Конечные p-группы ($p \neq 2$) с неабелевой нормой абелевых нециклических подгрупп

Друшляк М.Г.

Изучение групп по заданным свойствам подгрупп является одним из основных подходов теории групп к определению особенностей строения абстрактных групп. При выявлении некоторого существенного свойства в тех или иных конкретных группах естественно поставить вопрос о существовании других групп с таким же свойством, или даже вопрос о полном описании такого класса групп. Подобный подход к изучению групп с ограничениями для подгрупп возник в начале XX столетия.

Результативными оказались также исследования групп, в которых ограничения накладываются не только на систему подгрупп Σ, но и на нормализаторы этих подгрупп и на соответствующие Σ-нормы. Напомним, что Σ-нормой группы называется пересечение нормализаторов всех подгрупп системы Σ, то есть подгрупп с определенным теоретико-групповым свойством (при условии, что $\Sigma \neq \oslash$).

Одним из первых результатов этого направления исследований было изучение групп с ограничениями на норму $N(G)$ группы (Р.Бер [1]), на норму $N_A(G)$ максимальных абелевих подгрупп (В.Каппе [2]), на субнормальную норму $W(G)$ (Г.Виланд [3]).

В данной работе продолжается изучение групп с ограничениями на норму N_G^A абелевых нециклических подгрупп. В соответствии с [4] нормой N_G^A абелевых нециклических подгрупп называется пересечение нормализаторов всех абелевых нециклических подгрупп группы G (при условии, что система таких подгрупп группы G непуста).

В работе [4] изучались бесконечные локально конечные p-группы ($p \neq 2$), в которых норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп неабелева. Доказано, что все такие группы являются конечным расширением центральной квазициклической p-группы и совпадают с нормой N_G^A. Поэтому остановимся на изучении конечных p-групп ($p \neq 2$) с неабелевой нормой N_G^A абелевых нециклических подгрупп.

Очевидно, что подгруппа N_G^A характеристична в группе и каждая абелева нециклическая подгруппа из N_G^A нормальна в ней. Неабелевы p-группы, у которых нормальны все абелевы нециклические подгруппы, изучались в [5] и были названы $\overline{HA}_p$-группами.

Согласно [5] для произвольных локально конечных p-групп ($p \neq 2$) условие нормальности всех нециклических подгрупп эквивалентно условию нормальности одних лишь абелевых нециклических подгрупп. Неабелевы группы, в которых нормальны все нециклические подгруппы, называются $\overline{H}_p$-группами [6].

Предложение 1 (теорема 2 [5]). *Каждая $\overline{HA}_p$-группа при $p \neq 2$ является $\overline{H}_p$-группой.*

Предложение 2. (теорема 2 [6]). *Конечные $\overline{H}_p$-группы ($p \neq 2$) являются группами одного из следующих типов:*

1) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle$, где $|a| = p^n$, $|b| = |c| = p$, $[a, b] = [a, c] = 1$, $[b, c] = a^{p^{n-1}}$;

2) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $|a| = p^n$, $|b| = p^m$, $n \geq 2$, $m \geq 1$, $[a, b] = a^{p^{n-1}}$;

3) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle d\rangle$, где $|a| = |d| = 9$, $|b| = 3$, $[a, b] = 1$, $[a, d] = b$, $[b, d] = d^3 = a^{-3}$.

Локально конечные p-группы ($p \neq 2$) с неабелевой нормой N_G нециклических подгрупп изучались в [7].

Предложение 3. (теорема 2 [7]). *Конечные p-группы ($p \neq 2$) с неабелевой нормой N_G нециклических подгрупп являются группами следующих типов:*

1) G - негамильтонова $\overline{H}_p$-группа, $G = N_G$;

2) $G = (\langle x\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle$, где $|x| = p^n$, $n > 1$, $|b| = |c| = p$, $[x,b] = 1$, $[b,c] = x^{p^{n-1}}$, $[x,c] = x^{p^{n-1}\alpha}b^{\beta}$, $(\beta,p) = 1$, $N_G = (\langle x^p\rangle \times \langle b\rangle)\langle c\rangle$;

2) $G = \langle x\rangle\langle b\rangle$, где $|x| = p^k$, $|b| = p^m$, $m \geq 2$, $k \geq m + r$, $Z(G) = \langle x^{p^{r+1}}\rangle \times \langle b^{p^{r+1}}\rangle$, $1 \leq r \leq m - 1$, $[x,b] = x^{p^{k-r-1}s}b^{p^{m-1}t}$, $(s,p) = 1$, $N_G = \langle x^{p^r}\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$.

Учитывая, что класс нециклических групп шире, чем класс абелевых нециклических групп, имеет место включение $N_G \subseteq N_G^A$. Если нециклическая норма N_G неабелева, то норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп также неабелева и, согласно предложению 1, является $\overline{H}_p$-группой, которая содержит N_G. Если G является негамильтоновой $\overline{H}_p$-группой, то $G = N_G$ и, очевидно, $N_G^A = N_G$. Если G является группой типа 2) предложения 3, то $[G : N_G] = p$ и G не является $\overline{H}_p$-группой. Тогда $N_G^A = N_G$. Если G является группой типа 3) предложения 3, нециклическая норма N_G которой является группой типа 2) предложения 2 и содержится в норме N_G^A, которая в свою очередь является $\overline{H}_p$-группой, то $N_G^A = N_G$. Таким образом, $N_G^A = N_G$ при условии неабелевости нецикличной нормы N_G.

Если $G = N_G^A$, то группа G является $\overline{HA}_p$-группой и в силу того, что условие нормальности всех абелевых нециклических подгрупп эквивалентно условию нормальности всех нециклических подгрупп, $N_G^A = N_G$. Если $G \neq N_G^A$ и норма N_G^A неабелева, то возможны два варианта: $G \neq N_G^A = N_G$ или $G \neq N_G^A$ и $N_G^A \neq N_G$. Но тогда во втором случае нециклическая норма N_G является абелевой, а норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп является $\overline{HA}_p$-группой.

Лемма 4. *Если группа G содержит абелеву нециклическую подгруппу M, которая удовлетворяет условию $M \cap N_G^A = E$, то подгруппа N_G^A дедекиндова.*

Доказательство. Подгруппа M нормальна в группе $G_1 = M \cdot N_G^A$ и

$$[M, N_G^A] \subseteq M \cap N_G^A = E.$$

Поэтому для произвольного элемента $x \in N_G^A$ имеем $\langle M, x\rangle \cap N_G^A = \langle x\rangle \lhd N_G^A$. Отсюда норма N_G^A дедекиндова и лемма доказана.

Следствие 5. *Если норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп группы G недедекиндова, то каждая абелева нециклическая подгруппа B имеет с нормой N_G^A неединичное пересечение.*

Лемма 6. *Если Z - центральная нециклическая подгруппа группы G, то в фактор-группе $G/Z = \overline{G}$ имеет место включение $\overline{N_G^A} \subseteq N(\overline{G})$, где $N(\overline{G})$- норма группы $\overline{G}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что группа $\overline{N_G^A}$ нормализует произвольную циклическую подгруппу группы $\overline{G} = G/Z$.

Пусть $\overline{x} \in \overline{G}$. Тогда полный прообраз $\langle\overline{x}\rangle$ подгруппы в группе G является абелевой нециклической подгруппой $\langle x, Z\rangle$. Поэтому $N_G^A \subseteq N_G(\langle x, Z\rangle)$. В фактор-группе $\overline{G}$ имеем $\overline{N_G^A} \subseteq \overline{N_G(\langle x, Z\rangle)} \subseteq N_{\overline{G}}(\langle\overline{x}\rangle)$. Значит, $\overline{N_G^A} \subseteq N(\overline{G})$. Лемма доказана.

Обозначим $\varpi(G)$ нижний слой группы G - подгруппу, порожденную всеми элементами простого порядка группы G.

Лемма 7. *Если локально конечная p-группа G имеет недедекиндову норму N_G^A абелевых нециклических подгрупп, нижний слой $\varpi(N_G^A)$ нециклический и $\varpi(N_G^A) \subseteq Z(G)$, то $\varpi(G) = \varpi(N_G^A)$.*

Доказательство. Поскольку $\varpi(N_G^A)$ - центральная нециклическая подгруппа, то норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп является группой типа 2) предложения 2 и $\varpi(N_G^A) = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$, где $|a_1| = |a_2| = p$. Допустим, что существует элемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = p$. Тогда $\langle a_1, x\rangle \lhd G_1 = \langle x\rangle N_G^A$, $\langle a_2, x\rangle \lhd G_1$ как абелевы нециклические подгруппы и $\langle a_1, x\rangle \cap \langle a_2, x\rangle = \langle x\rangle \lhd G_1$. Следовательно $x \in Z(G_1)$ и $G_1 = N_{G_1}^A$. Таким образом, G_1

является $\overline{HA}_p$-группой и содержит элементарную абелевую подгруппу порядка p^3, что противоречит лемме 4 [6]. Значит, $\varpi(G) = \varpi(N_G^A)$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть G - конечная p-группа, которая содержит центральный элемент a простого порядка, норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп группы G неабелева и центр $Z(N_G^A)$ циклический. Тогда элемент a содержится в каждой циклической подгруппе составного порядка группы G.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $x \in G$, $|x| = p^k$, $k > 1$. Пусть $\langle x\rangle \cap \langle a\rangle = E$ и $a \in Z(G)$. Тогда $[x, a] = 1$ и $\langle x, a\rangle \lhd G_1 = \langle x\rangle N_G^A$. Поскольку $\langle x^p\rangle \lhd G_1$, $\langle x^{p^{k-1}}\rangle \lhd G_1$, то $x^{p^{k-1}} \in Z(G_1)$.

Если $x^{p^{k-1}} \notin N_G^A$, то для произвольного элемента $y \in N_G^A$ имеем $(\langle y\rangle \times \langle x^{p^{k-1}}\rangle) \lhd G_1$,

$$\langle y\rangle = (\langle y\rangle \times \langle x^{p^{k-1}}\rangle) \cap N_G^A \lhd N_G^A.$$

Следовательно, норма N_G^A дедекиндова, что невозможно. Тогда $x^{p^{k-1}} \in N_G^A$, $x^{p^{k-1}} \in Z(N_G^A)$, $a \in Z(N_G^A)$ и $Z(N_G^A)$ нециклический, что невозможно.

Значит, $\langle x\rangle \cap \langle a\rangle \neq E$ и $a \in \langle x\rangle$. Лемма доказана.

Теорема 9. *Конечные p-группы ($p \neq 2$) с неабелевой нормой N_G^A абелевых нециклических подгрупп являются группами следующих типов:*

1) G - неабелева $\overline{HA}_p$-группа, $G = N_G^A = N_G$;

2) $G = (\langle x\rangle \times \langle b\rangle) \rtimes \langle c\rangle$, где $|x| = p^n$, $n > 1$, $|b| = |c| = p$, $[x, b] = 1$, $[b, c] = x^{p^{n-1}}$, $[x, c] = x^{p^{n-1}\alpha} b^{\beta}$, $(\beta, p) = 1$, $N_G^A = N_G = (\langle x^p\rangle \times \langle b\rangle)\langle c\rangle$;

2) $G = \langle x\rangle\langle b\rangle$, где $|x| = p^k$, $|b| = p^m$, $m \geq 2$, $k \geq m + r$, $Z(G) = \langle x^{p^{r+1}}\rangle \times \langle b^{p^{r+1}}\rangle$, $1 \leq r \leq m - 1$, $[x, b] = x^{p^{k-r-1}s} b^{p^{m-1}t}$, $(s, p) = 1$, $N_G^A = N_G = \langle x^{p^r}\rangle \rtimes \langle b\rangle$.

Доказательство. Если G является неабелевой $\overline{HA}_p$-группой, то $G = N_G^A$ и G является группой типа 1) теоремы 9.

Пусть G не является $\overline{HA}_p$-группой и имеет неабелеву норму N_G^A, тогда $G \neq N_G^A$ и норма N_G^A является группой одного из типов предложения 2. Рассмотрим каждый из указанных для N_G^A случаев отдельно и продолжим доказательство теоремы в следующих леммах.

Лемма 10. *Если конечная p-группа ($p \neq 2$) G имеет неабелеву норму N_G^A абелевых нециклических подгрупп, $N_G^A = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle d\rangle$, где $|a| = |d| = 9$, $|b| = 3$, $[a, b] = 1$, $[a, d] = b$, $[b, d] = d^3 = a^{-3}$, то в группе G нормальны все абелевы нециклические подгруппы и $G = N_G^A$.*

Доказательство. Подгруппа $Z(N_G^A) = \langle a^3\rangle \lhd G$ как характеристическая в нормальной подгруппе N_G^A. Значит, $\langle a^3\rangle \subseteq Z(G)$.

Обозначим $C = C_G(\varpi(N_G^A))$, где $\varpi(N_G^A) = \langle a^3, b\rangle \lhd G$. Тогда $[G : C] = 3$, причем $d \notin C$ и $G = \langle d\rangle C$, $d^3 \in C$.

Пусть существует элемент $x \in C \setminus N_G^A$, $|x| = 3$. Тогда $\langle x, b\rangle \lhd G_1 = \langle x\rangle N_G^A$, $\langle x, b\rangle \cap N_G^A = \langle b\rangle \lhd G_1$, что противоречит строению нормы N_G^A. Следовательно, $\varpi(C) = \varpi(N_G^A)$.

Допустим, что существует $x \in C \setminus N_G^A$, $|x| = 9$, тогда $x^3 \in N_G^A$. Тогда в группе $G_2 = \langle x\rangle N_G^A$ подгруппа $\langle x, b\rangle = \langle x\rangle \times \langle b\rangle$ нормальна и $\varpi(N_G^A) \subseteq \langle x, b\rangle$. Поскольку $\langle x, b\rangle \lhd G_2$ и фактор-группа $G_2/\langle x, b\rangle$ абелева, то $G_2' \subseteq \langle a^3, b\rangle$. Учитывая, что каждая абелева нециклическая подгруппа группы G_2 содержит нижний слой $\varpi(G_2) = \langle a^3, b\rangle$, G_2 является $\overline{HA}_3$-группой, что невозможно.

Пусть существует элемент $x \in C \setminus N_G^A$, $|x| = 27$. Тогда $x^3 \in N_G^A$. Подгруппа $\langle x, b\rangle = \langle x\rangle \times \langle b\rangle \lhd G_3 = \langle x\rangle N_G^A$ и поскольку $x^3 \in C \cap N_G^A$, то не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\langle x^3\rangle = \langle a\rangle$. Тогда $\langle x^3\rangle \lhd G$ и $\langle a\rangle \lhd G$, что противоречит строению нормы N_G^A. Значит, все элементы централизатора C принадлежат норме N_G^A, $C \subseteq N_G^A$ и $G = \langle d\rangle C = \langle d\rangle(C \cap N_G^A) = N_G^A$.

Таким образом, в группе G нормальны все абелевы нециклические подгруппы и $G = N_G^A$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если конечная p-группа ($p \neq 2$) имеет неабелеву норму N_G^A абелевых нециклических подгрупп, $N_G^A = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle$, где $|a| = p^n$, $|b| = |c| = p$, $[a,b] = [a,c] = 1$, $[b,c] = a^{p^{n-1}}$, то группа G является группой типа 2) теоремы 9.*

Доказательство. Пусть существует элемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = p$. Поскольку подгруппа $\langle a^{p^{n-1}}\rangle$ характеристическая в нормальной подгруппе N_G^A, то $\langle a^{p^{n-1}}\rangle \subseteq Z(G)$. Тогда $\langle a^{p^{n-1}}, x\rangle \triangleleft G_1 = \langle x\rangle N_G^A$. Обозначим $C_{G_1}(\langle a^{p^{n-1}}, x\rangle) = C$, $C \triangleleft G_1$ и $[G_1 : C] \leq p$. Тогда для некоторого элемента $y \in \varpi(N_G^A) \setminus \langle a^{p^{n-1}}\rangle$ имеем $[y,x] = 1$. Значит, $\langle y,x\rangle \triangleleft G_1$ и $\langle y,x\rangle \cap N_G^A = \langle y\rangle \triangleleft N_G^A$, что противоречит строению нормы N_G^A, так как подгруппы простого порядка из $\varpi(N_G^A) \setminus \langle a^{p^{n-1}}\rangle$ не являются нормальными в норме N_G^A. Таким образом, $\varpi(G) = \varpi(N_G^A) = \langle b,c\rangle$.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству леммы 5 [7], проведенному для нормы N_G^A абелевих нециклических подгрупп.

Получаем, что $G = \langle x\rangle N_G^A = (\langle x\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle$, $x^p \in N_G^A$, $N_G^A = (\langle x^p\rangle \times \langle b\rangle)\langle c\rangle$ и G является группой типа 2) теоремы 9. Лемма доказана.

Лемма 12. *Если конечная p-группа ($p \neq 2$) имеет неабелеву норму N_G^A абелевых нециклических подгрупп, $N_G^A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $|a| = p^n$, $|b| = p^m$, $n \geq 2$, $m \geq 1$, $[a,b] = a^{p^{n-1}}$, то группа G является группой типа 3) теоремы 9.*

Доказательство. 1. Рассмотрим случай, когда $\varpi(N_G^A) \subseteq Z(G)$. Каждая нециклическая подгруппа, в том числе и абелева нециклическая, содержит нижний слой $\varpi(N_G^A)$. Для любого элемента x произвольной нециклической подгруппы подгруппа $\langle x, \varpi(N_G^A)\rangle$ будет абелевой нециклической. Следовательно, каждая нециклическая подгруппа покрывается абелевыми нециклическими подгруппами. Тогда $N_G^A = N_G$.

2. Если $\varpi(N_G^A) \not\subset Z(G)$, то $a^{p^{n-1}} \in Z(G)$, $b^{p^{m-1}} \notin Z(G)$. Обозначим $C = C_G(\varpi(N_G^A))$. Тогда $\varpi(N_G^A) \triangleleft G$ как характеристическая в нормальной подгруппе N_G^A и $C \triangleleft G$, $[G : C] = p$, $G = \langle y\rangle C$ и $y^p \in G$.

2.1. Если $m = 1$, то $G = \langle a\rangle C$, $a^p \in C$.

По лемме 4 [6] подгруппа C не содержит элементарной абелевой подгруппы порядка p^3 и группа $\varpi(N_G^A)$ содержит все элементы простого порядка своего централизатора C. Поскольку элемент $a^{p^{n-1}}$ принадлежит каждой циклической подгруппе составного порядка, то по лемме 3 [6] фактор-группа $C/\langle b\rangle$ циклическая. Значит, подгруппа C абелева и содержит циклическую подгруппу индекса p. По теореме 12.5.1 [8], учитывая, что подгруппа C нециклическая и $p \neq 2$, имеем $C = \langle x\rangle \times \langle b\rangle$, $|x| = p^k$, $k > 1$.

Поскольку $[x,a] \in N_G^A \cap C = \langle a^p, b\rangle$, положим $[x,a] = a^{\alpha p}b^{\beta}$. Тогда в силу того, что $Z(N_G^A) = \langle a^p\rangle$, $a^p \in C$ и C - абелева, имеем, что $a^p \in Z(G)$. Следовательно, $[x,a^p] = a^{\alpha p^2}b^{\beta p} = a^{\alpha p^2} = 1$, отсюда $\alpha p^2 \equiv 0 (mod p^n)$, $\alpha \equiv 0 (mod p^{n-2})$ и $\alpha = p^{n-2}\alpha_1$. Значит,

$$[x,a] = (a^{p^{n-2}\alpha_1})^p b^{\beta} = a^{p^{n-1}\alpha_1} b^{\beta} \in \varpi(N_G^A)$$

и $G' \subseteq \varpi(N_G^A)$.

Если $\varpi(G) = \varpi(N_G^A)$, то каждая абелева нециклическая подгруппа группы G содержит $G' = \varpi(N_G^A)$, значит, каждая такая подгруппа нормальна в G и G является $\overline{HA}_p$-группой. Тогда $G = N_G^A$, что невозможно ввиду допущения.

Если $\varpi(G) \supset \varpi(N_G^A)$, то существует такой элемент $y \in G \setminus \varpi(N_G^A)$, что $|y| = p$. По лемме 4 [6] подгруппа C не содержит элементарной абелевой подгруппы порядка p^3, значит, $y \notin C$ и $G = C \leftthreetimes \langle y\rangle = (\langle x\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle y\rangle$, $[x,y] = a^{p^{n-1}l}b^m$. Поскольку $G \neq N_G^A$, то $(m,p) = 1$ и G является группой типа 2) предложения 3, что противоречит строению нормы N_G^A. Таким образом, $G = N_G^A$.

2.2. Если $m > 1$, то $G = \langle y \rangle C$, $y^p \in C$ и $y \notin N_G^A$.

Рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle y \rangle N_G^A$. Если $|y| = p$, то $\langle y \rangle \cap N_G^A = E$. Поскольку $a^{p^{n-1}} \in Z(G)$, то $\langle y, a^{p^{n-1}} \rangle \triangleleft G_1$ и

$$[y, N_G^A] \subseteq \langle y, a^{p^{n-1}} \rangle \cap N_G^A = \langle a^{p^{n-1}} \rangle,$$

$G_1' \subset Z(G)$ и G_1 регулярна. Тогда $[b, y] = a^{p^{n-1}\alpha}$, $[b^p, y] = 1$, что невозможно ввиду выбора элемента y. Значит, $|y| > p$ и $\varpi(G) = \varpi(N_G^A)$.

Поскольку $N_G^A \subseteq C$ и $\varpi(G) = \varpi(N_G^A)$, а также, учитывая, что абелевыми нециклическими подгруппами централизатора C исчерпываются все абелевы нециклические подгруппы группы G, то $N_C^A = N_G^A \cap C = N_G^A$. Поскольку $\varpi(N_C^A) = \varpi(N_G^A) \subseteq Z(C)$, то по доказанному выше $N_C^A = N_C$, где N_C норма нециклических подгрупп централизатора C. Тогда для централизатора C возможны следующие варианты:

1) $C = N_G^A$;

2) $C = \langle x \rangle \langle b \rangle$, где $|x| = p^k$, $|b| = p^m$, $m \geq 2$, $k \geq m + r$, $1 \leq r \leq m - 1$, $[x, b] = x^{p^{k-r-1}s} b^{p^{m-1}t}$, $(s, p) = 1$, $N_C^A = N_C = \langle x^{p^r} \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$.

2.2.1. Если $C = N_G^A$, то $y^p \in N_G^A$, $|y| = p^k > p$. Тогда $|G/N_G^A| = p$, $|\langle y \rangle N_G^A| = p$ и фактор-группа G/N_G^A циклическая с образующим элементом yN_G^A. Значит $G = \langle y \rangle N_G^A = \langle y, b \rangle$. Обозначим неабелеву подгруппу $H = \langle y, b^{p^{m-1}} \rangle$. Если подгруппа H является N_G^A-допустимой, то, учитывая доказательство леммы 8 [7], $N_G^A = N_G$. Если подгруппа H не является N_G^A-допустимой, то предположим, что $N_G^A \neq N_G$. Тогда $[H, N_G^A] \not\subset H$ и существует элемент $d \in N_G^A$ такой, что $[y, d] \notin H$, но $\langle [y^p, d] \rangle \subset \langle [y, d] \rangle \subset N_G^A \setminus H$.

Поскольку $y^p \in N_G^A$, то $[y^p, d] = a^{\alpha p^{m-1}}$. Коммутант группы $\langle y, d \rangle$ содержит коммутант подгруппы $\langle y^p, d \rangle$. Но тогда $a^{\alpha p^{m-1}} \notin H$, что невозможно. Значит, $N_G^A = N_G$.

2.2.2. Рассмотрим случай $C = \langle x \rangle \langle b \rangle$, где $|x| = p^k$, $|b| = p^m$, $m \geq 2$, $k \geq m + r$, $1 \leq r \leq m - 1$, $[x, b] = x^{p^{k-r-1}s} b^{p^{m-1}t}$, $(s, p) = 1$, $N_C^A = N_C = \langle x^{p^r} \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$.

Фактор-группа G/C циклическая и $|G/C| = p$, фактор-группа C/N_G^A также циклическая и $|C/N_G^A| \leq p^{m-1}$, тогда $|G/N_G^A| \leq p^m$. Докажем, что фактор-группа G/N_G^A циклическая. Для этого достаточно показать, что фактор-группа G/N_G^A содержит только одну подгруппу простого порядка. Допустим, что фактор-группа G/N_G^A содержит элементарную абелеву подгруппу порядка p^2. Поскольку $G = \langle y \rangle C = \langle y \rangle (\langle x \rangle \langle b \rangle)$, то $\overline{G} = G/N_G^A = \langle \overline{y} \rangle \langle \overline{x} \rangle$, причем $|\overline{y}| = p$, $|\overline{x}| = p^r$. Тогда $y^p \in N_G^A$, $x^{p^r} \in N_G^A$, где элементы x и y прообразы элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ соответственно.

Рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle y \rangle N_G^A$, $|G/N_G^A| = p$ и фактор-группа G/N_G^A циклическая с образующим элементом $\langle y \rangle N_G^A$. Значит $G_1 = \langle y, b \rangle$. Используя размышления предыдущего случая 2.2.1, получаем, что $N_{G_1}^A = N_{G_1}$.

Поскольку $N_G^A \subseteq N_{G1}^A$, $N_G^A \subseteq N_C^A$ и $G_1 \cap C = N_G^A$, то $N_G^A = N_{G_1}^A \cap N_C^A$. Аналогично $N_G = N_{G_1} \cap N_C$. Но тогда

$$N_G^A = N_{G_1}^A \cap N_C^A = N_{G_1} \cap N_C = N_G$$

и G является группой типа 3) предложения 3, что противоречит допущению.

Значит, фактор-группа G/N_G^A циклическая с образующим элементом $\langle y \rangle N_G^A$ и $|G/N_G^A| \leq p^m$. Используя размышления случая 2.2.1, снова получаем, что $N_G^A = N_G$ и группа является группой типа 3) теоремы 9. Лемма доказана.

Следствие 13. *Конечные p-группы ($p \neq 2$) с неабелевой нормой N_G^A абелевых нециклических подгрупп являются циклическим расширением нормы N_G^A.*

Учитывая теорему 1 [4], получим следующее утверждение.

Теорема 14. *Если норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп локально конечной p-группы ($p \neq 2$) G неабелева, то $N_G^A = N_G$.*

Следствие 15. *Если норма N_G нециклических подгрупп локально конечной p-группы ($p \neq 2$) G абелева, то норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп также абелева.*

Следующие примеры показывают, что в случае абелевой нормы N_G^A абелевых нециклических подгрупп нормы N_G^A и N_G могут не совпадать.

Пример 1. $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle) \times ((\langle x\rangle \times \langle y\rangle) \leftthreetimes \langle z\rangle)$, где $|a| = |b| = |c| = |x| = |y| = |c| = p$, $[a,b] = [a,c] = [x,y] = [x,z] = 1$, $[b,c] = a$, $[y,z] = x$. В такой группе нормы N_G^A, N_G абелевы и совпадают с центром $Z(G)$:

$$N_G^A = N_G = Z(G) = \langle a\rangle \times \langle x\rangle.$$

Пример 2. $G = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \times \langle c\rangle$, где $|a| = p^2$, $|b| = |c| = p$, $[a,b] = a^p$, $Z(G) = \langle a^p\rangle \times \langle c\rangle$. В группе G нормы N_G^A, N_G абелевы и совпадают, но отличны от центра $Z(G)$:

$$N_G^A = N_G = Z(G) \times \langle b\rangle.$$

Пример 3. $G = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, где $|a| = p^4$, $|b| = p^2$, $|x| = p$, $[a,b] = a^{p^2}$, $[a,x] = b^p$, $[b,x] = 1$, $Z(G) = \langle a^{p^2}\rangle$. В группе G нормы N_G^A, N_G абелевы и не совпадают:

$$N_G^A = \langle a^{p^2}, b^p, x\rangle,\ N_G = \langle a^{p^2}, b^p\rangle.$$

Литература

[1] Baer R. Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe // Comp. Math. - 1934. -1.- S. 254 - 283.

[2] Kappe W. Die A-Norm einer Gruppe//Ill. J. Math. - 1961. - 5, №2. - S. 187 -197.

[3] Wielandt H. Uber der Normalisator der Subnormalen Untergruppen // Mat. Z. - 1958. - 69, №5. - S. 463-465.

[4] Лукашова Т.Д. Про норму абелевих нециклічних підгруп нескінченних локально скінченних p-груп // Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки. - 2004. - №3. - С. 35-39.

[5] Лиман Ф.М. p-групи, всі абелеві нециклічні підгрупи яких інваріантні // ДАН УРСР. - 1968. - №8. - С. 696-699.

[6] Лиман Ф.М. Групи з інваріантними нециклічними підгрупами // ДАН УРСР. - 1967. - №12. - С. 1073-1075.

[7] Лукашова Т.Д. Локально скінченні p-групи ($p \neq 2$) з неабелевою нормою нециклічних підгруп // Вісник Київського університету, серія фіз-мат. науки. -2001.- №1.

[8] Холл М. Теория групп. - М.: Изд. иност. лит-ры, 1962. - 448с.

Сумский государственный педагогический
университет имени А.С. Макаренко 40002,
Сумы, Украина