

МАТЕМАТИКА

В РІДНІЙ ШКОЛІ

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 5 (219) 2020, ВЕРЕСЕНЬ-ЖОВТЕНЬ

Виходить раз на два місяці

Передплатний індекс 68834

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНЕ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИРОБНИЧЕ ПІДПРИЄМСТВО
ВИДАВНИЦТВО «ПЕДАГОГІЧНА ПРЕСА»

Заснований у 1997 р.

До 2012 р. журнал виходив у світ під назвою
«Математика в школі»; до 2014 р. журнал виходив
під назвою «Математика в сучасній школі».

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу
масової інформації, серія КВ №20025-8925 пр від 25.06.2013 р.

РЕДАКЦІЙНА РАДА:

Головний редактор

Валентина Григорівна БЕВЗ, доктор педагогічних наук, професор (Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова), Київ

Ірина Анатоліївна АКУЛЕНКО, доктор педагогічних наук, професор (Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького), Черкаси

Григорій Петрович БЕВЗ, кандидат педагогічних наук, доцент, Київ

Михайло Іванович БУРДА, доктор педагогічних наук, дійсний член НАПН України, професор (Інститут педагогіки НАПН України), Київ

Ніна Опанасівна ВІРЧЕНКО, доктор фізико-математичних наук, професор (Національний технічний університет України «КПІ»), Київ

Мирослав Іванович ЖАЛДАК, доктор педагогічних наук, дійсний член НАПН України, професор (Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова), Київ

Юрій Іванович МАЛЬОВАНИЙ, кандидат педагогічних наук, член-кореспондент НАПН України, старший науковий співробітник (Президія НАПН України), Київ

Ольга Іванівна МАТЯШ, доктор педагогічних наук, професор (Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського)

Микола Олексійович ПЕРЕСТЮК, доктор фізико-математичних наук, академік НАН України, професор (Національний університет ім. Тараса Шевченка), Київ

Микола Вікторович ПРАЦЬОВИТИЙ, доктор фізико-математичних наук, професор (Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова), Київ

Світлана Олексіївна СКВОРЦОВА, доктор педагогічних наук, член-кореспондент НАПН України, професор (Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К. Ушинського), Одеса

Ніна Анатоліївна ТАРАСЕНКОВА, доктор педагогічних наук, професор (Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького), Черкаси

Тамара Миколаївна ХМАРА, кандидат педагогічних наук, старший науковий співробітник (Інститут педагогіки НАПН України), Київ

Василь Олександрович ШВЕЦЬ, кандидат педагогічних наук, професор (Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова), Київ

Олександр Володимирович ШКОЛЬНИЙ, доктор педагогічних наук, доцент (Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова), м. Київ

ЗМІСТ

МЕТОДИКА, ДОСВІД, ПОШУК

- Олена СЕМЕНІХІНА, Володимир ПРОШКІН, Марина ДРУШЛЯК*
Використання прийомів мнемотехніки в процесі навчання математики 2
- Тамара КОЛЕСНИК, Оксана ТАРАСЕНКО*
Алгоритмічна та евристична компоненти в задачах шкільного курсу математики 8
- Любов ЧЕРКАСЬКА, Оксана МОСКАЛЕНКО, Олена КОВАЛЕНКО*
Дидактичні моделі уроків математики основних типів у контексті реалізації корекції результатів навчання учнів (урок засвоєння нових знань) 14

КЕРІВНИКАМ МАТЕМАТИЧНИХ ГУРТКІВ

- Микола ПИХТАР, Олександр ДЯЧЕНКО*
Специфіка підготовки та проведення гурткових занять із математики для учнів 5 — 7 класів 19

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ

- Катерина ДУДКО, Марк ЄМЕЦЬ, Заріна КОДИРОВА, Оксана МЕКУШ, Богдан РУБЛЬОВ*
Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України (ВОМ), III Всеукраїнська олімпіада з математики для учнів 5–7 класів 27
- Олег ЗЕЛЕНЯК*
Властивості кутів в олімпіадних задачах ... 35

СУЧАСНІ ТЕХНОЛОГІЇ

- Юлія ГВОЗДЕЦЬКА*
Математичний квест 41

ЗАРУБІЖНИЙ ДОСВІД

- Світлана ЛУК'ЯНОВА, Людмила МИХАЙЛЮК*
Освіта в Швеції та особливості вивчення математики в середній школі (закінчення) 43

За достовірність фактів, дат, назв тощо відповідають автори. Редакція не завжди поділяє їхні погляди. Листування ведеться на сторінках журналу. Рукописи не повертаються. У разі використання матеріалів, посилання на журнал є обов'язковим.

© Видавництво «Педагогічна преса», 2020
© «Математика в рідній школі», 2020

Усі права захищено. Жодна частина, елемент, ідея, композиційний підхід цього видання не можуть бути копіюваними чи відтвореними у будь-якій формі та будь-якими засобами — як електронними, так і фотомеханічними, зокрема через ксерокопіювання, запис чи комп'ютерне архівування — без письмового дозволу видавця.

ВИКОРИСТАННЯ ПРИЙОМІВ МНЕМОТЕХНІКИ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Олена СЕМЕНІХІНА, завідувачка кафедри інформатики Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка, доктор педагогічних наук;

Володимир ПРОШКІН, професор кафедри комп'ютерних наук і математики Київського університету імені Бориса Грінченка, доктор педагогічних наук;

Марина ДРУШЛЯК, доцент кафедри математики Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка, кандидат фізико-математичних наук

Сучасна молодь розвивається у середовищі, насиченому потужними й інтенсивними інформаційними потоками. Обсяг інформації, що накопичений людством, у разі перевищує обсяг знань, які можуть бути засвоєні конкретною людиною. Постійне збільшення інформації у поєднанні з високою конкуренцією та вимогами суспільства приводить до інтенсифікації освітнього процесу. З іншого боку – інтенсифікація освітнього процесу веде до цілої низки порушень психічного та соматичного здоров'я учнів. У таких умовах з'являється проблема когнітивного навантаження суб'єктів навчання, яка полягає в тому, що людина може досягнути оптимального рівня засвоєння матеріалу лише за умов адекватного навантаження на її оперативну пам'ять.

У процесі навчання математики саме на пам'ять припадає особливе навантаження. Від рівня розвитку мнемічних процесів, що забезпечують запам'ятовування, збереження і відтворення в головному мозку інформації, отриманої при взаємодії людини з навколишнім світом, залежить успішність навчання. Тому впровадження ефективних підходів до запам'ятовування різноманітної математичної інформації дає змогу частково розв'язати проблему когнітивного навантаження. Як один із таких підходів ми розглядаємо використання мнемотехніки – способу покращення нової інформації шляхом утворення асоціативних зв'язків за допомогою спеціальних методів і прийомів.

Невтішні результати ЗНО з математики за останні роки, результати міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018 [1], що визначають рівень математичної грамотності українських учнів як такий, що нижче, ніж середній, виразно демонструють рівень математичної підготовки учнів шкіл. Для сьогоднішніх мобільних і комп'ютеризованих школярів твердження про те, що математика – цариця всіх наук, яка роз-

виває їхнє мислення, вже не є авторитетом. Учителям шкіл потрібний оновлений методичний інструментарій, що допоможе зацікавити учнів математикою.

Підґрунтям щодо реалізації нашої роботи стали результати наукових досліджень із теоретичних і практичних аспектів використання мнемотехніки в освітньому процесі (М. Зиганов, В. Козаренко [2], Г. Чепурний, Ю. Палійчук [3], В. Шаталов [4], О. Панішева [5] та ін.).

У названих роботах доведено, що мнемотехнічні прийоми застосовують для поліпшення засвоєння складної інформації, що не має встановлених логічних зв'язків між її елементами з погляду людини, яка її запам'ятовує. Така інформація потребує тривалого зберігання та подальшого відтворення, наприклад: послідовність цифр, телефонні номери, історичні дати, формули. Установлено, що застосування мнемотехніки поліпшує показники обсягу та точності запам'ятовування і розвитку пізнавальних процесів, підвищує тривалість зберігання та якість відтворення засвоєної інформації. Водночас проведений нами аналіз наукових джерел надав можливість стверджувати, що питання навчання математики з використанням мнемотехнічних прийомів і методів висвітлено недостатньо.

Мета статті – розкрити напрямки використання прийомів мнемотехніки в професійній діяльності учителів математики.

Процес запам'ятовування навчального матеріалу проходить інтенсивніше за умови залучення суб'єктів навчання до активної мисленевої діяльності, використання ними операцій порівняння, аналізу, синтезу, класифікації, узагальнення. Ефективним під час вивчення математики є своєчасне використання пам'яток, таблиць, інструкцій, зорових опор, які допомагають учням поступово, без перевантаження сприймати і запам'ятовувати значущі об'єкти.

Суттєвою характеристикою процесу запам'ятовування є міра осмислення матеріалу, що запам'ятовується. Тому прийнято виокремлювати осмислене і механічне запам'ятовування.

Механічне запам'ятовування – це запам'ятовування без усвідомлення логічного зв'язку між різними частинами матеріалу (запам'ятовування історичних дат, статистичних даних тощо). Підґрунтям механічного запам'ятовування є асоціації за суміжністю. Одна частина матеріалу пов'язується з іншою тільки тому, що слідує за нею в часі. Для встановлення подібного зв'язку необхідне багаторазове повторення матеріалу.

Осмислене запам'ятовування ґрунтується на розумінні внутрішніх логічних зв'язків між окремими частинами матеріалу. Два положення, одне з яких впливає з другого, запам'ятовуються не тому що слідує у часі одне за одним, а тому, що пов'язані логічно. Тому осмислене запам'ятовування пов'язане з процесами мислення і спирається головним чином на узагальнені зв'язки між частинами матеріалу на рівні другої сигнальної системи.

У процесі навчання математики варто звертати увагу на осмислене запам'ятовування досліджуваного матеріалу. Для цього потрібно його смислово угруповання – розбиття, членування на частини з виділенням головного й істотного в кожній частині. Крім цього, необхідно знаходження і виділення в кожній із частин смислових опорних пунктів, тобто думок, виразів та образів, які визначають суть даної частини й усне або письмове формулювання цієї суті у вигляді коротких заголовків кожної з частин. Нарешті, необхідне встановлення зв'язків між виділеними частинами і розуміння логічної послідовності їх розташування, складання загального плану розташування навчального матеріалу.

З метою осмисленого запам'ятовування навчального матеріалу виокремлюють методи та прийоми мнемотехніки. Орієнтиром для нас стала робота Г. Чепурного та Л. Бура з освітньої мнемотехніки як технології ефективного засвоєння інформації [6].

Метод «Зв'язування» – це метод об'єднання інформаційних одиниць за допомогою створення між ними асоціативних зв'язків.

Метод складається з таких прийомів: «сюжет» (використовують розповіді, історії тощо), «римування» (використовують римовані (співзвучні) вірші, пісні, лічилки тощо), «послідовні асоціації» (створюються послідовні асоціативні зв'язки), «склеювання» (об'єднання інформаційних одиниць в єдиний цілісний образ зі збереженням основних ознак і функцій),

«синтез» (інформаційні одиниці об'єднують в єдиний інтегральний образ із загальним асоціативним зв'язком), «ключові букви» (створюється асоціативний зв'язок між першими буквами слів, що потрібно запам'ятати, і першими буквами слів спеціально створеного речення), «логічні питання» (створюється додатковий логічний асоціативний зв'язок між образами, що запам'ятовуються, через відповіді на основні питання – Що? Як? Чому? тощо про зв'язок між ними).

Прийом «Послідовні асоціації». При вивченні правил зведення для запам'ятовування порядку зміни назви функції можна запропонувати таку асоціацію: по вертикальній осі розташовані кути $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, отже, хитаємо головою стверджувально, тобто змінюємо функцію, по горизонтальній осі розташовані кути π , 2π , отже, хитаємо головою заперечно, тобто функцію не змінюємо.

Прийом «Ключові букви». При вивченні теми «Розкриття дужок. Подібні доданки та їх зведення» варто звернути увагу учнів на знак, який стоїть перед дужками. Якщо стоїть «мінус», то всі знаки змінюємо на протилежні, якщо «плюс», то вираз залишаємо без змін, наприклад:

$-(a + b)$ – **Мінус** – **Мін**яємо знаки;

$+(a + b)$ – **Плюс** – **Перепи**суємо без змін.

Метод «Перетворення» – це метод первинної обробки інформації, який перетворює складну для сприйняття інформацію в зручну для ефективного відтворення.

Метод складається з наступних прийомів: «аналогія» (між інформаційними одиницями, що запам'ятовуються, знаходять спільні ознаки, властивості, якості, тенденції розвитку тощо), «трансформація» (об'єкти, що запам'ятовуються, перетворюються в інші за значенням і образом з метою полегшення запам'ятовування), «пиктограми» (абстрактну або подібну інформацію, що потрібно запам'ятати, схематично зображують спрощеними малюнками, пиктограмами), «стенографіст» (текстова інформація, що запам'ятовується, записується з допомогою окремих ключових букв, спеціальних символів і цілого ряду скорочень), «фонетична асоціація» (для запам'ятовування незнайомого слова підбирається співзвучне слово або його частина, яка асоціативно пов'язується зі значенням вихідного слова), «неологізм» (для поліпшення запам'ятовування інформації (слів, букв, символів) створюються нові слова, терміни, поняття, словосполучення), «цифробраз» (цифрову інформацію при запам'ятовуванні асоціативно пов'язується з певними

образами або системами образів), «цифробуквений код» (перекодування цифр у літери для складання спеціально підібраних слів з метою їх подальшого запам'ятовування), «індивідуальна асоціація» (для інформації, що запам'ятовується, знаходять асоціативні зв'язки з індивідуально відомими даними, подіями, відомостями), «закономірність» (для запам'ятовування інформації знаходять певні логічні, математичні або інші закономірні взаємозв'язки і правила). Приклад прийому «Неологізм» подано на рис. 1.

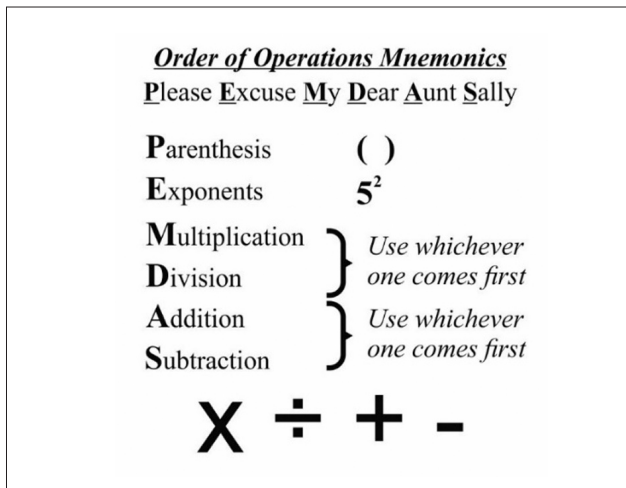


Рис. 1. Прийом «Неологізм»

Прийом «Аналогія». При розв'язуванні текстових задач на роботу учні мають більше ускладнень, ніж при розв'язуванні задач на рух. Аналіз ускладнень показав, що учні не розуміють зміст поняття «продуктивність». Проведемо аналогію між величинами в задачах на рух і задачах на роботу.

У результаті проведення аналогії між величинами учням стає зрозумілим термін «продуктивність» і його змістове навантаження (див. Таблицю 1).

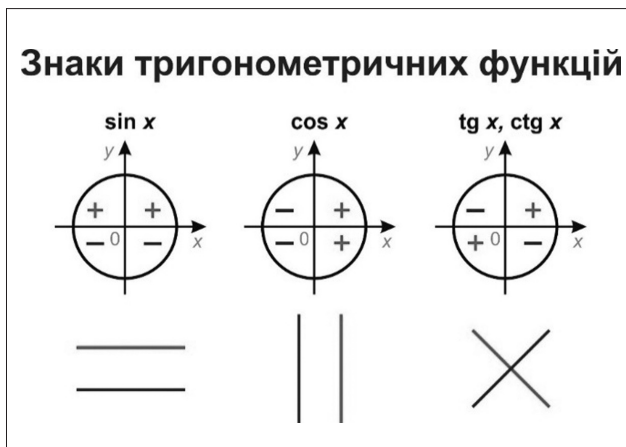


Рис. 2а. Прийом «Візуалізація»

Таблиця 1
Прийом «Аналогія»

Величини задач на рух	Величини задач на роботу
V – швидкість руху – відстань, що пройдена за одиницю часу	P – швидкість роботи – об'єм роботи за одиницю часу
T – час	T – час
S – відстань	V_p – обсяг роботи, яку потрібно виконати
Ключова формула: $S = V \cdot t$	Ключова формула: $V_p = P \cdot t$

Метод «Посилення» – це метод підвищення ефективності сприйняття, збереження і відтворення створених асоціативних зв'язків і образів, сформованих методами «перетворення» та «зв'язування».

Метод складається з таких прийомів: «модальність», «ознака», «уособлення», «гіпербола», «комік», «небилиця», «стерео», «кольоровий акцент», «візуалізація», «тлумачення», «емоційний акцент». Приклади використання деяких прийомів наведено на рис. 2а, 2б, 3а, 3б.

Для підтвердження доцільності опанування прийомів мнемотехніки майбутніми вчителями було проведено педагогічний експеримент. Протягом березня – травня 2019 р. ми здійснили опитування 32 учителів математики Києва, Сум, та Ірпеня щодо доцільності використання мнемотехнічних прийомів у професійній діяльності. Як респонденти виступили також 52 студенти спеціальностей «Математика» і «Середня освіта (математика)» Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка та Київського університету імені Бориса Грінченка. Результати опитування вчителів розподілилися таким чином: про доцільність використання прийомів мнемотехніки зазначили 87 % вчи-

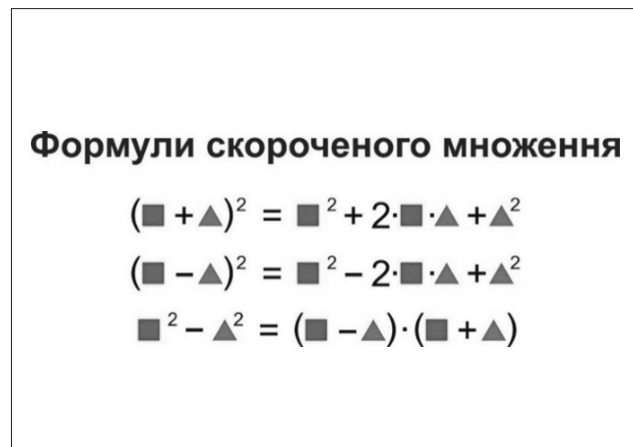


Рис. 2б. Прийом «Візуалізація»



Методи стиснення даних без втрат

Назва методу	Ідея методу		Характеристика стиснення
	Вихідні дані	Результат	
Бітове ущільнення	<p>Бітове представлення</p> <p>ab : $\begin{matrix} 01100001 \\ 01100010 \end{matrix}$</p> <p>незначущі біти відсікаються</p>	11000011100010	<p>Стиснення: в ASCII = $\frac{1}{8} = 12,5\%$ в UNICODE = $\frac{9}{16} = 56,3\%$</p> <p>Застосовується при стисненні текстів</p>
Метод повторів RLE (Run Length Encoding)	<p>a a ... a b b ... b</p> <p style="text-align: center;">$\underbrace{\hspace{2cm}}_{30} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{40}$</p>	a30b40	<p>Стиснення $\frac{70}{6} \sim 1200\%$</p> <p>Застосовується при стисненні зображень</p>
Метод KWE (Key Word Encoding)	<p>Четыре черненьких чумазеньких чертенка чертили черными чернилами чертеж</p>	<p>Четыре 1н2 чумаз2 1тенка 1тили 1ны3 1нила3 1теж</p> <p style="text-align: center;">+</p> <p>Бібліотека: 1-чер, 2-еньких, 3-ми</p>	<p>Відсоток стиснення залежить від довжини тексту і його мови, оскільки приєднана бібліотека додатково займає фіксований обсяг</p> <p>Застосовуються при стисненні текстів</p>

Рис. 3а. Прийом «Кольоровий акцент»



Рис. 3б. Прийом «Кольоровий акцент»

телів, причому їх відповіді щодо найбільш ефективних розподілилися по-різному (вибір один із трьох, рис.4).

Причому серед прийомів відзначені більшою мірою візуалізація, кольоровий акцент, комік, аналогія і сюжет (рис. 5). Решта 17 прийомів, які ми пропонували для оцінки, мають слабку популярність у вчителів математики.

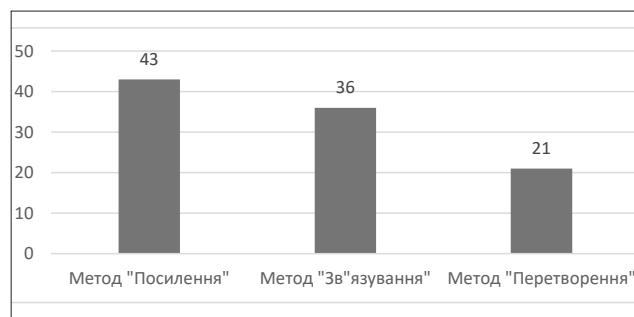


Рис. 4. Думка вчителів щодо найефективнішого мнемотехнічного методу (у %)

На жаль, кількість студентів, які вважають, що прийоми мнемотехніки використовувати доцільно, небагато, лише 38 %. Це яскраво свідчить про важливість покращення університетської підготовки в такому аспекті.

Виходячи з думки вчителів, що найефективнішим є метод «Посилення» та прийом «Візуалізація», які сприяють осмисленому запам'я-

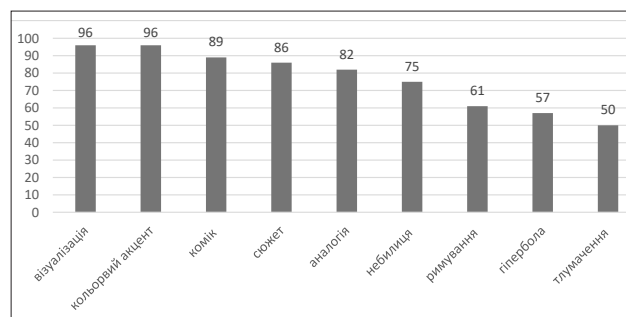


Рис. 5. Думка вчителів щодо ефективності прийомів мнемотехніки (у %)

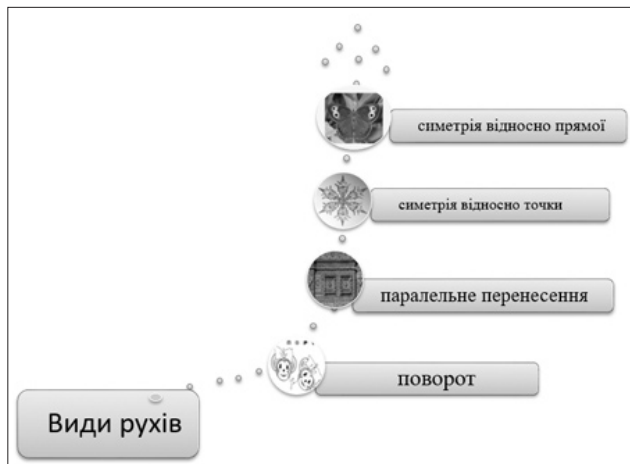


Рис. 6а. Мнемовізуальні моделі, створені за допомогою Smart-об'єктів

товуванню навчального матеріалу за рахунок його структурування та ущільнення, ми звернули увагу на програмні засоби, які використовуються для створення візуальних моделей. Умовно програмні засоби можна поділити на чотири групи:

- 1) офісні програмні продукти зі Smart-об'єктами;
- 2) програми майндмепінгу;
- 3) сервіси для створення скрайбінг-презентацій;
- 4) програми для створення інфографіки.

Окреслимо ці групи. Так, пакет офісних програм (MS Word, MS Excel, MS Power Point) пропонується з функцією побудови Smart-об'єктів, які уможливають ефективно створювати мнемовізуальні моделі у вигляді списку, зв'язку, матриці, процесу, циклу, ієрархії, піраміди (рис. 6а, 6б).

Майндмепінг (mindmapping) – це технологія, яка допомагає ефективно відновлювати інформацію (минуле), генерувати і фіксувати нові ідеї (майбутнє), робити висновки та встановлювати зв'язки між ними через побудову інтелект-карт. Mind maps є розробкою Тоні Бьюзена – британ-

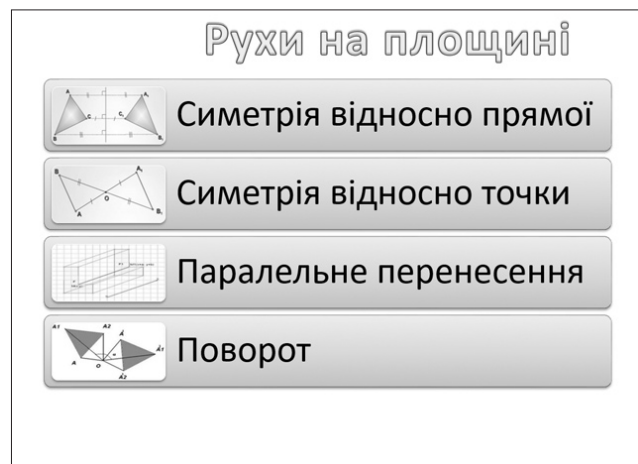


Рис. 6б. Мнемовізуальні моделі, створені за допомогою Smart-об'єктів

ського психолога, який розпочав розробку концепції інтелектуальних карт ще в 70-х роках ХХ ст.

Для побудови інтелект-карт використовують програми X-Mind, Free-Mind, Coggle, Mind-Meister та інші. Подібні програми допомагають фіксувати ідеї, організувати їх у різні діаграми, використовувати ці діаграми спільно з іншими користувачами. Згадані програми дають змогу побудувати інтелект-карти (рис. 7), діаграми Ісікави (fishbone-діаграми або причинно-наслідкові діаграми), деревовидні діаграми, логічні діаграми, таблиці.

Основні напрями застосування інтелект-карт у професійній діяльності вчителів математики охоплюють: створення планів занять будь-якого типу; планування навчально-виховних заходів; алгоритми розв'язку задач; вивчення нового навчального матеріалу; закріплення й перевірка вивченого матеріалу; систематизація та повторення вивченого матеріалу при підготовці до державної підсумкової атестації, зовнішнього незалежного оцінювання.

Для активізації пізнавальної та мнемічної діяльності суб'єктів учіння, з одного боку, та візуалізації



Рис. 7. Карта пам'яті з теми «Подібність трикутників»

освітнього процесу, з іншого боку, використовують скрайбінг. Скрайбінг – це мнемотехнологія візуалізації навчального матеріалу, яка забезпечує відображення ключових моментів його змісту (властивостей об'єкта навчання, його внутрішніх і зовнішніх зв'язків) шляхом використання простих графічних елементів (малюнків, піктограм, символів, слів, схем, діаграм), послідовно створюваних на екрані відповідно до усного викладу (або аудіоряду).

Серед сервісів для створення скрайбінг-презентацій згадаємо Sparcol Video Scribe (www.sparcol.com, рис. 8), Pow Toon (www.powtoon.com), Go Animate (www.goanimate.com), Plotagon (www.plotagon.com).



Рис. 8. Скрайби з теми «Пропорція»

Під інфографікою розуміють технологію подання навчального матеріалу у вигляді статистичних графіків, карт, діаграм, схем, таблиць, що «пояснюють». Навчальну наочність використовують не лише для ілюстрації, а як самостійне джерело знань (рис. 9). До середовищ створення інфографіки належать: Infogr.am, Easel.ly, Vizualize.me, Venngage, тощо.

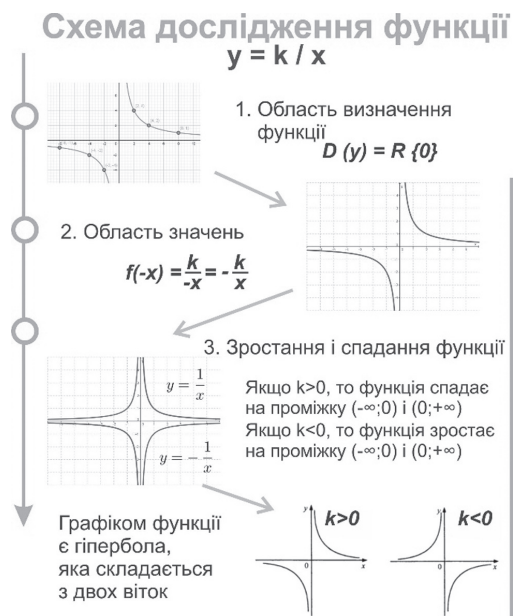


Рис. 9. Інфографіка «Дослідження функції»

Отже, у процесі аналізу наукової літератури встановлено, що від рівня розвитку мнемічних процесів, що забезпечують запам'ятовування, збереження і відтворення в головному мозку інформації, залежить успішність навчання, зокрема математики. З метою впровадження ефективних шляхів до запам'ятовування різноманітної математичної інформації розглянуто мнемотехніку як спосіб сприйняття нової інформації через утворення асоціативних зв'язків за допомогою спеціальних методів і прийомів. Обґрунтовано доцільність підготовки майбутніх учителів математики до використання методів мнемотехніки: «Зв'язування», «Перетворення», «Посилення», а також відповідних прийомів.

У результаті опитування експертів встановлено позитивне ставлення вчителів математики до використання прийомів мнемотехніки, виділено найпопулярніші із них. Водночас зафіксовано низький рівень розуміння студентів щодо доцільності використання прийомів мнемотехніки в професійній діяльності, що обумовлює необхідність розроблення відповідного педагогічного інструментарію (методик, технологій тощо) для підготовки майбутніх учителів математики до використання мнемотехніки.

Подано класифікацію комп'ютерних програмних засобів, що використовують для створення візуальних моделей: офісні програмні продукти зі Smart-об'єктами; програми майндмепінгу; сервіси для створення скрайбінг-презентацій; програми для створення інфографіки.

Перспективи подальших наукових пошуків вбачаємо у розробленні методичного супроводу перепідготовки вчителів математики до використання прийомів мнемотехніки в професійній діяльності.

ЛІТЕРАТУРА

1. PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do, PISA, OECD Publishing, Paris. <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>.
2. Зиганов М. А., Козаренко В. А. Мнемотехніка. Запоминание на основе визуального мышления. Москва: Школа рационального чтения, 2000. 150 с.
3. Чепурний Г. А., Палійчук Ю. В. Як навчитися легко вчитися. Навчально-методичний посібник. Вінниця: ВМГО «Розвиток», 2006. 80 с.
4. Шаталов В. В. Память і можливості її розвитку. Київ, 1997. 120 с.
5. Панишева О.В. Математика в стихах: задачи, сказки, рифмованные правила. 5 – 11 классы. Волгоград: Учитель, 2009. 219 с.
6. Чепурной Г. В., Бура Л. В. Образовательная мнемотехника: технология эффективного усвоения информации: учебно-методическое пособие. Ставрополь: РИБЕСТ, 2015. 115 с.

АЛГОРИТМІЧНА ТА ЕВРИСТИЧНА КОМПОНЕНТИ В ЗАДАЧАХ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Тамара КОЛЕСНИК — професор кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь НПУ ім. М. П. Драгоманова, кандидат фізико-математичних наук;

Оксана ТАРАСЕНКО — учитель математики СШ № 98 м. Києва

«Математика — це мова плюс міркування, це наче мова й логіка разом. Математика — це знаряддя для міркування. У ній сконцентровані результати точного мислення багатьох людей».

Р. Фейман, американський фізик

Задачі є одним з важливих засобів формування системи основних математичних знань, умінь і навичок у процесі вивчення математики. За своїми дидактичними функціями задачі поділяють на тренувальні (для вироблення стійких умінь і навичок), пізнавальні (для здобуття нових знань) та розвиваючі (для розвитку творчого мислення). Найбільш поширеними в шкільному курсі математики є тренувальні та пізнавальні вправи, які поряд із виробленням свідомих і стійких навичок у застосуванні математичних знань і методів передбачають якісне засвоєння математичної теорії. Зазначимо, що тренувальних задач є вдосталь у сучасних шкільних підручниках. Розв'язання тренувальних вправ засноване здебільшого на використанні відомих алгоритмів або менш формалізованих алгоритмічних приписів, які будуються відповідно до означень математичних понять, доведених тверджень та формул для обчислення тих чи інших величин. Зауважимо, що алгоритм конкретної задачі складає лише виконавську частину методу її розв'язання, оскільки йому передують дії, спрямовані на аналіз та пошук розв'язку. Методична система тренувальних задач із використанням алгоритмів виховує і відповідний алгоритмічний тип мислення. На цьому етапі важливо виділяти узагальнені методи розв'язання основних задач, звертати увагу учнів на те загальне, що об'єднує всі частинні прийоми розв'язування задач даного класу. Йдеться про формування узагальнених прийомів навчальної діяльності в процесі вивчення шкільного курсу математики, що передбачає ряд етапів, на кожному з яких необхідно досягти на тому чи іншому рівні певних властивостей на-

© Колясник Т. В., Тарасенко О. М., 2020

вчальної діяльності. Аналіз частинних прийомів при розв'язуванні задач дозволяє виділити загальний зміст діяльності і сформулювати більш загальний прийом або метод. Таке узагальнення відбувається поступово і сприяє оволодінню такими прийомами навчальної діяльності як перенос на інші задачі, знаходження нових методів тощо. Тренувальні задачі, як правило, слугують підготовчими вправами для розв'язання більш складних пізнавальних і розвиваючих задач, яким слід надати належне місце при вивченні шкільного курсу математики. Елементи творчого мислення, які присутні в тренувальних і особливо пізнавальних задачах, не можуть повністю забезпечити досягнення важливої цілі сучасної освіти — розвитку продуктивного, евристичного мислення. Включення у навчальний процес розвиваючих задач має бути спрямоване на формування в учнів умінь використання методів наукового пошуку, які прийнято називати евристичними (спостереження, порівняння, аналіз і синтез, узагальнення і спеціалізація, абстрагування і конкретизація, індукція і дедукція, аналогія та інтуїція тощо). Розв'язування розвиваючих задач вимагає не тільки логічного мислення, а й математичної інтуїції, винахідливості, кмітливості, гнучкості та інших рис евристичного мислення. До таких вправ у шкільному курсі математики слід віднести умовиводи за гіпотезою або аналогією з наступною перевіркою та дослідженням висновків, доведення від супротивного, звернення до контрприкладів, прийоми розв'язування задачі від кінця до початку, розгляд різних підходів до розв'язання однієї і тієї самої задачі, використання геометричних та наочних ілюстрацій, завдання з неповними або зайвими даними, різноманітні вправи з варіюванням суттєвих та несуттєвих ознак понять та їх властивостей тощо.

Запитання також відіграють важливу роль у процесі навчання. За допомогою запитань можна організувати активну пізнавальну діяльність учнів на уроках і позакласних заняттях та здійснити їх посилену інтелектуально-евристичну діяльність. Найчастіше застосовуються запи-

тання, які вимагають: 1) відновлення раніше засвоєних знань та їх відтворення; 2) пошуку нових знань, глибокого аналізу фактів, їх порівняння та співставлення. Аналіз процесу навчання показує, що названі групи запитань не можна протиставляти, вони застосовуються в поєднанні, вступаючи в тісну взаємодію і доповнюють одна одну. Важливо також навчити учнів правильно формулювати запитання та доречно їх задавати, що також є одним із прийомів розвитку їх пізнавальної діяльності та евристичного мислення.

Далі ми розглянемо нестандартні завдання і приклади з різних розділів шкільного курсу математики, які сприятимуть розвитку евристичного мислення учнів.

I. Чи правильне твердження?

1) функція $y = f(x)$ — це довільна відповідність між двома непустими множинами дійсних чисел A і B ;

2) парна функція $y = f(x)$ не має оберненої;

3) для функції $f(x) = x^2$ існує обернена функція на інтервалі $(-\infty; +\infty)$; а на проміжку $[0; +\infty)$;

4) будь-яку функцію $f(x) \neq 0$, визначену на множині, симетричній відносно початку координат, можна подати у вигляді суми парної та непарної функцій;

5) числова послідовність (x_n) — це функція, визначена на множині натуральних чисел;

6) якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 ;

7) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x_0) \neq A$;

8) якщо $x_0 \in A$ функція $f(x)$ — парна (непарна) на множині A , то похідна $f'(x)$ — непарна (парна) на цій множині;

9) якщо функція $f(x)$ — періодична з періодом T , то її похідна $f'(x)$ має той самий період;

10) якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ не мають похідної в точці x , то функції $u(x) + v(x)$ та $u(x) \cdot v(x)$ також не мають похідної в тій точці. Відповідь проілюструйте прикладами.

11) якщо диференційована функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(a; b)$, то $f'(x) > 0$, $x \in (a; b)$;

12) $f'(x) = \varphi'(x)$, $x \in A \Rightarrow f(x) = \varphi(x)$, $x \in A$;

13) будь-яка неперервна в точці x_0 функція $f(x)$ має в цій точці похідну;

14) якщо $f'(x_0) = 0$, то x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$;

15) якщо функція $f(x)$ має первісну на інтервалі $(a; b)$, то вона єдина?

II. Доповнити речення так, щоб воно стало істинним висловленням.

1) якщо функція $f(x)$ парна (непарна) на множині A , то функція $\frac{1}{f(x)}$... на цій множині;

2) сума та добуток двох парних функцій є функція...;

3) одночасно парною та непарною функцією на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ є функція ...;

4) графіки взаємно обернених функцій ...;

5) функція $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ є зростаючою на проміжку $[0; +\infty)$ і ... на проміжку $(-\infty; 0)$;

6) якщо функція $f(x)$ має границю в точці x_0 , а функція $\varphi(x)$ не має границі в цій точці, то їх сума $f(x) + \varphi(x)$...

7) оберненою до функції $y = x$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ є функція ...;

8) якщо $f'(x_0) = 0$, $x \in (a; b)$, то функція $f(x)$... на інтервалі $(a; b)$;

9) $f'(x_0) < 0$, $x \in (a; b) \Rightarrow$ функція $f(x)$... на інтервалі $(a; b)$;

10) якщо x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$, то в цій точці її похідна ...;

11) загальний вигляд первісних для функції $f(x) = x^2 + x + 1$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ є ...

III. Знайти помилку у міркуванні.

1) Розглянемо очевидну рівність.

$$16 - 36 = 25 - 45, \quad 16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}.$$

Останню рівність запишемо ще так:

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

отже, одержуємо рівність

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2,$$

звідки $4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$, тобто $4 = 5$. Де помилка?

2) Доведемо, що границя числової послідовності $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ дорівнює 0.

Доведення. Маємо $x_n = (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ і тому $x_{n+1} = (-1)x_n$, $n \in \mathbb{N}$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = -\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Однак за означенням границі числової послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Отже, з останніх двох рівностей отримуємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Де помилка? Насправді задана числова послідовність є розбіжною.

IV. Задачі.

1. Розв'язати рівняння

$$x^2 + 4x^2 + 7x^2 + \dots + 58x^2 = 1180.$$

Розв'язання. Звернемо увагу на те, що доданки у лівій частині рівняння утворюють арифметичну прогресію (a_n) , для якої $a_1 = x^2$, $d = 3x^2$.

За формулою суми членів арифметичної прогресії отримуємо

$$\frac{x^2 + 58x^2}{2} n = 1180, \quad \text{або } x^2 n = 40.$$

Кількість n членів цієї арифметичної прогресії визначимо з формули n -го члена $58x^2 = x^2 + 3x^2(n-1)$, звідки $3n = 60$, $n = 20$. І тоді $20x^2 = 40$, $x = \pm\sqrt{2}$.

Відповідь. $x = \pm\sqrt{2}$.

2. Знайти чотири числа, перші три з яких утворюють геометричну прогресію, а останні три — арифметичну прогресію, причому сума крайніх чисел дорівнює 14, а сума середніх дорівнює 12.

Розв'язання. Нехай a_1, a_2, a_3, a_4 — шукані числа. За умовою числа a_1, a_2, a_3 утворюють геометричну прогресію, а a_2, a_3, a_4 — арифметичну прогресію, причому

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 14, \\ a_2 + a_3 = 12. \end{cases}$$

Отже, маємо $a_2 = a_1q, a_3 = a_1q^2$ і тоді три останні числа мають вигляд a_1q, a_1q^2, a_4 .

За властивістю членів арифметичної прогресії $a_1q + a_4 = 2a_1q^2$, або $a_4 = 2a_1q^2 - a_1q$. Тоді

$$\begin{cases} a_1 + (2a_1q^2 - a_1q) = 14, \\ a_1q + a_1q^2 = 12, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a_1(1 + 2q^2 - q) = 14, \\ a_1(q + q^2) = 12. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему методом підстановки (з другого рівняння визначимо a_1 і підставимо в перше), знайдемо два розв'язки $a_1 = 2, q = 2$, або $a_1 = \frac{25}{2}, q = \frac{3}{5}$.

Якщо $a_1 = 2, q = 2$, то $a_2 = a_1q = 4, a_3 = a_1q^2 = 8, a_4 = 2a_1q^2 - a_1q = 12$, і шуканими числами є 2; 4; 8; 12.

Якщо $a_1 = \frac{25}{2}, q = \frac{3}{5}$, то $a_2 = a_1q = \frac{15}{2}, a_3 = a_1q^2 = \frac{9}{2}, a_4 = 2a_1q^2 - a_1q = \frac{3}{2}$ і шуканими числами є 12,5; 7,5; 4,5; 1,5.

Відповідь. 2; 4; 8; 12 та 12,5; 7,5; 4,5; 1,5.

3. При яких значеннях параметра a нерівність

$$\left| \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 2$$

виконуватиметься при всіх дійсних значеннях x ?

Розв'язання. Дана нерівність за властивістю модуля рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} > -2, \\ \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} < 2. \end{cases}$$

Оскільки $x^2 + x + 1 > 0$ для довільного x , то далі матимемо

$$\begin{cases} x^2 - ax + 1 > -2(x^2 + x + 1), \\ x^2 - ax + 1 < 2(x^2 + x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + (2 - a)x + 3 > 0, \\ x^2 + (a + 2)x + 1 > 0. \end{cases}$$

Оскільки коефіцієнти при x^2 квадратних тричленів у лівих частинах нерівностей системи додатні, то остання система нерівностей матиме розв'язки при всіх значеннях x , при яких дис-

кримінанти цих квадратних тричленів задовольнятимуть умову:

$$\begin{cases} D_1 = (2 - a)^2 - 36 < 0, \\ D_2 = (a + 2)^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a - 32 < 0, \\ a(a + 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 4)(a - 8) < 0, \\ a(a + 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-4; 8), \\ a \in (-4; 0) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-4; 0).$$

Відповідь. $a \in (-4; 0)$.

4. При яких значеннях параметра b система нерівностей

$$\begin{cases} 0,5(2x + 5) < 2(x - 2) + 5, \\ 2(bx - 1) < 3 \end{cases}$$

не має розв'язків?

Розв'язання. Спочатку розв'яжемо першу нерівність системи:

$$\begin{aligned} 0,5(2x + 5) < 2(x - 2) + 5 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x + 2,5 < 2x + 1 &\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що задана система не матиме розв'язків, якщо розв'язками другої нерівності будуть $x \leq \frac{3}{2}$.

Розглянемо другу нерівність системи

$$2(bx - 1) < 3 \Leftrightarrow bx < \frac{5}{2}.$$

Якщо $b = 0$, то нерівність виконується при будь-якому дійсному x і, отже, задана система матиме розв'язки.

Якщо $b < 0$, то $x > \frac{5}{2b}$, і усі розв'язки першої нерівності є розв'язками другої, тобто задана система має розв'язки, коли $b \leq 0$.

Залишається дослідити випадок $b > 0$.

З другої нерівності $x < \frac{5}{2b}$, і задана система не матиме розв'язків, якщо $\frac{5}{2b} \leq \frac{3}{2}$, звідки $b \geq \frac{5}{3}$.

Відповідь. $b \in \left[\frac{5}{3}; +\infty \right)$.

5. Знайти $f(x)$, якщо $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}, x > 0$.

Розв'язання. Введемо нову змінну

$t = \frac{1}{x}$, тоді $x = \frac{1}{t}$. Оскільки $t > 0$, то

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1 + t^2}}{|t|} = \frac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{t}.$$

Замінюючи t на x , остаточно одержимо

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

Відповідь. $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$.

6. Знайти $f_n(x) = f(\underbrace{f(\dots f(x))}_{n \text{ разів}})$, $n \in N$, якщо

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Розв'язання. Скористаємося методом математичної індукції.

Спочатку знайдемо $f_2(x) = f(f(x))$:

$$f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

Припустимо, що $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, де k — фіксоване натуральне число.

Тоді

$$f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

Отже, за принципом математичної індукції маємо $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Відповідь. $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

7. Знайти значення суми

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Розв'язання. На інтервалі $(-\infty; +\infty)$ розглянемо дві функції

$$S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1},$$

$$T_n(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n.$$

Зауважимо, що $T'_n(x) = S_n(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

За формулою суми членів геометричної прогресії

$$T_n(x) = \frac{x^{n+1} - x}{x-1}, \quad \text{звідки}$$

$$S_n(x) = \frac{[(n+1)x^n - 1](x-1) - (x^{n+1} - x)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Таким чином, для $x \neq 1$

$$S_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Якщо ж $x = 1$, то $S_n(1) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(тут використано формулу для суми членів арифметичної прогресії).

Відповідь. $\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$;

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad x = 1.$$

8. Обчислити значення виразу $8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

Розв'язання.

1-й спосіб. Скористаємося формулою синуса подвійного кута, для чого заданий вираз помножимо і поділимо на недостатній множник $\sin 20^\circ$. Отримаємо

$$\begin{aligned} 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \\ &= \frac{4 \cdot 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = 1.$$

2-й спосіб. Скористаємося формулою суми косинусів двох кутів:

$$8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ =$$

$$= 8 \cos 20^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 120^\circ + \cos 40^\circ) =$$

$$= 4 \cos 20^\circ \left(\cos 40^\circ - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 4 \cos 20^\circ \cos 40^\circ - 2 \cos 20^\circ =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) - 2 \cos 20^\circ =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ \right) - 2 \cos 20^\circ = 1.$$

Відповідь. 1.

9. Знайти $f(x)$, якщо $f'(x^2) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Розв'язання. Введемо нову змінну t : $x = \sqrt{t}$.

Тоді $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, звідки отримаємо $f(t) = 2\sqrt{t} + C$,

тобто $f(x) = 2\sqrt{x} + C$.

Відповідь. $f(x) = 2\sqrt{x} + C$.

10. Функція $y = f(u)$ визначена, якщо $u \in (0; 1)$. Знайти область визначення функції $f(x^2)$.

Розв'язання. Відповідно до умови шукану область визначення функції $f(x^2)$ знайдемо з нерівності $0 < x^2 < 1$, звідки $|x| < 1$, $x \neq 0$ або $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Відповідь. $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

11. На якій множині визначена функція $f(\varphi(t))$, якщо $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x = \varphi(t) = 1 + \sin 2\pi t$?

Розв'язання. Областю визначення заданої функції $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ є відрізок $[-1; 1]$. Значення функції $x = \varphi(t) = 1 + \sin 2\pi t$ належатимуть цьому відрізку, якщо $\sin \pi t = 0$, тобто якщо $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Це означає, що функція $f(\varphi(t))$ визначена на множині цілих чисел.

Відповідь. Множина цілих чисел.

12. Спростити вираз $\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

Розв'язання.

1-й спосіб. Нехай $A = \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

Тоді $A^2 = 11+6\sqrt{2} + 11-6\sqrt{2} + 2\sqrt{121-72} = 36$,

звідки $\sqrt{A^2} = |A| = 6$, тобто

$$\left| \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} \right| = 6.$$

Оскільки під знаком модуля стоїть сума двох радикалів, кожний з яких є число додатне, то

$$\left| \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} \right| =$$

$$= \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = 6.$$

2-й спосіб. Оскільки

$$11+6\sqrt{2}=9+2\cdot 3\sqrt{2}+2=(3+\sqrt{2})^2, \\ \text{а } 11-6\sqrt{2}=9-2\cdot 3\sqrt{2}+2=(3-\sqrt{2})^2, \text{ то}$$

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}= \\ =|3+\sqrt{2}|+|3-\sqrt{2}|=3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=6.$$

Відповідь. 6.

13. Знайти суму n перших членів числової послідовності, якщо відомий її n -й член

$$a_n = 4n(n^2 + 1) - (6n^2 + 1).$$

Розв'язання. Маємо

$$a_n = 4n(n^2 + 1) - (6n^2 + 1) = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1.$$

Розглянемо різницю

$$n^4 - a_n = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1 = (n - 1)^4,$$

звідки $a_k = k^4 - (k - 1)^4$, $k \in N$.

Надаючи значень $k = 1, 2, 3, \dots, n$, одержимо

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = 2^4 - 1;$$

$$a_3 = 3^4 - 2^4;$$

.....

$$a_n = n^4 - (n - 1)^4.$$

Додамо почленно всі ці рівності і після звення подібних членів одержимо

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^4.$$

Відповідь. n^4 .

14. Кількість діагоналей опуклого багатокутника визначається за формулою

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2},$$

де n — число його сторін, причому $n \geq 4$. Чи існує багатокутник, кількість діагоналей якого дорівнює 9; 14? У яких багатокутників кількість діагоналей не перевищує 20?

Розв'язання. Спочатку встановимо, чи існує багатокутник, кількість діагоналей якого дорівнює 9. Для цього розглянемо рівняння

$$\frac{n(n-3)}{2} = 9, \text{ або } n^2 - 3n - 18 = 0,$$

звідки $n_1 = 6$, $n_2 = -3$. Умову задачі задовольняє $n = 6$, тобто шестикутник має 9 діагоналей. Аналогічно

$$\frac{n(n-3)}{2} = 14, \text{ або } n^2 - 3n - 28 = 0,$$

звідки $n_1 = -4$, $n_2 = 7$, тобто опуклий семикутник має 14 діагоналей. Тепер визначимо, який багатокутник має не більше 20 діагоналей. Розглянемо нерівність

$$\frac{n(n-3)}{2} \leq 20, \text{ або } n^2 - 3n - 40 \leq 0.$$

Коренями квадратного тричлена $n^2 - 3n - 40$ є $n_1 = -5$, $n_2 = 8$ і тому розв'язками цієї нерівності є $n \in [-5; 8]$. Із заданої множини чисел умову $n \geq 4$, $n \in N$, задовольняють $n = 4; 5; 6; 7; 8$. Саме багатокутники із такою кількістю сторін мають не більше 20 діагоналей.

Відповідь. 9 та 14 діагоналей мають відповідно шестикутник та семикутник; кількість діагоналей не перевищує 20 у багатокутників із кількістю сторін $n = 4; 5; 6; 7; 8$.

15. Знайти сукупність всіх первісних функцій для функції

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}, \quad x > 1.$$

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник заданого виразу для функції $f(x)$ на вираз, спряжений до знаменника. Отримаємо

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \\ = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x+1 - x+1} = \frac{1}{2}\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\sqrt{x-1},$$

звідки легко знаходимо, що сукупністю всіх первісних для заданої функції $f(x)$ будуть

$$F(x) = \frac{1}{3} \left((x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right) + C,$$

де C — довільна стала, оскільки $F'(x) = f(x)$, $x > 1$.

Відповідь. $F(x) = \frac{1}{3} \left((x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right) + C$, де C — довільна стала.

V. Доведення тверджень.

1) Якщо сторони трикутника утворюють геометричну прогресію, то його висоти теж утворюють геометричну прогресію. Доведемо це.

Розв'язання. Нехай сторони трикутника дорівнюють a , aq і aq^2 . За формулою площі трикутника $S = \frac{1}{2}ah_a$ висоти цього трикутника дорівнюватимуть $\frac{2S}{a}$, $\frac{2S}{aq}$, $\frac{2S}{aq^2}$, а це геометрична прогресія з першим членом $\frac{2S}{a}$ та знаменником $\frac{1}{q}$, що і треба було довести.

2) Доведемо, що $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$, $n \in N$.

Розв'язання. Розглянемо вираз у других дужках правої частини заданої рівності

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1} = \\ = a^{n-1} \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \dots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} \right) = \\ = \frac{a^{n-1} \left(\left(\frac{b}{a} \right)^n - 1 \right)}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{b^n - a^n}{b - a} = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad n \in N,$$

звідки й одержується формула, яку треба було довести (зазначимо, що ми скористувались формулою для суми членів геометричної прогресії з першим членом 1 і знаменником $\frac{b}{a}$).

Звернемо увагу на те, що відомі формули

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \text{ та}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

є частинними випадками доведеної формули, коли $n = 2; 3$.

3) Довести, що функція Діріхле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x - \text{раціональне число} \\ 0, & \text{якщо } x - \text{іраціональне число} \end{cases}$$

має періодом довільне раціональне число.

Розв'язання. Нехай $T \neq 0$ — довільне раціональне число. Згідно з умовою маємо

$$D(x+T) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x+T - \text{раціональне число} \\ 0, & \text{якщо } x+T - \text{іраціональне число} \end{cases}$$

тобто $D(x+T) = D(x)$ $x \in (-\infty; +\infty)$, що і треба було довести.

4) Довести, що нерівність

$$(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1 > 0$$

матиме розв'язками множину всіх дійсних чисел, якщо параметр $a \in [1; +\infty)$.

Розв'язання. Неважко переконатись, що задана нерівність правильна, коли $a = 1$. Якщо $a = -1$, то одержуємо лінійну нерівність, яка виконується не при всіх дійсних значеннях x (переконайтесь у цьому самостійно).

Розглянемо тепер значення $a \neq \pm 1$. Для виконання цієї нерівності при будь-якому дійсному значенні x дискримінант квадратного тричлена $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1$ має бути від'ємним, а коефіцієнт при x^2 додатним, тобто отримуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} 4(a-1)^2 - 4(a^2-1) < 0, \\ a^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 > 0, \\ a^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1,$$

тобто $a \in (1; +\infty)$ і остаточно $a \in [1; +\infty)$. Твердження доведено.

5) Довести, що функція

$$y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}$$

є лінійною при довільному дійсному значенні x .

Розв'язання. Запишемо задану функцію в іншому вигляді

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2} = \\ &= \sqrt{(x + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(x - \sqrt{2})^2} = |x + \sqrt{2}| + |x - \sqrt{2}|. \end{aligned}$$

Далі розглянемо такі випадки:

$$1. \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \text{ тоді } y = x + \sqrt{2} + \sqrt{2} - x = 2\sqrt{2};$$

$$2. \quad x \in (-\infty; -\sqrt{2}), \text{ тоді } y = -x - \sqrt{2} + \sqrt{2} - x = -2x;$$

$$3. \quad x \in (\sqrt{2}; +\infty), \text{ тоді } y = x + \sqrt{2} + x - \sqrt{2} = 2x.$$

Таким чином доведено, що задана функція є лінійною при довільному дійсному значенні x .

6) Довести нерівність $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$, якщо

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання.

1-й спосіб. Якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то виконуються нерівності $\sin \alpha > \sin^2 \alpha$ та $\cos \alpha > \cos^2 \alpha$.

Додавши почленно ці дві нерівності, одержимо $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$, що і треба було довести.

2-й спосіб. Щоб довести задану нерівність, достатньо довести нерівність $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 > 1$, оскільки, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$ і $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$.

Справді, $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha > 1$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Твердження доведено.

7) Довести рівність

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1; 1].$$

Розв'язання. Введемо до розгляду функцію $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, $x \in [-1; 1]$.

Отримуємо

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad (-1; 1).$$

За ознакою сталості $f(x) = C$, де C — стала, на інтервалі $(-1; 1)$, тобто $\arcsin x + \arccos x = C$, $x \in (-1; 1)$.

Для знаходження сталої C покладемо, наприклад, $x = 0$. Отримуємо $C = \frac{\pi}{2}$.

Отже, доведено, що $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in (-1; 1)$.

Справедливість цієї формули при $x = \pm 1$ очевидна. Твердження доведено.

8) Довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = 1.$$

Розв'язання. Перетворимо вираз у дужках, скориставшись очевидною рівністю

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді одержимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

що і треба було довести.

9) Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x - \text{раціональне число} \\ x^2, & \text{якщо } x - \text{іраціональне число} \end{cases}$$

має похідну в точці $x = 0$.

Розв'язання. За умовою $f(0) = 0$. Нехай Δx — раціональне число, тоді $f(0 + \Delta x) = f(\Delta x) = 0$,

тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0$.

Якщо ж Δx — ірраціональне число, то $f(0 + \Delta x) = \Delta x^2$ і тоді

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 - 0}{\Delta x} = 0.$$

Оскільки обидві розглянуті границі співпадають, то функція $f(x)$ має похідну в точці $x = 0$, яка дорівнює 0. Твердження доведено.

10) Довести рівність

$$\left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \right)' = 2x\sqrt{1+x^4}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Розв'язання. Скористуємося формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt = F(x^2) - F(0),$$

де $F(t)$ — первісна для підінтегральної функції $\sqrt{1+t^2}$, тобто $F'(t) = \sqrt{1+t^2}$, $t \in (-\infty; +\infty)$.

Тоді з урахуванням правила похідної складеної функції отримаємо

$$\left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \right)' = (F(x^2) - F(0))' =$$

$$= F'(x^2) \cdot 2x = 2x\sqrt{1+x^4},$$

що і треба було довести.

Порушена у статті проблема з необхідністю вимагає відповідного науково-педагогічного обґрунтування та методичного забезпечення у вигляді підручників, навчальних посібників та різноманітних дидактичних матеріалів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. — К.: Зодіак — ЕКО, 2000.
2. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология (монография). — Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004.
3. Вибрані питання елементарної математики // Під ред. А. В. Скорохода. — К.: Вища шк., 1982.
4. Яремчук Ф. П., Рудченко П. А. Алгебра и элементарные функции. — К.: Наукова думка, 1987.

ДИДАКТИЧНІ МОДЕЛІ УРОКІВ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНИХ ТИПІВ У КОНТЕКСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ КОРЕКЦІЇ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ УЧНІВ (УРОК ЗАСВОЄННЯ НОВИХ ЗНАНЬ)

Любов ЧЕРКАСЬКА — доцент кафедри загальної фізики і математики Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка, кандидат педагогічних наук;

Оксана МОСКАЛЕНКО — доцент кафедри загальної фізики і математики Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка, кандидат педагогічних наук;

Олена КОВАЛЕНКО — асистент кафедри загальної фізики і математики Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка

Підвищення ефективності навчального процесу вимагає постійного, систематичного отримання вчителем об'єктивної інформації про хід навчально-пізнавальної діяльності учнів. Переорієнтація процесу навчання з інформативної форми на розвиток особистості людини, запровадження компетентнісного, діяльнісного, особистісно орієнтованого підходів до навчання передбачає втілення в життя нових підходів і до здійснення контролю та корекції результатів навчання кожного учня. Це й обумовило необхідність створення методичної системи контролю та корекції навчальних досягнень учнів, яка б відображала комплексний

© Черкаська Л. П., Москаленко О. А., Коваленко О. В., 2020

підхід до їх організації на всіх етапах процесу навчання, а також у позаурочний час.

Метою розробленої методичної системи є:

- створення сприятливих умов для розвитку особистості учня, набуття ним базових компетентностей;
- досягнення всіма учнями результатів навчання, рівень яких відповідає вимогам, передбаченим Державним стандартом базової і повної загальної середньої освіти;
- реалізація основних функцій контролю та корекції знань і вмінь учнів (види, форми, методи, засоби контролю й корекції, їх комплексне використання в системі уроків математики та в позаурочний час).

Основними *формами* навчально-пізнавальної діяльності учнів на уроці, а відтак і контролю та корекції їх математичної підготовки є індивідуальна, групова та фронтальна.

До *методів контролю* відносять: 1) методи усного контролю (опитування індивідуальне чи фронтальне, усний залік, усний екзамен тощо); 2) методи письмового контролю (математичний диктант, письмові самостійні роботи, контрольні роботи тощо).

До *засобів контролю* належать запитання математичного диктанту, тексти домашніх, самостійних, контрольних робіт, тестові завдання тощо.

Методи та відповідні їм *засоби корекції*, що застосовуються під час усної чи письмової роботи, відносно особи суб'єкта здійснення корекції, об'єднано в чотири групи відповідно до ситуації, коли: корекція спланована і здійснювана вчителем безпосередньо (I група); корекція спланована вчителем безпосередньо, керована ним опосередковано, здійснювана учнями (II група); корекція спланована і здійснювана самим учнем (самокорекція) (III група); корекція здійснювана учнями (взаємокорекція) (IV група).

Зважаючи на тісний взаємозв'язок, що існує між контролем та корекцією результатів навчання, їх включення у навчальний процес має бути узгодженим у змістовому та організаційному плані, а поєднання окремих форм, методів і засобів – доцільним і раціональним. Вибір компонентів контролю та корекції, а також дидактичного інструментарію їх проведення обумовлюється метою і завданнями, що до них висувуються, а це, своєю чергою, відображає загальну цільово-мотиваційну установку окремого етапу навчального процесу, тобто визначається метою проведення кожного конкретного уроку (з обов'язковим урахуванням вікових і психологічних особливостей учнів класу, рівня їх математичної підготовки). Відповідно до цього за основу класифікації уроків вибрано домінуючу (основну) дидактичну мету їх організації. У теорії та практиці спостерігаються різні підходи до поділу уроків [1], [2]. Проте вважаємо, що саме класифікація уроків відповідно до дидактичної мети їх проведення відображає якісні відмінності між окремими уроками відповідно до етапу навчально-пізнавального процесу, на якому вони реалізуються. При цьому визначальною є саме мета уроку, а особливості побудови уроку організаційного характеру (урок-подорож, урок-змагання, урок-консультація тощо) є «похідними» від його основного завдання, спрямованими на його реалізацію. Різні варіанти такої класифікації відрізняються формулюваннями назв окремих *типів* уроків. За основу візьмемо таку:

- урок засвоєння нових знань;
- урок формування навичок і вмінь;

- урок застосування знань, навичок і вмінь;
- урок узагальнення і систематизації знань;
- урок контролю і корекції знань, навичок і вмінь;
- комбінований урок.

Відповідно до логіки процесу навчання у структурі уроку математики виділяють три *компоненти*:

- актуалізація набутих знань і способів діяльності;
- формування нових знань і способів діяльності;
- формування, застосування навичок і вмінь.

Зазначені компоненти уроку математики реалізуються у його структурі у вигляді таких *основних етапів*:

- постановка мети уроку, мотивування вивчення програмового матеріалу;
- актуалізація опорних знань;
- ознайомлення з новим матеріалом;
- закріплення нового матеріалу (відтворення та творче застосування);
- перевірка знань, навичок і вмінь.

Мета уроку обумовлює послідовність його етапів, вибір методів навчання, організаційних форм та засобів.

Організація контролю та корекції навчальних досягнень учнів, взаємовідповідність між формами, видами, засобами їх здійснення й етапами кожного типу уроку мають певну специфіку. У процесі дослідження на основі спостережень за навчальним процесом на різних його етапах створено комплекс дидактичних моделей процесів контролю та корекції знань і вмінь учнів, що реалізуються на уроках основних типів, з деталізацією компонентів указаних процедур відповідно до структури цих уроків.

Урок засвоєння нових знань, звичайно, є першим у системі уроків з окремої програмової теми. Цільовий етап уроку вказаного типу передбачає ознайомлення учнів з метою його проведення, визначенням конкретних завдань, що будуть на ньому розв'язуватися. Усвідомленню учнями мети й завдань уроку сприяє здійснення педагогом мотивування вивчення даного навчального матеріалу. Показ можливостей його використання на практиці (у побуті, на виробництві), широке застосування під час подальшого вивчення математики та інших дисциплін (встановлення та використання внутрішньо-предметних та міжпредметних зв'язків даного навчального матеріалу), висвітлення історичних аспектів розглядуваних питань підвищує зацікавленість учнів, збуджує пізнавальний інтерес до вивчення нової теми. На початковому етапі уроку формується загальна цільово-мотиваційна установка як на даний урок, так і на весь період вивчення програмової теми. У

структурі уроку засвоєння нових знань доцільно виділяти також такі етапи, як актуалізація набутих раніше знань, засвоєння нових знань та їх первинне закріплення.

Хоча на уроці формування нових знань явно не передбачається проведення контролювальних заходів та здійснення корекції математичної підготовки учнів, проте досягнення мети уроку неможливе без встановлення рівня підготовленості учнів до вивчення нової теми та вдосконалення раніше здобутих знань (на етапі актуалізації знань). Забезпеченню реалізації цих моментів на уроці засвоєння нових знань, дослідженню якості поступового засвоєння нового матеріалу, виявленню у ньому незрозумілих для учнів моментів, проведенню профілактичної роботи з недопущення помилок чи їх виправлення (на етапі засвоєння нових знань), контролю за початковим застосуванням знань учнів із нової теми, виправленню при цьому допущених школярами помилок і покликани контроль та корекція навчальних досягнень учнів на уроці розглядуваного типу.

Компоненти корекції, притаманні уроку вказаного типу, — запобігання помилок (обов'язковий) та усунення ситуативних помилок (можливий у разі допущення таких помилок).

На уроці засвоєння нових знань здійснювані контроль та корекція є поточними. Оскільки метою уроку такого типу є засвоєння нових знань усіма учнями, то домінуючою формою контролю є фронтальна, яка застосовується на всіх етапах уроку. Фронтальна форма корекції переважає під час проведення профілактичної роботи із запобігання помилок.

Адаптуємо дидактичну модель реалізації контролю та корекції результатів навчання учнів до конкретної навчальної ситуації та проілюструємо особливості використання відповідних видів, форм, методів і засобів розглядуваних процедур задля успішного досягнення поставленої мети на уроці засвоєння нових знань із теми «Формула коренів квадратного рівняння».

Серед методів контролю, застосування яких є можливим і доцільним на етапі актуалізації набутих знань на цьому уроці, нами виділено фронтальне усне опитування, письмовий математичний диктант, експрес-тестування з наступним обговоренням його результатів. Оскільки здійснення поточного контролю на цьому етапі уроку передбачає з'ясування рівня підготовки учнів до вивчення нової теми (діагностика), перевірку знання окремих теоретичних фактів, означень понять, формулювання теорем, формул і, власне, підготовку до вивчення нового навчального матеріалу, то при цьому, як підтверджує практика, ймовірною є поява ситу-

ативних помилок, усунення яких проводиться індивідуально (якщо помилка допущена одним чи кількома учнями) або фронтально (помилки припустилися багато учнів). Відповідно до характеру помилки обирається метод її усунення (аналогії, конкретизації, узагальнення, контр-прикладів тощо). Корекція на етапі актуалізації знань характеризується нами як синхронна.

Схема організації контролю та корекції навчальних досягнень учнів з математики на етапі актуалізації набутих знань

Характеристики	Контроль	Корекція
Вид	Поточний	Поточна
Форма	Фронтальна	Індивідуальна, фронтальна
Методи, засоби	Усне опитування, математичний диктант, тест	І група: пояснення
Специфічні		Усунення ситуативних помилок, синхронна корекція

Так, перед вивченням теми «Формула коренів квадратного рівняння» учням може пропонуватися письмовий математичний диктант із наступним обговоренням розв'язків завдань. Умови завдань проєктуються на екран за допомогою мультимедійного проєктора.

1. Закінчіть означення: квадратним рівнянням називається рівняння виду

2. Наведіть приклад одного квадратного рівняння, вкажіть значення його коефіцієнтів a , b , c .

3. Визначте значення коефіцієнтів a , b , c у рівняннях:

$$6x - x^2 + 8 = 0; 2x^2 - 4 = 0; 7x^2 = 0;$$

4. Сформулюйте означення зведеного квадратного рівняння.

5. Перетворіть квадратне рівняння на зведене $2x^2 - 7x + 4 = 0$.

6. Розв'яжіть квадратні рівняння виділенням квадрата двочлена:

$$x^2 + 2x + 1 = 0; x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Після виконання завдань усіма учнями проводиться перевірка: кілька учнів по черзі оголошують свої відповіді, решта — бере участь у їх обговоренні.

Спостереження за навчальним процесом засвідчують, що однією з типових помилок, яких припускаються школярі, є помилка у виборі знаків коефіцієнтів a , b , c . Тому варто звертати увагу учнів на те, що в лівій частині рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$, стоїть алгебраїчна сума. Якщо у рівнянні біля членів є знаки «-», то вони стосуються чисел a , b , c . Іноді учні припускаються помилок, пов'язаних не тільки з неправильним визначенням знаків чисел a , b , c , а й з визна-

ченням власне числових значень коефіцієнтів. Це буває тоді, коли квадратне рівняння записане не у стандартному (звичному) вигляді, тобто, наприклад, у вигляді $bх + ах^2 + с = 0$.

Отримані розв'язки порівнюються з правильними, виведеними на екран за допомогою проєктора (відкриваються послідовно). Учні у зошитах виправляють помилки (якщо вони є), виставляють бали: правильне виконання завдань оцінюється: 1 — 1 б., 2 — 1,5 б., 3 — 2,5 б., 4 — 1 б., 5 — 1 б., 6 — 2 б. — максимально 9 балів.

Ситуативні помилки, допущені учнями під час виконання математичного диктанту, візуалізуються в процесі обговорення його результатів, що створює умови для вживання оперативних заходів з їх усунення: учні мають змогу отримати вичерпне пояснення незрозумілих моментів із боку вчителя, консультацію інших учнів, порівняти своє розв'язання завдання з правильним. Учитель акцентує увагу учнів, які отримали оцінки в 1 — 5 балів, на нагальній потребі здійснення необхідної корекції (самокорекції — з використанням відповідних дидактичних матеріалів або взаємокорекції — з наданням допомоги учнями, що мають вищий рівень математичної підготовки).

У процесі засвоєння нових знань важливого значення набуває профілактична робота із запобігання помилок. Пояснюючи новий матеріал, учитель додатково зосереджується на «тонких місцях» теми, виділяє та звертає увагу учнів на типові помилки. Така робота є обов'язковою, здійснюється фронтально, оперативно. При цьому контроль характеризується нами як усний, фронтальний, поточний.

Схема організації контролю та корекції навчальних досягнень учнів з математики на етапі засвоєння нових знань

Характеристики	Контроль	Корекція
Вид	Поточний	Поточна
Форма	Фронтальна	Фронтальна
Методи, засоби	Усне опитування	І група: пояснення
Специфічні		Запобігання помилок, доконтрольна корекція

Після детального пояснення вчителем нової теми «Формула коренів квадратного рівняння» школярам пропонується скласти алгоритмічний припис розв'язування квадратних рівнянь. Це дає змогу учням ще раз, уже самостійно, опрацювати, осмислити викладений теоретичний матеріал, спробувати його структурувати, краще запам'ятати, а отже, більш свідомо засвоїти, що сприятиме надалі запобігання помилок. У разі їх виникнення доцільним буде звернення до розробленого алгоритмічного припису для його повторного опрацювання.

У результаті колективного обговорення, спираючись на матеріал теми «Неповні квадратні рівняння», учні отримують алгоритмічний припис розв'язування квадратних рівнянь, який використовуватиметься також і з метою формування навичок і вмінь (на уроках відповідного типу), для повторення учнями матеріалу теми (на уроках систематизації й узагальнення знань), а також у процесі здійснення самоконтролю та самокорекції їх знань та вмінь.

Алгоритмічний припис розв'язування квадратних рівнянь

1. Переконайтесь, що задане рівняння є квадратним (скористайтесь означенням квадратного рівняння) або зведіть до квадратного, якщо це можливо.
2. Визначте значення коефіцієнтів b , c .
3. Залежно від значень b , c скористайтесь відповідним стовпцем таблиці.

Розв'язування квадратних рівнянь

b, c	Неповні квадратні рівняння			$b \neq 0$ $c \neq 0$			
	$b = 0$ $c \neq 0$	$b \neq 0$ $c = 0$	$b = 0$ $c = 0$				
Загальний вигляд рівняння	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$			
Розв'язання рівняння	$ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$	$x(ax + b) = 0$ $x = 0$ $x_1 = 0$ або $ax + b = 0$ $ax = -b$ $x_2 = -\frac{b}{a}$	$x^2 = 0$ $x = 0$	$D = b^2 - 4ac$			
	$-\frac{c}{a} < 0$ коренів немає	$-\frac{c}{a} > 0$ $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$		$D < 0$ коренів немає	$D = 0$ $x = -\frac{b}{2a}$	$D > 0$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$	
Кількість коренів	Немає коренів	Два корені	Два корені	Один корінь	Немає коренів	Один корінь	Два корені

Зразки розв'язань типових завдань із теми
«Неповні квадратні рівняння»

$ax^2 + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 = 0$
$3x^2 + 27 = 0;$	$3x^2 + 36x = 0;$	$6x^2 = 0;$
$3x^2 = -27;$	$3x(x + 12) = 0;$	$x^2 = 0;$
$x^2 = -9;$	$x_1 = 0,$	$x_1 = x_2 = 0$
Коренів немає.	$x_2 = -12$	
$5x^2 - 80 = 0;$		
$5x^2 = 80;$		
$x^2 = 16;$		
$x_1 = \sqrt{16} = 4,$		
$x_2 = -\sqrt{16} = -4$		

Зразки розв'язань типових завдань з теми
«Формула коренів квадратного рівняння»
 $ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + x + 1 = 0;$	$4x^2 - 12x + 9 = 0;$	$x^2 - 5x + 6 = 0$
$a = 1; b = 1;$	$a = 4; b = -$	$a = 1, b = - 5,$
$c = 1;$	$12; c = 9;$	$c = 6$
$D = b^2 - 4ac;$	$D = (-12)^2 - 4 \cdot$	$D = (- 5)^2 - 4 \cdot$
$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot$	$4 \cdot 9 = 0;$	$1 \cdot 6 = 1;$
$1 = - 3;$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$
$D < 0,$	$x_1 = \frac{5+1}{2 \cdot 1} = 3;$	$x_1 = \frac{5+1}{2 \cdot 1} = 3;$
Дійсних	$x_2 = \frac{5-1}{2 \cdot 1} = 2$	$x_2 = \frac{5-1}{2 \cdot 1} = 2$
коренів немає		

На етапі закріплення учням пропонуються вправи коректувального характеру та інші матеріали, використання яких сприяє запобіганню помилок (фронтально) (складений алгоритмічний припис, зразки розв'язань типових вправ із тем «Неповні квадратні рівняння» та «Формула коренів квадратного рівняння»).

У разі допущення учнями на цих етапах ситуативних помилок – необхідна їх візуалізація, оперативне усунення в індивідуальному порядку. Корекція на етапах засвоєння нових знань та їх закріплення є доконтрольною.

Схема організації контролю та корекції навчальних досягнень учнів з математики на етапі закріплення нових знань

Характеристики	Контроль	Корекція
Вид	Поточний	Поточна
Форма	Індивідуальна, фронтальна	Індивідуальна, фронтальна
Методи, засоби	Опитування	І група: використання вправ коректувального характеру тощо; візуалізація помилок
Специфічні		Запобігання помилок, усунення ситуативних помилок, доконтрольна корекція

Наприкінці уроку під час підбиття підсумків доцільно запропонувати учням відповісти на запитання, що охоплюють найважливіший матеріал розглядуваної теми.

На основі результатів фронтального опитування учитель має можливість зацентрувати увагу окремих учнів на необхідності здійснення самокорекції їх знань і вмінь (з урахуванням результатів математичного диктанту), а також зніціювати роботу із взаємокорекції.

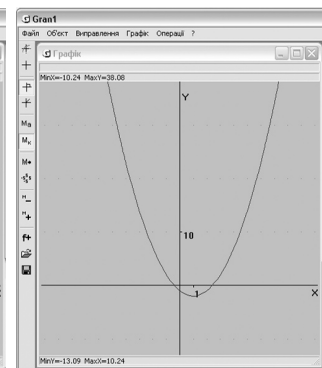
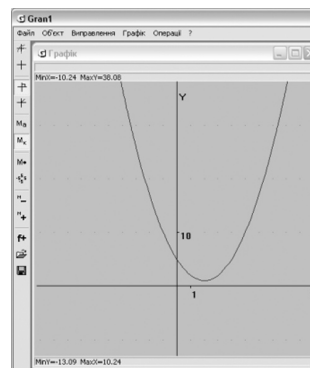
На інших уроках засвоєння нових знань, окрім розглянутих матеріалів (у тому числі і коректувального характеру), є можливим та педагогічно доцільним використання інформаційно-комунікаційних технологій навчання. Зокрема, в процесі вивчення теми «Квадратична функція» з метою встановлення відповідності між коефіцієнтами в аналітичному заданні функції $y = ax^2 + bx + c$ та розміщенням графіка функції у декартовій системі координат можна використати відповідні сучасні педагогічні програмні засоби. Учням пропонується, надаючи конкретних значень a, b, c , визначати особливості побудови графіків відповідних функцій, виявляти закономірності таких залежностей. Відповіді учнів підлягають колективному обговоренню, а помилки, яких вони при цьому припускаються, відразу візуалізуються, контрприкладів наводяться самими учнями з урахуванням виконаних ними побудов. Як показує практика, формулювання загальних висновків на основі розгляду конкретних ситуацій (використання індуктивних міркувань), здійснених самими учнями за наслідками власної діяльності, сприяє міцнішому засвоєнню нових знань та запобіганню помилок з цієї теми у майбутньому.

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

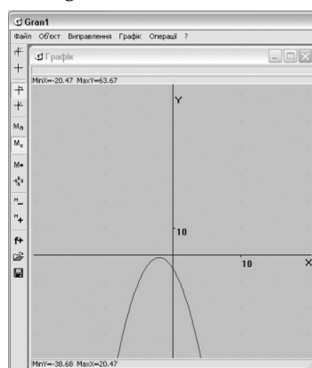
$$a > 0, b < 0, c > 0, \quad a > 0, b < 0, c < 0,$$

$$D < 0 \quad D > 0$$

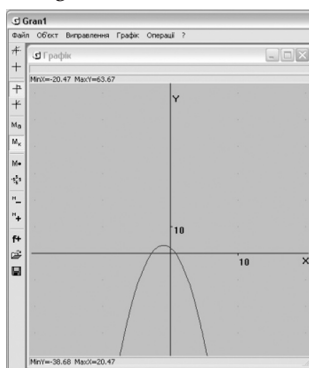
$$y = x^2 - 4x + 5 \quad y = x^2 - 2x - 1$$



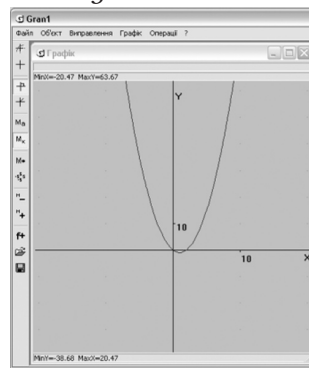
$$a < 0, b < 0, c < 0, \\ D < 0 \\ y = -x^2 - 4x - 5$$



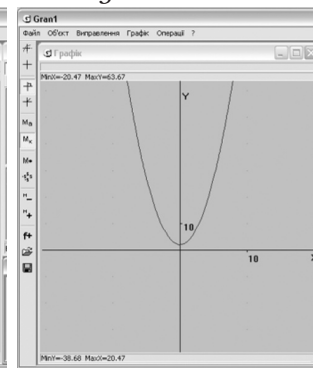
$$a < 0, b < 0, c > 0, \\ D > 0 \\ y = -x^2 - 2x + 2$$



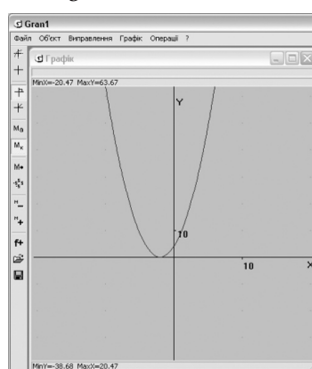
$$a > 0, b < 0, c = 0, \\ D > 0 \\ y = x^2 - 2x$$



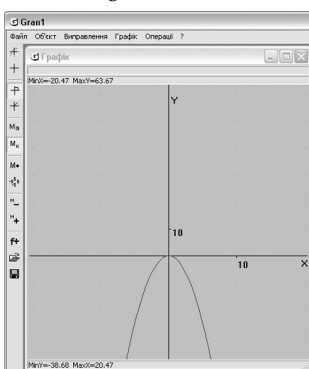
$$a > 0, b = 0, c > 0, \\ D < 0 \\ y = x^2 + 2$$



$$a > 0, b > 0, c > 0, \\ D = 0 \\ y = x^2 + 4x + 4$$



$$a < 0, b = 0, c = 0, \\ D = 0 \\ y = -x^2$$



Отже, застосування у комплексі контролю та корекції результатів навчання дає змогу підготувати учнів до вивчення нового матеріалу (етап актуалізації знань) і сприяє його повноцінному засвоєнню (етапи засвоєння нових знань та їх закріплення), що створює умови для успішної навчальної діяльності учнів надалі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Манвелов С. Современный урок математики: основы методики проведения / С. Манвелов // Математика. – 1998. – №№ 36 – 43.
2. Онищук В. А. Урок в современной школе: [пособие для учителей] / Онищук В. А. – М. : Просвещение, 1981. – 191 с.

КЕРІВНИКАМ МАТЕМАТИЧНИХ ГУРТКІВ

СПЕЦИФІКА ПІДГОТОВКИ ТА ПРОВЕДЕННЯ ГУРТКОВИХ ЗАНЯТЬ ІЗ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ УЧНІВ 5 – 7 КЛАСІВ

Микола ПИХТАР — доцент кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь НПУ ім. М. П. Драгоманова, кандидат педагогічних наук;

Олександр ДЯЧЕНКО — вчитель математики Києво-Печерського ліцею № 171 «Лідер», учитель-методист

У статті запропоновано систему підготовки для проведення гурткових занять із математики для учнів 5 — 7 класів. Розглядаються методичні особливості та основні принципи щодо підготовки та проведення гурткових занять із математики для учнів 5 — 7 класів.

Специфіка гурткових занять із математики для учнів 5 — 7 класів полягає в тому, що вони проводяться за програмами з урахуванням інтелектуальних можливостей школярів, їх пізнавальних інтересів, розвивальних потреб, комп'ютерних та дослідницьких компетентностей. В основу викладання математики слід покласти навчання наявним у відповідній області завершеним алгоритмам розв'язання за-

© Пихтар М. П., Дяченко О. В., 2020

дач. Відбір змісту навчального матеріалу може відбуватися за такими критеріями: повноти, науковості, доступності, теоретичної й практичної значимості, що відповідає віковим та індивідуальним можливостям учнів, систематичності та послідовності, наступності, перспективний горизонт, розрахований на талановитих дітей. У зв'язку з останнім повинна здійснюватися не лише профільна, а й рівнева диференціація, оскільки серед талановитих учнів є учні

різного рівня розвитку і навченості. Для учнів, рівень математичних здібностей яких та інтерес до математики значно відрізняється від решти учнів, необхідна організація систематичної індивідуальної роботи, а значить — відбору для них відповідного змісту навчального матеріалу, особливо задачного.

Таким чином, при підготовці до факультативного заняття з будь-якої теми вчитель має враховувати наступні аспекти: історизму — коли і як виникла тема або задача в процесі розвитку математики; узагальнення — як змінюється задача при переході до більш загальної постановки; конкретизації — як змінюється задача при введенні додаткових умов; динамізму — як змінюються ідеї розв'язання при зміні параметрів задачі; застосування — де і як можна використати тему або задачу; проблеми і гіпотези — які нерозв'язані проблеми та гіпотези існують у заданій темі.

Тому відбір змісту навчання математики на гурткових заняттях, його систематизація мають бути максимально орієнтованими на формування умінь спрощувати, узагальнювати, конкретизувати, передбачати, досліджувати.

Звернемо увагу на деякі особливі моменти, які не можна упускати, якщо вчитель хоче, щоб факультативні заняття з математики проходили не тільки цікаво, а й корисно задля досягнення мети.

Відносно підготовки та проведення гурткових занять будемо керуватися зауваженнями М. Б. Балка і Г. Д. Балка [1] та нашим досвідом роботи.

Чим дана тема цікава і чим важлива? Опанувавши матеріал до цього заняття, вчителю ще раз доцільно проаналізувати: які моменти в заданій темі є особливо важливими для школяра на даний час, при подальшому вивченні предмета; чому? Які моменти можуть або повинні зацікавити його? Які запитання можуть (або повинні) виникнути?

Так, наприклад, при розгляді теми «Числові множини (множина натуральних і цілих чисел)» може бути такий орієнтовний зміст занять:

Історичні відомості про засновника теорії множин. Різні приклади множин, запропоновані викладачем і учнями. Елементи множини, підмножини, знаки включення. Операції над множинами (об'єднання, перетин, різниця, додавання, декартів прямий добуток множин), приклади.

Натуральні і цілі числа, дії над ними, властивості. Визначення і властивості подільності, основні теореми про ділення націло та з остачею. Дільник і кратне, прості і складені числа, НСД і НСК, взаємно прості числа. Алгоритм Евкліда.

Ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 25, 37. Нескінченність множини простих чисел (теорема Евкліда, постулат Бертрана). Теореми про взаємно прості числа (Ферма, Ейлера, Вільсона).

Прості числа Мерсена, Ферма, Вільсона, Маркова, близнюки, прості числа з одиниць. Тести простоти.

Досконалі числа. Розкладання на множники. Теорема Лежандра. Основна теорема арифметики. Сума і кількість дільників числа.

Лінійні діофантові рівняння. Теорія порівнянь, застосування до розв'язування задач на подільність і до розв'язання діофантових рівнянь. Китайська теорема про остачі.

Розгляд проблем, пов'язаних із простими та досконалими числами, зокрема: проблеми Гольдбаха-Ейлера, про числа Мерсена, Ферма. Використання комп'ютерних технологій при розгляді проблем даної теми.

Особливо важливими моментами розгляду такої послідовності питань з теорії чисел є їх практична цінність у сучасному інформаційному середовищі. Із розвитком інформатики та інформаційних технологій зростає складність проблем інформаційної безпеки. Вирішення цих проблем потребує комплексного підходу, важливою ланкою якого є методи криптографії. Однією з галузей застосування теорії чисел є криптографія. Допитливим дітям доцільно показати найпростіші застосування алгебри в криптографії, а саме використання елементів теорії чисел при побудові деяких шифрів (Цезаря, Віженера).

Як сприймає учень цю тему і задану задачу? При підготовці деякої теми вчитель має постійно думати про те, як ця тема буде сприйнята аудиторією. Чи всім присутнім учням будуть зрозумілими теоретичні викладки поставленої проблеми? Часто буває, що важкі, на думку вчителя, теми учні сприймають якнайкраще, у такому разі вихід один — нагородити дітей цікавими задачами, які не тільки розкривають суть даної теми, а й допомагають поставити нові, передбачувані вчителем проблеми.

Зрозуміло тепер, що вчитель обов'язково повинен мати у запасі таку серію задач. Трапляється і так, що тема проста, знов-таки на думку вчителя, а дітьми сприймається важко. Причиною цього можуть бути різні ситуації, зокрема слабка математична база попередніх фактів, на яких ґрунтується поставлена проблема, або погано вмотивована проблема.

У зв'язку з цим майже кожна тема має завершуватися задачами, які є підготовчими до наступного заняття, а кожна нова тема має розпочинатися з міні-проблем, сутність яких

містить усі важливі питання, необхідні для побудови нової проблеми.

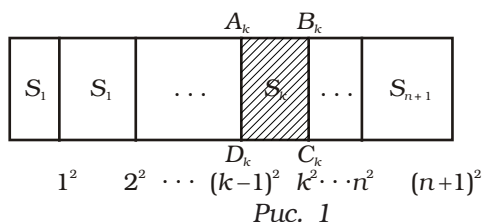
Слід зауважити, що підбір декількох корисних задач до заняття не завершує підготовки до цього заняття. Бажано подумати над такими запитаннями:

- Чи не буде задана задача нецікавою учням?
- Чи буде вона їм посильною?
- Які труднощі можуть виникнути перед учнями при її розв'язанні?
- Чи зможуть учні їх подолати?
- Як допомогти учням впоратися з задачею при мінімальній допомозі?
- Чи зможуть учні задану задачу узагальнити або конкретизувати і які її узагальнення можливі?
- Чи зможуть учні задану задачу перетворити у дослідницьку?

Важким задачам мають передувати більш легкі, що підготують учнів до розв'язання важких. На засіданнях гуртка краще використовувати не громіздкі задачі, тобто ті, що не вимагають довгих викладок, але базуються на цікавій ідеї. Бажано розглядати задачі, які колись були представлені на математичних конкурсах або на олімпіадах, про що учням має бути оголошено. Доцільно яскравим опорним задачам робити екскурс в історію. Увага й зацікавленість до такої задачі в учня істотно зростає.

Наприклад, якщо Ви пропонуєте учням обчислити наступну суму $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2020$ з метою, щоб діти самостійно дійшли хоча б до методу «маленького Гаусса», то слід зазначити, що ще в Давній Греції (за 5 століть до н.е.) були відомі наступні суми $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$; $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Цікаво, як це вони змогли порахувати? Якщо деякі діти знайомі з вище зазначеним методом, то для них поставити задачу: обчисліть вказану суму іншим методом, наприклад знайти геометрично суму $1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Розв'язання. Розглянемо прямокутник розміром $1 \times (n + 1)^2$. Тоді розіб'ємо його на $(n + 1)^2$ прямокутників розмірами $1 \times (k^2 - (k - 1)^2)$, $k = 1, (n + 1)$ (рис. 1).



Якщо S_k — площа k -го прямокутника

($k = 1, (n + 1)$), одержимо:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n+1} = (n + 1)^2 \cdot 1, \\ 1 + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \dots + [(n + 1)^2 - n^2] = \\ = (n + 1)^2,$$

$$1 + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + \dots + (2n + 1) = \\ = (n + 1)^2,$$

$$2(1 + 2 + \dots + n) = (n + 1)^2 - (n + 1) = (n + 1) \cdot n,$$

$$\text{звідки } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Після того як учні встановили прийоми обчислення вищезазначених сум, можна розглянути наступну задачу (розв'язання якої передбачає своєрідне узагальнення методу «маленького Гаусса» та використання зазначених сум):

Доведіть, що сума $1 \cdot 2020 + 3 \cdot 2019 + 5 \times 2018 + \dots + 4019 \cdot 1$ є сумою квадратів послідовних натуральних чисел. Для розв'язання цієї задачі дітям достатньо переписати доданки суми у вигляді таблиці, що складається з 2020 рядків:

1	3	5	...	4015	4017	4019
1	3	5	...	4015	4017	
1	3	5	...	4015		
...			
1	3	5				
1	3					
1						

Кожен доданок цієї суми відповідно є сумою чисел кожного стовпця, а сума чисел кожного рядка є вже відомою сумою

$$1 + 3 + 5 \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Таким чином, $1 \cdot 2020 + 3 \cdot 2019 + 5 \cdot 2018 + \dots + 4019 \cdot 1 = 2020^2 + 2019^2 + \dots + 1^2$.

Мистецтво запропонувати задачу. Вміння подати умову задачі — це справжнє мистецтво. Часто для цієї мети слід перефразувати текст задачі, почати з простих прикладів, частинних випадків, придумати для задачі нову фабулу і т. д.

Наведемо приклади. Керівник гуртка збирається запропонувати задачу.

Задача. Доведіть, що існує досить великий проміжок послідовних чисел, який не містить жодного простого числа.

У такому вигляді задача не зацікавить усіх учнів. Значно зріс інтерес до неї, коли вона була подана поступово: відомо (ще з часів Евкліда, а може, навіть з часів Платона), що множина простих чисел є нескінченною, тому сама умова задачі провокує на негативну відповідь. Хоча відомі проміжки (малої довжини) послідовних натуральних чисел, які не містять жодного простого числа: 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126 (цей проміжок довжиною 7). Тому спробуємо знайти ще подібні проміжки певної довжини, які можна буде збільшити. Візьмемо декілька послідовних натуральних чисел, наприклад: $n + 2, n + 3, n + 4, n + 5, n + 6, n + 7$. Щоб жодне з цих чисел не було простим, треба щоб кожне з них було складеним, а це можливо, наприклад, коли число n націло ділиться одночасно на 2,

3, 4, 5, 6, 7, тобто коли $n = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$. Таким чином, ми отримали послідовність послідовних натуральних чисел: $7! + 2, 7! + 3, \dots, 7! + 7$, що не містить жодного простого числа. Звісно, цей проміжок можна збільшити, наприклад, до довжини:

а) 2019, а саме: $2020! + 2, 2020! + 3, \dots, 2020! + 2020$;

б) k ($k \geq 2020$), а саме: $k! + 2, k! + 3, \dots, k! + k$.

Зрозуміло, що подібна провокація — шукати проміжки не як завгодно великої довжини (як вимагає умова задачі), а проміжки певної довжини стали каркасом для нової ідеї — постійно збільшувати «проміжок» певної довжини. На основі чого можна буде узагальнити такий факт: *існує як завгодно великий скінченний проміжок послідовних натуральних чисел, який не містить жодного простого числа.*

Для того щоб цікаво провести заняття гуртка, слід обов'язково навчитися замінювати одну складну задачу на декілька більш простих, самостійно складати задачі і запитання перед розв'язанням складної задачі, навчитися цікаво і захоплююче подавати умову задачі.

На перших етапах навчання слід віддавати перевагу індуктивному методу, поступово готуючи до використання дедуктивного методу [2]. Індуктивні методи викладу матеріалу, при яких відбувається послідовне узагальнення понять, є більш сприятливими для активного засвоєння матеріалу. Саме в цьому сенсі і відбувається перевага індуктивного методу перед дедуктивним. Тут згадаємо одну важливу пораду Гільберта, яку він давав Вейлю: «Починай з найпростіших прикладів».

Уявіть собі, що необхідно розповісти про обчислення наступної суми

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021}.$$

А якщо діти послідовно додають дроби, то доцільно цю задачу розбити на декілька простих:

1) придумайте декілька дробів, добуток яких дорівнює їх різниці (шляхом кількох проб та помилок діти вказують приклади

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4};$$

2) як подати у вигляді різниці кожен із дробів цієї суми.

Далі діти з легкістю обчислюють суму дробів. Такі допоміжні питання змушують учнів бути більш спостережливими, накопичувати відомості, що стануть у нагоді в майбутньому. Можна піти далі — запропонувати узагальнити цю задачу до наступних:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)};$$

$$1 + \frac{1}{1 \cdot (1+m)} + \frac{1}{2 \cdot (2+m)} + \frac{1}{3 \cdot (3+m)} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+m)};$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

та самостійно їх розв'язати, а потім розповісти свій алгоритм розв'язання. Очевидно, як глибоко та структурно така проста дискусія приводить до формулювання одного з відомих методів обчислення сум — метод скінченних різниць. Але заняття гуртка стає більш цікавим, якщо запропоновані підходи до виведення відомих математичних формул підкріплюються не тільки оригінальністю, а й наочністю. Продемонструємо як на рівні 5 — 7 класів геометрично продемонструвати процес отримання узагальненої суми

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Розглянемо відрізок довжиною 1, тоді відкладемо на ньому відрізки

$$l_1 = \frac{1}{2}, \quad l_2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right), \quad l_3 = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right),$$

$$l_4 = \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \right), \quad \dots \text{ (рис. 2).}$$

Тоді $l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n + \dots = 1$, тобто

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) + \dots + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \right) + \dots = 1,$$

звідки одержуємо, що

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1.$$

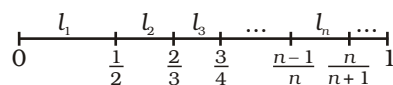


Рис. 2

Для математика найлегшою справою є сформулювати проблему і довести її, а найскладнішою — знайти такий стиль у викладанні, завдяки якому діти відчули хоча б частково шлях дослідника.

Мистецтво підбирати задачі. Відібрати задачі для занять гуртка в 5 — 7 класах — це зовсім не означає виписати з посібників або зі збірників декілька задач окремої теми. Відомо, що при одному варіанті підбору тренувальних вправ матеріал, що вивчається, може бути зрозумілий краще, ніж при іншому варіанті підбору задач. Тому виникає важливе запитання не тільки в методиці викладання математики середньої школи, а й в методиці викладання математики позакласних занять: яким оптимальним підбором вправ можна досягнути цілісного та міцного засвоєння знань? Тобто: як досягнути вміння створення необхідної повноти системи вправ при вивченні математики на заняттях гуртка

для учнів 5 — 7 класів або як створити систему задач із кожної теми, яка б відповідала сучасним вимогам позакласного навчання?

Система задач повинна давати приклади отримання одного й того самого результату різноманітними шляхами й спонукати учня до подібних самостійних дій, до самостійного розв'язання задач прикладного характеру, розвитку творчих здібностей, гнучкості і критичності мислення. Як правило, для гурткових та факультативних занять така система складається переважно із задач підвищеного рівня складності.

Задачі підвищеного рівня складності навмисно спрямовані на формування змістовного аналізу й узагальнення та на розвиток відповідних умінь і навичок. Задачі такого типу традиційно розбиваємо на три рівні складності, переважна більшість яких — олімпіадного рівня.

Задачі *I рівня складності* зорієнтовані на формування теоретичних знань (фактів, понять, теорем, алгоритмів, методів доведення математичних тверджень).

Задачі *II рівня складності* — це комбіновані задачі, розв'язання яких потребує знань різних тем чи розділів курсу математики (принцип неперервного повторення матеріалу).

Задачі *III рівня складності* — задачі, спрямовані на формування вміння застосування знань в новій, нестандартній ситуації.

Зрозуміло, що така градація рівнів складності є умовною, і тому зосередимо увагу лише на основних якостях, які повинні бути притаманні задачам олімпіадного рівня, оскільки не кожна задача, яка пропонувалася на якій-небудь олімпіаді, може вважатися олімпіадною. І. Рубанов [3] виділяє такі важливі функції олімпіадної задачі:

1) *Нестандартність*. Олімпіадні задачі, в переважній більшості, мають бути нестандартними, тобто вимагати для свого розв'язання не тільки шкільних знань, а й нешаблонного підходу, логіки.

Нестандартність — це не синонім складності, навпаки, обдарованій дитині «однокрокові» нестандартні задачі (коли розв'язання зводиться до знаходження однієї ідеї) легші за стандартні, які вимагають великої технічної роботи. Нестандартність задачі — відносне поняття: задача, стандартна для одних учнів, для інших, які знають менше, може бути нестандартною. Так, наприклад:

Задача 1. Площа квадрата дорівнює 32 см^2 . Яка довжина його діагоналі?

Стандартною ця задача стає для тих, хто знає теорему Піфагора. Для учнів, які не знайомі з нею, задача стає нестандартною, бо мають здогадатися: якщо розрізати заданий квадрат діа-

гоналями на чотири трикутники, то з них можна буде скласти два рівних квадрата, площа кожного з яких 16 см^2 , а тому сторона, яка дорівнює половині діагоналі заданого квадрата — 4 см .

Задача 2. Перевірити, чи ділиться задане число $\underbrace{11\dots1}_{2008}$ на: а) 4; б) 6; в) 7?

Зрозуміло, що це цілком стандартна задача для учнів середньої ланки. Зовсім інша картина стає, якщо ідею — перевірити ознаки подільності чисел, приховати, тобто сформулювати задачу так:

Задача 3. Знайти всі такі натуральні числа n , для яких: $D(n) \cdot n = \underbrace{11\dots1}_{2008}$, де $D(n)$ — добуток усіх цифр десяткового запису натурального числа n .

Такого роду задача вже може вважатися нестандартною для учнів.

2) *Ідейність*. Ще один важливий компонент математичних здібностей — *кмітливість*. Тобто при розв'язанні задачі необхідно придумати хоча б одну неочевидну ключову ідею. Такого роду якість задачі будемо називати ідейністю. Така якість є дуже важливою ще й в іншому: якщо математичні факти порівнювати з цеглинами, з яких складено будинок, то математичні ідеї подібні арматурі, що скріплює цей будинок. Тому важливо, щоб олімпіадні задачі були засновані на таких ідеях, які працюватимуть і в майбутньому. Ідейність і нестандартність тісно пов'язані, бо нестандартна задача найчастіше всього впливає з її ідейного конструювання. Та бувають задачі нестандартні, але зовсім безідейні. З іншого боку, деякі нестандартні раніше ідеї або методи можуть стати для багатьох учнів певною мірою стандартними.

Звернемося до розглянутих задач. Розв'язування задачі 1 базується на ідеї розрізання та складання, яка являється головною при виведенні формул площ фігур, при доведенні теореми Піфагора. При розв'язуванні задачі 3 можна використати метод перебору цифр числа n ($n \in \mathbb{N}$).

3) *Краса задачі*. Пригадаємо одну з відомих приказок: «Зустрічають по одежині, а проводжають по розуму», тобто красу та вишуканість формулювання задачі називатимемо тут «одежиною», а якщо цю красу наповнити красою дизайну — «розумом», то така математична задача і буде «товаром» найвищої якості.

Наповнити математичну задачу зовнішньою та внутрішньою красою є також мистецтвом. Найпростіший спосіб оживити формулювання задачі — це обіграти в ній яку-небудь життєву або казкову ситуацію (особливо доречно для учнів 5 — 6 класів). Практика показує, що один і той самий учень розв'язує із захопленням задачу з таким формулюванням (їх позначатимемо з індексом «к»), і розв'язує без особливої зацікавленості, якщо вона подана сухою математичною мовою (позначатимемо такі задачі з індексом

«м»). Справа тут, мабуть, в особливостях дитячої психології.

Розглянемо конкретний приклад (без розв'язання) з суто математичним формулюванням і казковим.

Задача 4 м. Є три цифри a , b і c . Придумайте три таких цілих числа x , y і z , що, знаючи суму $ax + by + cz$, можна визначити дані цифри.

Задача 4 к. Незнайко просить Гвинтика та Шпунтика задумати три цифри a , b і c та за названими цілими числами x , y і z назвати йому суму $ax + by + cz$. За цією сумою він одразу відгадує задумані цифри. У чому ж суть фокуса Незнайка?

Краса математичної задачі не вичерпується її формулюванням, її збагачує ідея розв'язання. Вона має свою внутрішню логіку розвитку, завдяки їй і складаються методи або підходи багатьох розділів математики.

Так, наприклад, для задачі:

Задача 5. На дошці в ряд виписані натуральні числа від 1 до 2019. Грають двоє. За один хід можна викреслити будь-яке записане на дошці натуральне число разом з усіма його дільниками. Виграє той, хто закреслює останнє число. З'ясуйте, хто з гравців має виграшну стратегію.

Очевидно, що ця гра не може закінчитися вничю. Якщо існує виграшна стратегія в одного з гравців, то знайти її досить не просто. А тому краще розглянути таку яскраву ідею: довести існування стратегії (для конкретного гравця) неконструктивно, не пред'являючи самої стратегії. Суть в тому, що якщо для чисел від 2 до 2019 у гравця, який починає гру, є виграшна стратегія, то задача розв'язана (число 1 закреслюється разом з будь-яким першим числом). А якщо для чисел від 2 до 2019 у гравця, який починає гру, немає виграшної стратегії, то першим своїм ходом він викреслює 1 і передає хід другому гравцю, де для чисел від 2 до 2019 у другого гравця, він вже починає гру, немає виграшної стратегії. Тобто другий гравець опиняється в програшній ситуації. Таким чином, у гравця, який починає гру, завжди є виграшна стратегія.

Така надзвичайно яскрава ідея розв'язання буде корисною і при розв'язанні інших задач, особливо логічного спрямування.

Враховуючи різну підготовку членів гуртка, керівник не повинен допускати, щоб учні, які розв'язали запропоновану задачу швидше, заважали іншим. Тому бажано, щоб вчитель мав одне або декілька додаткових питань або задач «двійників», які він може запропонувати учням, що розв'язали задачу раніше за інших. Питання такого роду можуть носити характер додаткового дослідження.

Розглянемо приклад «задач-двійників».

Задача 6. Уздовж дороги росте 8 кущів малини. Число ягід на сусідніх кущах відрізняється на 1. Чи може бути на всіх кущах разом 225 ягід?

Розв'язання. Розглянемо два сусідні кущі. Якщо на одному з них парна кількість ягід, то на іншому — непарна, оскільки число ягід на сусідніх кущах відрізняється на 1. Всі кущі малини можна розбити на чотири пари. Тоді ми маємо, що на чотирьох кущах парна кількість ягід, а на чотирьох — непарна. Але тоді кількість ягід на всіх кущах разом є числом парним і тому дорівнювати 225 не може.

Та сама задача, але дещо змінена:

Задача 7. (пропонувався на олімпіаді МФТ) В таблиці розміром 10×10 в довільному порядку розміщено натуральні числа від 1 до 100. Нехай S_1, S_2, \dots, S_{10} — суми чисел в 1, 2, ..., 10 стовпчиках відповідно. Чи може так бути, що серед чисел S_1, S_2, \dots, S_{10} кожен два сусідні відрізняються на 1.

Розв'язання. Якби серед чисел S_1, S_2, \dots, S_{10} кожен два сусідні відрізнялися на 1, то серед них було б 5 парних і 5 непарних. Тоді $S_1 + S_2 + \dots + S_{10}$ (сума всіх чисел в цій таблиці) є числом непарним. Але сума всіх чисел, що стоять у таблиці, дорівнює: $1 + 2 + \dots + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5050$ — число парне. Отже, не може бути, що серед чисел S_1, S_2, \dots, S_{10} кожен два сусідні відрізняються на 1.

Після розв'язання цікавої задачі майже завжди можна розвинути і узагальнити її, а потім намагатися знайти розв'язок цієї нової проблеми. Узагальнення задачі або цілого класу задач та пошук її розв'язання формують в учнів дослідницькі вміння (а це дозволить таким учням в недалекому майбутньому стати слухачами, кандидатами і членами Малої академії наук (МАН)), а тому до домашнього завдання доцільно включати завдання, які вимагатимуть від учня не тільки узагальнення деякої задачі, а й пошук її розв'язання.

Роботу з навчання прийомам узагальнення корисно починати ще при розгляді теоретичної бази теми.

Розглянемо приклади своєрідного узагальнення задачі.

Задача 8. Доведіть, що в будь-якій компанії з 6 осіб знайдеться троє попарно знайомих або троє попарно незнайомих.

Цю задачу зручно переформулювати: на площині розміщено 6 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Кожен дві точки з'єднано відрізком одного з двох кольорів. Довести, що існує трикутник, в якого всі сторони одного кольору.

Доведення. Розглянемо довільну точку A . З неї виходить 5 відрізків, кожен з яких одного

з двох кольорів. За принципом Діріхле, хоча б три з них одного кольору (якщо учні не знають цього принципу, спробуйте довести від супротивного). Нехай це відрізки AA_1, AA_2, AA_3 . Якщо серед відрізків A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 знайдеться відрізок того ж кольору, то існування трикутника доведено. Якщо ж ні, то таким трикутником буде трикутник $A_1A_2A_3$.

На шостій міжнародній олімпіаді було запропоновано таку задачу: кожен із 17 вчених листується з іншими. В їхньому листуванні йдеться лише про три теми. Кожна пара вчених листується одна з одною лише з однієї теми. Доведіть, що не менше трьох учених листуються один з одним з однієї і тієї ж теми.

Кожному вченому поставимо у відповідність точку на площині і з'єднаємо точки відрізками трьох кольорів у залежності від того, з якої теми листуються відповідні вчені. Отримаємо задачу: на площині розміщено 17 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Кожні дві точки з'єднано відрізком одного з трьох кольорів. Довести, що існує трикутник, в якого всі сторони одного кольору.

Найсильніші учні можуть самостійно розв'язати цю задачу, якщо вони глибоко зрозуміли розв'язання задачі для двох кольорів та 6 точок. Але, можливо, доведеться трішки їх підштовхнути.

Для доведення досить розглянути довільну точку та 16 відрізків, що виходять із неї. Серед відрізків за принципом Діріхле знайдеться 6 відрізків одного кольору. Якщо які-небудь з точок, до яких проведено ці відрізки, з'єднано відрізком такого ж кольору, то трикутник існує. Якщо ж ні — ці точки з'єднані відрізками двох інших кольорів і отримуємо задачу для 6 точок та двох кольорів.

Корисно, щоб учні самостійно дослідили, яку кількість точок потрібно вказати для чотирьох кольорів.

Інший шлях узагальнення вище зазначеної задачі — залишити два кольори, але досліджувати, якою повинна бути мінімальна кількість точок для існування однокольорових структур із більшою ніж 3 кількістю вершин (пошук чисел Рамсея).

Задача 9. Згадаємо ряд Фібоначчі: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... ($a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_0 = a_1 = 1$).

Геометрична інтерпретація чисел цього ряду дозволяє побудувати софізм зі «зникненням» або «появою» квадрата 1×1 (рис. 3):

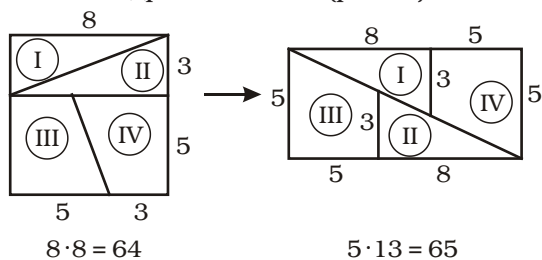


Рис. 3

Ця задача Кассіні викликає щире здивування у дітей, адже аксіоми площі многокутника виконуються (щоправда, на перший погляд). І все ж таки, звідки з'являється зайвий квадратик?

Задача узагальнюється на наступні члени ряду Фібоначчі (рис. 4):

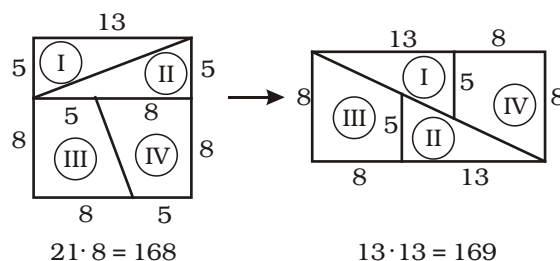


Рис. 4

Куди подівся один квадратик? Які ще наступні члени послідовності чисел Фібоначчі дають змогу побудувати такого роду софізм? Запропонуйте розрізання на чотири частини для чисел $a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ для $n \geq 8$ і дайте геометричну інтерпретацію.

Зауважимо, що цю задачу можна віднести до задач на знаходження помилок, які «оживляють» дітей на занятті.

Діапазон задач, які узагальнюються, їх тематика, характер і складність можуть бути найрізноманітнішими. Головне, щоб кожна така задача знайшла свого дослідника. Найкращим помічником — посібником задач, що узагальнюються, — для керівників гуртків можуть стати задачі з ТЮМу, а також задачі з журналів «Квант», «У світі математики», «Математика в рідній школі». Зауважимо, що формулювання й результати багатьох задач, особливо більш простих, можуть бути значно узагальнені — це завжди високо оцінюється, а розв'язання або часткове розв'язання більш узагальнених задач часто потребує розгляду спеціальних випадків. Спеціалізація задачі є оберненою дією до її узагальнення. Доцільніше спеціалізацію задачі проводити на основі спеціалізації даних або невідомих. Особливо корисно розглядати спеціальні випадки для задач олімпіадного характеру, оскільки окремі (частинні) спеціальні випадки дозволяють знайти головну (більш загальну) ідею розв'язання.

Традиційно перед учнями рідко одразу ставлять нову задачу з невідомим методом розв'язання, а ще рідше просять учня самого ставити нову задачу. Вивчати матеріал можна в двох протилежних напрямках: від теорії та від задач, кожен з яких має свої переваги і недоліки. Відокремленим є підхід — «листоків», при якому керівник гуртка не пояснює теоретичного матеріалу (або пояснює певній частині), а учень (або інша частина) вивчає тему, самостійно розв'язуючи дану послідовність задач,

спеціально сформульованих і упорядкованих керівником. Листок із завданнями при цьому має обов'язково містити такі положення:

- основні мінімальні теоретичні питання, яких достатньо буде для розв'язання циклу запропонованих задач, або достатньо, щоб здобути нові невідомі факти самостійно завдяки поставленим задачам;

- завдання для колективного розв'язування;
- завдання пошукового і дослідницького характеру;

- нерозв'язані задачі і відкриті проблеми та гіпотези цієї теми;

- література, за допомогою якої можна збагатити знання з теми.

Вивчаючи «від теорії», ми виховуємо користувача науки, який успішно може використовувати відомі методи в різних ситуаціях. Вивчаючи «від задач» — виховуємо творця науки, здатного знаходити нові методи та ставити нові задачі. Отже, для дітей, обдарованих у математиці, з'являється нова можливість — поглиблюватися не за рахунок пасивного вивчення більш складної теорії, а за рахунок активної самостійної роботи при вивченні того ж матеріалу. Зрозуміло, що навчання «від задач» має більш індивідуальний підхід, порівняно з навчанням «від теорії», а тому на заняттях гуртка можливі тільки деякі елементи такого навчання. Такого роду різні форми організації пізнавальної діяльності дають широку можливість диференціації навчально-дослідницької діяльності та систематичності її здійснення [4].

Доцільно на заключне заняття теми систематизувати всі відкриті проблеми та гіпотези і занести їх до «листка» з завданнями у рубрику *нерозв'язаних проблем теми*. Ось як може виглядати така рубрика з теми: «Різновиди простих чисел» у листку з завданнями.

Деякі нерозв'язані проблеми:

Досі невідомо, чи простих чисел Мерсена ($M_n = 2^n - 1$) нескінченна кількість. Відповідно невідомо, чи є нескінченно багато досконалих чисел.

Чи існує нескінченна кількість простих n , для яких M_n — складене?

Досі невідомо, чи є непарні досконалі числа. Якщо такі числа є, то доведено, що вони будуть мати не менше ніж 8 простих дільників і в десятковому записі буде не менше ніж 300 цифр.

Нехай n — просте. Чи завжди число M_n не ділиться на квадрат жодного простого числа?

Чи існує нескінченна множина чисел Мерсена, які не діляться на квадрат простого числа?

Учні також можуть узяти участь у пошуку нових простих «чисел-гігантів». GIMPS безкоштовно надає програмне забезпечення та іншу інформацію для пошуку простих чисел на комп'ютерах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Балк М. Б. Математика после уроков. Пособие для учителей / М. Б. Балк, Г. Д. Балк. — М.: Просвещение, 1971. — 462 с.

2. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание / Кудрявцев Л. Д. — М.: Наука, 1980. — 144 с.

3. Рубанов И. Лекции по олимпиадным задачам / И. Рубанов // Газета Математика, приложение 1 сентября. — 2001. — № 1, 2, 3.

4. Пихтар М. П. Підхід «Листків» в гуртковій роботі з учнями Малої академії наук // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізика і математика у вищій і середній школі: Зб. Наукових праць — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. — № 5. — С. 132 — 141.

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

**Підтримайте журнал «МАТЕМАТИКА В РІДНІЙ ШКОЛІ»!
Передплатіть наше видання!**

Ми завжди готові надати вам методичну та наукову допомогу!
Передплатіть – не пошкодуєте – отримаєте досвід колег!
Поділіться своїм досвідом! Надсилайте нам свої статті!

**Статті передплатників друкуємо позачергово!
Електронна адреса редакції журналу:
2345255@ukr.net (з поміткою: для журналу «Математика»)
Передплатний індекс 68834**

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОН-ЛАЙН ОЛІМПІАДА НАЙКРАЩИХ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ УКРАЇНИ (ВОМ), ІІІ ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ УЧНІВ 5–7 КЛАСІВ

Катерина ДУДКО, Марк ЄМЕЦЬ, Заріна КОДИРОВА, студенти факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

Оксана МЕКУШ, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу та статистики Волинського національного університету імені Лесі Українки;

Богдан РУБЛЬОВ, професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Мета проведення олімпіади

Традиційно щороку за графіком наприкінці березня, початку квітня в Україні проводяться вирішальні IV етапи олімпіад з усіх предметів. Їх кількість змінюється, бо з'являються нові напрями творчості, тому точно число вказати важко, але точно більше, ніж 20. Майже кожний обласний центр країни кожного року приймає якусь всеукраїнську олімпіаду. Останні 3–4 роки більшість олімпіад, як завжди, проводилися під час весняних канікул, а з математики проводилася тижнем раніше. Добре відомо, що математика не просто ЦАРИЦЯ НАУК, а ще її вивчають у школі з 1 класу. Тому більшість учнів, які мають досягнення з природничих предметів дуже гарно знають математику. Якщо в області з'являється надталановита дитина, то вона часто виборює собі право брати участь у декількох всеукраїнських олімпіадах природничого напрямку. Із-за збігу термінів проведення їй доводиться обирати лише одну, і зазвичай це не математика, бо добре відомо, що останні роки перемогти в математичних олімпіадах представникам регіонів непросто. Дуже потужно останнім часом виступають представники Києва, Харкова, Львова, УФМЛ. Таким чином, саме представницький склад математичної олімпіади зазнавав втрат і, можливо, дуже суттєвих.

Завдяки зсуву математичної олімпіади на тиждень раніше ми мали змогу бачити всіх найкращих юних математиків України, значна кількість яких наступного тижня їхала на іншу предметну олімпіаду (напрошується жарт зі світу спорту — спочатку олімпіада, а за нею паралімпіада, але ми геть нікого не хочемо образити, просто гумор!). І цього року наша всеукраїнська олімпіада з математики мала відбутися в Миколаєві з 16 по 20 березня 2020 року, не вистачило буквально 2–3 днів, у країні проголосили карантин і всі масові заходи, тим паче з переміщенням дітей було заборонено. Спочатку на 2 тижні, МОН навіть приготувався проводити Всеукраїнські олімпіади одразу по завершенні карантину, правда, не повним обсягом, а по дев'яти предметах, які є учасниками міжна-

© Дудко К. С., Ємець М. Д., Кодирова З. І., Мекуш О. Г., Рубльов Б. В., 2020

родних. Але, як ми добре знаємо, карантин продовжили, а проведення IV етапів олімпіад скасували. Як виявилось, скасування цього року відбулося повністю та остаточно, точніше ніхто в МОН не збирався цим перейматися. Незважаючи на суттєве послаблення карантинних обмежень, МОН повністю зосередилося на проведенні ЗНО, яке тривало з 25 червня по 13 липня 2020 року. Тим паче що й призначеного міністра освіти і науки не було. А для того щоб провести скасовані всеукраїнські олімпіади, слід було застосувати багато організаційних зусиль, а також знайти фінанси на їх проведення, які забрали майже одразу.

Таким чином, керівники олімпіад з усіх предметів постали перед проблемою — прийняти позицію МОН та відкласти олімпіаду принаймні на рік або зробити щось самим. Перша позиція дуже зручна та спокійна: ніхто не зможе звинуватити нікого у бездіяльності. Але відмова від олімпіад автоматично скасовує можливу участь учасників від України у відповідній Міжнародній олімпіаді. Деякі з таких олімпіад були скасовані, але не з математики. Навпаки, керівництво Міжнародної математичної олімпіади зробило все можливе, щоб ця олімпіада відбулася. Її було перенесено на вересень 2020 року, щоб усі країни могли встигнути відібрати учасників, а також переведено в режим он-лайн. Тобто учасники кожної країни мали змагатися у в своїх країнах. Тому ми вирішили піти другим шляхом та організувати аналог Всеукраїнської олімпіади своїми силами.

Принципи проведення олімпіади

Найголовнішою нашою умовою при організації проведення ВОМ було те, щоб вона була максимально наближеною до відміненого IV етапу Всеукраїнської олімпіади — за складом учасників, журі, умовами організації, рівнем завдань тощо. Таким чином, у ВОМ змагалися учасники по чотирьох паралелях 8–11 класів, у кожній з яких було проведено 2 тури. У кожному турі учасникам було запропоновано по 4 задачі на 4 год. До участі в ВОМ були запрошені всі учасники від кожної області,

хто виборів право змагатися у IV етапі олімпіади з математики, включно з переможцями Інтернет-олімпіади. Розуміючи складність організації ВОМ через пандемію та через незвичні терміни, ми розуміли, що деякі учасники не зможуть взяти участь у заході. Але усі заміни учасників команд від областей відбувалися за спортивним принципом, тобто вакантні місця посідали або наступні за рейтингом учасники від області, або команда ставала меншою за складом.

Узявши до уваги план проведення Міжнародної олімпіади, а саме проведення турів кожною командою в межах своєї країни, ми прийшли до схожого сценарію і вирішили провести ВОМ по регіонах. Тобто команда від кожної області мала зібратися в місці, визначеному керівництвом обласної команди. Вже із цих міркувань стає зрозумілим, що у кожній області ми мали спиратися на довірених осіб. Їхня роль була надважливою — це й організація дітей, знаходження зручного та безпечного місця проведення олімпіади, отримання завдань, контроль за доброчесністю тощо. На щастя, у кожній області такі люди знайшлися, за що ми надзвичайно їм усім вдячні. Хотілося б перелічити всіх наших колег, які на волонтерських засадах провели колосальну роботу, але це вийде надзвичайно довгий список, бо в кожній області до проведення ВОМ долучилися одразу декілька небайдужих людей.

Так само варто зазначити, що в усіх регіонах були забезпечені безпечні умови для проведення заходу, всі діти-учасники були на належній відстані один від одного, на вході проводилося вимірювання температури, в кожному місці чергував лікар тощо, тобто умови були більш безпечними, ніж при проведенні цьогорічного ЗНО. Зазначаємо, що батьки кожної дитини пересвідчилися в належних умовах організації заходу й особисто дали дозвіл на участь у ньому своїх дітей.

ВОМ було проведено 20–21 липня 2020 року, основу журі складали затверджені раніше МОН члени журі IV етапу Всеукраїнської олімпіади з невеличкими змінами. Так само слід зазначити бездоганну роботу цьогорічного журі, яке працювало — перевіряло роботи, виставляло та узгоджувало бали, проводило апеляцію та остаточні підсумки — он-лайн, і впоралося з цим бездоганно.

Треба зазначити величезну роль в організації ВОМ студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Катерини Дудко, Марка Ємця, Заріни Кодирової та багатьох інших помічників-волонтерів. Більше трьох тижнів їхньої напруженої роботи були не марними. Особливо під час самої олімпіади, коли треба було організувати своєчасну відповідь на запитання, розсилку умов, розв'язань, уточнень тощо, організація он-лайн роботи журі під час перевірки та апеляцій — це все їхня величезна заслуга.

III Всеукраїнська олімпіада для учнів 5–7 класів

Оскільки ми вже взяли за організацію Всеукраїнської олімпіади, то гріх було не провести і той захід, який ми самі започаткували і завжди проводили під егідою КНУ ім. Тараса Шевченка, а саме — Всеукраїнську олімпіаду для учнів 5–7 класів. Цього року вона мала відбутися вже втретє, як зазвичай, у травні, але так само була скасована через вірус, але на щастя виявилася так само не скасованою, а перенесеною. Ми запропонували нашим однодумцям у кожному регіоні, хто свого часу відібрав дітей для участі в цій олімпіаді — провести і цей захід одночасно з ВОМ. Тим паче, що формат олімпіади дуже схожий за змістом, лише час виконання робіт учнями 5–7 класів трохи менший. Дуже приємно, що в переважній більшості регіонів і цю олімпіаду вдалося провести!

Підсумки олімпіади

Як на нас, це був дуже визначальний рік, коли дійсно треба було щось зробити, організувати самим, без наказу, без грошей, зробити це для найкращих юних математиків своєї області. Очевидно, що якби був наказ МОН «Провести ...», то відношення було б геть інше і все було б зроблене, але ми не впевнені, що за наказом було б створено таку саму душевну атмосферу у більшості регіонів, як це зробили справді зацікавлені та дійсно небайдужі люди.

Загалом протягом усіх років ми формували наше журі таким чином, щоб там були, з одного боку, наші найкращі студенти, які дуже фахово й оперативно вміють перевіряти задачі будь-якого рівня — від простеньких до найскладніших. Крім того, в живому спілкуванні з ними учасники олімпіад дізнавалися багато цікавого про долю олімпіадників по завершенні школи, про студентське життя тощо. З іншого боку, там були зібрані представники від кожного регіону, саме задля того, щоб в регіонах знали про всі події, щоб пробували організувати, упорядкувати, посилити олімпіадний рух у кожній області. Очевидно, що саме на них ми хотіли спиратися і цього разу під час організації ВОМ та «5–7». Крім того, ми зверталися до методистів з математики в областях, а також керівників команд від області на IV етапі Всеукраїнської олімпіади.

Різноманіття відповідей вражало...

«Сто відсотків проведемо в нашому регіоні, не хвилюйтеся». Очевидно, що в такому регіоні не було жодних питань у сенсі того, що захід відбудеться, ми лише коригували та уточнювали робочі моменти.

«Я б радо провів, але я не дуже знаю, як то робитися». Якщо справді було бажання, то, врешті-решт, все було б зроблене в такому регіоні якнайкраще.

«Мене не буде на місці на час олімпіади». Дійсно таке бувало, бо ми всі люди і настало літо. В деяких регіонах відповідальні люди знаходили повноцінну заміну собі на час олімпіади, щоб зробити захід. А в деяких — просто відсторонилися, на що мали повне право...

«Без наказу МОН у нашому регіоні ми нічого організувати не будемо і більше мене не турбуйте». Зрозуміло, що в таких областях ми просто шукали і знаходили інших, небайдужих людей, на яких плануємо спиратися в подальшому. Хоча дуже дивно таке було чути від колишніх членів журі, які до цього багато років поспіль їздили державним коштом на всі олімпіади, де зазвичай такі делегації приймали на найвищому рівні, а тепер не мали бажання докласти своїх зусиль для дітей суто своєї області... Як колись казав славнозвісний коментатор радянських часів (мовою оригіналу): «Нам такої хокей не нужен!»

Загалом у ВОМ узяв участь 161 учасник, серед яких 147 було тих, хто виборов собі право участі в IV етапі Всеукраїнської олімпіади, а також 66 учасників олімпіади для учнів 5–7 класів. Заходи відбулися в усіх областях України, за винятком Донецької та Київської областей. Учасники від Донецька писали олімпіаду з харків'янами, а учасники від Київщини — з киянами, так само в Києві змагалася більшість учнів від УФМЛ.

Загалом з усіма перипетіями організації та проведення, умовами та розв'язаннями задач, повними результатами Всеукраїнської олімпіади найкращих юних математиків України та III Всеукраїнської олімпіади для учнів 5–7 класів можна ознайомитися на сайті matholymp.com.ua.

МОН та ВОМ

На жаль, МОН не визнало ВОМ правонаступницею цього річної Всеукраїнської олімпіади з математики. Їхні головні аргументи доволі зрозумілі.

- Всеукраїнська олімпіада не може проходити по регіонах.
- IV етап Всеукраїнської олімпіади було скасовано.
- МОН не може нагороджувати переможців скасованого заходу.

Ми сприйняли це спокійно, але виникає запитання: «Хіба в МОН було мало часу, щоб видати тимчасові правила проведення IV етапу в теперішніх умовах, як то швиденько зробили для ЗНО? Хіба мало було часу скасувати наказ про скасування IV етапу?» Як кажуть — на все була добра воля, можна було спокійно все встигнути і не просто стати стороннім спостерігачем цих заходів, а допомогти з його проведенням. Добре зрозуміло, що в багатьох регіонах без підтримки МОН наші місцеві організатори часто наштовхувалися на певні (а

десь досить великі) складнощі при проведенні ВОМ. Але все вже відбулося.

Здається, звідси є простий висновок. Деякі чиновники, причетні до проведення олімпіад, вважають, що ці олімпіади проводять суто для цифр у звітах цих чиновників — стільки-то дітей взяло участь у I турі, стільки — в такій області чи районі тощо. Саме так — не задля талановитих дітей, щоб показати їм усю красу освіти, найкращі перлинки кожного предмета, а для того, щоб чиновник міг відзвітуватися. І тоді очевидно, що найкращим буде звіт, якщо зверху скасують проведення тієї чи іншої олімпіади. На щастя, не всі чиновники такі, але їх надто багато було виховано системою, де ініціатива може бути покараною, а сліпе виконання усіх розпоряджень та бездіяльність при відсутності наказу — ніколи.

Насправді, ВОМ та олімпіаду 5–7 ми проводили задля дітей, вчителів, батьків тощо, усіх тих, для кого ці олімпіади мають важливе значення в житті. При теперішніх програмах та рівні ЗНО — в олімпіадах беруть участь наші найкращі учні кожної школи, кожного району, області. Вони не бояться отримати задачі, які ще не вміють розв'язувати і прагнуть вчитися, рівнятися на найкращих. Нагадаю, що декілька років назад ми поміняли систему відбору в команду України на ІМО, відкрили доступ для учнів молодших класів. Цим одразу скористався наш геніальний Антон Тригуб, який тричі виборов собі право брати участь в ІМО. І цей приклад став дуже яскравим та наочним. Тепер у нас таких прикладів дедалі більше — Шон, Юдін, зараз 9-класник Пілаєв претендує на місце в команді. Я вже не кажу про регулярну участь у команді 10-класників. І такі приклади вдалих виступів на олімпіадах є у кожній області. І діти, беручи участь в олімпіадах пліч-о-пліч з такими дітьми, самі прагнуть стати схожими на них, самі мріють навчитися й перемагати.

Загалом ситуація з вірусом надто нестандартна та нестабільна в сенсі прийняття рішень керівництвом стосовно обмежувальних заходів. Тому можливі варіанти від такого, що всі олімпіадні заходи відбуватимуться звичайним чином — як то було до пандемії, до такого, коли можуть заборонити проведення будь-яких олімпіад та турнірів. Тому ми маємо зреагувати на це адекватно. По-перше, продумати варіанти проведення олімпіад з урахуванням обмежень, але жодним чином не по домівках, бо варіант жорсткого карантину лише в освіті просто неможливий, а тому не може тривати більше пари тижнів. По-друге, прийняти «Тимчасове Положення про олімпіади» або «Тимчасові правила проведення різних масових заходів», у яких були б прописані можливості легітимного проведення заходів різних рівнів.

Оксана МЕЖУШ, Богдан РУБЛЬОВ

III ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ УЧНІВ 5 – 7 КЛАСІВ

ПІД ЕГІДОЮ КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Розв'язання завдань

5 КЛАС

I тур

1. Чи існує таке натуральне число a , що наведені три числа є квадратами натуральних чисел: $16 + a$, $3 + a$ та $16 \cdot 3 + a$.

Розв'язання. Виберемо $a = 33$, тоді $16 + a = 49$, $3 + a = 36$ та $48 + a = 81$.

Відповідь: так.

2. Прямокутник був розрізаний на фігурки, які зображені на рис. 1. Чому може дорівнювати периметр цього прямокутника? Вкажіть усі можливі відповіді. Фігурки могли бути повернуті чи перегорнуті.

(Богдан Рубльов)

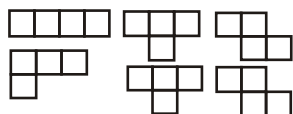


Рис. 1

Розв'язання. Зрозуміло, що площа цього прямокутника має дорівнювати 24. З рівностей

$$24 = 24 \cdot 1 = 12 \cdot 2 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$

маємо, що теоретично можливі 4 варіанти. Але не усі з них можливі.



Рис. 2



Рис. 3

Прямокутник 24×1 утворити не можна, бо всі фігурки, окрім однієї, мають обидва виміри більші за 1.

Прямокутник 12×2 утворити так само не можна. Якщо вважати, що його більша сторона горизонтальна, то фігурка 4×1 так само має мати більшу сторону горизонтальною. Але тоді ми не зможемо з інших 5 фігур вибрати 2, які б заповнили прямокутник 4×1 , що розташований над ним (чи під ним, що однаково). Лише з одного боку можна покласти фігурку (рис. 2), а всі інші мають виходити на третю горизонталь, що неможливо.

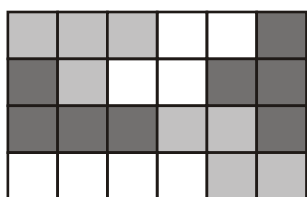


Рис. 4

Таким чином, можливі лише два інші випадки. Покажемо, що вони дійсно могли бути розрізані належним чином (рис. 3, 4).

Таким чином, периметр може дорівнювати або $2 \cdot (8 + 3) = 22$, або $2 \cdot (6 + 4) = 20$.

Відповідь: 22 або 20.

3. Мама Петрика 3 роки тому була в 5 разів старша за Петрика у той момент. 3 роки тому мама Петрика мала такий вік, який мала бабуся Петрика в день народження мами Петрика. Зараз бабуся Петрика у 7 разів старша за Петрика. Скільки років мамі Петрика зараз?

Розв'язання. Нехай вік Петрика зараз є x . Тоді 3 роки тому він мав вік $x - 3$, а мама — $5(x - 3)$, тому зараз його мамі $5x - 12$. Бабусі зараз $7x$. Тепер залишається використати останню умову. В день народження мами бабусі було $7x - (5x - 12) = 2x + 12$ років, тому має справджуватися рівність: $5x - 15 = 2x + 12 \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9$. Тому зараз мамі Петрика $5x - 12 = 33$.

Відповідь: 33 роки.

4. Яка найменша кількість футбольних команд могла провести турнір в одне коло, тобто кожна команда грає з кожною іншою рівно один раз, щоб справджувалися такі умови:

- кожна команда виграла рівно 2 гри і програла рівно 2 гри (решта матчів завершилися нічиєю);
- не існує таких трьох команд A , B та C , що команда A виграла в команди B , команда B виграла в команди C і команда C виграла в команди A ?

Розв'язання. Припустимо, що таке можливе за участі 6 команд. Виберемо команду A , нехай вона виграла в команд B та C , а програла командам D та E . Якщо команди B чи C виграли принаймні в однієї з команд D чи E , то шукана трійка утворилася, наприклад $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$.

Якщо це не так, то B мала виграти в C та E , але й C мала виграти в B та E . Отже, отримали суперечність із результатом зустрічі між B та C .

Очевидно, що й для меншої кількості команд такий приклад неможливий.

Покажемо, що між 7 командами такий турнір можливий: позначимо команди A , B , C , D , E та F . Вважатимемо, що вони таким чином розташовані по колу, що після F йде знову A , B , ... Вважатимемо, що кожна команда виграла у двох, що йдуть одразу після неї, тобто E виграла у F та A . Звідси кожна команда програла

двом, що йдуть перед нею. Трійки команд, що порушує другу умову, не існує. У цьому можна безпосередньо переконалися на прикладі команди А, для інших все аналогічно.

Відповідь: 7.

5. Є вісім однакових на вигляд гир масою 1, 2, ..., 8 грамів, кожна з яких пофарбована в унікальний колір. Оксана знає масу гирі кожного кольору. Є двохшалькові терези, на яких можна розмістити гирі у рівновазі. Чи може Оксана зробити рівно два зважування, після яких Петрик зможе точно знайти гирю масою 1 г?

Розв'язання. Перше зважування — на одну шальку Оксана кладе гирі 1, 2, 3, 4, 5 г, а на другу — 7, 8 г. Неважко збагнути, що маса п'яти найменших гир дорівнює 15, так само як і маса двох найбільших. Тому це єдиний розподіл гир. Отже, Петрик вже знає колір двох найважчих гир у 7 та 8 г.

Друге зважування — на одну шальку Оксана кладе гирю у 8 г, а на другу — дві гирі у 1 та 7 г. Оскільки Петрик уже знає колір важких гир, то, очевидно, що третя гиря з ними, що може зробити рівновагу — це гиря масою 1 г.

Відповідь: так.

II тур

6. Коник стрибає по координатній площині. З точки з координатами (x, y) він може зробити будь-який стрибок одного з трьох типів: $(x, y) \rightarrow (x, y - 5)$, $(x, y) \rightarrow (x - 2, y + 3)$ та $(x, y) \rightarrow (x + 4, y + 9)$. Чи зможе він розпочати шлях з початку координат — точки $(0, 0)$ і дістатися до точки з координатами:

- а) (2015, 2020); б) (2018, 2019);
в) (2018, 2023)?

Розв'язання. З наведених типів можливих стрибків маємо, що абсциса точки, в яку може стрибнути коник, завжди парна, тому в першу точку коник потрапити точно не може. Після кожного стрибка різниця між абсцисою та ординатою завжди кратна 5. Це справджується в початковій точці, тому має зберігатися й у кожній, в яку коник може потрапити. Таким чином, він може досягти лише точки (2018, 2023). Залишається показати, що це можливо.

Дійсно, якщо зробити перший та третій стрибки, то матимемо такий перехід: $(x, y) \rightarrow (x + 4, y + 4)$. Таким чином, зробимо перескок у точку (2016, 2016), а далі у такий спосіб:

$(2016, 2016) \xrightarrow{(2)} (2014, 2019) \xrightarrow{(1)} (2014, 2014)$
 $\xrightarrow{(3)} (2018, 2023)$.

Відповідь: тільки до точки (2018, 2023).

7. Петрик хоче написати декілька натуральних чисел, які задовольняють такі умови:

• при записі всіх чисел разом кожен цифру від 1 до 9 можна використати не більше одного разу;

• жодні два із записаних чисел не мають ділитися націло одне на інше.

Скільки щонайбільше Петрик може записати таким чином чисел?

Розв'язання. Зрозуміло, що треба мати побільше одноцифрових чисел. Очевидно, що число 1 не може бути записане окремо. Якщо там записане окремо число 2, то одразу чотири цифри мають бути записаними принаймні у двоцифровому числі, при записі числа 3 — два числа, при записі числа 4 — число 8 не може з'явитися окремо. Звідси випливає, що 8 таких чисел бути не може, бо або 1, або 2 будуть записані окремо, а це означає, що принаймні два двоцифрові числа мають з'явитися.

Розглянемо такі 7 чисел: 5, 6, 7, 8, 9, 23, 41 — вони задовольняють умову.

Відповідь: 7.

8. На скляному столі 10×10 щільно розташовані 100 правильних гральних кубиків таким чином, що якщо два кубики дотикаються гранями, то на цих гранях записані однакові значення. В усіх 100 гральних кубиків видно 100 граней зверху та знизу, а також по 10 граней із кожного краю. Яка максимальна сума очок може бути на цих видимих 240 гранях? Гральний кубик вважаємо правильним, якщо суми очок на кожній парі протилежних граней дорівнює 7.

Розв'язання. За наведеними правилами, якщо на лівій видимій грані кубика (першому в ряду) записане a очок, тоді на протилежному, на правій грані записане $7 - a$ очок. Тоді на сусідньому з ним кубику (другому в ряду) — навпаки записане на лівій грані $7 - a$, а на правій — a . Таким чином, на правій грані десятого кубика (видимій) — записане число a . Тож усього на 10-ти лівих гранях записані такі ж числа, що й 10-ти правих. Аналогічно для передніх та задніх граней. А от зверху та знизу завжди записана кількість очок, що в сумі дає 7. Тому найбільша можлива сума на усіх 240 видимих гранях складає:

$$7 \cdot 100 + 20a + 20b = \\ = 700 + 120 + 100 = 920,$$

коли зліва та зраду маємо найбільші можливі значення для очок — 5 та 6.

Відповідь: 920.

9. На дошці в рядок виписані числа 1, 2, 3, ..., n . Петрик та Івасик грають у таку гру. Вони по черзі, розпочинає Петрик, викреслюють по одному виписаному числу так, що вже викреслене число вдруге викреслювати не можна. Перемагає той, після чийого ходу на дошці будуть викреслені три такі числа, що одне з них є середнім арифметичним двох інших. Кожний прагне виграти, хто переможе, якщо

- а) $n = 2020$; б) $n = 2021$;
в) $n = 2022$.

Розв'язання. б) своїм першим ходом Петрик закреслює число, що знаходиться по середині, а саме 1011. Тоді на будь-який вибір числа Івасиком, наприклад, $k < 1011$, Петрик вибирає таке число $m = 2022 - k$, для якого $\frac{1}{2}(k+m) = 1011$.

а) Петрик першим ходом вибирає число 1010. Якщо Івасик вибере одне з чисел до 2019, то Петрик переможе за алгоритмом, що описаний в пункті б). Якщо Івасик вибере число 2020, то Петрик переможе, якщо вибере число $1515 = \frac{1}{2}(1010+2020)$.

в) Нехай, без обмеження загальності, Петрик вибирає число $k \leq 1011$. Тоді Івасик вибирає число m , яке дорівнює 2022 або 2021 — відмінної парності від k . Нехай Петрик вибере число l . Тоді число $\frac{1}{2}(k+m)$ — не ціле, а тому не може дорівнювати l . Так само зрозуміло, що середнім арифметичним не може стати число m , бо для того існує лише один варіант: $2021 = \frac{1}{2}(2020+2022)$. Нарешті число k не може бути середнім арифметичним, бо $\frac{1}{2}(l+m) \geq \frac{1}{2}(2021+1) = 1011$, але якщо Петрик першим ходом вибрав саме 1011, то Івасик за алгоритмом обрав би 2022. Таким чином, своїм другим ходом Петрик не виграв і на дошці записані три числа. Два з них однієї парності. Тепер Івасик просто вибирає число, яке є середнім арифметичним цих чисел однієї парності. Воно точно не обране, інакше б переміг Петрик на попередньому ході, а тому переможе Івасик.

Відповідь: а), б) перемагає Петрик; в) перемагає Івасик.

10. У квадраті $ABCD$ проведена пряма a , що паралельна сторонам AB та CD та лежить рівно посередині між цими сторонами. На цій прямій всередині квадрата вибрані точки P та Q , кожна з яких з'єднала з вершинами A та C (рис. 5). При цьому утворилися три чотирикутники: $ADCP$, $ABCQ$ та $AQCP$ однакової площі. Відомо, що сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 6. Чому може дорівнювати довжина відрізка PQ ?

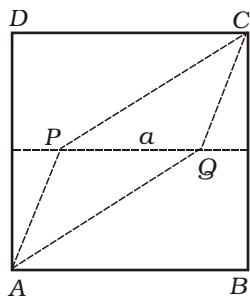


Рис. 5

Розв'язання. Позначимо відрізок прямої a , що лежить усередині квадрата $ABCD$ через YT . Також проведемо відрізок PX , що паралельний стороні AD , та відрізок XZ (рис. 6). Тоді зро-

зуміло, що площа $S(APY) = S(DXY)$. Крім того, очевидно, що $S(DXY) = \frac{1}{2}S(DXPY)$. Так само $S(CPX) = \frac{1}{2}S(CTPX)$. Звідси площа чотирикутника $APCD$ дорівнює половині площі прямокутника $TCDY$ та площі прямокутника $PXDY$. Якщо зробити аналогічні перетворення для точки Q (рис. 6), то $S(ABCQ) = \frac{1}{2}S(ABTY) + S(TBZQ)$.

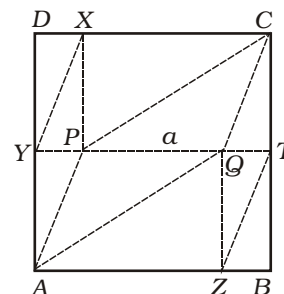


Рис. 6

Оскільки $S(ABTY) = S(CDYT)$, то умова $S(APCD) = S(ABCQ)$ перетворюється в рівність:

$$S(PXDY) = S(TBZQ) \Rightarrow 6 \cdot PY = 6 \cdot TQ \Rightarrow PY = TQ.$$

Нехай $PY = TQ = x$, тоді $PQ = 6 - 2x$. Тоді неважко обчислити, що $S(APCD) = \frac{1}{3}S(ABCD) = 12$. Крім того

$$S(APCD) = \frac{1}{2} \cdot S(YTCD) + S(YPXD) = 9 + 3x = 12 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow PQ = 6 - 2 = 4.$$

Відповідь: $PQ = 4$.

6 КЛАС

I тур

1. Чи існує таке натуральне a , що наведені три числа є квадратами натуральних чисел:

$$20 + a, 18 + a \text{ та } 20 \cdot 18 + a.$$

Розв'язання. Якщо припустити, що різниця двох квадратів дорівнюватиме 2, то це суперечить таким співвідношенням:

$$(m+1)^2 - m^2 = m^2 + 2m + 1 - m^2 = 2m + 1 \geq 3.$$

Відповідь: ні.

2. Задача № 2 за 5 клас.

3. Задача № 4 за 5 клас.

4. На уроці фізкультури вчитель вишукував у рядок усіх учнів таким чином, що для довільних трьох сусідніх учнів зріст першого учня у цій трійці перебуває між зростом другого та третього учнів. Після цього він попросив кожного другого учня в рядку зробити 3 кроки вперед. Утворилися два рядки з учнями. Доведіть, що у кожному з цих рядків учні розташовані монотонно за зростом.

Розв'язання. Позначимо через p_k — зріст k -го учня в рядку. Без обмеження загальності вважатимемо, що $p_1 < p_2$. Покажемо MMI, що в рядку зрости учнів задовольняють таким умовам: для непарного k : $p_{k+2} < p_k < p_{k+1}$ та для парного k :

$p_{k+2} > p_k > p_{k+1}$. База індукції, за умовою $p_3 < p_1 < p_2$. Нехай твердження справджується для $k-1$. Якщо $k-1$ — непарне, то k — парне. За припущенням $p_{k+1} > p_{k-1} > p_k$, тоді звідси $p_{k+1} > p_k$ і з умов задачі $p_{k+2} < p_k$. Тому $p_{k+2} < p_k < p_{k+1}$. Аналогічно у випадку парного $k-1$.

Але тепер для парного k маємо, що $p_{k+2} > p_k$, а для непарного $p_{k+2} < p_k$, що й свідчить про потрібну монотонність зростів учнів в обох рядках.

5. Є вісім однакових на вигляд гир масою 1, 2, ..., 8 грамів, кожна з яких пофарбована в унікальний колір. Оксана знає масу гирі кожного кольору. Є двошалькові терези, на яких можна розмістити гирі у рівновазі. Оксана хоче зробити декілька зважувань, після яких Петрик зможе точно знайти гирю масою 1 г. Яку найменшу кількість зважувань вона має зробити?

Розв'язання. Перше зважування — на одну шальку Оксана кладе гирі 1, 2, 3, 4, 5 г, а на іншу — 7, 8 г. Незважко збагнути, що маса п'яти найменших гир дорівнює 15, так само як і маса двох найбільших. Тому це єдиний розподіл гир. Таким чином, Петрик уже знає колір двох найважчих гир у 7 та 8 г.

Друге зважування — на одну шальку Оксана кладе гирю у 8 г, а на другу — дві гирі у 1 та 7 г. Оскільки Петрик уже знає колір важких гир, то, очевидно, що третя гиря з ними, що може зробити рівновагу — це гиря масою 1 г.

Те, що не можна знайти цю гирю за одне зважування, впливає з таких міркувань. Щоб її знайти за єдине зважування, вона має залишитися окремо, або на одній з шальок (що, очевидно, неможливо), або єдина, яку на шальки не покладуть. Але тоді мали б бути зрівноваженими всі інші 7 гир, але їхня сумарна вага — $2 + 3 + \dots + 8 = 35$ г, тобто непарна і на дві рівні частини не поділяється. Таким чином, одного зважування недостатньо.

Відповідь: 2.

II тур

6. Задача № 6 за 5 клас.

7. Задача № 7 за 5 клас.

8. Відомо, що для кожних трьох учнів, що зібралися в класі, справджуються дві такі умови:

- є такі двоє з них, що жодного разу не чергували разом;

- є такі двоє з них, що чергували разом.

Скільки щонайбільше учнів могло зібратися в класі?

Розв'язання. Припустимо, що існує учень А, який чергував принаймні з 3 іншими — Б, В та Г. Тоді жоден із цих трьох не міг чергувати разом, бо інакше утвориться трійка з цих двох та учня А, в якій немає тих, хто не чергував разом. Але тоді серед цих трьох Б, В та Г немає двох, які чергували разом. Отже, кожний

учень чергував не більше ніж із двома іншими. Розглянемо такий ланцюжок учнів, де кожні два сусідні чергували разом: $A_1 - A_2 - \dots - A_n$. Якщо $n \geq 5$, то A_2, A_3, A_4 утворюють трійку, в якій ніхто разом не чергував. Бо інакше хтось із них чергував не менше, ніж із трьома іншими, що вже раніше призвело до суперечності. Якщо існує учень В, що не чергував ні із ким з цього ланцюжка (а насправді, він міг почергувати лише з A_1 або A_n), то він разом з A_1 та A_3 знову утворює трійку, в якій ніхто разом не чергував. Таким чином, найбільша кількість учнів, що зібралася, не перевищує 5. Для 5 це цілком можливо. Чергували разом пари $A_i - A_{i+1}$ ($A_1 = A_6$).

Відповідь: 5.

9. Задача № 10 за 5 клас.

10. Петрик записав по колу в деякому порядку всі цілі числа від 1 до 27. Після цього він порахував усі попарні суми сусідніх чисел — одержав ще 27 чисел. Із них найбільшим виявилось число А, найменшим — число В. Якого найменш можливого значення може набувати число $A - B$?

Розв'язання. Одразу покажемо, що $A - B > 0$. Зрозуміло, що $A - B = 0$, якщо суми чисел у кожній парі однакові. Але для довільних трьох послідовних чисел x, y, z очевидно, що $x + y \neq y + z$.

Покажемо також, що $A - B > 1$. Якщо $A - B = 1$, то в кожній парі різниця між сумами дорівнює 1, але тоді для трьох сусідніх чисел x, y, z маємо, що для $x > z$ $(x + y) - (y + z) = 1$ тобто $x - z = 1$. Таким чином, у припущенні $A - B = 1$ маємо, що всі числа через одне відрізняються на 1. Але тоді це твердження хибне для числа 27 (як і для числа 1), оскільки є лише одне число, а саме 26, що задовольняє ці умови.

Покажемо, що можна розставити числа таким чином, щоб $A - B = 2$, для зручності випишемо їх у лінію, розуміючи, що останнє число є сусіднім з першим.

$-1 - 27 - 2 - 25 - 4 - 23 - 6 - 21 - 8 - 19 - 10 - 17 - 12 - 15 - 14 - 13 - 16 - 11 - 18 - 9 - 20 - 7 - 22 - 5 - 24 - 3 - 26$.

Неважко підрахувати суми сусідніх, усі вони в межах від 27 до 29, тому $A = 29, B = 27 \Rightarrow A - B = 2$.

Відповідь: 2.

7 КЛАС

I тур

1. Задача № 2 за 5 клас.

2. Задача № 4 за 5 клас.

3. Нехай $e(k)$ — кількість непарних дільників натурального числа k , а $o(k)$ — кількість його парних дільників.

Доведіть, що

$$0 < (e(1) + e(2) + \dots + e(n)) - \\ - (o(1) + o(2) + \dots + o(n)) \leq n.$$

Розв'язання. Випишемо на дошку всі дільники чисел $1, 2, \dots, n$. Нехай при цьому виявилися виписаними s_1 разів дільник 1 , s_2 разів дільник $2, \dots, s_n$ разів дільник n . Очевидно, що $n = s_1 > s_2 \geq s_3 \geq \dots \geq s_n = 1$. Побачимо, що $(e(1) + e(2) + \dots + e(n)) - (o(1) + o(2) + \dots + o(n)) = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots + (-1)^{n+1} s_n$.

Шукані нерівності доводяться тепер зовсім просто:

$$(e(1) + e(2) + \dots + e(n)) - (o(1) + o(2) + \dots + o(n)) = \\ = (s_1 - s_2) + (s_3 - s_4) + \dots \geq 0,$$

$$(e(1) + e(2) + \dots + e(n)) - (o(1) + o(2) + \dots + o(n)) = \\ = n - (s_2 - s_3) - (s_4 - s_5) - \dots \leq n,$$

бо кожна дужка невід'ємна.

4. Задача № 5 за 6 клас.

5. Задане довільне непарне натуральне число n . Чи існує таке натуральне число a , що наведені три числа є квадратами натуральних чисел $2018 + a$, $n + a$ та $2018 \cdot n + a$?

Розв'язання. Нехай $2018 + a = x^2$, $n + a = y^2$ та $2018 \cdot n + a = z^2 \Rightarrow 2018 - n = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Оскільки ліва частина — непарне число, то підберемо x, y таким чином, щоб $x - y = 1$ та $x + y = 2018 - n \Rightarrow x = \frac{1}{2}(2019 - n)$ та $y = \frac{1}{2}(2017 - n)$.

Тепер покладемо $a = y^2 - n \Rightarrow 2018 + a = x^2$. І нарешті:

$$2018n + a = 2018n + y^2 - n = \\ = 2017n + \frac{1}{4}(2017 - n)^2 = \\ = \frac{1}{4}(4 \cdot 2017n + 2017^2 - 2 \cdot 2017n + n^2) = \\ = \frac{1}{4}(2017 + n)^2,$$

що й треба було одержати.

Відповідь: так.

II тур

6. Задача № 6 за 5 клас.

7. Задача № 7 за 5 клас.

8. Всередині квадрата $ABCD$ вибрана така точка M , для якої справджується така умова $2\angle BAM = \angle ADM$. Знайдіть величину $\angle AMC$.

(Рубльов Богдан)

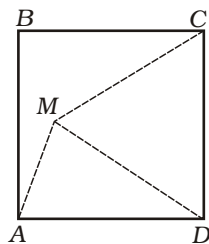


Рис. 7

Розв'язання. Позначимо $\angle BAM = x$, тоді $\angle ADM = 2x$ (рис. 7). Порахуємо інші кути:

$\angle DAM = 90^\circ - x$, тоді з суми кутів трикутника $\angle AMD = 90^\circ - x$, тобто $\triangle AMD$ — рівнобедрений, звідси $MD = AD = CD$, $\angle ADC = 90^\circ$ тому $\angle MDC = 90^\circ - 2x$. З рівності $\angle DMC = \angle DCM$ та суми кутів трикутника маємо, що $\angle DMC = \angle DCM = 45^\circ + x$. Тоді

$$\angle AMC = \angle AMD + \angle DMC = \\ = (90^\circ - x) + (45^\circ + x) = 135^\circ.$$

Відповідь: 135° .

9. Задача № 10 за 6 клас.

10. На вечірці були присутні 9 хлопців. Деякі з них під час вечірки потисли один одному руки. Петрик перепитав кожного про кількість людей, з ким він привітався за руку, і отримав 8 різних відповідей. Скільки рукостискань мав сам Петрик?

Розв'язання. Зрозуміло, що серед 8 різних відповідей можливі такі — $0, 1, \dots, 7$ або $1, 2, \dots, 8$, оскільки 0 — нікому не потиснув руку та 8 — потиснути руку кожному з присутніх одночасно неможливо. Позначимо їх для зручності відповідно до кількості рукостискань через A_1, A_2, \dots, A_8 . Петрика позначимо P .

Якщо справджується перший варіант, то A_1 — ні з ким, A_8 — з A_2, \dots, A_7 , а тому й з P .

Звідси випливає, що A_2 — тільки з A_8 і більше ні з ким, тому A_7 — з A_3, \dots, A_6, A_8 , а тому й з P .

Далі аналогічно

A_3 — тільки з A_7 та A_8 і більше ні з ким, тому A_6 — з A_4, A_5, A_7 та A_8 , а тому й з P .

A_4 — тільки з A_6, A_7 та A_8 і більше ні з ким, тому A_5 — з A_6, A_7 та A_8 , а тому й з P .

Таким чином в Петрика є 4 рукостискання.

Якщо справджується другий варіант, то A_8 — з A_1, \dots, A_7 , і з P , тому A_1 — лише з A_8 , A_7 — з A_2, \dots, A_6, A_8 , а тому й з P , A_2 — тільки з A_7 та A_8 .

A_6 — з A_3, A_4, A_5, A_7 та A_8 , а тому й з P . A_3 — тільки з A_6, A_7 та A_8 .

A_5 — з A_4, A_6, A_7 та A_8 , а тому й з P . A_4 — тільки з A_5, A_6, A_7 та A_8 .

Отже, у Петрика і при цьому варіанті є 4 рукостискання.

Відповідь: 4.

«Математика — це мова плюс роздум».

(Р. Фейнман)

«Математика — це велична споруда, створена уявленнями людини, для пізнання Всесвіту». (Ле Корбюз'є)

«Серед усіх наук, що відкривають людству шлях до пізнання законів природи, наймогутніша, найвеличніша наука — математика». (С. Ковалевська)

ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ В ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧАХ

Олег ЗЕЛЕНЯК — учитель математики та інформатики Олександрійського колегіуму, двічі Соросівський вчитель, заслужений учитель України, кандидат педагогічних наук.

Анотація. У статті розглянуто застосування властивостей кутів при розв'язуванні олімпіадних геометричних задач. Наголошується на важливості створення і дослідження динамічних моделей геометричних конфігурацій у спеціалізованому середовищі GeoGebra.

Ключові слова: геометрична конфігурація, геометричні перетворення (симетрія, гомотетія), сума кутів трикутника, зовнішній кут трикутника, вписаний і центральний кути в колі, кут між дотичною і хордою, кут із вершиною всередині кола (поза колом), лема про тризуб, транзитивність, формули зведення.

Abstract. The article considers the application of the properties of angles in solving Olympic geometric problems. Emphasizes the importance of creating and researching dynamic models of geometric configurations in a specialized environment GeoGebra.

Keywords: geometric configuration, geometric transformations (symmetry, homothety), sum of angles of a triangle, outer angle of a triangle, inscribed and central angles in a circle, angle between tangent and chord, angle with vertex inside a circle (outside a circle), lemma about a trident, transitivity, summary formulas.

Кут вивчають практично з перших уроків геометрії. У підручниках, збірниках задач, мережі Інтернет накопичено багато цікавих задач, при розв'язуванні яких застосовуються властивості кутів. Зрозуміло, що й укладачі олімпіадних завдань складають та обирають подібні задачі.

До статті відібрано **олімпіадні планіметричні задачі на доведення, які, на нашу думку, є чудовими навчальними прикладами застосування властивостей кутів.** Їх можна вивчати на гуртках, факультативних заняттях, самостійно.

Подальші кроки до олімпіадного олімпу — застосування геометричних перетворень (симетрії [1; 2], гомотетії, інверсії), потужних методів координат [6], векторів і мас, властивостей радикальної осі, кола 9 точок, орієнтованих кутів, комплексних чисел, теорем Чеви, Менелая, Фейєрбаха, Тебо та інших. Необхідно володіти спеціальними способами доведення: методами від супротивного, математичної індукції, принципом Діріхле [1] зворотнього ходу або реверсним [1, 141; 10, 216].

Наявність проектора в кабінеті робить складні конфігурації доступними на уроках в класах з профільним або поглибленим вивченням математики. У процесі пояснення радимо демонструвати не кінцевий рисунок, а заготовлені серії рисунків. Через певний період часу багатокрокові розв'язування варто повторювати. І, нарешті, необхідно створювати та досліджувати моделі конфігурацій у спеціалізованому середовищі GeoGebra та досліджувати їх у динаміці [3; 4; 5].

© Зеленьак О. П., 2020

Класифікація олімпіадних геометричних задач: 1) на доведення; 2) на обчислення; 3) на побудову; 4) інші. Найчастіше пропонуються задачі на доведення: рівностей, нерівностей, паралельності, перпендикулярності, дотику прямої до кола, дотику кіл, належності точок одній прямій (колінеарності точок), конкурентності прямих, перетину декількох кіл в одній точці тощо.

Практичні поради.

Варто пам'ятати, що:

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

90° – це

- сума половин кутів трикутника,
- сума гострих кутів прямокутного трикутника,
- кут між бісектрисами суміжних кутів,
- кут, під яким видно бічну сторону трапеції з центра вписаного в неї кола,
- вписаний кут, що спирається на діаметр кола.

180° – це

- розгорнутий кут (три точки на одній прямій),
- сума суміжних кутів,
- сума кутів трикутника,
- сума гострого і тупого кутів паралелограма,
- сума гострого і тупого кутів трапеції, що прилягають до однієї бічної сторони,
- сума протилежних кутів вписаного в коло чотирикутника.

Окремі формули зведення важливо читати й «геометрично»: синус (тангенс) гострого кута прямокутного трикутника дорівнює косинусу (котангенсу) другого гострого кута і навпаки (або якщо

це гострі кути, на які промінь, що проходить між сторонами кута, розбиває прямиий кут); синуси суміжних кутів рівні, а косинуси — протилежні (або якщо це кути, на які промінь, що проходить між сторонами кута, розбиває розгорнутий кут).

Якщо точки C і D лежать в одній півплощині (різних півплощинах) відносно прямої AB і $\angle ACB = \angle ADB$ ($\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$), то чотири точки A, B, C, D лежать на одному колі.

При розв'язуванні задач із кутами краще позначати їх не ABC, ADC , а α, β або $\angle 1, \angle 2$, а в особливо складних конфігураціях використовувати кольорові олівці та позначення кутів дугами для спрощення візуального сприйняття графічної моделі.

Задача 1. M — середина сторони AC трикутника ABC . Всередині трикутника BMC існує така точка P , що $\angle BMP = 90^\circ$, а $\angle ABC + \angle APC = 180^\circ$. Довести, що $\angle PBM + \angle CBM = \angle PCA$.

(Кіровоградська обласна олімпіада, 10 кл., 2020 р.)

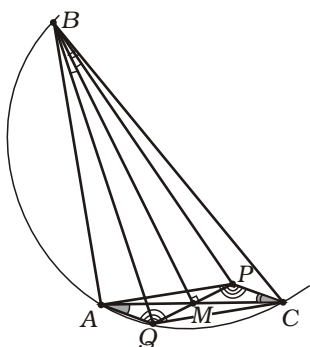
Конфігурація — динамічна. Точка P — залежна. Її положення визначається після фіксації трикутника ABC (побудова точної моделі конфігурації — окрема цікава алгоритмічна вправа [4]).

У рівності, яку потрібно довести, усі кути «незручні». Кут PBM є частиною кута CBM , а третій кут PCA — ізольований (не є кутом жодного з трикутників, що містить перші два кути).

Проаналізуємо умови $\angle BMP = 90^\circ$, $\angle ABC + \angle APC = 180^\circ$. Як їх застосувати у процесі розв'язування? 180° дорівнює сума протилежних кутів вписаного чотирикутника. Але такого чотирикутника в конфігурації немає.

1-й спосіб (центральна симетрія).

Утворимо вказаний вище чотирикутник.



При симетрії відносно точки M точка C переходить у точку A . Нехай $Q = Z_M(P)$. Тоді $QC = Z_M(PA)$, $QA = Z_M(PC)$. За властивостями симетрії $\angle APC = \angle CQA$, $\angle PCA = \angle QAC$ і $PM = QM$.

У чотирикутнику $ABCP$: $\angle ABC + \angle APC = 180^\circ$. Отже, існує описане коло, яке проходить через його вершини.

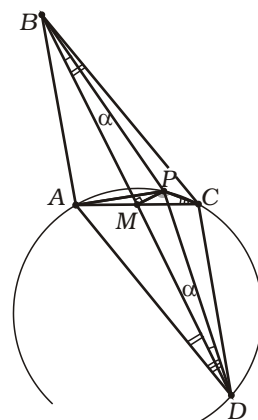
$\angle BMP = 90^\circ$. У трикутнику BMP BM — медіана і висота, тобто він є рівнобедреним. Звідси $\angle QBM = \angle PBM$.

З урахуванням заміни кутів рівними, залишається довести, що $\angle QBM + \angle CBM = \angle QAC$.

Кут QBM вже не є частиною кута CBM і сума кутів у лівій частині рівності вочевидь дорівнює куту QBC .

$\angle QBC = \angle QAC$, оскільки ці кути вписані в коло і спираються на одну й ту саму дугу QC .

2-й спосіб (подвоєння медіани).



Пригадаємо прийом подвоєння медіани BM і побудови паралелограма $ABCD$ (за назвою цього методу «приховується» центральна симетрія). Після допоміжної побудови кута ADC , APC стають протилежними кутами чотирикутника $APCD$. А оскільки $\angle B = \angle D$, то $\angle ADC + \angle APC = 180^\circ$. Таким чином, чотирикутник $APCD$ — вписаний в коло.

Кут PCA — вписаний, що спирається на дугу PA . Сполучивши точки P і D , отримаємо ще один вписаний кут PDA , що спирається на цю саму дугу. Звідси $\angle PCA = \angle PDA$.

У правій частині рівності, яка доводиться, замінимо кут PCA на PDA . Тепер зрозуміло, що потрібно вивчати кути, з яких складається кут PDA і кути-доданки у лівій частині також замінювати. Ще не використовувалась умова $\angle BMP = 90^\circ$. За нею відрізок PM — висота трикутника BPD . Окрім того, PM — його медіана за побудовою. Отже, $\triangle BPD$ — рівнобедрений.

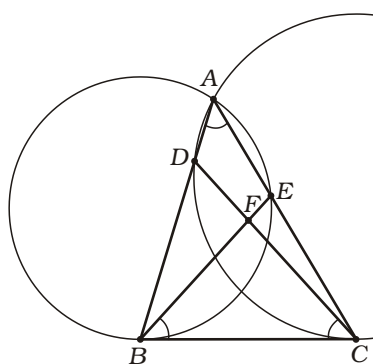
Звідси $\angle PBM = \angle PDM$.

Останній кут є частиною кута PDA , а тому залишається перевірити, що $\angle CBM = \angle ADM$. Ця рівність істинна тому, що кути — внутрішні різносторонні ($BC \parallel AD$, BD — січна).

Маємо: $\angle PDM + \angle ADM = \angle PDA$ або $\angle PBM + \angle CBM = \angle PCA$, що т. д.

Задача 2. Коло проходить через вершини A, B трикутника ABC , дотикається до сторони BC у точці E і вдруге перетинає AC у точці F . Друге коло проходить через вершини A, C , дотикається до сторони BC у точці G і вдруге перетинає AB у точці D . Відрізки BE і CD перетинаються у точці F . Довести, що трикутник BCF — рівнобедрений.

(Всеукраїнська олімпіада, 11 кл., 2011 р.)



Конфігурація — динамічна. Якщо кола рівні, то вона симетрична відносно прямої, що проходить через точки перетину кіл. У цьому випадку твердження, яке доводиться, — очевидне.

Взагалі, ця проста задача цікава тим, що містить спільний для двох кіл вписаний кут, через який вимірюються дуги різної довжини різних кіл. Отже, такі дуги мають однакові градусні міри.

З умови слідує, що пряма BC — спільна дотична. Тому $\angle CBE$ і $\angle BCD$ — це кути, які утворює ця дотична з хордами BE і CD відповідно.

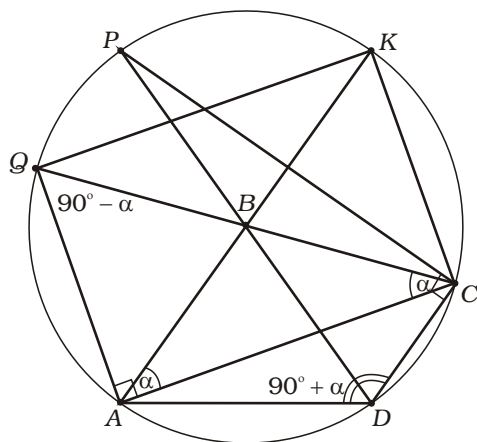
$$\angle CBF = \angle CBE = \frac{1}{2} \widehat{BE} = \angle A.$$

$$\angle BCF = \angle BCD = \frac{1}{2} \widehat{CD} = \angle A.$$

За транзитивністю $\angle CBF = \angle BCF$, і трикутник BCF — рівнобедрений, що т. д.

Задача 3. $ABCD$ — опуклий чотирикутник, в якому $AB = BC$ і $\angle CDA - \angle BAC = 90^\circ$. Відрізок BD продовжили на його довжину до точки P . Знайдіть величину кута PCD .

(Харківська обл. олімпіада, 10 кл., 2011 р.)



Нехай точка B — центр симетрії. За умовою $P = Z_B(D)$.

Побудуємо $K = Z_B(A)$, $Q = Z_B(C)$ і відрізки AQ , QK , KC , BK , BQ . Утворений чотирикутник $AQKC$ — прямокутник, ($AB = BC$ і $AK = CQ$).

Позначимо кут BAC через α . Тоді з умови задачі маємо: $\angle BCA = \alpha$, $\angle CDA = 90^\circ + \alpha$.

$$\angle AQC = 90^\circ - \alpha \text{ тому, що } \angle QAC = 90^\circ.$$

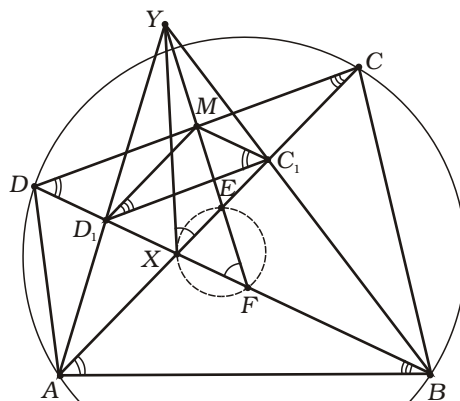
Маємо: $\angle AQC + \angle CDA = 90^\circ - \alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$. Отже, точка D лежить на описаному колі прямокутника $AQKC$ з діаметрами AK і QC .

BD — радіус цього кола, $DB = BP$, тому DP — також діаметр. За чудовою властивістю кола $\angle PCD = 90^\circ$.

Конфігурація — динамічна. Наведений вище спосіб розв'язування дає простий алгоритм побудови точної моделі: 1) Прямокутник $AQKC$; 2) Коло (B, AB) ; 3) D — довільна точка меншої дуги AC ; 4) Чотирикутник $ABCD$. Дійсно, легко довести, що вписаний кут ADC , який спирається на сторону прямокутника AC , на 90° більший за кут між цією стороною і діагоналлю AK .

Задача 4. $ABCD$ — вписаний чотирикутник, діагоналі AC і BD якого перетинаються у точці X . C_1 , D_1 та M — середини відрізків CX , DX та CD відповідно. Нехай Y — точка перетину прямих AD_1 і BC_1 , а пряма MY перетинає діагоналі AC і BD у різних точках E і F відповідно. Довести, що пряма XY є дотичною до кола, яке проходить через точки E , F та X .

(Європейська олімпіада для дівчат, 2016 р.)



Конфігурація — динамічна.

Як довести, що пряма XY є дотичною до кола, центр якого, радіус, проведений в точку дотику X , січні тощо не раціонально розглядати?

Будемо доводити, що $\angle YXE = \angle EFX$. Адже якщо пряма XY — дотична до вказаного кола, то кут YXE — це кут між дотичною і хордою XE , а кут EFX — вписаний в це коло, що спирається на хорду XE .

Вказані кути є зовнішніми для трикутників YXA , YFB , а тому запишемо рівносильну рівність для сум пар внутрішніх кутів: $\angle XYA + \angle XAY = \angle FYB + \angle FBY$ (*).

Для вписаного чотирикутника $ABCD$ маємо очевидну подібність: $\triangle ADX \sim \triangle BCX$. Тому AD_1 і BC_1 — відповідні медіани в цих трикутниках, проведені з вершин рівних кутів XAD і XBC .

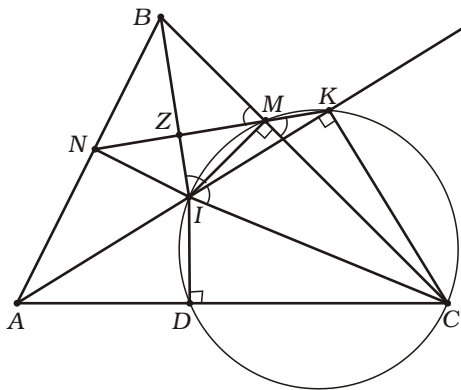
Звідси $\triangle XAD_1 \sim \triangle XBC_1$, $\angle XAD_1 = \angle XBC_1$ або $\angle XAY = \angle FBY$.

Отже, рівність (*) зведена до $\angle XYA = \angle FYB$ або $\angle XYA = \angle MYB$.

Остання рівність виконується тому, що точки X і M є відповідними в подібних трикутниках ABY і C_1D_1Y , які мають спільний кут Y . Дійсно, MC_1D_1D , MCC_1D_1 — паралелограми, в яких $\angle C_1 = \angle D$, $\angle C = \angle D_1$. За властивістю транзитивності $\angle XAB = \angle MC_1D_1$ тому, що кожен із цих кутів дорівнює куту D . Аналогічно для рівності $\angle XBA = \angle MD_1C_1$, в якій кожен із кутів дорівнює куту C .

Взагалі $\triangle ABY$ є образом трикутника C_1D_1Y при композиції перетворень — гомотетії з центром Y і коефіцієнтом $\frac{AB}{C_1D_1}$ (образ C_2D_2Y) та осьової симетрії відносно прямої YZ (бісектриси кута XYF), де Z — точка перетину AB і C_2D_2 . Точка X є образом точки M при вказаній композиції.

Задача 5. M і N — точки дотику вписаного кола до сторін BC і BA трикутника ABC , K — точка перетину бісектриси кута A з прямою MN . Довести, що $\angle AKC = 90^\circ$ [8, № 255].



Нехай I — інцентр, ID , IN , IM — радіуси, AI , BI , CI — бісектриси кутів даного трикутника. Якщо Z — середина MN , то $BZ \perp MN$.

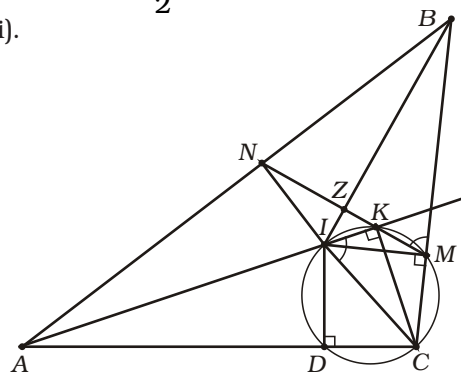
Точка M лежить між точками N і K .

$\angle IDC + \angle IMC = 180^\circ$. Отже, існує описане навколо чотирикутника $IMCD$ коло ω з діаметром IC .

Доведемо, що $K \in \omega$.

$\angle CIK = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C$ за теоремою про зовнішній кут для трикутника AIC . Оскільки півсума кутів трикутника дорівнює 90° , то $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B$.

З $\triangle BMZ$ $90^\circ - \frac{1}{2}\angle B = \angle BMZ = \angle CMK$ (вертикальні).



Маємо: $\angle CIK = \angle CMK$, тобто відрізок CK видно під одним і тим самим кутом і точки C , I , K , M лежать на колі ω .

$\angle IKC$ — вписаний в коло з діаметром IC . За чудовою властивістю кола $\angle AKC = 90^\circ$, що й треба довести.

Точка K лежить між точками M і N .

$$\angle CIK = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B = \angle BMZ = 180^\circ - \angle CMK \text{ (суміжні кути).}$$

Звідси $\angle CIK + \angle CMK = 180^\circ$.

Отже, точки C , I , K , M лежать на колі ω з діаметром IC .

$\angle AKC = \angle IKC = 90^\circ$ за чудовою властивістю кола.

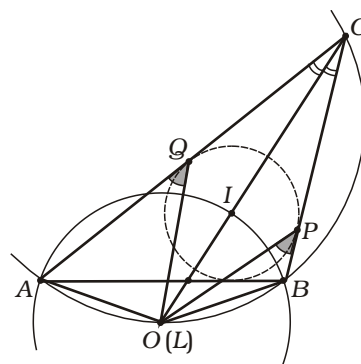
Конфігурація — динамічна. Алгоритм побудови точної моделі — тривіальний, але моделювання є корисним. Дослідження динамічної моделі не дозволить «загубити» другий випадок розміщення точки K на прямій MN .

Задача 6. У трикутник ABC вписане коло з центром I , яке дотикається до сторін AC і BC у точках Q і P відповідно. O — центр описаного кола трикутника AIB . Довести, що $\angle AQO = \angle BPO$.

(Відкрита олімпіада університету Іннополь, 10 клас, 2016 р.)

У цій і наступній задачах застосовуватиметься відома теорема про тризуб.

Конфігурація — динамічна.



Розглянемо описане коло трикутника ABC як допоміжне. Припустимо, що L — середина тієї дуги AB , яка не містить точку C . Тоді CL — бісектриса ($I \in CL$) і виконуються умови *теорему про тризуб*, за якою $LA = LI = LB$.

Отже, точка L — рівновіддалена від точок A , I , B і є центром описаного кола трикутника AIB , тобто $L \equiv O$ з урахуванням умови і того, що для кожного трикутника існує єдине описане коло.

У трикутниках CQO і CPO маємо: $\angle OCQ = \angle OCP$, $CQ = CP$ (рівні відрізки дотичних), сторона CQ — спільна. Тому вони рівні за двома сторонами і кутом між ними.

Звідси кути AQO і BPO — рівні як відповідні зовнішні кути рівних трикутників, що й треба довести.

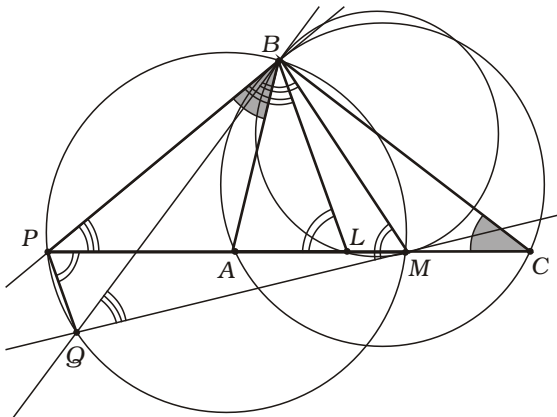
Задача 7. BL — бісектриса кута B гострокутного трикутника ABC . Дотична до описаного навколо нього кола перетинається з прямою AC у точці P . M — довільна точка відрізка LC . Дотичні до другого кола, яке проходить через точки B, L, M , побудовані у точках B і M , перетинаються у точці Q . Довести, що $BL \parallel PQ$.

(Всеросійська олімпіада, 11 кл.)

Ще раз акцентуємо увагу на широкому застосуванні властивості транзитивності [7].

Для доведення вказаної паралельності переконаємось, що $\angle BLP = \angle QPM$.

Перша транзитивність. В описаному колі трикутника ABC кут PBA — це кут між дотичною і хордою, а кут BCA — вписаний. Отже, $\angle PBA = \angle BCA$ тому, що ці кути вимірюються половиною однієї й тієї самої меншої дуги AB першого кола.



Друга транзитивність.

$$\angle PBL = \angle PBA + \angle ABL = \angle BCA + \angle LBC \quad (1).$$

Дійсно, вище доведено, що $\angle PBA = \angle BCA$, а $\angle ABL = \angle LBC$ тому, що BL — бісектриса кута B .

За теоремою про зовнішній кут для трикутника BLC : $\angle BLP = \angle BCA + \angle LBC$ (2).

$$\text{З (1) і (2): } \angle PBL = \angle BLP.$$

Маємо: трикутники PBL і QBM — рівнобедрені (QB і QM — пара рівних відрізків дотичних до другого кола). Доведемо рівність відповідних кутів цих трикутників.

Третя транзитивність.

Кожний з кутів BLP і QBM доповнює тупий кут BLM до розгорнутого. Дійсно, BLP і BLM — суміжні кути; QBM — це кут між дотичною QB і хордою BM другого кола, який вимірюється половиною дуги BM , що містить точку L , а BLM — вписаний в це коло, що вимірюється половиною дуги BM , що не містить точку L . Сума дуг дорівнює 360° , а сума їх половин 180° . Таким чином, $\angle BLP = \angle QBM$ (3).

Якщо кути при основах рівнобедрених трикутників PBL , QBM рівні, то рівні й кути при їх вершинах P і Q , тобто $\angle BQM = \angle BPL = \angle BPM$.

Точки P і Q лежать в одній півплощині відносно прямої BM і $\angle BQM = \angle BPM$. Отже, точки B ,

M , Q , P належать одному колу. Вписані в третє, допоміжне коло, кути, які спираються на одну й ту саму дугу QM , — рівні: $\angle QPM = \angle QBM$ (4).

Четверта транзитивність.

$$\text{З (3) і (4): } \angle BLP = \angle QPM.$$

Звідси $BL \parallel PQ$ за ознакою паралельності прямих, що й треба довести.

Конфігурація — динамічна, трикутник ABC — довільний. Додає динаміки невизначене положення чевіани BM , від якого також залежать довжини відрізків, величини кутів тощо.

$\angle BLC$ — тупий, оскільки кути PBL , BLP — гострі; точка Q розміщена у нижній півплощині відносно прямої AC як на рисунку. Центри трьох кіл не будуються і не фігурують у розв'язанні.

Задача 8. Точка I — центр кола, вписаного в трикутник ABC . Усередині трикутника вибрано точку P так, що $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Доведіть, що $AP \geq AI$, причому рівність досягається тоді й тільки тоді, коли точка P співпадає з точкою I .

(47 Міжнародна олімпіада з математики, 2006 р.)

Створивши рисунок ($\angle ABC > \angle ACB$), помітимо, що сума чотирьох кутів, записаних в основній умові задачі, дорівнює сумі кутів B і C трикутника. Згрупуємо доданки і врахуємо умову:

$$\begin{aligned} (\angle PBA + \angle PCA) + (\angle PBC + \angle PCB) &= \\ &= 2(\angle PBC + \angle PCB) = \angle B + \angle C. \end{aligned}$$

Далі двічі застосуємо теорему про суму кутів трикутника:

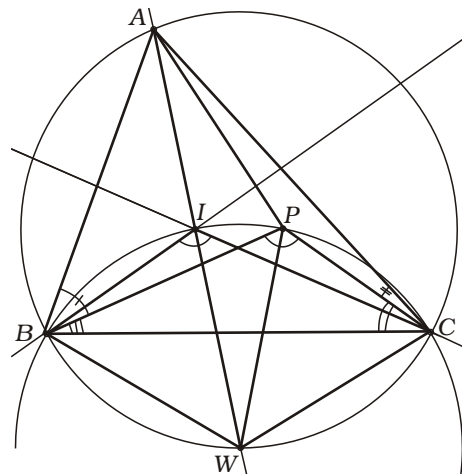
$$\begin{aligned} \angle BPC &= 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB) = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C \end{aligned}$$

(з урахуванням отриманої вище рівності).

$$\begin{aligned} \angle BIC &= 180^\circ - (\angle IBC + \angle ICB) = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C \end{aligned}$$

(BI , CI — бісектриси кутів трикутника).

За властивістю транзитивності $\angle BPC = \angle BIC$.



Точки A , I лежать в одній півплощині відносно прямої BC , а тому точки B , I , P , C належать одному колу ω .

Нехай W — друга точка перетину променя AI з описаним колом трикутника ABC . Сполучимо її з точками B і C .

За теоремою про тризуб $WI = WB = WC$. Звідси $WP = WI$ (радіуси кола ω з центром W).

За нерівністю трикутника для $\triangle APW$ маємо: $AP + WP \geq AW$, $AP + WI \geq AI + WI$, $AP \geq AI$.

Очевидно, що рівність досягається тоді й тільки тоді, коли трикутник APW вироджується у відрізок AW , тобто коли $P \equiv I$.

Конфігурація — динамічна. Точну модель легко створити після доведення належності точки P описаному колу трикутника BIC (P — довільна точка дуги BC). Оскільки пряма AI проходить через центр цього кола, то I — найближча його точка до вершини A ($AP \geq AI$) і дотична до кола у точці I перпендикулярна до прямої AW . Отже, нерівність трикутника можна не застосовувати.

Подібні розв'язання такої задачі можна знайти у [9], у розміщених у мережі Інтернет матеріалах олімпіади. Складний процес пошуку розв'язування [1, 147] і створення багатокрокового алгоритму, в якому послідовність виконання окремих кроків до того ж може змінюватись, важко формалізувати.

Можливо, логічнішим є алгоритм, який «відштовхується» від нерівності $AP \geq AI$, що доводиться. Адже питання: «Як порівняти відрізки AP і AI ?» виникає першим після вивчення умови. Для порівняння двох відрізків, можна розглядати, наприклад, діаметр і хорду одного й того ж кола, катет і гіпотенузу прямокутного трикутника тощо. Але учасник олімпіади високого рівня, звичайно, зверне увагу на інцентр, теорему про тризуб, пов'язану з ним, і, шукаючи відповідь на поставлене питання, побудує відрізки AP , AW , WP , WC , WB . Окрім того, в утвореному трикутнику APW , як і в будь-якому іншому, виконується нерівність трикутника. Необхідність доведення рівності $WP = WI$ через належність точки P колу, що проходить через точки B , I , C , виникне саме після її розгляду.

Взагалі, вважаємо, що, опрацювуючи з учнями олімпіадну задачу, варто звертати увагу на всі можливі алгоритми та ідеї розв'язування, доповнюючи їх глибоким дослідженням динамічної моделі відповідної конфігурації [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. Зеленьак О. П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal. — СПб.: ДиаСофтЮП, М.: ДМК Пресс, 2008. — 330 с.
2. Зеленьак О. П. Применения симметрии при решении планиметрических задач // Математика в школах Украины. — Харьков: ВГ Основа, 2012. — № 5 (341). — С. 21 — 28. — № 8 (344). — С. 21 — 28
3. Зеленьак О. П. Динамічна геометрична конфігурація // Математика в сучасній школі. — К.: — 2012. — № 9. — С. 22 — 28.
4. Зеленьак О. П. Моделирование планиметрических конфигураций у середовищі GeoGebra // Комп'ютер у школі та сім'ї. — К.: — 2018. — № 6. — С. 8 — 18.
5. Зеленьак О. П. Технологія застосування середовищ динамічної геометрії // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2013. — № 4. Режим доступу до журналу: <http://journal.iitta.gov.ua>
6. Зеленьак О. П. Розв'язування планиметричних задач: координатний метод // Математика в школах України. — Харків: ВГ Основа, 2018. — № 16 — 18 (568 — 570). — С. 60 — 87.
7. Зеленьак О. П. Транзитивність і подібність в планиметрії // Математика в рідній школі. — К.: — 2020. — № 2. — С. 16 — 20.
8. Шарыгин И. Ф. Геометрия 9 — 11. От учебной задачи — к творческой. Уч. пос. — М.: Дрофа, 1996. — 398 с.
9. Лейфура В. М. та ін. XLVII Міжнародна математична олімпіада // У світі математики. Національний університет ім. Т. Шевченка. Том 13, випуск 1. — К.: ТВиМС, 2007. — С. 64 — 78.
10. Ясінський В. А., Панасенко О. Б. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Геометрія. — Вінниця: ТОВ Ніланд-ЛТД, 2014. — 223 с.

Шановні читачі! Приєднуйтеся до спільноти
«Група вчителів математики України» у Facebook
<https://www.facebook.com/mathinschool/>

МАТЕМАТИЧНИЙ КВЕСТ

Юлія ГВОЗДЕЦЬКА — вчитель математики Комунального закладу «Харківський науковий ліцей-інтернат "Обдарованість"» Харківської обласної ради

Мета:

- активізувати розумову діяльність шляхом створення спеціальних умов для виконання завдань, які потребують достатньої свідомості й зрілості учнів, здатності до подолання спеціально створених перешкод;
- формувати стійкий інтерес учнів до предмета;
- активізувати сприйняття матеріалу засобами наочності.

Цей захід актуально проводити восени серед учнів 11 класів або навесні серед учнів 10 класів.

Хід заходу

Учні об'єднуються в 5 команд, обирають назву команди та капітана.

Для більш справедливого розподілу на команди можна використати прийом «Пазл»: 5 зображень розрізають на стільки частин, скільки учнів бере участь у заході, перемішують та випадковим чином роздають учням. Діти, які склали картинку, стають членами однієї команди.

Конкурс капітанів «Розминка».

На асфальті розмічені 5 локацій:

$$x \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{N};$$

$$x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N};$$

$$x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z};$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$$

$$x = k^2, k \in \mathbb{Q}.$$

Кожен капітан займає відповідну локацію, ведучий називає число і капітан повинен присісти, якщо це число з його локації.

Приклади чисел: 5 (присідає перший), 0 (присідає перший і п'ятий), $-\sqrt{9}$ (присідає другий) і т. д.

Нагородження: команда, капітан якої жодного разу не помилився, отримує 100 балів.

Кожна команда отримує мапу з відміченими пронумерованими станціями (мапу було створено за допомогою сервісу GoogleMaps). Пройдення кожної станції — 10 хвилин.

Лінгвістична локація (схожі матеріали можна знайти на сайті <https://ling.org.ua/>).

Завдання «Мова шипібо»:

Нижче у спрощеній українській транскрипції подано декілька слів мови шипібо. У транскрипціях проставлено наголос, а крапками позначено межі між складами. Переклади слів подано для довідки, і, розв'язуючи задачу, звертати на них увагу не обов'язково.

© Гвоздецька Ю. В., 2020

á.та.па — курка

бін.піш — різновид фруктів

вá.ва — папуга

ки.ра́с — брудний

ма́ш.ко — маленький

ма.на́н.ша.ви — черепаха

ó.ро.пан.па — власна назва

пі.ка́с — ненажера

ті.та.шо.ко — бабуся

пон.сі́н — лінивець

шо́н.та.ко — дівчина

ша.ва́н.ва.ран — вид риби

Розбийте на склади і проставте наголоси у таких словах мови шипібо: роно (змія), амин (вид гризунів), минціс (ніготь), апашіро (хамелеон), паранта (банан), нонті (каное), оші (худий), нишніш (вид птахів), нокоанані (зустрілися), хако́н (хороший).

Примітка. Мовою шипібо (або шипібо-кони́бо), що належить до паноанської мовної родини, розмовляють близько 26 тисяч осіб у Перу та Бразилії.



Відповідь: Приголосний розпочинає новий склад тоді й лише тоді, коли після нього йде голосний. Утім, розбиваючи слова на склади, можна міркувати й інакше. Наголос у мові шипібо падає на другий склад, якщо він закритий (закінчується на приголосну), інакше наголошеним є перший склад. Відповіді наведено нижче.

ро́.но — змія

а.ми́н — вид гризунів

á.па.ші́.ро — хамелеон

мин.ці́с — ніготь

но́н.ті — каное

па.ра́н.та — банан

о́.ші — худий

ниш.ні́ш — вид птахів

но́.ко.а.на.ні — зустрілися

ха.ко́н — хороший

Нагородження: за кожне слово, правильно розділене на склади та встановлений наголос команда отримує по 10 балів, максимальна кількість — 100 балів.

Локація «Переправа».

Необхідно розв'язати задачу на переправу та проілюструвати її розв'язання в реальності.

Завдання: Сім'я (мама, тато, син, донька, улюблений песик Кнопка та бабуся) вночі пі-

дійшла до мосту, що може витримати тільки двох людей або людину і тварину. По мосту можна рухатися лише з ліхтариком. Відомо, що тато може перейти міст за одну хвилину, мама за 3 хвилини, син за 4, донька за 6, старенька бабуся за 8 і песик за 10 хвилин, але він усього боїться, тому його треба нести на руках. Якщо по мосту рухаються двоє, час визначається за найповільнішим із них. Чи може така сім'я переправитися через міст не більше ніж за 32 хвилини.

Відповідь. Так, може. Варіант переправи наведено нижче.

- $1 + 3$ (Тато + Мама) = 3 хв;
 1 (Тато повернувся) = 1 хв;
 $10 + 8$ (Кнопка + Бабуся) = 10 хв;
 3 (Мати повернулася) = 3 хв;
 $1 + 6$ (Тато + Донька) = 6 хв;
 1 (Тато повернувся) = 1 хв;
 $1 + 4$ (Син + Тато) = 4 хв;
 1 (Тато повернувся) = 1 хв;
 $1 + 3$ (Тато + Мама) = 3 хв.

Разом: 32 хв

Примітка. Задача досить складна і якщо діти бачать задачі такого типу вперше, то краще підібрати більш легкий варіант.

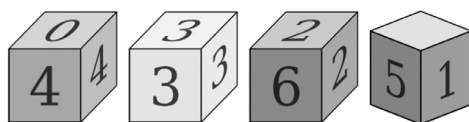


Нагородження: за правильне виконання завдання команда отримує 100 балів.

Локація «Перевір своє везіння».

Команді пропонується зіграти з керівником локації в кості, але для цієї гри пропонуються нетранзитивні кубики (інформація про нетранзитивні кубики є на Вікіпедії).

Команда отримує кубики Ефрона. Керівник локації обирає будь-який кубик, а учасники повинні, склавши таблицю, обрати той, який виграє з більшою ймовірністю.



Нагородження: якщо учасники обрали правильний кубик та виграли у керівника — 100 балів; якщо неправильно обрали кубик, але все одно виграли — 50 балів; якщо правильно обрали, але не виграли — 50 балів (можливо, трохи не справедливо, але теорія ймовірності працює саме так ☺).

Локація «Екологічна».

Команді пропонується зайнятися сортуванням сміття за 6 категоріями: папір, скло, органіка, метал, пластик, інше. Учні пропонується торбина для сміття з різними побутовими відходами: яблуко, батарейка, навушники, дезодорант-спрей в алюмінієвому балоні з пластиковою кришкою, пластикова пляшка з пластиковою кришкою, скляна пляшка з алюмінієвою кришкою, пластикова пляшка з-під побутової хімії, алюмінієва пляшка з-під напоїв, упаковка з-під чіпсів (фольга), дзеркало, замок металевий, зошит, упаковка з-під соку (тетрапак).

Правильне сортування

Папір	Зошит
Скло	Скляна пляшка (без кришки),
Органіка	Яблуко
Метал	Дезодорант-спрей в алюмінієвому балоні (без кришки), кришка від скляної пляшки, алюмінієва пляшка з-під напоїв, замок металевий
Пластик	Пластикова кришка від дезодоранту, пластикова пляшка з пластиковою кришкою (кришку зняти), пластикова пляшка з-під побутової хімії, упаковка з-під соку, поліетиленовий пакет (зав'язати вузликом)
Інше	Батарейка (сортується окремо в спеціальні бокси), навушники (сортується окремо разом з іншими електроприладами), упаковка з-під чіпсів (не підлягає переробці), дзеркало (не підлягає переробці)

За бажанням можна надати учням для ознайомлення прайс, за яким у вашому місті приймають на переробку відповідні категорії сміття.

Нагородження: за кожен предмет, який правильно відсортовано, команда отримує 10 балів, якщо про предмети з категорії «Інше» надано відповідні коментарі, то за кожен правильний коментар – ще 10 балів; усього 200 балів.

Локація «Функції».

Команда отримує декілька функцій, кожна на окремій картці. Завдання: визначити якомога більше функцій, що мають спільну властивість (однакова область визначення, множина значень, проміжок зростання або спадання функції тощо) і назвати дану властивість.

Приклади функцій:

$$y = x; y = x^2; y = x^3; y = |x|;$$

$$y = \sqrt{x}; y = \frac{1}{x}; \frac{1}{x^2}.$$

$$y = \sin x; y = \cos x; y = \operatorname{tg} x.$$

Нагородження: якщо властивість вказана правильно, за кожну функцію команда отримує 10 балів.

Фінал.

Після проходження всіх локацій кожна команда має загальну кількість балів (максимально 720). Для визначення переможця необхідно виконати останнє завдання: спростити тригонометричний вираз

$$\cos^6\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right) - \cos^6\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right).$$

Кожна команда може взяти підказки, одна підказка: від набраної кількості балів віднімається 80 балів.

Підказки.

Нехай $\arcsin\frac{3}{5} = \alpha$,	тоді $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$;
Нехай $\arcsin\frac{4}{5} = \beta$,	тоді $\sin\beta = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$;
Маємо, $\cos^6\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right) -$ $-\cos^6\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2}\beta\right) =$	$= \sin^6\left(\frac{1}{2}\alpha\right) -$ $-\sin^6\left(\frac{1}{2}\beta\right) =$
$= \left(\frac{1 - \cos\alpha}{2}\right)^3 -$ $-\left(\frac{1 - \cos\beta}{2}\right)^3 =$	$= \left(\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}\right)^3 =$
$= \frac{1}{1000} - \frac{8}{1000} =$	$= -0,007$

Та команда, яка швидше за всіх виконає завдання й отримає правильний результат — перемогла.

8. Підбиття підсумків. Нагородження переможців.

ЗАРУБІЖНИЙ ДОСВІД

ОСВІТА В ШВЕЦІЇ ТА ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

Світлана ЛУК'ЯНОВА – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М. П. Драгоманова, м. Київ;

Людмила МИХАЙЛЮК – магістрант НПУ імені М. П. Драгоманова, м. Фалькенберг, Швеція

За [3] національні програми розподілено за напрямками:

- Діти та дозвілля (*Barn- och fritidsprogrammet*).
- Будівництво (*Bygg- och anläggningsprogrammet*).
- Фінанси (*Ekonomiprogrammet*).
- Електроенергія та енергія (*El- och energi-programmet*).
- Естетична програма (*Estetiska programmet*).
- Транспортна програма (*Fordons- och transportprogrammet*).
- Бізнес та адміністрація (*Handels- och administrationsprogrammet*).
- Ремесло (*Hantverksprogrammet*).
- Готельно-туристична програма (*Hotell- och turismprogrammet*).
- Гуманістична (*Humanistiska programmet*).

© Лук'янова С. М., Михайлюк Л. П.,

- Промислова програма (*Industritekniska programmet*).
- Природні ресурси (*Naturbruksprogrammet*).
- Наукова програма (*Naturvetenskapsprogrammet*).
- Ресторан і харчування (*Restaurang- och livs-medelsprogrammet*).
- Суспільствознавство (*Samhällsvetenskapsprogrammet*).
- Технічна програма (*Teknikprogrammet*).
- Нерухомість (*VVS- och fastighetsprogrammet*).
- Програма догляду (*Vård- och omsorgsprogrammet*).

Порівняння змісту цих програм дало нам змогу зробити висновок, що обов'язковими для всієї Швеції є вивчення математики, шведської та

англійської мов, історії, природничих наук, фізичного виховання і здоров'я, цивільного права та релігієзнавства. У старшокласників навчання кожного з предметів проводиться у вигляді одного або декількох курсів по рівнях, наприклад з математики a , b , c і т.д.

Наприклад, у національній програмі «Діти та дозвілля» математику представлено курсом *Matematik 1a* у розділі *gymnasiegemensamma ämnen* (загальних предметів) та *Matematik 2a* у розділі *programfördjupning* (поглибленого навчання) по 100 кредитів кожна. За змістом це відповідає рівню базово-мінімальних знань, що передбачає використання математики тільки в побуті й ознайомлення з тим, де математика може використовуватись у професійній діяльності.

Відповідно до програми «Фінанси» ми можемо бачити, що предмет математики представлено курсами *Matematik 1b* та *Matematik 2b* у розділі *gymnasiegemensamma ämnen* (загальних предметів), *Matematik 3b* та *Matematik 4* у розділі *programfördjupning* (поглибленого навчання) по 100 кредитів кожна.

Розширений та поглиблений зміст курсу математики ознайомлює учнів з конкретними можливостями використання математики під час розв'язування різноманітних життєвих ситуацій у фінансовій сфері діяльності людини: отримання банківського кредиту, обрання найвигідніших умов депозиту, страхування, фінансування проєктів та розрахунок ризиків різноманітних банківських операцій тощо.

За технічною програмою вивчають курси *Matematik 1c*, *Matematik 2c* та *Matematik 3c* у розділі *gymnasiegemensamma ämnen* (загальних предметів), *Matematik 4*, *Matematik 5* та *Matematik – specialisering* у розділі *inriktningar* (спеціалізація) по 100 кредитів кожна. Ця програма характеризується більш високим рівнем як змісту навчального матеріалу, так і різноманітністю задач, що демонструють широке застосування математики в різних науках та професіях.

Так програма курсу *Matematik 3c* містить теми, аналогічні темам вітчизняних підручників 10 – 11 класів профільного рівня: властивості поліноміальних функцій вищих порядків; тригонометричні вирази та їх перетворення; похідна, правила диференціювання, алгебраїчний та графічний методи обчислення значення похідної функції; алгебраїчний та графічний методи для знаходження значень екстремумів, другої похідної за допомогою цифрових засобів та без них; зв'язок між графіком функції та функціями першої та другої похідної; поняття первісної та визначеного інтеграла; знаходження простих інтегралів як за допомогою цифрових інструментів, так і без них.

У курсі *Matematik 4* вивчають комплексні числа (зокрема, подання в прямокутній і полярній системах координат, дії над комплексними числами, формула Муавра); алгебраїчні та графічні методи розв'язування простих поліноміальних рівнянь; перетворення тригонометричних виразів, доведення та використання тригонометричних формул, алгебраїчні та графічні методи розв'язування тригонометричних рівнянь; різні методи доведення в математиці з прикладами з арифметики, алгебри та геометрії; алгебраїчні та графічні методи визначення інтегралів, включаючи обчислення величин та розподіл ймовірності; поняття диференціального рівняння та його властивостей.

Окрім того, курси *Matematik 3c* і *Matematik 4* пропонуються наступні теми:

- Стратегії розв'язування математичних задач, включаючи моделювання різних ситуацій як за допомогою цифрових засобів обчислення, так і без них.

- Математичні задачі, що важливі для соціального життя та використання математики в інших предметах.

- Математичні задачі, пов'язані з культурною історією математики.

Курс *Matematik 5* розпочинається з теми «Стратегії створення та інтерпретації диференціальних рівнянь як моделей реальних ситуацій» та «Використання диференціальних рівнянь у різних областях та їх розв'язок у тому числі за допомогою цифрових засобів». Далі йде розділ «Дискретна математика», також курс включає «Комплексні задачі (проблемні ситуації) в межах предмета, які поглиблюють знання з тем «Інтеграл» та «Похідна». Цікавою, на наш погляд, є тема «Можливості та обмеження математики в деяких ситуаціях, а також можливості та обмеження цифрових засобів у розв'язуванні завдань» [3].

Аналіз програм показує, що не залежно від курсу математики, що вивчається, значна увага приділяється розкриттю ролі математики у вирішенні практичних завдань у різних сферах діяльності людини.

Згідно з [7] метою вивчення математики у школах Королівства Швеція є

- формування і розвиток знань та умінь учнів щодо можливостей використання математики у повсякденному житті, а також у різних предметних областях;

- розуміння учнями змісту понять та методів математики, розробка різних стратегій щодо вирішення задач, пов'язаних із соціальними та професійними ситуаціями;

- допомога учням у розвитку вміння використовувати математику в різних контекстах

них тем у підручниках йде на основі методу доцільних задач, який у вітчизняній методиці навчання математики пов'язують із працями С. І. Шохор-Троцького.

Окрім того, на відміну від наших традицій, у шведських підручниках основна частина нового матеріалу вивчається на основі конкретно-індуктивного методу з використанням дослідницько-пошукового стилю викладу (проблемні запитання – кроки пошуку розв'язку задачі певного типу чи виведення правила виконання математичної операції).

Таким чином, процес навчання повинен сприяти розвитку в учнів вмінь формулювати та розв'язувати проблеми, оцінювати обрані стратегії, методи, моделі та отримані результати. Учні повинні мати умови для розвитку знань, можливості інтерпретувати стандартні математичні ситуації та формулювати їх, використовуючи математичні вирази.

Використання сучасних технологій є невід'ємною частиною у навчальному процесі шведської школи. Крім того, учні мають можливість розвивати знання про можливість використання цифрових інструментів та програмування при дослідженні математичних проблем, здійснювати обчислення, представляти та інтерпретувати дані.

Так, у підручнику [9] демонструють побудований графік функції $y = 0,1x^3 - 2x^2 + 8x$ за допомогою графічного калькулятора і з використанням різного масштабу на осях. Роблять висновок, що не завжди можна отримати повне уявлення про властивості функції, коли ми недоречно обираємо масштаб.

Ця проблемна задача є мотиваційною до вивчення теми «Застосування похідної до дослідження функцій». Водночас у підручниках є завдання, коли графічний калькулятор ви-

користують після розв'язування, наприклад, екстремальних задач, з метою перевірки правильності отриманого розв'язку.

У нормативних документах зазначено, що учням під час навчання математики повинна надаватися можливість розмірковувати про важливість використання математики у повсякденному житті, в інших шкільних предметах та під час історичних подій, завдяки чому вони зможуть побачити контекст та актуальність математики [3, 7].

Якщо учень після закінчення гімназії хоче вступати до закладу вищої освіти, то він заздалегідь знає комплекс предметів і рівень їх вивчення, які необхідні для вступу на ту чи іншу програму. Наприклад, щоб почати вивчати в університеті хімію, необхідно прослухати в гімназії поглиблені курси з хімії, математики та фізики [6].

Звернемо увагу на ще одну особливість вступу до закладів вищої освіти. «Для кожної програми у закладах вищої освіти щорічно оголошується той набір предметів, який необхідний для зарахування» [6]. Наприклад, на одну програму з фізики потрібні оцінки з математики саме рівнів 1 с, 2b, 3b і 4 (а на іншу – 1с, 2с, 3с), з фізики 1 і 2, з англійської 6 і і т.д. «Учень вивчає всі ці рівні послідовно. Наприклад, математику рівня **a** в першому семестрі першого року і наприкінці першого семестру здає іспит» [6].

Проте керівництво школи може прийняти рішення щодо вивчення різних рівнів предмету і за один семестр (послідовно). Тобто школа має право на перерозподіл годин між предметами в межах певного напрямку. На розподіл годин також може впливати і кількість учнів у класі. Зазвичай бувають п'ятдесяті і сто кредитні курси. Для вступу до закладу вищої освіти гімназист повинен мати курсів на 2 500 кредитів [1, 6].

Exempel Vi ritar grafen till funktionen

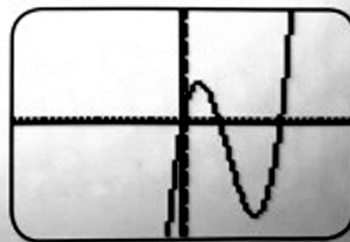
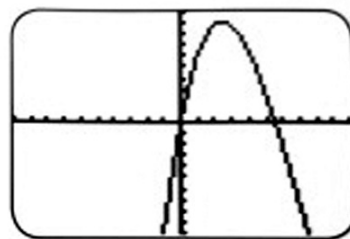
$$y = 0,1x^3 - 2x^2 + 8x$$

med grafitande räknare.

I standardfönstret ser det ut som om grafen har ett största värde för $x \approx 2,5$.

Väljer vi ett annat fönster, får grafen ett helt annat utseende.

Vi kan se att för större x -värden växer funktionen och antar större värden.



Слід зазначити, що якщо учень вчився у гімназії з технічним напрямом і раптом вирішив вивчати історію в університеті чи філософію, то, якщо він не вивчав в гімназії історію на рівні B, він не зможе цього зробити [6]. Отже, можна зробити висновок, що обираючи національну програму навчання в гімназії, учень практично обирає програму навчання в майбутньому університеті.

Підсумкова оцінка за курс, як і в школі може не збігатися з отриманою на іспиті. Під час навчання в *gymnasieskolan* існує можливість перездати курс і, відповідно іспит. Після закінчення *gymnasieskolan* учень отримує атестат з оцінками.

Gymnasiesärskolan (спеціальна середня школа) – це гімназія для молодих людей віком від 16 до 20 років, які мають порушення розвитку або набули травми мозку і які вважаються нездатними відвідувати звичайну середню школу. Після виповнення 20 років можна пройти спеціальну освіту для дорослих [3].

До наступного рівня шведської системи освіти відповідно до приведеної схеми можна віднести коледжі та університети.

В Швеції нараховується біля 60 закладів вищої освіти, в одному з них вручають найпрестижнішу нагороду тим, хто приніс найбільшу користь людству своїми досягненнями у науці – Нобелівську премію. Найстарший університет заснований 1477 році в Упсалі. Навчання в Університетах Швеції безкоштовне для громадян Швеції.

Folkhögskola – народна середня школа навчає дорослих і відкрита для всіх. Це різні курси та коледжі. По всій країні нараховують 155 державних коледжів [2].

У Швеції добре розвинута система освіти для дорослих: *yrkeshögskola* (професійно-технічний коледж) – це форма навчання для професійно-технічного навчання; *särskild utbildning för vuxna* – спеціальна освіта для дорослих, доступна для людей віком від 20 років і старше, які мають порушення розвитку або мали значну і стійку інтелектуальну недостатність; *kommunal vuxenutbildning* – муніципальне утворення для освіти дорослих в Швеції; *konst-och kulturutbildningar och utbildningar med endast tillsyn* – коледжі мистецтва та культурної освіти.

Вивчення математики в цих закладах освіти йде за спеціальними програмами у вигляді курсів за потреби і відповідно до спеціалізації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Skollag (Закон про школу) [Електронний ресурс]: Закон Швеції від 2010-06-23, nr: 2010:800. Змінено: t.o.m. SFS 2019:947 (2010:800). SFS nr: 2010:800./ Законодавство Швеції: сайт – Sverige Riksdag – Назва з екрану. – Режим доступу: https://www.riksdagen.se/sv/dokument-lagar/dokument/svenskforfattningssamling/skollag-2010800_sfs-2010-800
2. Ingela Björck. Sverige en pocketguide. Fakta, tips och råd till nya invånare [Text] /Ingela Björck, Bulle Davidsson, Jolin-Boldt, Mark Olson, Göran Rosenberg, Jasenko Selimovic, Hanna Wallensteen. – Malmö. Elanders Berlings AB, Integrationsverket, Nörrköping, 2004. –297с.
3. Державне управління дошкільної та середньої освіти Швеції Skolverket [Електронний ресурс] / Skolverket [Офіц. веб-сайт] – Назва з екрану. – Режим доступу: <https://www.skolverket.se/>
4. Sameskola. [Електронний ресурс] / Sameskola [Офіц. веб-сайт] – Назва з екрану. – Режим доступу: <http://samer.se/5599>
5. Falkenbergs kommun [Електронний ресурс] / Falkenbergs kommun [Офіц. веб-сайт] – Назва з екрану. – Режим доступу: <https://kommun.falkenberg.se/skola/gymnasieskola/elevinformationpagymnasieskolan/individuelltval>
6. Головин Я. Шведская модель образования. [Електронний ресурс]: LiveJournal: сайт – Назва з екрану. – Режим доступу: <https://golovin1970.livejournal.com/85912.html>
7. Läroplan, examensmål och gymnasie gemensamma ämnen för gymnasieskola 2011 (Навчальний план, мета та загальні предмети gymnasieskola) [Електронний ресурс]: Законодавство Швеції: сайт – Державне управління дошкільної та середньої освіти – Назва з екрану. – Режим доступу: <https://www.skolverket.se/download/18.6bfaca41169863e6a659807/1553964056811/pdf2705.pdf>
8. Lena Alfredsson Matematik 5000. Kurs 3c Blå Basåret lärobok [Text] / Lena Alfredsson, Kajsa Bråting, Patrik Erixon [та інші] – Stockholm : Tryckt i Lettland, 2014. – 416 p.
9. Lena Alfredsson, Matematik 5000. Kurs 4 Blå lärobok [Text] / Lena Alfredsson, Kajsa Bråting, Patrik Erixon [та інші] – Stockholm: Tryckt i Bosnien-Hercegovina, 2015. – 310 p.

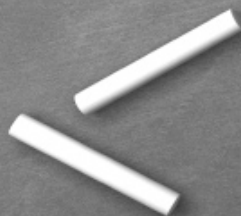
Шановні читачі! Приєднуйтеся до спільноти
«Група вчителів математики України» у Facebook
<https://www.facebook.com/mathinschool/>

Увага, передплата!

**МАТЕМАТИКА
В РІДНІЙ ШКОЛІ**
Науково-методичний журнал

Грунтовно висвітлюються питання з методики і досвіду математичної освіти, проблеми профільного навчання, друкуються завдання математичних олімпіад, сторінки історії науки

Виходить 6 разів на рік



ПЕРЕДПЛАТНИЙ ІНДЕКС 68834

Читайте в наступних номерах:

- Відбір команди України на LXI Міжнародну математичну олімпіаду
* * *
- Квадратний тричлен в олімпіадних задачах
* * *
- Сучасні напрями підвищення кваліфікації вчителів природничо-математичних предметів у післядипломній освіті Республіки Польща
* * *
- Сходинки знань: вивчаємо математику, зацікавлюємо математикою, навчаємо застосовувати набуті знання на практиці

**ДЕРЖАВНЕ
ІНФОРМАЦІЙНО-ВИРОБНИЧЕ
ПІДПРИЄМСТВО ВИДАВНИЦТВО
«ПЕДАГОГІЧНА ПРЕСА»**

В. О. директора видавництва
Костянтин КОРНІЄНКО
Головний редактор редакції журналів
Ніна БЕРІЗКО

Адреса видавництва та редакції:
02094, м. Київ, вул. Попудренка, 54
Тел.: (044) 292-83-05
E-mail: 2345255@ukr.net
журнал «Математика в рідній школі»
E-mail: pedpressa@ukr.net

Над номером працювали:
Олена ПОПОВИЧ
Ірина КОСОНОЦЬКА
Марина КОЛМАГОРОВА
Віктор ДЯЧЕНКО

Підписано до друку 13.10.2020.
Формат 60×84 1/8.
Папір офсет. Друк офсет.
Умов. друк. арк. 6,51.
Обл.-вид. арк. 7,2.
Зам. №15770

Видруковано Printstore Group
03190, м. Київ, вул. Данила Щербаківського, 4