Максим Бездрабко
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, м. Суми
max_well_house@mail.ru
Науковий керівник – Т.Д. Лукашова

ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ МОВОЮ АЛГЕБРИ

Відомо, що кожна елементарна геометрична фігура визначається (з точністю до положення) довжинами деяких відрізків. Наприклад, коло визначається радіусом, кут – значенням косинуса тощо. Тому будь-яка задача на побудову зводиться до задачі побудови з деякої множини чисел (заданих довжин відрізків) шуканої множини чисел шляхом скінченного числа елементарних побудов циркулем та лінійкою. Зрозуміло, що циркулем та лінійкою можна побудувати суму, різницю, добуток та частку двох чи кількох відрізків, а також відрізок довжини $\sqrt{ab}$, що є середнім пропорційним довжин a і b заданих відрізків.

Якщо задана деяка множина чисел (довжин відрізків), то всі інші числа можна розбити на два класи: числа, які можна побудувати на основі заданих (до них належать і задані числа) і числа, які неможливо побудувати, виходячи з заданих.

Перехід від довжин відрізків (точок площини) до чисел дозволяє перевести геометричну задачу на побудову на алгебраїчну мову. При цьому розв'язність задачі на побудову зводиться до аналізу степеня розширення кінцевого числового поля (якому належать шукані числа) до вихідного числового поля.

Нехай P – числове поле, Δ – розширення поля Pі $\alpha\in\Delta$. Мінімальне поле $P(\alpha)$, що містить P та елемент α , називається *простим розширенням* поля P, а α – *примітивним елементом* цього розширення. Якщо при цьому α є коренем деякого многочлена додатного степеня з коефіцієнтами з поля P, то $P(\alpha)$ називається простим *алгебраїчним розширенням* поля P.

З курсу теорії полів добре відомо, що будь-яке просте алгебраїчне розширення поля P є скінченним, а його степінь $[\Delta :P]$ збігається зі степенем незвідного многочлена з кільця $P[x]$, коренем якого є число α. Іншими словами, степінь розширення поля Δ над полем P – це розмірність лінійного простору Δ над полем P.

Оскільки мінімальним числовим полем є поле раціональних чисел, то будь-яке раціональне число завжди можна побудувати циркулем і лінійкою. Неважко довести, що виходячи з поля P, за допомогою однієї лише лінійки не можна побудувати жодного нового числа, а число,побудоване одноразовим застосуванням циркуля належить полю P або міститься у деякому квадратичному розширенні поля P.

Має місце й обернене твердження.

Теорема 1. *Якщо Δ – дійсне квадратичне розширення поля $P\subset R$, то кожне число поля Δ можна побудувати циркулем і лінійкою, виходячи з поля P.*

Теорема 2 (Критерій побудовності числа циркулем та лінійкою) *Дійсне число α тоді і тільки тоді можна побудувати циркулем і лінійкою, виходячи з поля $P\subset R$, коли існує скінченний ланцюг полів*

$$P = \Delta_0 \subset \Delta_1 \subset ... \subset \Delta_{k-1} \subset \Delta_k = \Delta$$

у якому $[\Delta_{i+1}: \Delta_i] = 2$, $(i=0, 1, ..., k-1)$, $\alpha\in\Delta$.

Іншими словами, число можна побудувати циркулем та лінійкою, якщо степінь відповідного розширення основного поля P (ним можна вважати поле раціональних чисел $\mathbb{Q}$) дорівнює $2^m, m \in N$. [3, с. 186]

Розглянемо тепер найбільш відомі задачі на побудову.

Однією з них є задача про *подвоєння куба*, що полягає у побудові куба, об'єм якого вдвічі більший за об'єм даного куба. Ця задача відома як «Дельфійська проблема». Нехай довжина ребра вихідного куба дорівнює 1, а шуканого – x. Тоді об'єми вихідного й шуканого кубів дорівнюють відповідно 1 та x^3, і задача зводиться до розв'язання рівняння:

$$f(x) = x^3 - 2 = 0.$$

Над полем $\mathbb{Q}$ многочлен $f(x)$ має корінь $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Оскільки $f(x)$ не має раціональних коренів,він незвідний над полем $\mathbb{Q}$. Отже, задача зводиться до побудови кореня$\alpha = \sqrt[3]{2}$, що згідно з критерієм неможливо зробити циркулем та лінійкою. [1]

Строге доведення неможливості подвоєння куба циркулем і лінійкою було знайдене лише в 1837 році після того, як близько 23-х століть тривали спроби розв'язати цю проблему. Це доведення дав Л.Ванцель, який встановив нерозв'язність в квадратних радикалах незвідного кубічного рівняння.

Інша відома задача на побудову – «задача про квадратуру круга» – полягає у побудові квадрата, рівновеликого даному кругу. Якщо прийняти радіус даного круга за одиницю, то його площа дорівнює π. Отже, квадратура круга зводиться до побудови квадрата з стороною $\sqrt{\pi}$. Інакше кажучи, питання про можливість розв'язати проблему квадратури круга циркулем і лінійкою — це питання про побудовність числа $\sqrt{\pi}$ виходячи з поля раціональних чисел. Отже вся проблема зводиться до дослідження природи числа $\sqrt{\pi}$. Відомо, що $\sqrt{\pi}$ – трансцендентне число, тобто воно не може бути коренем жодного алгебраїчного рівняння з раціональними коефіцієнтами. Це і означає, що воно не може бути побудоване циркулем і лінійкою, тобтоза-дача квадратури круга не може бути розв'язана циркулем і лінійкою. Факт трансцендентності числа π був встановлений лише в 1882 році німецьким математиком Ліндеманом. Цим завершився багатовіковий період спроб розв'язати проблему квадратури круга, а також численні дослідження арифметичної природи числа π. [3, с. 91]

Третьою відомою задачею на побудову є задача про трисекцію кута, що полягає у поділі циркулем та лінійкою довільного кута на три рівні частини. Нехай дано кут α, який треба розділити на три рівні частини. Позначимо величину шуканого кута через φ. Тоді $\alpha = 3\varphi$. Як відомо:

$$\cos\alpha = \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$

Можна вважати, що косинус кута α відомий. Нехай$\cos\alpha = \frac{b}{2}$. Знайдемо $\cos\varphi = \frac{x}{2}$:

$$\frac{b}{2} = 4\left(\frac{x}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{2}\right).$$

Після перетворень будемо мати рівняння:

$$f(x) = x^3 - 3x - b.$$

Можна вказати нескінченну множину раціональних значень b, при яких многочлен третього степеня $f(x) = x^3 - 3x - b$ буде незвідним над полем раціональних чисел. Наприклад, для $b = 1$ (в цьому випадку $\alpha = \frac{\pi}{3}$), рівняння не буде мати раціональних коренів; таким чином многочлен $f(x)$ при $b = 1$ незвідний в $\mathbb{Q}$. Отже, задача про трисекцію кута в загальному вигляді не може бути розв'язана за допомогою циркуля та лінійки. [4, с. 420]

Розглянуті задачі на побудову неможливо розв'язати за допомогою циркуля та лінійки, але існує велика кількість допоміжних фігур та інструментів, за допомогою яких вони розв'язні.

Тепер розглянемо «задачу про поділ кола на n рівних частин» або «задачу про побудову правильногоn-кутника, вписаного в коло». Ця задача пов'язана з можливістю поділу кола наnрівних частин і зводиться до побудови розв'язків рівняння $x^n - 1 = 0$.

Теорема 3 (Гаусса-Ванцеля). *Коло тоді і тільки тоді можна розділити на n рівних частин за допомогою циркуля та лінійки, коли*

$$n = 2^{\omega} q_1 q_2 \dots q_S,$$

де ω - ціле невід'ємне число, а q_i – прості числа виду $2^k + 1$ (числа Ферма).

Побудова правильного 17-кутника була безпосередньо здійснена самим Гауссом, але вперше опублікована К.Ф. фон Пфейдерером у 1802 р. У бібліотеці Геттінгенського університету зберігається рукопис, який є підсумком 10-річної праці О. Гермеса та містить метод побудови правильного 65537-кутника. Ці задачі є прикладом розв'язування геометричних задач за допомогою алгебраїчних рівнянь [1].

Список використаних джерел

1. Теорія Галуа / Э. Артин. – М.: МЦНМО, 2004.
2. Про можливе і неможливе в геометрії циркуля та лінійки / В. Н. Костарчук, Б. І. Хацет // Радянська школа – 1962. –128 с.
3. Елементи теорії груп, кілець і полів: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів / Ф.М. Лиман, Т.Д. Лукашова. – Суми: Редакційно-видавничий відділ СДПУ. – 2012. – 208 с.
4. Высшая Алгебра / Л.Я. Окунев. – М.: Государственное Издательство Технико-Теоретической Литературы, 1949. – 432 с.

Анотація. Бездрабко М. Геометричні задачі на побудову мовою алгебри. *У статті розглянуті геометричні задачі на побудову з точки зору алгебри та сформульовано критерій побудовності числа циркулем та лінійкою. Наведено приклади історично відомих геометричних задач.*

Ключові слова: *задачі на побудову, трисекція кута, квадратура круга, подвоєння куба.*

Аннотация. Бездрабко М. Геометрические задачи на построение на языке алгебры. *В статье рассмотрены геометрические задачи на построение с точки зрения алгебры и сформулирован критерий возможности построения числа циркулем и линейкой. Приведены примеры исторически известных геометрических задач.*

Ключевые слова: *задачи на построение, трисекция угла, квадратура круга, удвоения куба.*

Abstract. Bezdrabko M. Geometric problems on construction in the language of algebra. *In the article geometrical problems on construction from the point of view of algebra are considered and formulated the criterion for the construction of the number of compasses and rulers. Examples of historically known geometric problems are given.*

Keywords: *problems for construction, angle trisection, squaring the circle, doubling of a cube.*