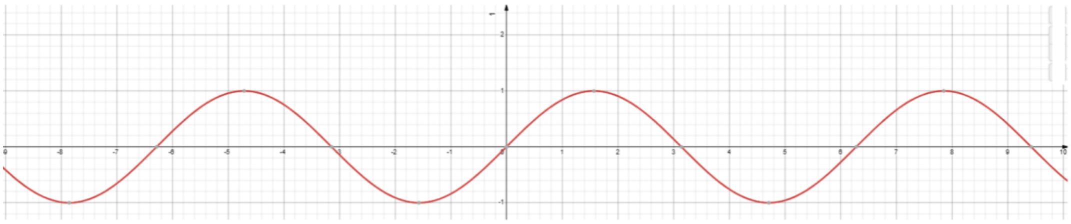
Порядок дійпри комбінованих перетвореннях графіків функцій

Коли функція містить одночасно декілька перетворень (наприклад, зсуви, розтягування, віддзеркалення), важливо дотримуватися правильного порядку дій, оскільки неправильна послідовність їх виконання може призвести до помилок у побудові графіка.

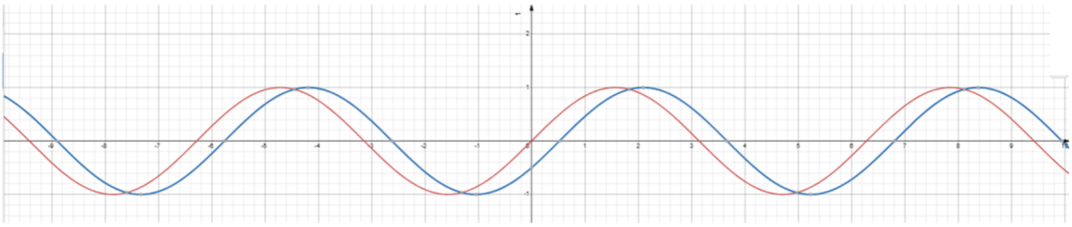
Основне правило: ***горизонтальні перетворення виконуються першими, вертикальні – останніми***. Це пов’язано з тим, що горизонтальні зміни впливають на аргумент функції, а вертикальні – на саму функцію.

Приклад **Побудувати графік функції** $y=-\frac{3}{2}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$.

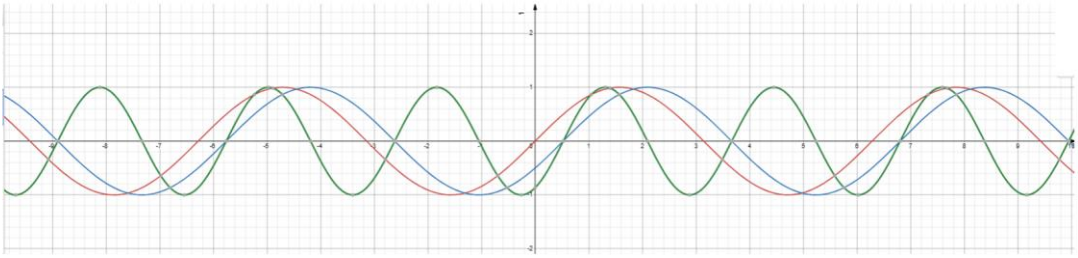
Спочатку побудуємо графік базової функції $y=\sin x$:



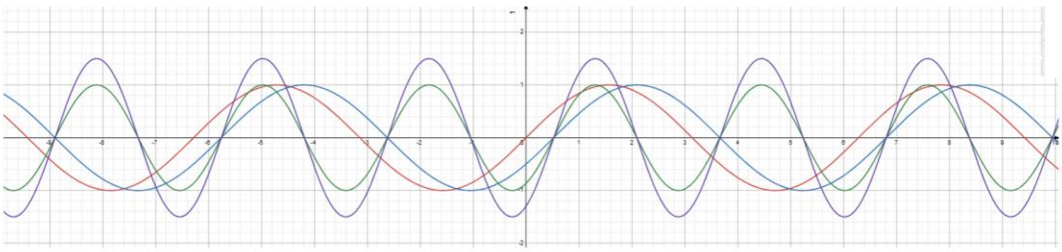
Для побудови $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ виконаємо паралельне перенесення на $\frac{\pi}{6}$ одиниць вправо (на рисунку крива синього кольору):



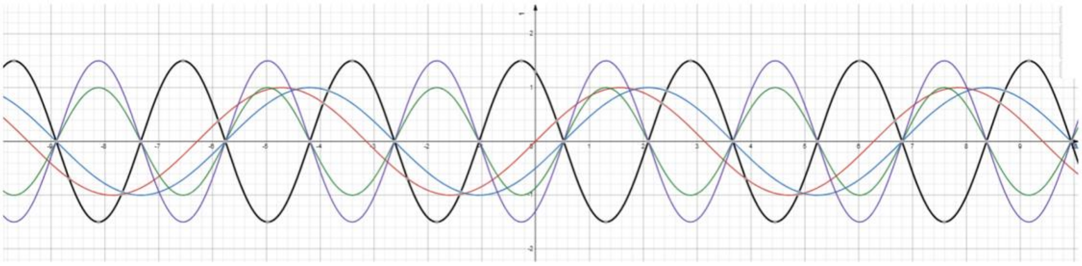
Перетворення $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ одержимо стисканням попереднього графіка вдвічі по осі Ox (графік зеленого кольору):



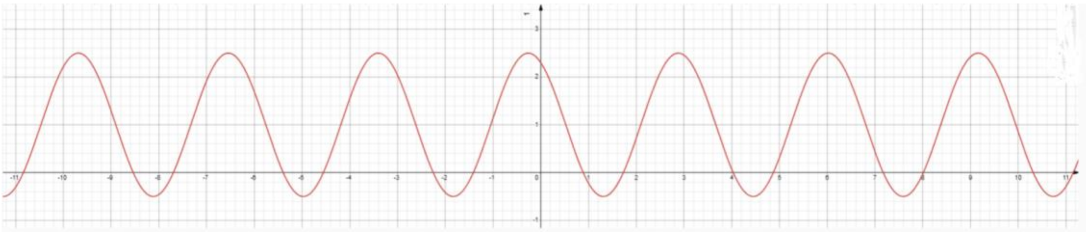
Якщо отриманий графік розтягнути в 1,5 рази вздовж осі Oy, то одержимо графік функції $y=\frac{3}{2}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ (крива фіолетового кольору):



Симетричне відображення відносно осі Ox дає графік $y=-\frac{3}{2}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$(чорний колір):



Остаточний графік функції $y=-\frac{3}{2}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ отриманий паралельним перенесенням на 1 одиницю вгору:



9 Графіки суми та добутку функцій

При описанні різних процесів важливо вміти не лише аналізувати окремі функції, а й досліджувати ті, що утворюються шляхом додавання та множення двох або декількох функцій. Побудова графіків таких функцій передбачає послідовне опрацювання кількох етапів. Нехай задані дві функції $f(x)$ та $g(x)$. Їхні властивості та поведінка стають основою для побудови графіка нової функції – суми $f(x)+g(x)$ або добутку $f(x)\cdot g(x)$.

Першим кроком цього процесу є визначення спільної області визначення функцій $f(x)$ та $g(x)$. Далі доречно скласти таблицю значень: обрати кілька характерних значень аргументу (точки перетину з координатними осями, екстремуми) та обчислити відповідні значення кожної функції, а також значення їх суми або добутку.

Наступним етапом побудови є візуалізація:

1) на координатній площині варто спочатку побудувати графіки вихідних функцій, що дозволить наочно побачити їхню форму;

2) керуючись таблицею обчислених значень, нанести точки графіка функції $f(x)+g(x)$ або $f(x)\cdot g(x)$ і з'єднати їх плавною лінією.

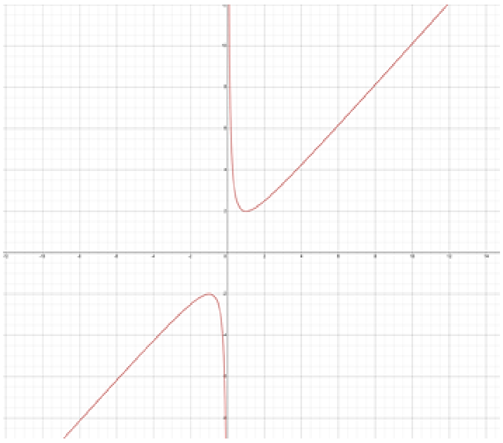
Зазначимо, що побудований графік відображає особливості обох початкових функцій. Графік суми зазвичай відтворює загальний характер змін кожної з функцій, демонструючи спільну тенденцію, тоді як графік добутку часто виявляє складнішу поведінку, зокрема, функція може змінювати знак у залежності від того, чи мають множники однакові або протилежні знаки.

Приклад **Побудувати графік функції** $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Областю визначення даної функції є множина $x \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Оскільки характерна точка $x = 0$ не належить області визначення, то в таблицю значень можна включити точки, які дозволять уточнити поведінку графіка. Для даної функції слід врахувати її непарність, а отже, симетрію графіка відносно початку координат.

У кожній обраній точці з області $x>0$ для функцій $y=x$ та $y=\frac{1}{x}$ додамо їх відповідні ординати і відмітимо отримані точки на координатній площині.

Далі врахуємо, що при нескінченному зростанні x значення функції $y=\frac{1}{x}$ наближається до нуля, тому графік функції $y=x+\frac{1}{x}$ наближається до графіка функції $y=x$.



Якщо значення x наближається до нуля, то графік функції $y=x+\frac{1}{x}$ відтворює поведінку графіка гіперболи $y=\frac{1}{x}$.

Тепер виконаємо симетричне відображення отриманої кривої відносно початку координат (рис. 18).

Рис. 18

Приклад **Побудувати графік функції** $y=(x+1)(x-2)(x-4)$.

Розглянемо функції $y=x+1$, $y=x-2$, $y=x-4$, їх графіки перетинають вісь абсцис відповідно в точках -1, 2, 4. Очевидно, що ці точки будуть нулями функції $y=(x+1)(x-2)(x-4)$. Тому на проміжках $(-\infty,-1)$, $(-1;2)$, $(2;4)$, $(4;+\infty)$ вона не буде змінювати свій знак:

при $x\in(-\infty;-1)$ – функція від'ємна,

при $x\in(-1;2)$ – функція додатна,

при $x\in(2;4)$ – функція від'ємна,

при $x\in(4;+\infty)$ – функція додатна.

Для виявлення поведінки графіка функції на проміжках $(-1;2)$ та $(2;4)$ доцільно побудувати таблицю значень.

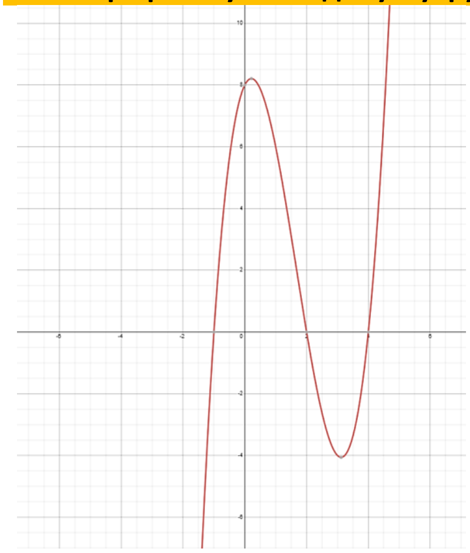


Рис. 19

Якщо x дуже велике додатне число, то і значення функції $f(x)$ також буде дуже великим додатним числом, якщо x – від'ємне число з великим за значенням модулем, то аналогічно і $f(x)$ буде від'ємним числом з дуже великим значенням модуля. Графік функції $y=(x+1)(x-2)(x-4)$ зображений на рис. 19.

Теорія границь та неперервності

1 Числові послідовності

Будемо вважати, що задана ***числова послідовність*** (a_n), $n \in N$, якщо відоме правило, згідно з яким кожному натуральному числу n поставлено у відповідність єдине дійсне число $a(n) = a_n$, яке називають ***членом*** цієї ***послідовності***. Члени послідовності розташовують у порядку зростання номерів їх місць, тобто у вигляді $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Число a_n, яке знаходиться на місці з номером n, називається n**-тим** або ***загальним членом послідовності***.

Послідовність можна розглядати як окремий тип функції, визначеної на множині натуральних чисел. Отже, ***послідовність – це функція натурального аргументу***.

Для задання послідовностей можна використовувати різні способи: описовий, табличний, графічний. Однак найчастіше використовують аналітичний спосіб, коли загальний член послідовності a_n задається формулою. За цією формулою можна знайти будь-який член послідовності.

Послідовність, у якій усі члени рівні між собою, називається ***сталою*** або ***стаціонарною***.

Наприклад, формула $a_n = 2n - 1$ задає послідовність 1, 3, 5, 7, … усіх непарних натуральних чисел; формула $b_n = (-1)^n$ задає послідовність $-1, 1, -1, 1, ...$, у якій на непарних місцях стоїть число -1, а на парних – число 1; формула $c_n = 5$ задає послідовність 5, 5, 5, 5, 5, …, у якій усі її члени дорівнюють числу 5.

Зауваження. При аналітичному заданні послідовності вираз для формули знаходження її загального члена може мати різний вигляд. Наприклад, для послідовності $-1, 1, -1, 1, \ldots$ формула її загального члена може бути $b_n = (-1)^n$ або $b_n = \cos\pi(n+1)$; для послідовності $a, b, a, b, \ldots$ вираз її загального члена можна записати у вигляді $x_n = \frac{1}{2}\left(a + b + (-1)^n (b-a)\right)$ або

$$x_n = \begin{cases} a, & \text{якщо } n - \text{непарне}, \\ b, & \text{якщо } n - \text{парне}. \end{cases}$$

Оскільки послідовність є окремим випадком функції, то можна говорити про класи монотонних і обмежених послідовностей.

Означення. Послідовність (a_n), $n \in N$ називається ***зростаючою*** (***спадною***), якщо для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$.

Послідовність (a_n), $n \in N$ називається ***незростаючою*** (***неспадною***), якщо для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \geq a_{n+1}$ $(a_n \leq a_{n+1})$.

Приклад **Показати, що послідовність $a_n = \frac{n}{2^n}$ є незростаючою.**

Для незростаючої послідовності нерівність $a_n \geq a_{n+1}$ еквівалентна нерівності $a_n - a_{n+1} \geq 0$ для будь-якого n. Маємо:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2n - n - 1}{2^{n+1}} = \frac{n-1}{2^{n+1}} \geq 0,$$

що й треба було довести.

Приклад **Довести, що послідовність $a_n = \frac{n}{2^n}$ є неспадною.**

Для доведення покажемо справедливість нерівності $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$ для всіх $n \in N$. Дійсно, маємо: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}} = \frac{2n}{n+1} \geq 1$.

Зауваження. Якщо всі члени послідовності є додатними числами, то для дослідження послідовності на монотонність можна перейти до відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ і порівняти його з числом 1.

Означення. Послідовність $(a_n),\ n \in N$ називається ***обмеженою зверху (знизу)***, якщо існує таке число C, що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \le C$ ($a_n \ge C$).

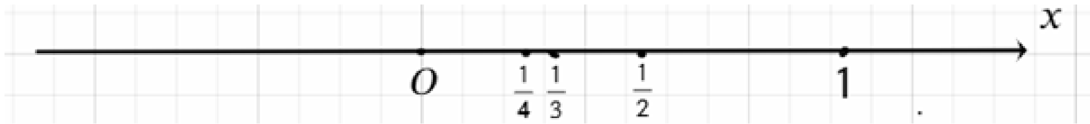
Послідовність, обмежена і зверху, і знизу, називається ***обмеженою***, тобто існує таке число C, що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $|a_n| \le C$.

Приклад **Показати, що послідовність $a_n = \frac{n}{n+1}$ є обмеженою.**

Очевидно, що чисельник і знаменник дробу – додатні числа, тому для $\forall n \in N$ $a_n > 0$, що доводить обмеженість знизу. Обмеженість зверху слідує із нерівності $a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$. Отже, дана послідовність обмежена.

2 Границя числової послідовності

Розглянемо послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$ загальний член якої $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$. Позначимо члени послідовності точками на координатній прямій (рисунок).



Очевидно, що члени цієї послідовності зменшуються зі зростанням номера її члена і стають дедалі ближчими до числа 0. У цьому випадку говорять, що члени послідовності «прямують до нуля» або число 0 є ***границею*** цієї послідовності.

З геометричної точки зору число $|a - b|$ дорівнює відстані між точками a і b на координатній прямій (за властивостями модуля дійсного числа), тому відстань від будь-якого члена послідовності $a_n = \frac{1}{n}$ до її границі 0 виражається числом $\frac{1}{n}$ і може бути зроблена меншою, ніж будь-яке наперед задане дійсне додатне число ε (читається «епсилон»), для всіх членів послідовності, починаючи з деякого номера n_0. Наприклад, для $\varepsilon = 0{,}1$ з нерівності $\frac{1}{n} < 0{,}1$ бачимо, що відстань між точками послідовності і її границею стає меншою за 0,1 для всіх членів при $n > 10$ або починаючи з 11-го члена. Аналогічно, нерівність $\frac{1}{n} < 0{,}01$ виконується для всіх членів послідовності з номерами більшими, ніж $n = 100$ тощо. Ці приклади показують, що, взагалі кажучи, номер n_0 залежить від числа ε, тобто $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Означення. Дійсне число a називається ***границею числової послідовності*** (a_n), $n \in N$, якщо для будь-якого наперед заданого дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх номерів $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

Позначення: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ або $a_n \to a \quad (n \to \infty)$.

Дане означення можна записати символами:

$$\boxed{a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon .}$$

Означення. Послідовність, яка має границю, називається ***збіжною***; якщо послідовність границі не має або її границя нескінченна, то така послідовність називається ***розбіжною***.

Означення. ***Околом*** точки *а* називається довільний інтервал $(\alpha;\beta)$, що містить цю точку. Інтервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називається ε*-околом* точки *а*.

Поняття границі послідовності має таку ***геометричну інтерпретацію***. Нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$ з означення границі числової послідовності еквівалентна подвійній нерівності $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Це означає, що коли *n* достатньо велике, то для будь-якого наперед заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $n_0(\varepsilon)$, починаючи з якого всі члени послідовності належать ε*-околу числа* a, тобто інтервалу $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. За межами цього інтервалу може знаходитися тільки скінчена кількість членів послідовності.

Приклад **Довести за означенням, що** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$.

Виберемо довільне число $\varepsilon > 0$ і знайдемо номер $n_0(\varepsilon)$, починаючи з якого виконується нерівність $\left| \dfrac{3n-1}{2n+1} - \dfrac{3}{2} \right| < \varepsilon$.

Маємо $\left| \dfrac{3n-1}{2n+1} - \dfrac{3}{2} \right| = \left| \dfrac{-5}{2(2n+1)} \right| = \dfrac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$, звідки $n > \dfrac{5}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}$.

При довільних значеннях числа $\varepsilon > 0$ може виявитися не цілим, тому за номер $n_0(\varepsilon)$ виберемо число $\left[\dfrac{5}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2} \right] + 1$, яке є цілим числом. Оскільки такий номер знайдено, то за означенням границі послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$.

Приклад **Показати, що для послідовності $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ матимемо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.**

Маємо $|u_n - 1| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, отже, при заданому як завгодно малому $\varepsilon > 0$ матимемо $|u_n - 1| < \varepsilon$ тоді, коли $\frac{1}{n} < \varepsilon$, або $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Так, наприклад, якщо взяти $\varepsilon = 0{,}001$, то при всіх $n > 1000$ отримаємо $|u_n - 1| < 0{,}001$.

Приклад Розглянемо геометричну прогресію із знаменником $q = 1$. Члени такої прогресії всі однакові, наприклад, $a, a, a, ..., a, ...$ Маємо $u_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, оскільки $u_n - a = a - a = 0$, отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ матимемо $|u_n - a| < \varepsilon$ для всіх значень n, починаючи вже з першого номера.

З цього прикладу випливає: ***границя сталої величини є та сама стала***.

Нехай задана числова послідовність (y_n) і (n_k) – будь-яка зростаюча послідовність натуральних чисел, тоді послідовність (y_{n_k}) називається *підпослідовністю* послідовності (y_n). З означення границі послідовності випливає твердження: ***якщо послідовність (y_n) має границю a, то й будь-яка її підпослідовність має ту саму границю a.***

Дійсно, якщо a є границею послідовності (y_n), то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ в ε-окіл точки a потрапляють усі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера. Проте, в цей окіл потрапляють також всі члени підпослідовності y_{n_k}, починаючи з деякого k. А це означає, що число a є границею підпослідовності y_{n_k}.

Приклад Показати, що послідовність $-1, 1, -1, 1, ..., (-1)^n, ...$ не має границі.

Припустимо супротивне, що ця послідовність має границю a. Це означає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$, зокрема, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, знайдеться такий номер $n_0(\varepsilon)$, що $|x_n - a| < \varepsilon$ для $\forall\ n > n_0(\varepsilon)$. Оскільки x_n набуває значень 1 або -1, то маємо, що $|1-a| < \frac{1}{2}$ і $|-1-a| < \frac{1}{2}$. Отримаємо,

$$2 = |1-a+a-(-1)| \le |1-a| + |a-(-1)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

або $2 < 1$, що неможливо. Одержане протиріччя підтверджує, що дане припущення було невірним. Отже, задана послідовність границі не має.

Приклад **Довести, що число $\frac{2}{5}$ не є границею послідовності із загальним членом $x_n = \frac{3n+2}{5n-1}$.**

Оцінимо знизу модуль різниці

$$\left|\frac{3n+2}{5n-1} - \frac{2}{5}\right| = \left|\frac{5n+12}{5(5n-1)}\right| = \frac{1}{5}\cdot\frac{5n+12}{5n-1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{(5n-1)+13}{5n-1} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\left(1 + \frac{13}{5n-1}\right) > \frac{1}{5}.$$

Якщо взяти довільне $\varepsilon_0 \le \frac{1}{5}$, то при всіх значеннях n маємо $\left|\frac{3n+2}{5n-1} - \frac{2}{5}\right| > \varepsilon_0$, що суперечить означенню границі числової послідовності.

У математичному аналізі та суміжних галузях часто виникає потреба задавати числові послідовності через співвідношення між її членами. Такий підхід називається рекурентним, і формалізується наступним чином:

Рекурентна залежність **(*рекурентне співвідношення*)** – це спосіб задання числової послідовності (a_n), $n \in N$, при якому кожен її член a_n (починаючи з деякого номера) визначається як функція від попередніх членів цієї послідовності.

Наприклад, рекурентна формула $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$, $a_1 = 1$ визначає послідовність $1, 2, 6, 24, 120, \ldots$, загальний член якої можна записати у вигляді $a_n = n!$.

Зауваження. Загальний член x_n послідовності являє собою змінну величину, що приймає цю послідовність значень. Тому границя послідовності називається також і *границею змінної* x_n.

Теорема (про єдиність границі). ***Збіжна послідовність має тільки одну границю.***

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай вона має дві різні границі $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, причому $a \neq b$. Тоді за означенням границі послідовності маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1(\varepsilon): \; \forall n > n_1(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2(\varepsilon): \; \forall n > n_2(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розглянемо

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

яка виконується для всіх номерів $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Якщо покласти $\varepsilon = |a - b|$, одержимо $|a - b| < |a - b|$, що неможливо. Отримане протиріччя доводить, що збіжна послідовність має тільки одну границю.

Теорема. ***Якщо послідовність є збіжною, то вона обмежена.***

Доведення. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. За означенням границі для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Це означає обмеженість послідовності.

Зауваження. Обернене твердження є невірним, тобто з обмеженості послідовності не слідує її збіжність. Існують обмежені послідовності, які не мають границі, наприклад, $x_n = (-1)^n$. Очевидно, що ця послідовність є обмеженою числами -1 та 1, проте є розбіжною.

Наслідок. ***Якщо послідовність необмежена, то вона розбіжна.***

Означення. Послідовність (x_n), $n \in N$ називається ***фундаментальною***, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке n_0, що для всіх $n > n_0$ і всіх $m > n_0$ виконується нерівність $|x_n - x_m| < \varepsilon$, або

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ \forall m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon .$$

Цю умову називають ***умовою Коші*** і іноді її формулюють так: для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке n_0, що для всіх $n > n_0$ і довільного натурального числа p виконується нерівність $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, або

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ \forall p \in N \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon .$$

Теорема (критерій Коші). ***Для того щоб послідовність була збіжною необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною.***

Приклад **Довести, що послідовність** $x_n = \dfrac{\cos 1}{3} + \dfrac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \dfrac{\cos n}{3^n}$ **є збіжною.**

Оцінимо модуль різниці $|x_{n+p} - x_n|$, при цьому врахуємо обмеженість тригонометричної функції та застосуємо формулу знаходження суми геометричної прогресії:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{3^p}}{1 - \dfrac{1}{3}} < \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність $|x_{n+p} - x_n| < \dfrac{1}{3^n} < \varepsilon$ виконується для всіх $n > \log_3 \dfrac{1}{\varepsilon}$ і $p \in N$. Отже, умова Коші виконана і тому дана послідовність є збіжною.

3 Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

Означення. Послідовність (a_n), $n \in N$ називається ***нескінченно малою***, якщо її границя дорівнює нулю, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, або якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|a_n| < \varepsilon$. Іншими словами, послідовність (a_n) є нескінченно малою, якщо, починаючи з деякого номера, вона стає і залишається за абсолютною величиною меншою довільного наперед заданого числа $\varepsilon > 0$.

Прикладами нескінченно малих послідовностей можуть бути такі: $\left(\frac{1}{n}\right)$; $\left(-\frac{1}{n}\right)$; (q^n), де $|q| < 1$; амплітуда затухаючих коливань маятника; довжина сторони правильного вписаного в коло многокутника при необмеженому подвоєнні сторін.

Приклад **Довести, що послідовність $(x_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ є нескінченно малою.**

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. З нерівності $|x_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ отримаємо $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Якщо взяти $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, то для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ маємо $|x_n| < \varepsilon$. Це і означає, що послідовність (x_n) є нескінченно малою.

Нехай (x_n) має границею число a, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тоді послідовність $(\alpha_n) = (x_n - a)$ є нескінченно малою, оскільки для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$. Справедливе й обернене твердження. Таким чином, має місце теорема:

Теорема. ***Для того щоб послідовність (x_n) була збіжною до числа a необхідно і достатньо, щоб для $\forall n \in N$ мало місце подання $x_n = a + \alpha_n$, де (α_n) – нескінченно мала послідовність.***

Нескінченно малі послідовності мають такі **властивості**:

1. Добуток обмеженої та нескінченно малої послідовності є нескінченно малою послідовністю.

Оскільки послідовність (x_n) - обмежена, то існує число $M > 0$ таке, що $|x_n| \le M$ для всіх $n \in N$. З умови $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ слідує, що для числа $\dfrac{\varepsilon}{M}$ існує такий номер n_0, що для $\forall n > n_0$ виконується нерівність $|y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Розглянемо послідовність $(z_n) = (x_n y_n)$. Для $\forall n > n_0$ маємо:

$$|z_n| = |x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon .$$

Отже, послідовність (z_n) є нескінченно малою.

Наслідок 1. ***Добуток сталої та нескінченно малої послідовності є нескінченно малою послідовністю.***

Наслідок 2. ***Добуток двох нескінченно малих послідовностей також є нескінченно малою послідовністю.***

2. Сума двох нескінченно малих послідовностей також є нескінченно малою.

Нехай маємо дві нескінченно малі послідовності (x_n) та (y_n), тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. За означенням границі послідовності це означає, що для $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists n_1(\varepsilon):\ \forall n > n_1(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists n_2(\varepsilon):\ \forall n > n_2(\varepsilon) \Rightarrow |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Покладемо $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тоді для номерів $n > n_0(\varepsilon)$ маємо $|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Отже, сума двох нескінченно малих послідовностей також є нескінченно малою.

Наслідок 1. ***Сума будь-якого скінченного числа нескінченно малих послідовностей також є нескінченно малою.***

Наслідок 2. ***Різниця двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою.***

Приклад **Знайти границю** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n \sin n}{n^2}$.

Подамо вираз під знаком границі у вигляді добутку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n \sin n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cdot\sin n$. Очевидно, що послідовність $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$ є нескінченно малою (її границя дорівнює нулю), а послідовність $(\sin n)$ – обмеженою, оскільки $-1\le\sin n\le 1$. Тому за властивістю 1 нескінченно малих границя заданої послідовності дорівнює нулю.

Означення. Послідовність $(a_n),\, n\in N$ називається ***нескінченно великою***, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\pm\infty$.

Іншими словами, послідовність $(a_n),\, n\in N$ є нескінченно великою, якщо для будь-якого наперед заданого числа $M>0$ існує номер $n_0(M)$, починаючи з якого виконується нерівність $|a_n|>M$.

В цьому випадку говорять, що послідовність має нескінченну границю.

Приклад **Користуючись означенням, довести, що $x_n=2^{\sqrt{n}}$ є величиною нескінченно великою.**

Візьмемо довільне число M та розв'яжемо нерівність $|x_n|>M$, тобто $2^{\sqrt{n}}>M$. Маємо $\sqrt{n}\lg 2>\lg M$, $\sqrt{n}>\dfrac{\lg M}{\lg 2}$, $n>\left(\dfrac{\lg M}{\lg 2}\right)^2$. Якщо взяти $n_0(M)\ge\left(\dfrac{\lg M}{\lg 2}\right)^2$, то для всіх $n>n_0(M)$ буде виконуватись нерівність $x_n>M$. Оскільки число M може бути як завгодно великим, то за означенням $x_n=2^{\sqrt{n}}$ є нескінченно великою величиною.

Довільна нескінченно велика послідовність є необмеженою і розбіжною. Проте, необмежена послідовність може і не бути нескінченно великою, наприклад, $\left((-1)^n \cdot n\right)$.

Теорема (зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими послідовностями). ***Нехай*** $a_n \neq 0$ ***для*** $\forall n \in N$**.** ***Якщо*** (a_n) ***– нескінченно велика послідовність, то*** $(b_n)=\left(\frac{1}{a_n}\right)$ ***– нескінченно мала послідовність,*** **і навпаки.** ***Якщо*** (a_n) ***– нескінченно мала послідовність, то*** $(b_n)=\left(\frac{1}{a_n}\right)$ ***– нескінченно велика послідовність.***

Доведення. Нехай послідовність (a_n) є нескінченно великою. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і покладемо $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Тоді для цього числа M знайдеться такий номер n_0, що для $\forall n > n_0$ маємо $|a_n| > M$. Розглянемо послідовність $(b_n)=\left(\frac{1}{a_n}\right)$, для якої $|b_n| = \left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{M} = \varepsilon$, тобто $|b_n| < \varepsilon$ для $\forall n > n_0$. Це й доводить, що послідовність $(b_n)=\left(\frac{1}{a_n}\right)$ є нескінченно малою. Обернене твердження доводиться аналогічно.

4 Знаходження границь послідовностей

Переходячи до аналізу збіжних послідовностей, з'ясуємо, як поводять себе їхні границі при виконанні арифметичних операцій. Іншими словами, якщо ми додаємо, віднімаємо, множимо або ділимо послідовності, що мають границі, – чи зберігається збіжність, і якою буде границя результату?

Теорема (про арифметичні дії над збіжними послідовностями). ***Якщо послідовності (x_n) та (y_n) є збіжними, то збігаються також і послідовності (x_n+y_n), (x_n-y_n), $(x_n\cdot y_n)$, а при додатковій умові $y_n\neq 0$ для будь-якого $n\in N$ та $\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$ збігається й послідовність $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$. При цьому справедливі рівності***:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}.$$

Нехай $x_n\to a$ і $y_n\to b$. Тоді x_n і y_n можна представити у вигляді $x_n=a+\alpha_n$, $y_n=b+\beta_n$, де α_n,β_n- нескінченно малі величини.

1) Суму x_n+y_n представимо у вигляді

$$x_n+y_n=(a+\alpha_n)+(b+\beta_n)=(a+b)+(\alpha_n+\beta_n).$$

Оскільки величина $\alpha_n+\beta_n$ є нескінченно малою величиною як сума двох нескінченно малих, то число $a+b$ є границею змінної x_n+y_n.

Випадок різниці доводиться аналогічно.

Зауважимо, що дане твердження можна узагальнити на довільну скінченну кількість доданків алгебраїчної суми.

2) У випадку добутку маємо, що

$$x_n \cdot y_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

Величина $a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ є нескінченно малою як сума нескінченно малих, тому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3) Для частки розглянемо різницю

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{b(a+\alpha_n) - a(b+\beta_n)}{by_n} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Очевидно, що множник $(b\alpha_n - a\beta_n)$ є нескінченно малим.

Покажемо, що величина $\frac{1}{by_n}$ є обмеженою. Дійсно, оскільки $\beta_n \to 0$, то існує таке n_0, що $|\beta_n| < \frac{|b|}{2}$ для всіх $n > n_0$. Тоді

$$|y_n| = |b+\beta_n| \geq |b| - |\beta_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$$

і $\left|\frac{1}{by_n}\right| = \frac{1}{|b|\cdot|y_n|} < \frac{1}{|b|}\cdot\frac{2}{|b|} = \frac{2}{b^2}$.

Отже, величина $\frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n)$ є нескінченно малою і $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ $(n\to\infty)$.

Наслідок. ***Якщо існує*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$***, то для довільного числа*** k ***існує*** $\lim\limits_{n\to\infty} kx_n$ ***і*** $\lim\limits_{n\to\infty} kx_n = k\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Приклад **Змінна** x_n **має границю** $a \neq 0$**. Знайти границю змінної величини** $y_n = x_n + \frac{x_n^2 - 2a^2}{x_n + a}$.

За теоремою про арифметичні дії над збіжними послідовностями (змінними), маємо

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2 - 2a^2}{x_n + a} = \lim_{n\to\infty} x_n + \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 - \lim\limits_{n\to\infty} 2a^2}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} a} =$$

$$= a + \frac{a^2 - 2a^2}{a+a} = \frac{a}{2}$$

Приклад **Обчислити границю** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+3}$.

Послідовності в чисельнику і знаменнику дробу є розбіжними, тому теорема про арифметичні дії поки не може бути застосована до обчислення границі частки заданих послідовностей. Спочатку виконаємо тотожні перетворення над виразом під знаком границі, а саме, поділимо чисельник і знаменник дробу на n. Після цього ми можемо застосувати теорему про арифметичні дії:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}=\frac{2+0}{1+0}=2\,.$$

Приклад **Знайти границю змінної** $x_n=\dfrac{2n}{n+1}+\dfrac{\sin n}{n}$.

Спочатку покажемо збіжність кожного доданку змінної x_n. Міркуючи аналогічно до попереднього, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin n=0$$

(як добуток нескінченно малої та обмеженої величини).

За теоремою про арифметичні дії над маємо, що

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=2+0=2\,.$$

Теорема про арифметичні дії над збіжними послідовностями є інструментом для знаходження границь у випадках, коли змінні x_n та y_n мають скінченні границі. Проте, коли умови теореми порушуються (границя нескінченна, ділення на нуль тощо), ми отримуємо так звану ***невизначеність.*** Якщо внаслідок вивчення поведінки змінних границя була обчислена або встановлено її відсутність, то вважають, що ***невизначеність розкрита***.

1) Невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Нехай $x_n \to 0$, $y_n \to 0$. У цьому випадку неможливо однозначно визначити границю відношення $\frac{x_n}{y_n}$, оскільки результат залежить від особливостей поведінки змінних x_n та y_n. Так, наприклад, якщо $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $y_n = \frac{1}{n} \to 0$, то $\frac{x_n}{y_n} = 1 \to 1$; якщо $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $y_n = \frac{1}{n^2} \to 0$, то $\frac{x_n}{y_n} = n \to \infty$; якщо $x_n = \frac{1}{n^2} \to 0$, $y_n = \frac{1}{n} \to 0$, то $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$; якщо $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$, $y_n = \frac{1}{n} \to 0$, то $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ взагалі не має границі.

Однак це не єдина форма невизначеності, яка може виникати при дослідженні границь. Можливі й інші типи невизначеностей, зокрема:

2) невизначеність типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$;

3) невизначеність типу $(\infty - \infty)$;

4) невизначеність типу $(0 \cdot \infty)$:

5) невизначеність типу (1^{∞}).

Розглянемо типові **прийоми розкриття** таких невизначеностей.

Приклад **Нехай $x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$, $a_k \neq 0$. Як поводить себе многочлен при $n \to +\infty$?**

Якби всі коефіцієнти мали однаковий знак, то вираз був би нескінченно великим з відповідним знаком. При різних знаках коефіцієнтів маємо невизначеність типу $(\infty - \infty)$. Для розкриття цієї невизначеності винесемо за дужки найбільший степінь n: $x_n = n^k\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \frac{a_{k-2}}{n^2} + \ldots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}\right)$. У дужках усі доданки, крім першого, є нескінченно малими, тому границя виразу в дужках дорівнює a_k. Оскільки множник n^k є нескінченно великим, тоді x_n прямує до $+\infty$ або $-\infty$ в залежності від знаку a_k

Приклад **Нехай x_n є відношенням двох многочленів:**

$$x_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0},\ a_k \neq 0,\ b_m \neq 0.$$

Маємо невизначеність типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Винесемо за дужки в чисельнику n^k, в знаменнику n^m:

$$x_n = n^{k-m} \cdot \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \frac{b_0}{n^m}}.$$

Границя другого множника дорівнює $\frac{a_k}{b_m}$, а границя першого множника залежить від співвідношення чисел k і m:

- ***якщо $k > m$, то $x_n \to \infty$, тобто є нескінченно великою;***
- ***якщо $k < m$, то $x_n \to 0$, тобто є нескінченно малою;***
- ***якщо $k = m$, то $x_n \to \frac{a_k}{b_m}$, тобто границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях многочленів у чисельнику і знаменнику*.**

Наприклад, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 3} = \frac{3}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{7n^3 - 2n^2 + 3n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2 + 2n - 3}{n - 5} = -\infty$.

Приклад Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n-1}\right)$.

Для розкриття невизначеності використаємо тотожне перетворення, що полягає у множенні й одночасному діленні виразу на спряжений до нього. С***пряженим виразом*** до даного називається вираз, який дозволяє позбутися ірраціональності.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n-1}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{2n-1}\right)}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{2n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2 - 2n + 1}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}} + \sqrt{\frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}}} = \infty.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 2 + 0 = 2.$$

Приклад **Знайти** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+5}$.

Для розкриття невизначеності $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ скористаємося формулою суми n перших членів арифметичної прогресії в чисельнику дробу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+5}=\frac{1}{2}.$$

Приклад **Знайти** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

Скористаємося формулою суми n перших членів геометричної прогресії:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3^n}}=\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{3^n}}=\frac{4}{3}.$$

Теорема (про граничний перехід у нерівностях). ***Якщо змінні*** x_n ***та*** y_n ***мають границі*** a ***і*** b ***відповідно, причому*** $x_n\le y_n$ ***для всіх*** $n\in N$***, то*** $a\le b$**.**

Припустимо супротивне, що $a>b$. Візьмемо яке-небудь число r, таке що $a>r>b$. Оскільки $x_n\to a$ і $a>r$, то існує таке n_1, що $x_n>r$ для всіх значень $n>n_1$. З іншого боку, оскільки $y_n\to b$ і $b<r$, то існує таке n_2, що $y_n<r$ для всіх значень $n>n_2$. Позначимо через $n_0=\max\{n_1,n_2\}$, то для всіх $n>n_0$ будуть одночасно виконуватись нерівності $x_n>r$ і $y_n<r$. Звідси отримаємо, що $x_n>y_n$ для всіх $n>n_0$, що суперечить умові теореми.

Зауваження. В умовах теореми нерівність $x_n\le y_n$ може виконуватись не для всіх $n\in N$, а починаючи з деякого номера, відмінного від першого.

Теорема (про границю проміжної змінної). ***Нехай маємо три змінні*** x_n, y_n ***і*** z_n, ***такі що*** $x_n \le y_n \le z_n$ ***для всіх*** $n \in N$. ***Тоді якщо*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, ***то й*** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді для змінної x_n знайдеться таке n_1, що для всіх $n > n_1$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Для змінної z_n знайдеться таке n_2, що всіх $n > n_2$ виконується нерівність $|z_n - a| < \varepsilon$, тобто $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$.

Позначимо через $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тоді для всіх $n > n_0$ будуть виконуватись обидві нерівності і

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon.$$

Звідси $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ для всіх $n > n_0$, що означає $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Приклад **Довести, що** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{\sqrt[3]{n^7 + 5n - 2}} = 0$.

Оскільки для всіх натуральних чисел n виконується нерівність $5n - 2 > 0$, то

$$0 \le \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^7 + 5n - 2}} < \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^7}} \le \frac{n+3n}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{4n}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{4}{\sqrt[3]{n^4}}.$$

Маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{\sqrt[3]{n^4}} = 0$. Тоді за теоремою про проміжну послідовність маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{\sqrt[3]{n^7 + 5n - 2}} = 0$.

Приклад **Нехай** $a > 0$, $a \ne 1$. **Довести, що** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$.

Представимо a^n у вигляді $a^n = (1 + (a-1))^n$, застосуємо формулу бінома Ньютона і отримаємо нерівність $a^n = (1 + (a-1))^n \ge \dfrac{n(n-1)}{2}(a-1)^2$. Для зменшення виразу $\dfrac{n(n-1)}{2}$ застосуємо оцінку $n - 1 \ge \dfrac{n}{2}$ при $n \ge 2$ і отримаємо $\dfrac{n(n-1)}{2} \ge \dfrac{n^2}{4}$, тоді $a^n \geq \dfrac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 \geq \dfrac{n^2}{4}(a-1)^2$ для всіх $n \geq 2$.

Маємо, що $0 \leq \dfrac{n}{a^n} \leq \dfrac{4}{n(a-1)^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n(a-1)^2} = 0$. За теоремою про границю проміжної послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$.

Приклад **Нехай** $a > 1$**. Довести, що** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Позначимо $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$, тоді $\alpha_n > 0$ і $a = (1+\alpha_n)^n \geq n\alpha_n$ (за нерівністю Бернуллі). Маємо, що, $0 < \alpha_n \leq \dfrac{a}{n}$ для всіх n. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\alpha_n) = 1$.

Приклад **Довести, що** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Нехай $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$, тоді $\alpha_n > 0$ і $n = (1+\alpha_n)^n \geq \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$ при $n \geq 2$. Оскільки $n-1 \geq \dfrac{n}{2}$ при $n \geq 2$, то $n \geq \dfrac{n^2\alpha_n^2}{4}$, звідки отримаємо $0 \leq \alpha_n \leq \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ або $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\alpha_n) = 1$.

5 Монотонна послідовність та її границя

Теорема (про границю монотонної послідовності). ***Якщо монотонна послідовність*** (x_n) ***є обмеженою, то вона має скінченну границю,*** **тобто** ***є збіжною.***

Нехай (x_n) зростає і обмежена зверху. Тоді для множини значень x_n існує точна верхня грань A. Покажемо, що число A і є границею цієї послідовності. Дійсно, за означенням верхньої грані $x_n \le A$ для всіх n. Візьмемо $\varepsilon > 0$. За властивістю точних граней для цього ε існує таке n_0, що $x_{n_0} > A-\varepsilon$. Тоді внаслідок зростання x_n для всіх $n > n_0$ маємо, що $x_n > A-\varepsilon$. Отже, для всіх номерів $n > n_0$ отримаємо $A-\varepsilon < x_n < A+\varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Випадок спадної обмеженої знизу послідовності (x_n) доводиться аналогічно.

Зауваження. Ця теорема лише гарантує існування границі монотонної обмеженої послідовності, не вказуючи методів її обчислення, однак і саме встановлення факту існування має важливе значення в теорії границь.

Приклад Довести існування границі послідовності (x_n), де

$$x_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{2^n+1}.$$

Послідовність (x_n) зростає, оскільки $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^{n+1}+1}$. Крім того, вона обмежена зверху. Дійсно, для будь-якого n, враховуючи нерівність $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$, маємо:

$$x_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

Отже, за теоремою про границю монотонної послідовності дана послідовність має границю, яка не перевищує 1.

Приклад Послідовність задана рекурентним співвідношенням $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$, $x_1=\sqrt{a}$, де $a>0$. Знайти її границю.

Задана послідовність має вигляд:

$$\sqrt{a},\quad \sqrt{a+\sqrt{a}},\quad \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \ldots.$$

Очевидно, що дана послідовність монотонно зростає і для $\forall n\in N$ $x_{n+1}>x_n$. Тоді маємо, що $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}<\sqrt{a+x_n}$, звідси $x_n^2<a+x_n$, $x_n^2-x_n-a<0$. Розв'язуючи останню нерівність, отримаємо, що $x_n<\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}$ для всіх n, тобто послідовність (x_n) обмежена зверху.

За теоремою про границю монотонної послідовності вона має скінченну границю. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, тоді також $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}=A$. В рівності $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$ перейдемо до границі, отримаємо:

$$A=\sqrt{a+A},$$

$$A^2-A-a=0,$$

$$A=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+a}.$$

Оскільки за умовою $a>0$ і послідовність (x_n) зростає, то число A має бути додатним, тобто $A=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}$.

Число e

Розглянемо числову послідовність (x_n), де $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. З нерівності Бернуллі маємо, що для довільного n виконується співвідношення $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 1+n\cdot\frac{1}{n}=2$, тобто дана послідовність є обмеженою знизу числом 2.

Монотонна послідовність та її границя

Розглянемо спочатку послідовність (y_n), де $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ і покажемо, що вона монотонно спадає. Дійсно, для $y_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, $y_{n-1} = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n}$ маємо

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{n^n \cdot n^{n+1}}{(n-1)^n \cdot (n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}.$$

З нерівності Бернуллі справедлива оцінка

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \ge 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1} = 1+\frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}.$$

Тоді $\dfrac{y_{n-1}}{y_n} \ge 1$ або $y_{n-1} \ge y_n$ для всіх $n \ge 2$.

Обмеженість (y_n) знизу слідує з обмеженості послідовності (x_n), тобто $y_n \ge 2$. За теоремою про границю монотонної послідовності (y_n) має скінченну границю. Але тоді існує скінченна границя і послідовності (x_n), оскільки

$$x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}} \text{ і } \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Цю границю прийнято позначати буквою e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Число $e = 2{,}718281828459045...$ є ірраціональним числом.

Приклад **Знайти границі: а)** $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln n)$, **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{5n}$.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln n) = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln\dfrac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \ln e = 1.$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{5n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{5}{3}} = e^{\frac{5}{3}}..$

6 Границя функції в точці

Поняття границі функції в точці є фундаментальним у математичному аналізі та лежить в основі таких важливих понять, як неперервність, похідна, інтеграл. Границя дозволяє описати поведінку функції поблизу заданої точки, навіть якщо сама функція в цій точці не визначена. Розуміння і правильне використання поняття границі є необхідним для аналізу складних функціональних залежностей та побудови математичних моделей реальних процесів у фізиці, економіці, біології та багатьох інших галузях.

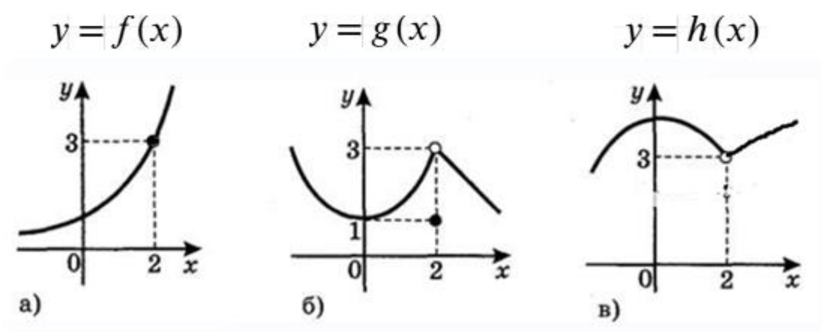


Рис. 20

Розглянемо функції f, g, h, графіки яких зображені на рис. 20. Хоча поведінка цих функцій істотно відрізняється у точці $x_0 = 2$ та її околі, всі вони мають спільну властивість: при наближенні значень аргументу до числа $x_0 = 2$, відповідні значення функції наближаються до числа $a = 3$. Іншими словами, якщо взяти довільну послідовність значень аргументу x, відмінних від x_0, яка прямує до числа x_0, то відповідна послідовність значень функції прямує до числа a. У такому випадку число a називається границею функції в точці x_0, і це записують як $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

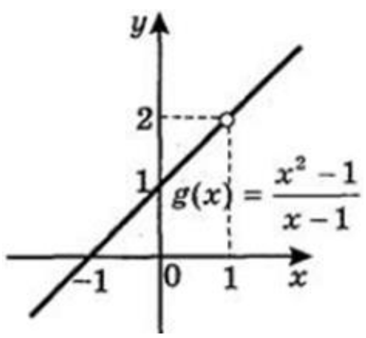


Рис. 21

Наприклад, для функції $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, графік якої зображено на рисунку, маємо, що

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \text{ (рис. 21).}$$

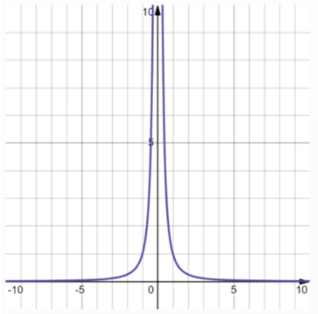


Рис. 22

Розглянемо функцію $y=\frac{1}{x^2}$ (рис. 22). Якщо послідовність значень аргументу x прямує до 0, то члени відповідної послідовності значень функції зростають і можуть стати як завгодно великими. Тоді говорять, що функція $y=\frac{1}{x^2}$ має нескінченну границю в точці $x_0=0$.

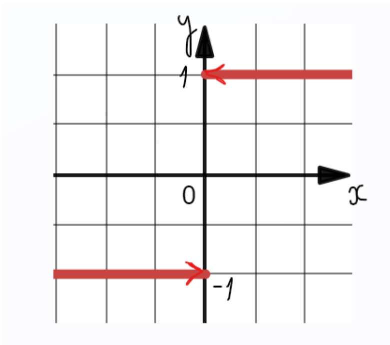


Рис. 23

На рис. 23 зображено графік функції $y=\frac{|x|}{x}$. Очевидно, що в точці $x=0$ функція є невизначеною, тому доцільно дослідити її поведінку в околі цієї точки. Розглянемо послідовності (x_n) значень аргументу, коли x_n набуває тільки додатних значень або тільки від'ємних. Бачимо, що значення $f(x_n)$ залежать від вибору послідовності, що прямує до нуля: для $x_n>0$ маємо $f(x_n)=1$ та $f(x_n)=-1$ для $x_n<0$, тобто прямують до 1 та -1 відповідно. Оскільки різні послідовності (x_n), що прямують до 0, дають різні границі значень функції, що суперечить теоремі про єдиність границі. Отже, функція $y=\frac{|x|}{x}$ не має границі в точці $x_0=0$.

Означення за Гейне (на мові «послідовностей»). Число A називається ***границею функції*** $y=f(x)$ ***в точці*** x_0, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу (x_n), збіжної до точки x_0 і $x_n\neq x_0$ при всіх $n\in N$, відповідна послідовність значень функції $(f(x_n))$ збігається до числа A.

Зауваження. Якщо можна вказати хоча б одну послідовність $(x_n), n\in N$, де $x_n\neq x_0$ і $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$, для якої відповідна послідовність значень функції $(f(x_n)), n\in N$ не буде збігатися до числа A, то це означає, що A не є границею функції f в точці x_0.

Приклад **Знайти границю функції** $y=\dfrac{9x^2-1}{3x-1}$ **у точці** $x_0=\dfrac{1}{3}$.

Розглянемо довільну послідовність (x_n), таку що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{3}$ і $x_n\neq\dfrac{1}{3}$ при всіх $n\in N$. Тоді відповідна послідовність (y_n) значень функції задається формулою $y_n=\dfrac{9x_n^2-1}{3x_n-1}$. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9x_n^2-1}{3x_n-1}=\lim_{n\to\infty}(3x_n+1)=3\cdot\frac{1}{3}+1=2.$$

Оскільки послідовність (x_n) була вибрана довільно, то отримуємо, що $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{3x-1}=2$.

Приклад **Довести, що функція** $y=\sin\dfrac{1}{x}$ **не має границі в точці** $x_0=0$.

Розглянемо послідовності (a_n) і (b_n), такі що $a_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ і $b_n=\dfrac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}$, $n\in N$. Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$ і $a_n\neq 0$, $b_n\neq 0$ для всіх $n\in N$. Тоді маємо, що $y(a_n)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y(a_n)=1$; $y(b_n)=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n\right)=-1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y(b_n)=-1$. Оскільки границі функції по різним послідовностям (a_n) і (b_n) не співпадають, то функція $y=\sin\dfrac{1}{x}$ не має границі в точці $x_0=0$.

Означення за Коші (на мові «$\varepsilon-\delta$»). Число A називається ***границею функції*** $y=f(x)$ ***в точці*** x_0, якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta(\varepsilon)>0$, що для всіх $x\in D(y)$, які задовольняють умову $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. **Позначення:** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Формулювання означення *у символьній формі*:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D(y)\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Зауваження. В означенні границі функції в точці $y = f(x)$ має бути визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0 (проколотий окіл). Це пов’язано з тим, що границя функції в точці характеризує її поведінку поблизу цієї точки, а не в самій точці, що дозволяє розглядати функції, які навіть не визначені в точці x_0.

Геометрична інтерпретація: з рис. 24 видно, що для всіх x з проколотого δ-околу точки x_0 відповідні значення функції $f(x)$ належать ε-околу точки A. Інакше кажучи, для точки x_0 ми можемо підібрати таку смугу шириною 2δ, обмежену прямими $x = x_0 - \delta$ і $x = x_0 + \delta$, що вся частина графіка функції, яка лежить у цій вертикальній смузі, буде розташована всередині горизонтальної смуги шириною 2ε між прямими $y = y_0 - \varepsilon$ і $y = y_0 + \varepsilon$.

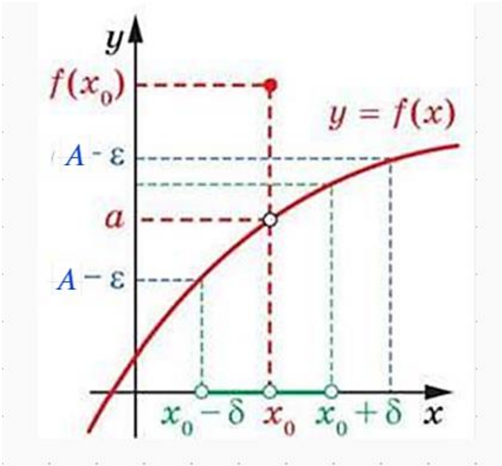


Рис. 24

Приклад **За означенням Коші довести, що** $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 3) = 5$.

Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо таке $\delta(\varepsilon)$, що для $|x - 1| < \delta(\varepsilon)$ виконується нерівність $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$. Розглянемо нерівність $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$, в результаті перетворень якої отримаємо, що $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тоді можна покласти $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отже, $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 3) = 5$.

Для функції $f(x)$, заданої в деякому проміжку X, можна ввести поняття нескінченної границі в точці x_0.

Границя функції в точці

Означення. Якщо для довільної послідовності (x_n) значень x, таких що $x_n \to x_0$ $(x \neq x_0)$ послідовність $(f(x_n))$ є нескінченно великою, то говорять, що функція $f(x)$ має в точці x_0 ***нескінченну границю***.

Означення. Функція $f(x)$ має в точці x_0 ***нескінченну границю***, якщо для довільного як завгодно великого додатного числа M знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх значень $x \in X$ $(x \neq x_0)$, які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.

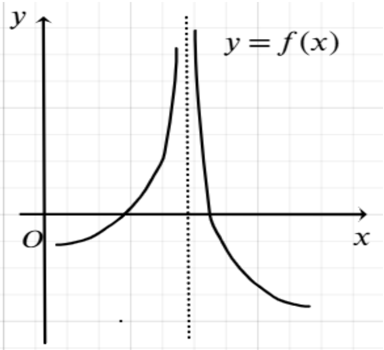


Рис. 25

Позначення: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Поведінка функції в околі точки x_0 в цьому випадку показана на рис. 25.

Якщо функція $f(x)$ задана на нескінченному проміжку $(a;+\infty)$, то для неї є сенс ввести означення границі на нескінченості.

Означення. Число A називається ***границею функції*** $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке дійсне число K, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всіх значень $x > K$.

Позначення: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

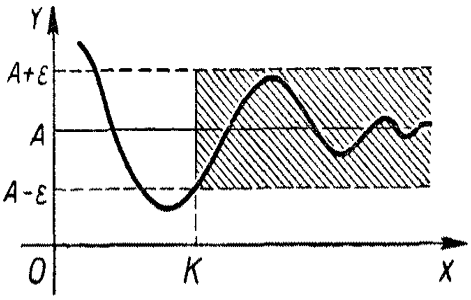


Рис. 26

Нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ рівносильна нерівності $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Враховуючи це, можна дати таке геометричне тлумачення границі функції на нескінченості: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ геометрично означає, що крива $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ необмежено наближається до прямої $y = A$. Іншими словами, яке б $\varepsilon > 0$ ми не взяли, знайдеться таке K, що для всіх значень $x > K$ крива $y = f(x)$ буде знаходитись у смузі між прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$ (рис. 26).

Односторонні границі

В означенні границі функції в точці розглядається поведінка функції при наближенні її аргументу до точки x_0 з обох боків. При цьому не уточнюється, як саме x прямує до точки x_0, приймаючи значення менші за x_0 (зліва) або більші за x_0 (справа). Проте, така особливість є важливою при розв'язуванні деяких математичних і прикладних задач, коли функція має суттєво відмінну поведінку зліва і справа від точки x_0. Саме тому в математичному аналізі вводиться поняття односторонньої границі, яке формалізує поведінку функції в точці з урахуванням лише одного напряму наближення до неї:

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ — ***лівостороння границя***;

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$ — ***правостороння границя***.

Зауваження. Для односторонніх границь у точці $x_0=0$ також вживають позначення $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.

Наприклад, для функції $y=sign\,x=\begin{cases}-1, x<0,\\ 0, x=0,\\ 1, x>0\end{cases}$ маємо:

$$\lim_{x\to 0-} sign\,x=-1,\ \lim_{x\to 0+} sign\,x=1.$$

Приклад **Знайти односторонні границі функції $y=e^{\frac{1}{x+1}}$ в точці $x=-1$.**

Оскільки $\frac{1}{x+1}\to-\infty$ при $x\to-1-0$, а $\frac{1}{x+1}\to+\infty$ при $x\to-1+0$, то

$$\lim_{x\to-1-0} e^{\frac{1}{x+1}}=0,\ \lim_{x\to-1+0} e^{\frac{1}{x+1}}=+\infty.$$

Зауважимо, що при обчисленні границь доречно врахувати поведінку функції $y=e^t$ при $t\to-\infty$ та $t\to+\infty$.

Виникає питання, чи пов'язані певним способом односторонні границі функції в точці x_0 з границею у цій точці?

Теорема (про зв'язок границі функції у точці та її односторонніх границь у цій точці). ***Якщо існують обидві односторонні границі функції у точці, які рівні між собою і дорівнюють числу A, то границя функції у цій точці існує і дорівнює числу A.***

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$. За означенням односторонньої границі маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : x_0 - \delta_1 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Виберемо $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тоді для $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, що означає $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Зауваження. Існування обох односторонніх границь функції в точці ще не гарантує існування границі функції у цій точці, а лише є необхідною умовою для цього.

Обчислення границь функції в точці

Для границі функції в точці виконуються всі теореми, сформульовані для границі числової послідовності.

У найпростіших випадках обчислення границі функції в точці x_0 зводиться до підстановки в аналітичний вираз для функції ***граничного значення*** x_0.

Наприклад, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1} = \dfrac{20}{5} = 4$, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 - x - 6} = \infty$.

Проте в багатьох випадках безпосередня підстановка значення аргументу у функцію призводить до утворення невизначених виразів (невизначеностей), які класифікуються за окремими типами:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \left(\frac{0}{0}\right), (0 \cdot \infty), (\infty - \infty), \left(0^0\right), \left(\infty^0\right), \left(1^\infty\right).$$

Операцію знаходження границі в таких випадках називають *розкриттям невизначеності*.

Сформулюємо *правила розкриття* окремих типів *невизначеностей* залежно від структурних особливостей аналітичного виразу функції.

Невизначеність типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, задану відношенням $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ двох многочленів, розкривають шляхом ділення чисельника і знаменника на степінь змінної x, що є найвищим серед степенів обох многочленів. Отже, маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ n<m,\\ \frac{a_n}{b_m} \ \ \textit{при} \ \ n=m,\\ \infty \ \ \textit{при} \ \ n>m.\end{cases}$$

Наприклад, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{x^3-x-6}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5x^3}{x^3-x-6}=-5$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5+3x-1}{x^3-x-6}=\infty$.

Зауваження. Якщо невизначеність типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ задана за допомогою ірраціональних виразів, то вона також розкривається цим способом.

Приклад **Обчислити границю** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$.

Маємо невизначеність типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, а старший степінь змінної x дорівнює $\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{\sqrt[6]{x}}+\frac{5}{\sqrt[10]{x^3}}}{\sqrt{3-\frac{2}{x}}+\sqrt[6]{\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{9}{x^3}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$, задану відношенням двох многочленів, розкривають розкладанням чисельника і знаменника дробу на множники, серед яких виділяють так званий *критичний множник* $(x-x_0)$. Після цього скорочують дріб на $(x-x_0)$.

При виділенні критичного множника корисними є твердження:

а) наслідок теореми Безу: якщо a - корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a)=0$, то $P_n(x)$ ділиться на двочлен $(x-a)$ без залишку: $P_n(x)=(x-a)P_{n-1}(x)$;

б) квадратний тричлен $P_2(x)=ax^2+bx+c$, у якого дискримінант $D=b^2-4ac\geq 0$, представляється у вигляді $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1, x_2 – корені цього тричлена.

Приклад **Обчислити границю** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}=\frac{15}{11}$$

Невизначеності типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $(\infty-\infty)$, в які входять ірраціональні вирази, розкривають одночасним множенням і діленням виразу на спряжений до нього. *Спряженим* називається вираз, що дозволяє позбутися від ірраціональності за допомогою формул скороченого множення (різниці квадратів, різниці або суми кубів тощо).

Приклад **Обчислити границі:** а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{3x-5}}$

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right)}{(x^2-25)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+11-4(x-1)}{(x^2-25)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{15-3x}{(x^2-25)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3(5-x)}{(x-5)(x+5)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-3}{(x+5)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right)}=-\frac{3}{80}.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right)=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right)\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}\right)}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+8x^2+3-x^4-x^2}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\dfrac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{7}{2}.$$

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{3x-5}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\sqrt{2x-3}\right)\left(\sqrt{x+7}+3\sqrt{2x-3}\right)}{\left(\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{3x-5}\right)\left(\sqrt{x+7}+3\sqrt{2x-3}\right)}==\frac{1}{6}\lim_{x\to2}\frac{-17x+34}{\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{3x-5}}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to2}\frac{(-17x+34)\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{(3x-5)(x+6)}+4\sqrt[3]{(3x-5)^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{3x-5}\right)\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{(3x-5)(x+6)}+4\sqrt[3]{(3x-5)^2}\right)}=$$

$$=2\lim_{x\to2}\frac{-17x+34}{-23x+46}=2\lim_{x\to2}\frac{-17(x-2)}{-23(x-2)}=\frac{34}{23}.$$

Зауваження. У деяких випадках, вирази, що місять ірраціональності, приводять до раціонального вигляду введенням нової змінної.

Приклад **Обчислити границю** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$.

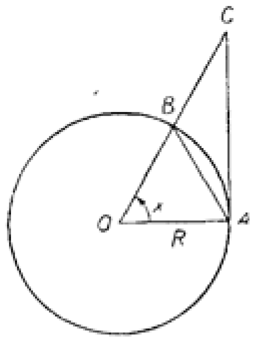
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\begin{array}{l}y=\sqrt[5]{32+x}\\ x\to0\Rightarrow y\to2\end{array}\right]=\lim_{y\to2}\frac{y-2}{y^5-32}=$$

$$=\lim_{y\to2}\frac{1}{y^4+2y^3+4y^2+8y+16}=\frac{1}{80}.$$

Невизначеність типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, яка містить тригонометричні або обернені тригонометричні функції**,** розкривається за допомогою першої чудової границі та наслідків з неї.

Теорема (перша чудова границя). ***Справедлива рівність*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

В колі радіуса R побудуємо центральний кут, радіанну міру якого позначимо через x $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Потім побудуємо хорду AB і лінію тангенсів (рис. 27). Маємо $S_{AOB}<S$ сектора $AOB<S_{AOC}$. Користуючись відповідними формулами з геометрії для обчислення вказаних площ, отримаємо:



$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2 x<\frac{1}{2}R^2 tgx.$$

Поділимо всі частини нерівності на $\dfrac{1}{2}R^2$:

Рис. 27

$$\sin x<x<tgx\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Розділимо ці нерівності на $\sin x>0$, отримаємо $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$. Звідси $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$. Оскільки $\cos x\to 1$ при $x\to 0$, то з останніх нерівностей маємо $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ при $x\to 0$.

Наслідки: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$,

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$.

У деяких випадках спочатку потрібно виконати тотожні перетворення із застосуванням тригонометричних формул.

Приклад **Обчислити границі: а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$ **; б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\arcsin 2x}$.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 5x\sin 2x}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\right)=20.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\arcsin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\dfrac{\arcsin 2x}{2x}\cdot 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2x^2}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\frac{3}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

Невизначеність типу (1^∞) розкривається за допомогою другої чудової границі:

Теорема (друга чудова границя). *Справедлива рівність*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ .$$

Розглянемо функцію $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Вона існує для всіх $x>-1$, крім $x=0$. Доведемо виконання рівності на мові послідовностей. Використаємо означення числа e. Нехай $x\to 0$ справа, пробігаючи довільну послідовність значень $x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots$. Можна вважати, що всі $x_k<1$. Покладемо $\left[\dfrac{1}{x_k}\right]=n_k$. Тоді $n_k\le\dfrac{1}{x_k}<n_k+1$ і $\dfrac{1}{n_k+1}<x_k\le\dfrac{1}{n_k}$. Оскільки $x_k\to 0$, то $n_k\to\infty$. Значить,

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Знайдемо границі крайніх виразів:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\dfrac{1}{n_k+1}}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)}=\frac{e}{1}=e.$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=e\cdot 1=e$$

Застосовуючи теорему про границю проміжної змінної, при переході до границі маємо $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e$.

Внаслідок довільності вибору послідовності $x_k \to 0$ (справа) маємо справедливість формули для границі справа.

Нехай $x_k \to 0-$ $(x_k > -1)$. Покладемо $y_k = -x_k$. Тоді $0 < y_k < 1$ буде прямувати до нуля справа і

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = (1-y_k)^{-\frac{1}{x_k}} = \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} = \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}} \cdot \left(1+\frac{x_k}{1-y_k}\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{y_k\to 0}\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}} = e$, а $\lim\limits_{y_k\to 0}\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right) = 1$, то $\lim\limits_{x_k\to 0}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e$.

Отже, за означенням границі функції в точці за Гейне справедливою є рівність $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Для доведення рівності $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ застосуємо підстановку $\frac{1}{x} = t$ в рівності $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ і перепозначимо змінну t на x.

Приклад

Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)+2}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^x == \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}} = e^2$$

б)

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\left(-\sin^2 x\right)\right)^{\frac{1}{-\sin^2 x}\cdot\left(-\frac{\sin x}{2}\right)} = e^0 = 1$$

Зауваження. При обчисленні границі була застосована теорема про перехід до границі під знаком неперервної функції, яку ми розглянемо пізніше.

Невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$, яка містить логарифмічні або показникові функції, розкривають за допомогою **наслідків другої чудової границі**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

Приклад **Обчислити границі: а)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{3^x-1}$**; б)** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$**.**

а) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{3^x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot 4x\cdot\frac{x}{3^x-1}\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{\ln 3}.$

б) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)\cdot\left(-\sin^2 x\right)}{x^2\cdot\left(-\sin^2 x\right)}=$

$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{\left(-\sin^2 x\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\sin^2 x\right)}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$

Еквівалентні величини

При вивченні різних питань, пов’язаних з поняттям нескінченно малої величини, часто виникає необхідність відрізняти нескінченно малі за характером їх зміни. Деякі з них прямують до нуля «швидше», ніж інші.

Так, наприклад, нескінченно мала $\alpha = \dfrac{1}{x^2}$ прямує до нуля при $x \to \infty$ з «більшою швидкістю», ніж нескінченно мала $\beta = \dfrac{1}{x}$. У цьому можна переконатись, якщо x набуває тільки натуральних значень.

Означення. Нескінченно мала величина α називається нескінченно малою ***вищого (нижчого) порядку*** по відношенню до нескінченно малої β, якщо $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$ $\left(\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty \right)$.

Означення. Дві нескінченно малі α і β називаються нескінченно малими ***одного порядку***, якщо границя їх відношення дорівнює деякому числу, відмінному від нуля, тобто $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$

Нескінченно малі одного порядку характеризуються тим, що мають «однакову швидкість» прямування до нуля.

Якщо $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то величини α і β називаються ***еквівалентними***, що позначається $\alpha \sim \beta$.

У багатьох випадках при розкритті невизначеностей типу $\left(\dfrac{0}{0} \right)$ доцільно застосовувати таку теорему.

Теорема. ***Якщо маємо дві пари нескінченно малих величин α, β і α', β', причому $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, то $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.***

Відношення $\dfrac{\alpha}{\beta}$ можна подати так: $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\alpha'} \cdot \dfrac{\alpha'}{\beta'} \cdot \dfrac{\beta'}{\beta}$. Перейдемо в цій рівності до границі та застосуємо теорему про границю добутку:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'},$$

оскільки за умовою $\lim \dfrac{\alpha}{\alpha'} = 1$, $\lim \dfrac{\beta}{\beta'} = 1$.

Ця теорема означає, що при знаходженні границі відношення двох нескінченно малих величин кожну з них можна замінити еквівалентною нескінченно малою і від цього границя не зміниться. При вдалому виборі такої заміни задача розкриття невизначеності може бути значно спрощена.

Зокрема, при розкритті невизначеностей різних типів для функцій можна використовувати таку таблицю еквівалентних функцій:

1	$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
2	$tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$
3	$1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$
4	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
5	$\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$
6	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
7	$\left(a^{\alpha(x)}-1\right) \sim \alpha(x)\ln a$
8	$\left(e^{\alpha(x)}-1\right) \sim \alpha(x)$
9	$\left(\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\right) \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$

Приклад **Обчислити границі: а)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-tg^2x\right)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$**; б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{tgx-\sin x}$**.**

а) Оскільки $tgx \sim x$, $\sin 2x \sim 2x$ при $x\to 0$, то маємо

$$\lim_{x\to 0}\left(1-tg^2x\right)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\left(-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{-\frac{1}{4}}=e^{-\frac{1}{4}}.$$

б) Оскільки при $x\to 0$ $\sin x \sim x$, $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{tgx-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos x}{\sin x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos x}{x\cdot\frac{x^2}{2}}=2.$$

Зауваження. З геометричної точки зору, нескінченно мала функція та еквівалентна їй мають практично збіжні графіки в околі заданої точки x_0, тобто настільки близькі, що в межах цього околу вони майже не відрізняються один від одного.

7 Неперервність функції

Нехай на деякому проміжку визначена функція $f(x)$ і x_0 – деяка точка цього проміжку.

Означення. Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо границя функції в точці x_0 і значення функції в цій точці рівні між собою, тобто

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).}$$

Це означає, що:

1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і її значенням в цій точці є число $f(x_0)$;

2) існує границя A функції $f(x)$ в точці x_0;

3) границя A дорівнює числу $f(x_0)$.

Якщо хоча б одна з умов 1) - 3) не виконується, то функція $f(x)$ називається ***розривною*** в точці x_0, а сама точка x_0 називається ***точкою розриву***.

Відповідно до двох означень границі функції можна дати два означення неперервності функції.

Означення (на мові послідовностей). Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо для будь-якої послідовності (x_n) значень x, збіжної до x_0, послідовність відповідних значень функції $(f(x_n))$ збігається до $f(x_0)$. При цьому x, прямуючи до x_0, може приймати і значення x_0.

Означення (на мові «$\varepsilon-\delta$»). Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta(\varepsilon)>0$, що для всіх x, що задовольняють умову $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Дамо ще одне означення неперервності функції в точці на мові приростів.

Неперервність функції

Означення (на мові приростів). Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо нескінченно малому приросту аргумента в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.}$$

Геометрична інтерпретація:

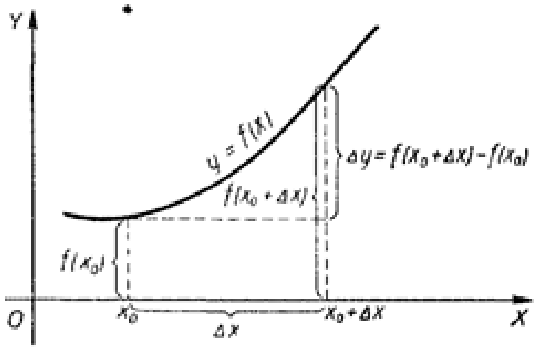


Рис. 28

Геометрично приріст аргументу Δx являє собою зміну абсциси точки кривої $y = f(x)$ при переході від значення x_0 до значення $x_0 + \Delta x$, а приріст функції Δy є зміною ординати цієї кривої при переході від значення $f(x_0)$ до значення $f(x_0 + \Delta x)$ (рис. 28).

Приклад **Довести за означенням на мові приростів неперервність функції $f(x) = x^2 + 3x - 2$ в точці $x_0 = 1$.**

Надамо аргументу $x_0 = 1$ деякого приросту Δx та знайдемо відповідний приріст функції в цій точці:

$$\Delta f(1) = (1+\Delta x)^2 + 3(1+\Delta x) - 2 - 1^2 - 3\cdot 1 + 2 = 5\cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Маємо, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(5\cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right) = 0$. Отже, задана функція є неперервною в точці $x_0 = 1$.

Розглянемо поняття так званої односторонньої неперервності.

Означення. Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0 ***справа (зліва)***, якщо $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)\right)$.

Порівнюючи це означення з означенням неперервності в точці, бачимо, що функція, неперервна в точці x_0, є одночасно неперервною і зліва, і справа в цій точці. Вірне і обернене твердження: якщо функція неперервна в деякій точці зліва і справа, то вона буде неперервною в цій точці.

Отже, функція $f(x)$ є *неперервною в точці* x_0, якщо вона неперервна зліва і справа, а значення односторонніх границь рівні між собою та співпадають зі значенням функції в точці x_0:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0).}$$

Проте є функції, які можуть бути неперервними лише з одного боку. Наприклад, $y=[x]$, яка неперервна при довільному цілому значенні x тільки справа.

Означення. Функція $f(x)$ називається ***неперервною на деякому проміжку,*** якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Зокрема, якщо говорити про неперервність функції на відрізку $[a;b]$, то на його кінцях слід розглядати лише односторонню неперервність: в точці a – справа, в точці b – зліва.

Класифікація точок розриву

Означення. Точка розриву x_0 називається точкою ***розриву першого роду*** функції $y=f(x)$, якщо в цій точці існують скінченні односторонні границі.

У цьому випадку відповідні односторонні границі можуть бути або рівними між собою, або відрізнятися:

1) якщо $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, то такий розрив називається ***усувним***. Таку назву він має, оскільки для його усунення функцію можна доозначити до неперервної в точці x_0, поклавши $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

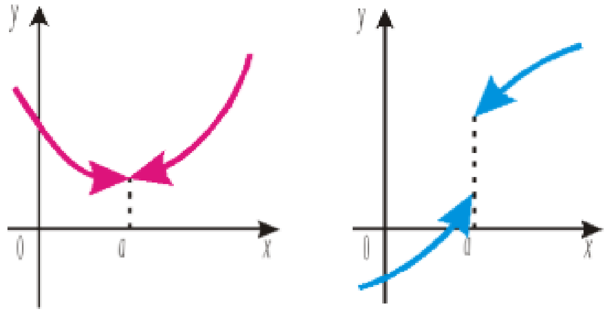


Рис. 29

2) якщо $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, то говорять, що в точці x_0 функція має ***стрибок*** $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ (рис. 29).

Означення. Точка розриву x_0 називається точкою *розриву другого роду* функції $y = f(x)$, якщо хоча б одна з односторонніх границь нескінченна або не існує (рис. 30).

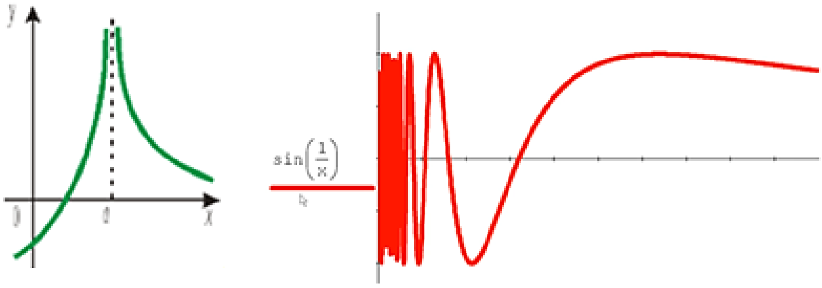


Рис. 30

Теорема (про арифметичні дії над неперервними функціями). ***Якщо функції*** $f(x)$ ***та*** $g(x)$***, задані на деякому проміжку, неперервні в точці*** x_0 ***цього проміжку, то в цій точці будуть неперервними також і функції*** $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ***(за умови, що*** $g(x) \neq 0$***).***

Доведемо, наприклад, неперервність частки. Нехай $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Знайдемо границю функції $F(x)$ в точці x_0. Оскільки функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Оскільки $g(x_0) \neq 0$, то за теоремою про арифметичні дії над збіжними змінними існує границя функції $F(x)$ в точці x_0, причому,

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = F(x_0),$$

тобто $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$.

Це означає, що функція $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ неперервна в точці x_0.

Аналогічно доводиться неперервність функцій $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$. Тут використовують означення неперервності функції і теореми про границю суми, різниці та добутку двох функцій.

Приклад **Користуючись означенням неперервності на мові «$\varepsilon-\delta$», довести, що функція $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-1}$ неперервна в точці $x=1$. В яких межах повинно змінюватись x, щоб виконувалась нерівність $|f(x)-f(1)|<\dfrac{1}{2}$? Показати, що в точці $x=\dfrac{1}{2}$ ця функція має розрив другого роду.**.

Виберемо довільне $\varepsilon>0$ і знайдемо δ-окіл точки $x=1$, для всіх точок якого буде виконуватись нерівність $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$. Оскільки $f(1)=5$, то

$$f(x)-f(1)=\frac{3x+2}{2x-1}-5=\frac{7(1-x)}{2x-1}=\frac{7}{2}\cdot\frac{1-x}{x-\frac{1}{2}}.$$

і нерівність $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$ запишеться у вигляді

$$\frac{7}{2}\cdot\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right|<\varepsilon\text{, або }\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right|<\frac{2\varepsilon}{7},$$

Для знаходження δ-околу точки $x=1$ виконаємо необхідні перетворення і виділимо $|x-1|$:

$$\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x-1}\right|>\frac{7}{2\varepsilon},\quad \left|\frac{(x-1)+\frac{1}{2}}{x-1}\right|>\frac{7}{2\varepsilon},\quad \left|1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right|>\frac{7}{2\varepsilon}.$$

Оскільки модуль суми не менше різниці модулів доданків, то маємо $\dfrac{\frac{1}{2}}{|x-1|}-1>\dfrac{7}{2\varepsilon}$, або $\dfrac{1}{2|x-1|}>1+\dfrac{7}{2\varepsilon}$.

Звідси $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2\varepsilon+7}$, тобто досить взяти $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2\varepsilon+7}$ і з нерівності $|x-1|<\delta$ отримаємо, що $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$. Зокрема, якщо $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, то

$$\delta=\frac{\frac{1}{2}}{1+7}=\frac{1}{16}.$$

Функція $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-1}$ визначена для всіх $x\neq\dfrac{1}{2}$, тому $x=\dfrac{1}{2}$ є точкою розриву. Оскільки при цьому $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\infty$, то в точці $x=\dfrac{1}{2}$ функція має розрив 2-го роду.

Приклад **Показати, що функція $\sin x$ неперервна в довільній точці прямої.**

Візьмемо довільну точку x_0. Тоді

$$\left|\sin x-\sin x_0\right|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le\left|x-x_0\right|.$$

Для довільного $\varepsilon>0$ досить покласти $\delta=\varepsilon$, і тоді з нерівності $\left|x-x_0\right|<\delta$ буде виконуватись нерівність $\left|\sin x-\sin x_0\right|<\varepsilon$. Це і доводить неперервність $\sin x$ в довільній точці.

Постає запитання: чи поширюється властивість неперервності на інші елементарні функції (степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні)? Відповідь на це питання дає теорема.

Теорема. ***Всі основні елементарні функції є неперервними функціями в області свого визначення.***

Приклад **Дослідити на неперервність функцію** $f(x)=x^2+2\sin x$.

Ця функція є сумою двох основних елементарних функцій. Отже, за теоремою про арифметичні дії над неперервними функціями вона є неперервною на множині всіх дійсних чисел.

Приклад **Дослідити на неперервність функцію** $y=\dfrac{x^2+3}{x^2-5x+6}$.

Це дробово-раціональна функція, яка за теоремою про арифметичні дії над неперервними функціями є неперервною на множині всіх дійсних чисел, за винятком точок, де знаменник дробу дорівнює нулю, тобто на $R\setminus\{2;3\}$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3}{x^2-5x+6}=\infty$ та $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+3}{x^2-5x+6}=\infty$, то точки $x=2$, $x=3$ є точками розриву другого роду.

Приклад **Дослідити на неперервність функцію** $y=\begin{cases} x^2, \ x<2, \\ x+1, \ x\ge 2. \end{cases}$

Область визначення $D(y)=R$ функції розбивається точкою $x=2$ на два проміжки, на кожному з яких аналітичні вирази визначають елементарні функції, що є неперервними. Тому слід дослідити неперервність цієї функції лише в точці $x=2$.

Знайдемо односторонні границі функції в точці $x=2$:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} x^2=4, \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(x+1)=3.$$

Оскільки границі скінченні та не рівні між собою, то в точці $x=2$ функція має розрив першого роду, а саме стрибок, що дорівнює 1.

Приклад **Дослідити на неперервність функцію** $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<0, \\ 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ tgx, & x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Область визначення заданої функції $D(y)=R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in N\right\}$.

На проміжках $(-\infty;0)$, $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2};+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in N\right\}$ аналітичні вирази визначають елементарні функції, що є неперервними. Тому дослідження на неперервність цієї функції проведемо в точках $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in N$. Маємо:

1) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} x^3=0$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} 2x=0$, $f(0)=0$, тому функція є неперервною в точці $x=0$;

2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} 2x=\pi$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x=\infty$, отже, точка $x=\dfrac{\pi}{2}$ є точкою розриву другого роду;

3) оскільки $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+n\pi} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+n\pi} \operatorname{tg} x=\infty$, то всі точки $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in N$, є також точками розриву другого роду.

Приклад **Показати, що функція Діріхле**

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in Q,\\ 0, x\in I,\end{cases}$$

розривна в кожній точці.

Нехай x_0 – довільна точка з $(-\infty;+\infty)$. У довільному як завгодно малому її околі завжди знайдуться як раціональні, так і ірраціональні числа. Це означає, що значення функції Діріхле поблизу будь-якої точки постійно «стрибає», набуваючи значень 0 або 1: у раціональних точках вона дорівнює 1, а в ірраціональних – 0. Якщо розглянути дві послідовності, які збігаються до цієї точки, одна з яких складається лише з раціональних чисел, а інша – лише з ірраціональних, то відповідні значення функції Діріхле збігатимуться до 1 або 0. За теоремою про єдиність границі функція Діріхле не має границі в цій точці ні зліва, ні справа, тобто, у кожній точці дійсної прямої вона має розрив другого роду.

Теорема (про неперервність складної функції). ***Нехай на проміжку*** X ***задана функція*** $z=\varphi(x)$, ***всі значення якої містяться в проміжку*** Z, ***а на*** Z ***задана функція*** $y=f(z)$. ***Тоді, якщо*** $\varphi(x)$ ***неперервна в точці*** x_0, ***а*** $f(z)$ ***неперервна в точці*** z_0, ***причому*** $z_0=\varphi(x_0)$, ***то і складна функція*** $y=f(\varphi(x))$ ***неперервна в точці*** x_0.

Приклад

Приклад. Довести неперервність функції $y=\sin x^2$.

Функцію $y=\sin x^2$ є складною функцією, де $y=\sin z$, а $z=x^2$. Оскільки функція $z=x^2$ визначена і неперервна для довільного значення $x\in R$, а функція $y=\sin z$ визначена і неперервна при довільному значенні $z\in R$, то за теоремою про неперервність складної функції можна стверджувати, що функція $y=\sin x^2$ визначена і неперервна в кожній точці $x\in R$.

Приклад **Дослідити на неперервність функцію** $y = tg^2 \dfrac{1}{x-1}$.

Задана функцію є складною, де $y = z^2$, $z = tgu$, $u = \dfrac{1}{x-1}$. Оскільки функція $u = \dfrac{1}{x-1}$ визначена і неперервна при всіх дійсних значеннях x, крім $x = 1$, а функція $z = tgu$ визначена і неперервна при всіх значеннях u, крім $u = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ ($k \in Z$), то складна функція $z = tg\dfrac{1}{x-1}$ є визначеною і неперервною для всіх значень $x \neq 1$, при яких $\dfrac{1}{x-1} \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ або $x \neq 1 + \dfrac{2}{(2k+1)\pi}$. Отже, функція $z = tg\dfrac{1}{x-1}$ визначена і неперервна для всіх x, крім $x = 1$ та $x = 1 + \dfrac{2}{(2k+1)\pi}$. Оскільки функція $y = z^2$ визначена і неперервна для всіх z, то функція $y = tg^2\dfrac{1}{x-1}$ неперервна для всіх x, крім $x = 1$ та $x = 1 + \dfrac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in Z$.

Теорема (про неперервність оберненої функції). ***Нехай на деякому проміжку*** X ***визначена функція*** $y = f(x)$ ***з сукупністю значень*** Y, ***що є неперервною та строго монотонною на*** X. ***Тоді на*** Y ***існує обернена функція*** $x = \varphi(y)$, ***яка також є неперервною і строго монотонною того ж характеру монотонності.***

Приклад **Показати, що функція** $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ **визначена на** $R \setminus \{-1\}$ **має обернену.**

Дійсно, функція $y = \dfrac{2x+3}{x+1} = \dfrac{(2x+2)+1}{x+1} = 2 + \dfrac{1}{x+1}$ є монотонно спадною на області визначення: для $x \in (-\infty; -1)$ маємо $y \in (-\infty; 2)$ та для $x \in (-1; +\infty)$ відповідно $y \in (2; +\infty)$. За теоремою про неперервність оберненої функції $y = \dfrac{3-x}{x-2}$ є неперервною та монотонно спадною на множині $R \setminus \{2\}$.

8 Основні теореми про неперервні функції

Теорема (перша теорема Больцано-Коші). ***Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$, причому на кінцях відрізка вона має значення різних знаків. Тоді на $[a;b]$ знайдеться хоча б одна точка c ($a<c<b$) така, що $f(c)=0$.***

Іншими словами, неперервна функція при переході від значень одного знаку до значень іншого знаку проходить і через нульове значення. (рис. 31).

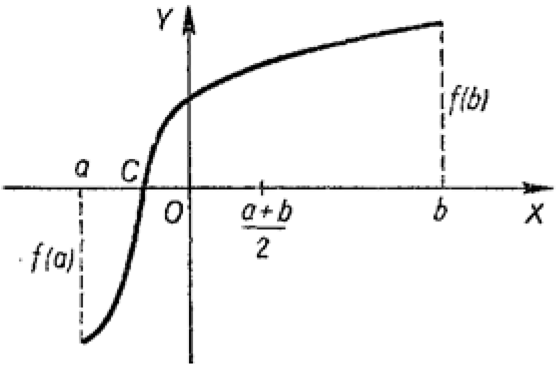


Рис. 31

Нехай для визначеності $f(a)<0$ і $f(b)>0$. Точкою $\dfrac{a+b}{2}$ поділимо відрізок $[a;b]$ навпіл. Якщо виявиться, що $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, то точка $\dfrac{a+b}{2}$ буде шуканою, якщо $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\neq 0$, то на кінцях одного з отриманих відрізків $\left[a;\dfrac{a+b}{2}\right]$ або $\left[\dfrac{a+b}{2};b\right]$ функція буде мати значення різних знаків. Позначимо цю частину через $[a_1;b_1]$. Бачимо, що $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$. Дійсно, якщо $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>0$, то значення $f(x)$ мають різні знаки на відрізку $\left[a;\dfrac{a+b}{2}\right]$. В цьому випадку $a_1=a,\ b_1=\dfrac{a+b}{2}$ і $f(a_1)<0,\ f(b_1)>0$. Аналогічно міркуємо, коли $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$. Таким чином, отримали відрізок $[a_1;b_1]$, на кінцях якого функція має значення різних знаків.

Далі поділимо відрізок $[a_1;b_1]$ навпіл точкою $\frac{a_1+b_1}{2}$. Якщо $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$, то $\frac{a_1+b_1}{2}$ є шуканою точкою. Нехай $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$. Тоді ту з частин, $\left[a_1;\frac{a_1+b_1}{2}\right]$ або $\left[\frac{a_1+b_1}{2};b_1\right]$, на кінцях якої функція має значення різних знаків, позначимо через $[a_2;b_2]$. При цьому знову будемо мати $f(a_2)<0,\ f(b_2)>0$. Знову поділимо відрізок $[a_2;b_2]$ навпіл і повторимо ці ж самі міркування. Можливо, що на якомусь кроці виявиться, що в точці поділу функція дорівнює нулю. Тоді ця точка буде шуканою точкою c. Але може виявитись, що $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\neq 0$ для всіх n, якби довго ми не проводили поділ відрізку $[a;b]$. В цьому випадку отримаємо нескінченну послідовність вкладених відрізків

$$[a_1,b_1]\supset[a_2;b_2]\supset....\supset[a_n,b_n]\supset...,$$

де $f(a_n)<0,\ f(b_n)>0$, а $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$ при всіх $n\in N$.

Тоді за теоремою про вкладені відрізки існує єдина точка c, що належить всім відрізкам цієї послідовності і $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$. В точці c за умовою теореми функція $f(x)$ неперервна, тому маємо $f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\leq 0$, $f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\geq 0$. Звідси $f(c)=0$.

Геометричний зміст: *неперервна крива при переході з однієї півплощини по відношенню до осі Ox на іншу перетинає вісь Ox.*

Теорема (друга теорема Больцано-Коші). ***Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$ та приймає на кінцях відрізка різні значення $f(a)=A,\ f(b)=B$. Тоді, яке б число C між числами A і B ми не взяли, на відрізку $[a;b]$ знайдеться така точка c $(a<c<b)$, що $f(c)=C$.***

Інакше кажучи, неперервна функція при переході від одного значення до іншого проходить і всі проміжні числа.

Нехай $A < B$ (рис. 32). Візьмемо деяке проміжне число C $(A < C < B)$ і розглянемо допоміжну функцію $\varphi(x) = f(x) - C$.

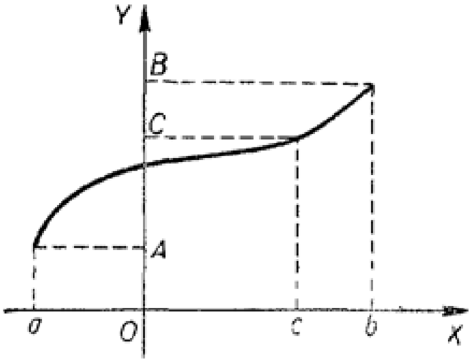


Рис. 32

Ця функція є неперервною на $[a;b]$ як різниця двох неперервних функцій. Крім того, її значення на кінцях відрізка мають різні знаки:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$

$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

За першою теоремою Больцано-Коші існує така точка c $(a < c < b)$, що $\varphi(c) = 0$. Звідси $f(c) = C$.

Наслідок. ***Якщо функція $f(x)$, задана на проміжку X, неперервна на цьому проміжку, то сукупність Y її значень також являє собою деякий проміжок.***

Доведені теореми Больцано-Коші мають велике значення при розв'язуванні практичних задач.

Приклад **Довести, що рівняння $x^5 - 8x + 4 = 0$ має корінь на відрізку $[-2;2]$.**

За першою теореми Больцано-Коші для функції $f(x) = x^5 - 8x + 4$ маємо, що $f(-2) = -12 < 0$, $f(2) = 20 > 0$. Тому існує принаймні одна точка c, що $f(c) = 0$. А це означає, що дане рівняння на вказаному відрізку має хоча б один корінь.

Приклад **Знайти наближене значення якого-небудь кореня рівняння $x^5 + x^2 - 5x + 2 = 0$.**

Функція $f(x) = x^5 + x^2 - 5x + 2$ неперервна на всій осі. Оскільки $f(1) = -1 < 0$, а $f(2) = 28 > 0$, то рівняння має між числами 1 і 2 хоча б один корінь. Розділимо відрізок $[1;2]$ на десять рівних частин. Обчислимо значення функції в точках розбиття: $f(1{,}1) = -0{,}68$, $f(1{,}2) = -0{,}08$, $f(1{,}3) = 0{,}87$. Бачимо, що в точках 1,2 і 1,3 функція має значення різних знаків, тому між цими точками є хоча б один нуль функції, а отже, корінь даного рівняння. Для уточнення значення кореня відрізок $[1{,}2;\ 1{,}3]$ ділимо на десять рівних частин. Одержимо, що $f(1{,}21) = -0{,}01$, $f(1{,}22) = 0{,}08$, а отже, хоча б один корінь рівняння знаходиться між числами 1,21 і 1,22. Таким чином, ми знайшли значення кореня з точністю до 0,01.

Теорема (перша теорема Вейєрштрасса). ***Якщо функція*** $f(x)$ ***неперервна на відрізку*** $[a;b]$***, то вона обмежена на цьому відрізку, тобто існують такі числа*** m ***і*** M***, що для всіх*** $x\in[a;b]$ ***виконується нерівність*** $m\le f(x)\le M$ ***.***

Доведемо обмеженість функції $f(x)$ зверху. Припустимо, що $f(x)$ неперервна, але не обмежена зверху на $[a;b]$. Це означає, що яке б дійсне число M ми не взяли знайдеться хоча б одна точка $x\in[a;b]$ така, що $f(x)>M$. Будемо надавати M послідовно значення 1, 2, 3, …, n,…:

для $M=1$ знайдеться така точка $x_1\in[a;b]$, що $f(x_1)>1$;

для $M=2$ знайдеться така точка $x_2\in[a;b]$, що $f(x_2)>2$;

для $M=3$ знайдеться така точка $x_3\in[a;b]$, що $f(x_3)>3$;

……………………………………………………………

для $M=n$ знайдеться така точка $x_n\in[a;b]$, що $f(x_n)>1$, ….

Отримаємо обмежену числову послідовність $x_1, x_2,\dots, x_n,\dots$, з якої можна виділити збіжну підпослідовність $x_{n_k}\to x_0$. Точка x_0 буде належати відрізку $[a;b]$, а значить в ній $f(x)$ неперервна і $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0)$. З іншого боку, точки x_n обирались так, що $f(x_{n_k})>n_k$, отже, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\infty$. Отримане протиріччя доводить, що припущення було невірним, і функція $f(x)$ є обмеженою зверху на $[a;b]$.

Випадок обмеженості знизу функції $f(x)$ доводиться аналогічно.

Зауваження. Теорема стає невірною, якщо в ній відрізок $[a;b]$ замінити інтервалом $(a;b)$. Так, наприклад, функція $f(x)=\dfrac{1}{x}$ неперервна на інтервалі $(0;1)$, але необмежена на ньому.

Якщо розглядати множину значень функції, то її точна верхня (нижня) грань, за умови існування, збігається з найбільшим (найменшим) значенням функції. У випадку, коли такі грані належать множині значень функції, говорять, що функція ***досягає*** свого максимуму або мінімуму. Водночас, не кожна множина містить свої точні грані. Якщо множина значень функції, визначеної на множині X, не включає свої точні грані, то така функція не має найбільшого або найменшого значення на X.

Наприклад, функція $f(x)=x^3$, $x\in(-2;3)$, має своїми точними гранями числа -8 і 27, але вони не досягаються функцією в жодній точці $x\in(-2;3)$.

Теорема (друга теорема Вейєрштрасса). ***Якщо функція*** $f(x)$ ***неперервна на відрізку*** $[a;b]$***, то серед всіх її значень є найбільше і найменше.***

Іншими словами, функція $f(x)$, неперервна на відрізку, досягає на цьому відрізку своїх точних граней. При цьому точна верхня грань є найбільшим значенням функції, а точна нижня грань – найменшим.

Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a;b]$. За першою теоремою Вейєрштрасса вона є обмеженою на цьому відрізку, тому існують точна верхня і точна нижня грані M та m відповідно. Покажемо, що $f(x)$ досягає значення M на $[a;b]$, тобто існує така точка x_1, що $f(x_1)=M$. Припустимо супротивне, що такої точки на $[a;b]$ немає. Тоді $f(x)<M$ для всіх $x\in[a;b]$. Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$. Вона неперервна на $[a;b]$ (як частка двох неперервних функцій і $M-f(x)\neq 0$) і за першою теоремою Вейєрштрасса є обмеженою на ньому. Нехай її верхнею гранню буде деяке число $\mu>0$, тобто $\dfrac{1}{M-f(x)}<\mu$. Тоді $f(x)<M-\dfrac{1}{\mu}$. Отримали, що число $M-\dfrac{1}{\mu}$, яке очевидно менше, ніж M, є верхньою гранню для $f(x)$. Але це суперечить тому, що M є точною верхньою гранню функції $f(x)$. Цим самим доведено, що точка x_1, в якій $f(x_1)=M$, існує.

Аналогічно доводиться, що $f(x)$ досягає і свого найменшого значення m на відрізку $[a;b]$.

Наслідок. ***Якщо функція*** $f(x)$ ***неперервна на*** $[a;b]$***, то сукупністю її значень буде відрізок*** $[m;M]$***, де*** m ***і*** M ***- точні грані функції.***

9 Рівномірна неперервність

Нехай на деякому проміжку визначена неперервна функція $y = f(x)$, що означає існування для довільного $\varepsilon > 0$ та деякої точки x_0 такого $\delta > 0$, що з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Покажемо, що величина δ залежить не тільки від вибору ε, а й від точки x_0, в якій встановлюється неперервність. Розглянемо функцію $y = \dfrac{1}{x}$ на проміжку $(0;1)$. Залежність δ від ε в одній і тій самій точці x_0 показана на рис. 33, а залежність δ від x (при одному і тому ж ε) – на рис. 34.

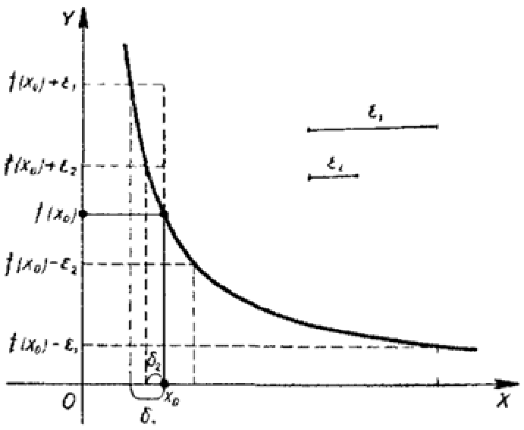


Рис. 33

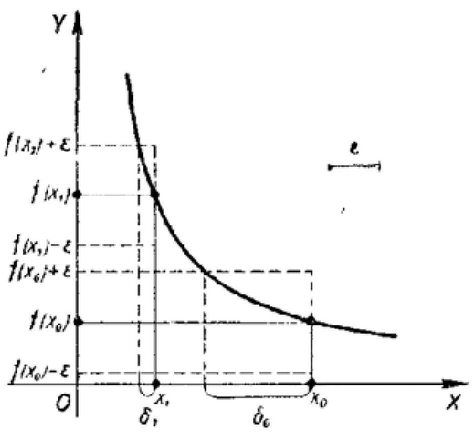


Рис. 34

Означення. Функція $f(x)$, задана на деякому проміжку, називається ***рівномірно неперервною*** на цьому проміжку, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що нерівність $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ виконується для довільної пари точок x' і x'' з даного проміжку, що задовольняє нерівність $|x' - x''| < \delta$.

Рівномірна неперервність функції на проміжку означає, що δ залежить тільки від вибору ε і не залежить від точки x_0. Іншими словами, одна і та сама степінь близькості значень аргументу x' і x'' забезпечує задану вибором ε близькість відповідних значень функції $f(x')$ і $f(x'')$.

Наприклад, функція $y = \sin x$ є рівномірно неперервною на множині R, оскільки нерівність

$$\left|\sin x' - \sin x''\right| = \left|2\sin\frac{x'-x''}{2}\cos\frac{x'+x''}{2}\right| \le \left|x'-x''\right| < \varepsilon$$

виконується при для довільних x' і $x'' \in R$, що задовольняють умову $\left|x'-x''\right| < \varepsilon = \delta$.

Приклад **Дослідити на рівномірну неперервність функцію $y = \sqrt[3]{x}$ на множині $[1;+\infty)$.**

Нехай $\varepsilon > 0$ – деяке задане фіксоване число. Маємо, що

$$\left|f(x') - f(x'')\right| = \left|\sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x''}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x''}\right)\left(\sqrt[3]{(x')^2} + \sqrt[3]{x'x''} + \sqrt[3]{(x'')^2}\right)}{\sqrt[3]{(x')^2} + \sqrt[3]{x'x''} + \sqrt[3]{(x'')^2}}\right| =$$

$$= \frac{\left|x'-x''\right|}{\sqrt[3]{(x')^2} + \sqrt[3]{x'x''} + \sqrt[3]{(x'')^2}} < \frac{\left|x'-x''\right|}{3} < \varepsilon.$$

Отже, $\left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon$ виконується, коли $\left|x'-x''\right| < 3\varepsilon$, тобто $\delta = 3\varepsilon$. Це доводить рівномірну неперервність функцію $y = \sqrt[3]{x}$ на множині $[1;+\infty)$.

Теорема (Кантора). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона і рівномірно неперервна на цьому відрізку.*

Список використаних джерел

1. Бохан К. А., Егорова И. А., Лащенов К. В. Курс математического анализа. У II-х т.: Учеб. пос. для студ. заочн. физ.-мат. фак. пединститутов // Под ред. Вулиха Б. З. М., Просвещение, 1972.
2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. К.: Вища школа, 1992. Ч.1. 359 с.
3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: В 3 т. М.: Высш. шк., 1988. Т.1. 712 с.
4. Мартиненко О.В., Чкана Я.О. Курс лекцій з математичного аналізу для студентів 1-го курсу фізико-математичного факультету.
5. Натансон І. П. Основи теорії функцій дійсної змінної. К.: Радянська школа, 1950. 424 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Госуд. изд-во техн.-теор. л-ры, 1951. 696 с.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2 т. М.: Наука, 1969.
8. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: В 2 т. М.: ГИТТЛ, 1957.
9. Шкіль М. І. Математичний аналіз: У 2 ч. К.: Вища шк., 2005. Ч.1. 448 с.
10. Шкіль М. І., Колесник Т. В. Вища математика: В 3 т. К.: Либідь, 1994.
11. Лісевич Л.М., Бабенко В.В., Бокало М.М., Тріщ Б.М. Математичний аналіз у задачах і вправах: частина І (Вступ в аналіз. Диференціальне числення функції однієї змінної), Київ, 1993.
12. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. Введение в теорию интеграла. [Для ун-тов]. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1973. 350 с.
13. Марон И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (функций одной переменной). М.: Наука, 1970. 400 с.
14. Математический анализ в примерах и задачах: В 2 ч. / И. И.Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г.Гай, Г. П.Головач. К.: Вища шк. Головное изд-во, 1975. Ч.1. 680 с.

15. Шунда Н. М., Томусяк А. А. Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення. К.: Вища шк., 1993. 376 с.

16. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1969. 440 с.

17. Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Ляшенко М. Я. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2-х частинах. Ч. 1. К.: Вища школа. 2002. 462 с.

18. Киричевський В. В., Клименко М. І., Стреляєв Ю. М. Границя послідовності. Границя функції. Неперервність: навч.-метод. посібник для студентів 1 курсу математичного факультету. Запоріжжя, ЗНУ. 2005. 50 с.

19. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне силення функції однієї змінної. Харків, ХТУРЕ. 2022. 552 с.

20. Ясницька Н. М., Ахієзер О. Б., Боєва А. А., Геляровська О. А. Математичний аналіз : навч. посіб. : у 9-ти мод. Мод. 1 : Вступ до математичного аналізу. Елементи теорії множин, послідовності. Харків : вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2014. 140 с.

21. Ляшко І. І. та ін. Математичний аналіз. / І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук. К., 1992-1993. Ч. 1, 2.

22. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. К., 1993. Ч. 1, 2.

23. Заболоцький М. В. та ін. Математичний аналіз : підр. / М. В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. К. : Знання, 2008. 421 с.

24. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. К.: А.С.К., 2001. 648 с.

25. Вступ до математичного аналізу в курсі вищої математики: навчальний посібник для студентів інженерних спеціальностей усіх форм навчання галузі знань 12 «Інформаційні технології» освітнього рівня «бакалавр» / Укладачі: Кривень В.І., Цимбалюк Л.І., Валяшек В.Б.. Тернопіль : 2022. 48 с.

Навчальне видання

Мартиненко Олена Вікторівна

Чкана Ярослав Олегович

Вступ до математичного аналізу

Навчально-методичний посібник

(Українською мовою)

Суми: СумДПУ, 2025

Свідоцтво ДК №231 від 02.11.2000 р.

Комп'ютерний набір та верстка Чкана Я.О.

Редактор Мартиненко О.В.

Здано в набір 01.05.2026 Підписано до друку 1.06.25

Формат 60×84/16. Гарн. Times New Roman. Папір друк. Друк ризогр. Умовн. друк. арк. 4.

Обл.-вид. арк.. Тираж 100.

СумДПУ імені А.С.Макаренка

40002 Суми, вул. Роменська, 87

Виготовлено на обладнанні СумДПУ ім. А.С.Макаренка